Maxime Cordier
mcordier@enssat.fr

Module :
Probabilités et statistiques

Promotion :
FISA IAI 2

Devoir maison 2 « Loi des grands nombres et marche aléatoire »

1 Loi des grands nombres

1.a Partie 1

Nous avons choisi de générer des nombres aléatoires pour une loi discrète uniforme et pour une loi continue exponentielle. La figure 1 ci-dessous regroupe des représentations graphiques de génération de nombre aléatoire pour la loi discrète uniforme. Ces nombres ont été créés à l'aide d'une fonction génératrice congruencielle linéaire.

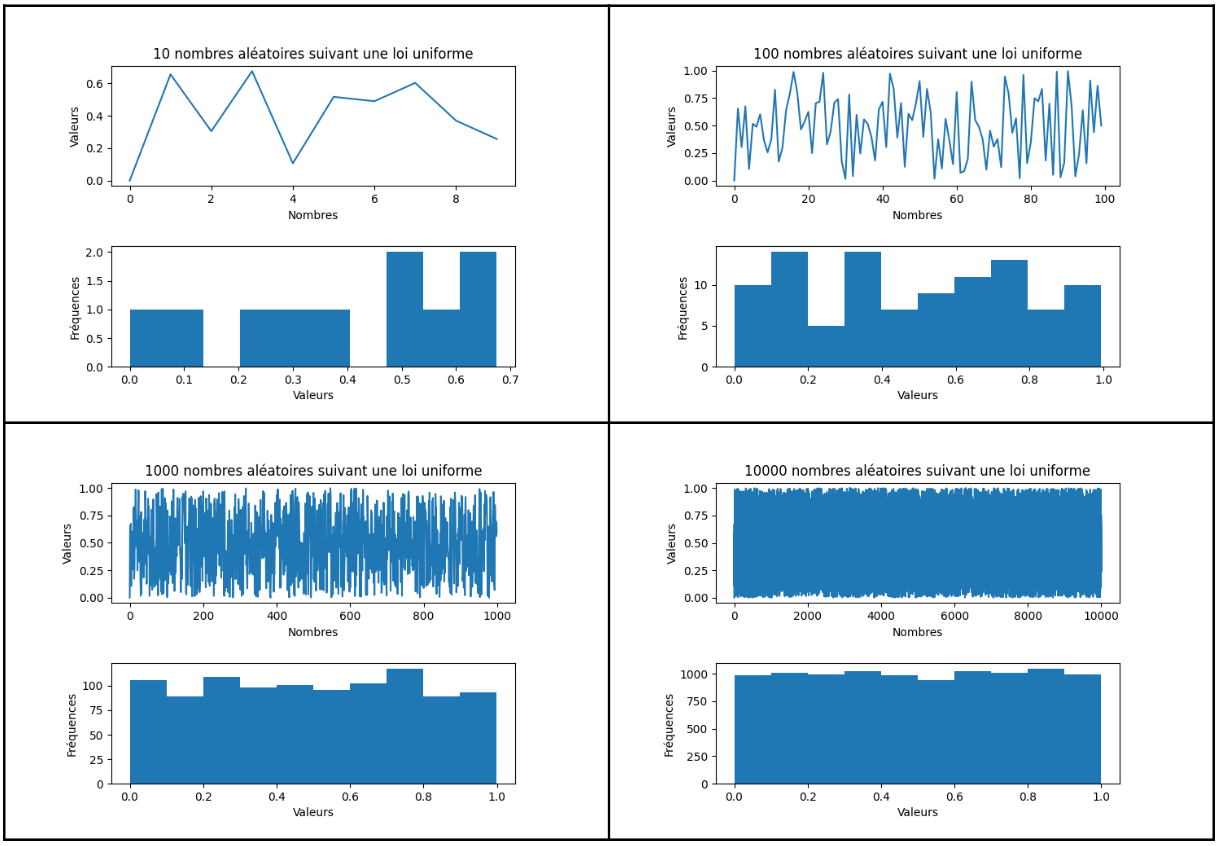

Figure 1: Génération de N nombres aléatoires suivant une loi uniforme, pour plusieurs valeurs de N.

On réalise maintenant le test du χ^2 pour la loi uniforme. Pour cela, on prend en compte les nombres X_i générés via notre fonction génératrice congruencielle linéaire et les nombres Y_i générés à l'aide de la bibliothèque random de python. La distance entre ces deux méthodes de générations se mesure par la variable aléatoire D². On a :

$$\mathrm{D}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - Y_i)^2}{Y_i}$$

On compare ensuite cette valeur à la valeur critique de la loi du χ^2 à N-1 degrés de liberté.

Exemple : Pour 10 nombres on s'interresse à la valeur critique de la loi du χ^2 à un degre de 9. Si D² est inférieur à cette valeur critique, alors on accepte l'hypothèse que les 10 nombres générés suivent une loi uniforme. Sinon, on rejette cette hypothèse.

Ensuite, la figure 2 ci-dessous regroupe des représentations graphiques de généréation de nombre aléatoire pour la loi continue exponentielle. Ces nombres ont été créés à l'aide d'une fonction génératrice congruencielle linéaire et de la fonction inverse de la fonction de répartition de la loi exponentielle ayant pour paramètre λ.

Cette fonction inverse a pour équation : $F^{-1}(x) = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda}$

Pour la génération des nombres aléatoires suivant une loi exponentielle, nous avons choisi de prendre $\lambda = 3$.

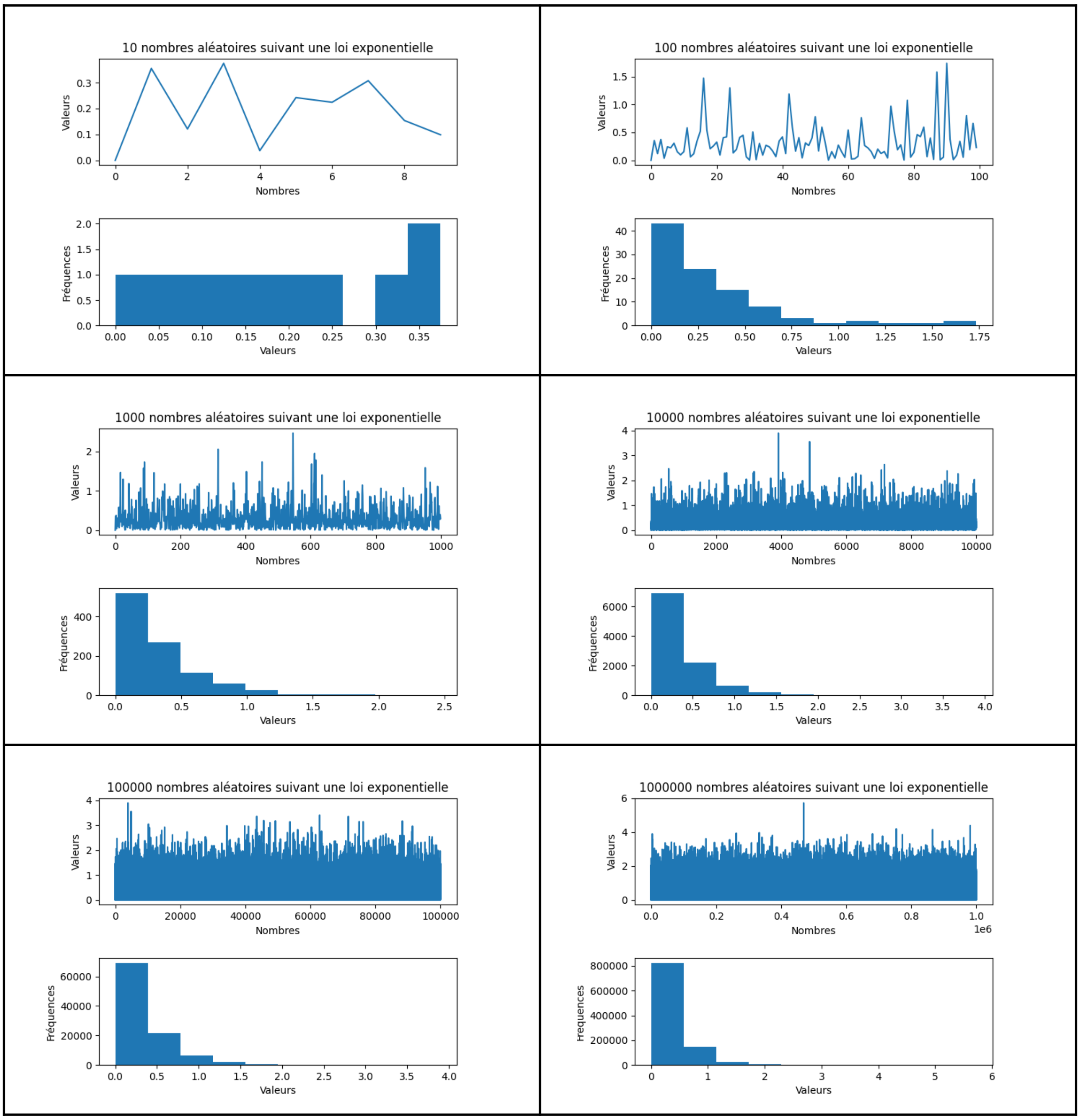

Figure 2: Génération de N nombres aléatoires suivant une loi exponentielle, pour plusieurs valeurs de N.

Nous réalisons également un test du χ^2 pour la loi exponentielle. Il s'agit de la même méthode que pour la loi uniforme.

Pour conclure, nous avons remarqué que les nombres générés à l'aide du générateur congruenciel linéaire suivent restent constamment les mêmes. Exécuter une nouvelle fois le code ne change rien. Cela est du au fait que le générateur congruenciel linéaire génère certes, des nombres aléatoire, mais toujours avec le même calcul et les mêmes paramètres. Les nombres générés sont donc tout le temps les mêmes. Ce n'est pas le cas avec les fonctions de la bibliothèque random. En effet, ces fonctions utilisent des paramètres différents à chaque exécution. Les nombres générés sont donc différents à chaque exécution.

1.b Partie 2

Rappel : Soit N variables aléatoires X_i indépendantes de même loi. La moyenne empirique $\overline{X_N}$ est définie par : $\overline{X_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$

On note l'**espérance** de $\overline{X_N}$: $E\left(\overline{X_N}\right)$. On a :

$E\left(\overline{X_N}\right) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_i)$

Or les X_i sont indépendantes et suivent la même loi, donc $E(X_i) = E(X_1)$ pour tout i. On a donc :

$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_1) = \frac{1}{N} N E(X_1) = E(X_1)$

Ainsi $E\left(\overline{X_N}\right) = E(X_1)$.

On note l'**écart-type** de $\overline{X_N}$: $\sigma\left(\overline{X_N}\right)$. Par ailleur, nous savons que l'écart-type vaut la racine carré de la variance. Déterminons premièrement la variance de $\overline{X_N}$. On note $V\left(\overline{X_N}\right)$ cette variance. On a :

$V\left(\overline{X_N}\right) = V\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} V(X_i)$

Or les X_i sont indépendantes et suivent la même loi, donc $V(X_i) = V(X_1)$ pour tout i. On a donc :

$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} V(X_i) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} V(X_1) = \frac{1}{N^2} N V(X_1) = \frac{V(X_1)}{N}$

Ainsi $V\left(\overline{X_N}\right) = \frac{V(X_1)}{N}$.

Pour conclure, $\sigma\left(\overline{X_N}\right) = \sqrt{\frac{V(X_1)}{N}}$.

La figure 3 ci-dessous regroupe des représentations graphiques de la moyenne empirique pour plusieurs nombres de variables aléatoires.

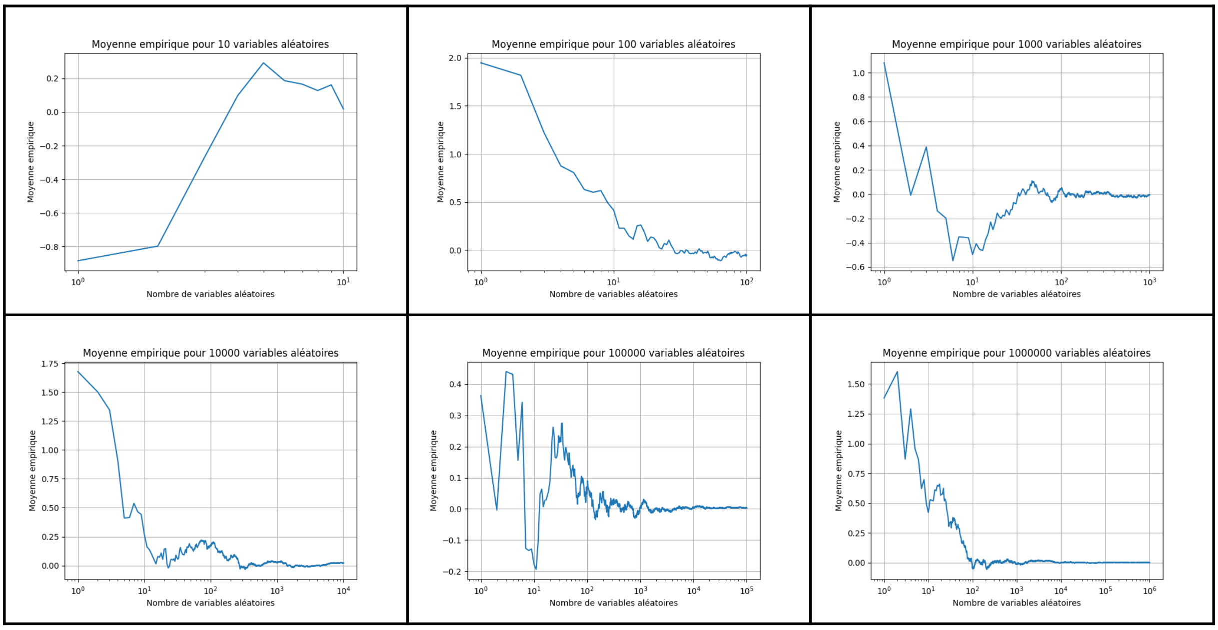

Figure 3: Moyenne empirique pour N variables aléatoires.

Il semblerai que la limite vers l'infini de la moyenne soit égale à 0.

Pour chaque N, nous avons également calculer l'espérance et l'écart type :

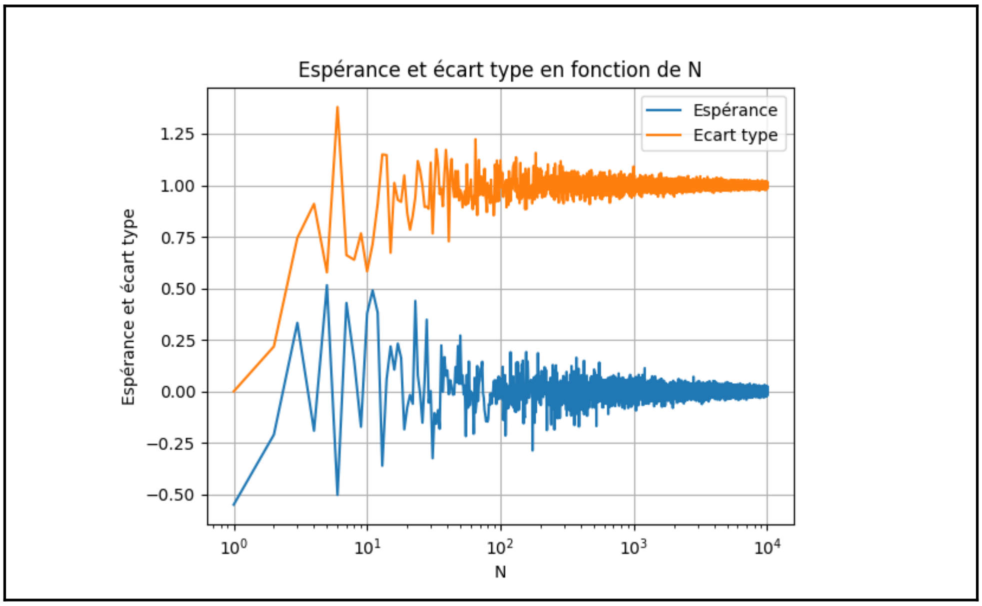

Figure 4: Espérance et écart-type en fonction de N variables aléatoires.

Nous pouvons remarquer que l'écart type tand vers 1. L'espérance tand par contre vers 0 comme la moyenne empirique. On viens de mettre en évidence la loi des grands nombres qui est : plus le nombre d'observations augmente, plus la moyenne empirique se rapproche de l'espérance théorique de la variable aléatoire.

2 Marche aléatoire

2.a Partie 1

2.b Partie 2