Stratégies Gagnantes

Bien que personne ne sache comment faire pour gagner, on sait de façon certaine qu'il existe une stratégie gagnante pour les blancs, quelle que soit la taille du plateau. Si la phrase précédente peut paraître paradoxale, c'est parce que le raisonnement qui conduit à l'existence de cette stratégie gagnante est un raisonnement par l'absurde, qui n'est pas constructif. La partie la plus élégante du raisonnement, qu'on appelle le « vol de stratégie », est due au mathématicien John Nash. John Nash a ré-inventé le jeu de Hex, indépendamment de Piet Hein et quelques années après lui, comme le cadre idéal où appliquer ce type de raisonnement. L'argument du vol de stratégie permet de montrer que les noirs ne peuvent pas avoir de stratégie gagnante. Comme nous allons le voir, il repose fondamentalement sur le fait qu'à Hex, un pion n'est jamais handicapant pour celui qui l'a joué [1].

Supposons donc qu'il existe une stratégie gagnante pour les noirs. Cette stratégie gagnante peut être assimilée à un programme informatique qui gagne infailliblement lorsqu'il joue en second. Imaginons que je me sois procuré ce logiciel, que nous fassions une partie, vous et moi, et que je joue avec les blancs. J'aimerais m'aider du logiciel pour gagner, mais il ne sait jouer qu'avec les noirs ; comment faire ? L'idée est de faire jouer le logiciel à ma place, en lui faisant croire que j'ai les noirs. En pratique, je commence par échanger en deux coups de pinceau les couleurs blanches et noires sur les côtés du plateau de jeu (ça ne devrait pas vous déranger, le plateau étant symétrique). Je place ensuite mon premier pion n'importe où, et vous jouez à votre tour un pion noir. Je reproduis dans le logiciel votre premier coup, mais avec un pion blanc. L'ordinateur répond un coup pour les noirs, et je place sur le plateau un pion blanc sur la case correspondante. La partie se poursuit de cette façon, la situation sur le plateau étant reproduite à tout moment à l'écran avec une inversion des couleurs, et un pion en moins (celui que j'ai joué au tout début). Il peut arriver que le logiciel me demande justement de jouer sur la case occupée par mon premier pion, dont il ignore l'existence : dans ce cas, je place un nouveau pion sur n'importe quelle case libre du plateau. Au bout d'un certain temps mon logiciel finit par annoncer qu'il a gagné (vous vous souvenez, il gagne toujours) : sur le plateau affiché à l'écran, je vois une chaîne de pions noirs qui relie les deux côtés noirs. Sur le vrai plateau, je vois la même configuration avec les couleurs inversées, et un pion blanc en plus quelque part. Il y a donc une chaîne de pions blancs qui relie les deux côtés blancs : j'ai gagné.

Autrement dit, à l'aide d'un logiciel gagnant immanquablement avec les noirs, on pourrait fabriquer un autre logiciel qui gagnerait immanquablement avec les blancs. Ceci est bien sûr impossible : si l'on faisait jouer ces deux programmes l'un contre l'autre, tous deux devraient gagner. Nous avons montré par l'absurde qu'*il n'existe pas de stratégie gagnante pour les noirs*.

Peut-on vraiment en déduire que les blancs en ont une ? Oui, essentiellement parce qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle. L'impossibilité d'une partie nulle est presque évidente : comment les noirs peuvent-ils barrer le chemin aux blancs autrement qu'en formant une chaîne continue de pions reliant les côtés noirs ? Voici un argument (un peu) plus précis. Une partie nulle ne pourrait arriver qu'avec un plateau dont toutes les cases sont occupées par des pions, comme sur cet exemple.

Il s’agit donc de montrer que lorsque toutes les cases sont occupées, il y a forcément un chemin de pions blancs reliant les deux côtés blancs ou un chemin de pions noirs reliant les deux côtés noirs. Pour voir ceci, on considère l’ensemble B des cases de pions blancs reliés au côté blanc en haut à gauche par un chemin de pions blancs (les mathématiciens parleraient d’une « composante connexe » de l’ensemble des pions blancs). Si l’un des pions de B touche l’autre côté blanc, les blancs ont gagné. Sinon, l’ensemble B est bordé par un chemin de pions noirs reliant les deux côtés noirs, et les noirs ont gagné. Nous avons ainsi démontré qu’il n’y a pas de partie nulle à Hex, et on peut en déduire qu’une stratégie gagnante doit exister pour l’un ou l’autre des deux joueurs. L’argument du vol de stratégie a montré qu’il n’en existe pas pour les noirs, on conclut que *les blancs possèdent une stratégie gagnante*.

Lorsque la taille du plateau est supérieure à 9x9, on ne sait presque rien dire de cette stratégie gagnante des blancs. En raffinant l’argument du vol de stratégie, Anatole Beck a montré qu’aucune stratégie gagnante des blancs ne commence par la case A1 située à l’angle aigu du jeu [2]. Le raisonnement est très élégant mais l’information est d’une bien maigre utilité pratique !

En l’absence de partie nulle, l’un ou l’autre des deux joueurs a une stratégie gagnante. Cette affirmation paraît probablement très raisonnable au lecteur, ou peut-être pas : les lecteurs ne sont pas tous identiques ! En tout cas, on peut l'étayer en donnant quelques détails : c’est l’objet de notre deuxième bloc dépliant.