Maxime Cordier
mcordier@enssat.fr

Module :
Probabilités et statistiques

Promotion :
FISA IAI 2

Devoir maison 2 « Loi des grands nombres et marche aléatoire »

1 Loi des grands nombres

1.a Partie 1

Nous avons choisi de générer des nombres aléatoires pour une loi discrète uniforme et pour une loi continue exponentielle. La figure 1 ci-dessous regroupe des représentations graphiques de généréation de nombre aléatoire pour la loi discrète uniforme. Ces nombres ont été créés à l'aide d'une fonction génératrice congruencielle linéaire.

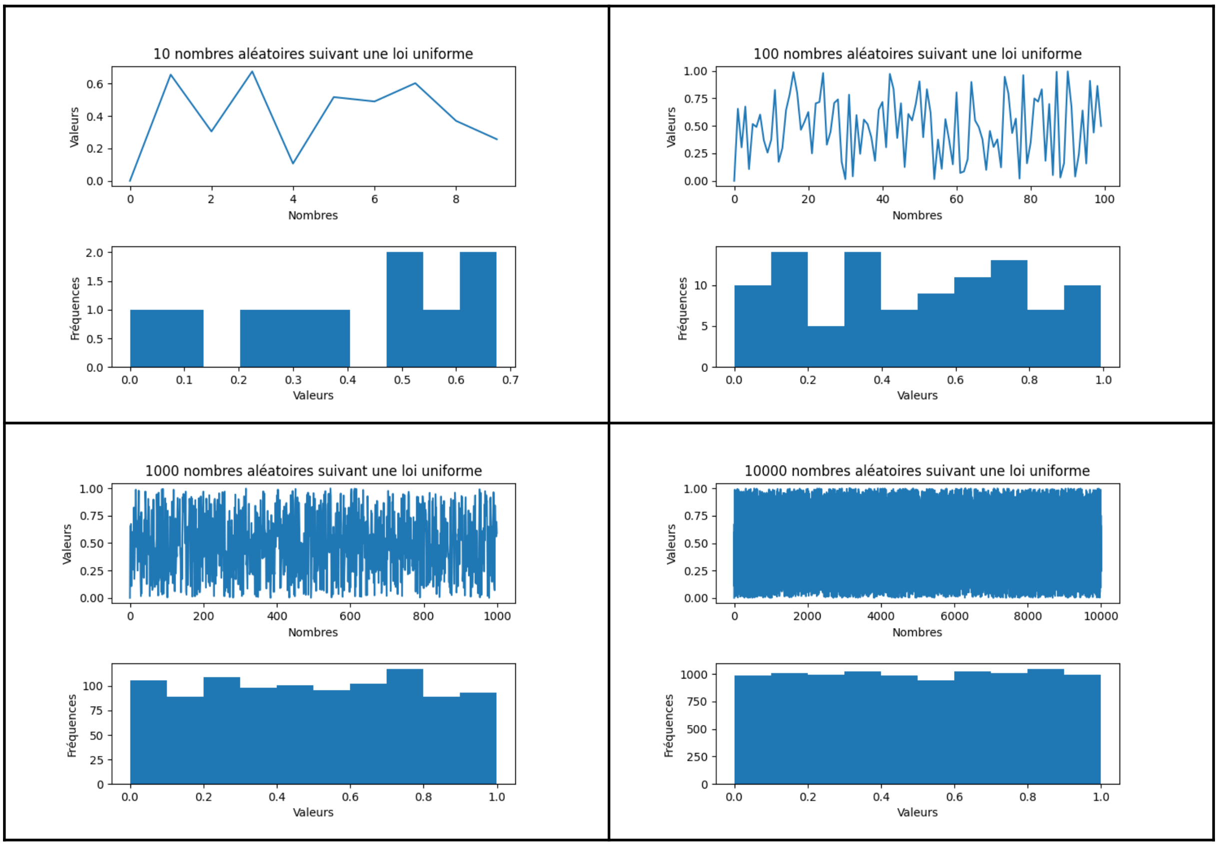

Figure 1: Génération de N nombres aléatoires suivant une loi uniforme, pour plusieurs valeurs de N.

Ensuite, la figure 2 ci-dessous regroupe des représentations graphiques de généréation de nombre aléatoire pour la loi continue exponentielle. Ces nombres ont été créés à l'aide d'une fonction génératrice congruencielle linéaire et de la fonction inverse de la fonction de répartition de la loi exponentielle ayant pour paramètre λ.

Cette fonction inverse a pour équation : $F^{-1}(x) = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda}$

Pour la génération des nombres aléatoires suivant une loi exponentielle, nous avons choisi de prendre $\lambda = 3$.

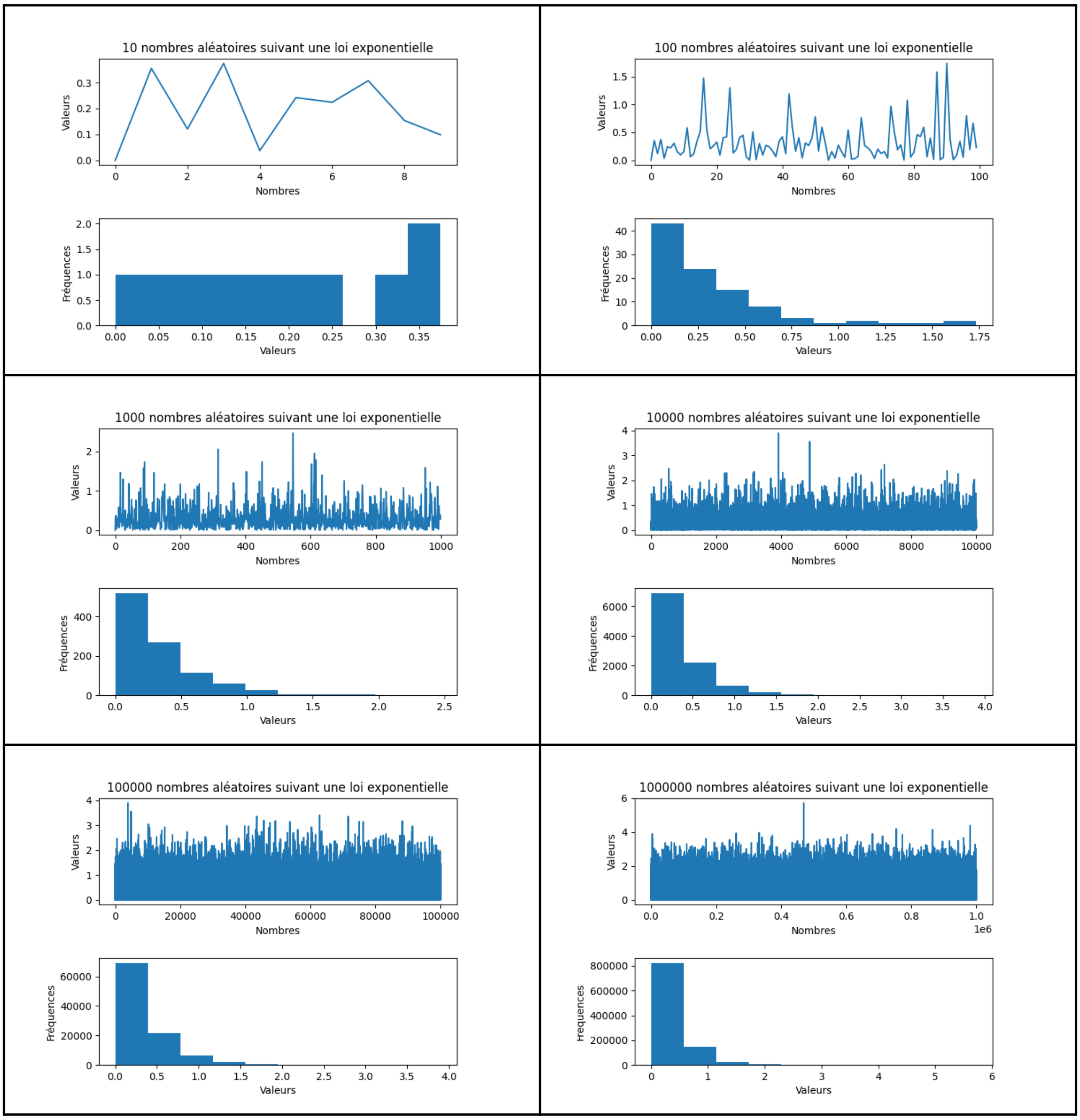

Figure 2: Génération de N nombres aléatoires suivant une loi exponentielle, pour plusieurs valeurs de N.

1.b Partie 2

Rappel : Soit N variables aléatoires X_i indépendantes de même loi. La moyenne empirique $\overline{X_N}$ est définie par : $\overline{X_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$

On note l'**espérance** de $\overline{X_N}$: $E(\overline{X_N})$. On a :

$E(\overline{X_N}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_i)$

Or les X_i sont indépendantes et suivent la même loi, donc $E(X_i) = E(X_1)$ pour tout i. On a donc :

$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_1) = \frac{1}{N} N E(X_1) = E(X_1)$

Ainsi $E(\overline{X_N}) = E(X_1)$.

On note l'**écart-type** de $\overline{X_N}$: $\sigma(\overline{X_N})$. Par ailleur, nous savons que l'écart-type vaut la racine carré de la variance. Déterminons premièrement la variance de $\overline{X_N}$. On note $V(\overline{X_N})$ cette variance. On a :

$V\left(\overline{X_N}\right) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} V(X_i)$

Or les X_i sont indépendantes et suivent la même loi, donc $V(X_i) = V(X_1)$ pour tout i. On a donc :

$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} V(X_i) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} V(X_1) = \frac{1}{N^2} N V(X_1) = \frac{V(X_1)}{N}$

Ainsi $V\left(\overline{X_N}\right) = \frac{V(X_1)}{N}$.

Pour conclure, $\sigma\left(\overline{X_N}\right) = \sqrt{\frac{V(X_1)}{N}}$.

La figure 3 ci-dessous regroupe des représentations graphiques de la moyenne empirique pour plusieurs nombres de variables aléatoires.

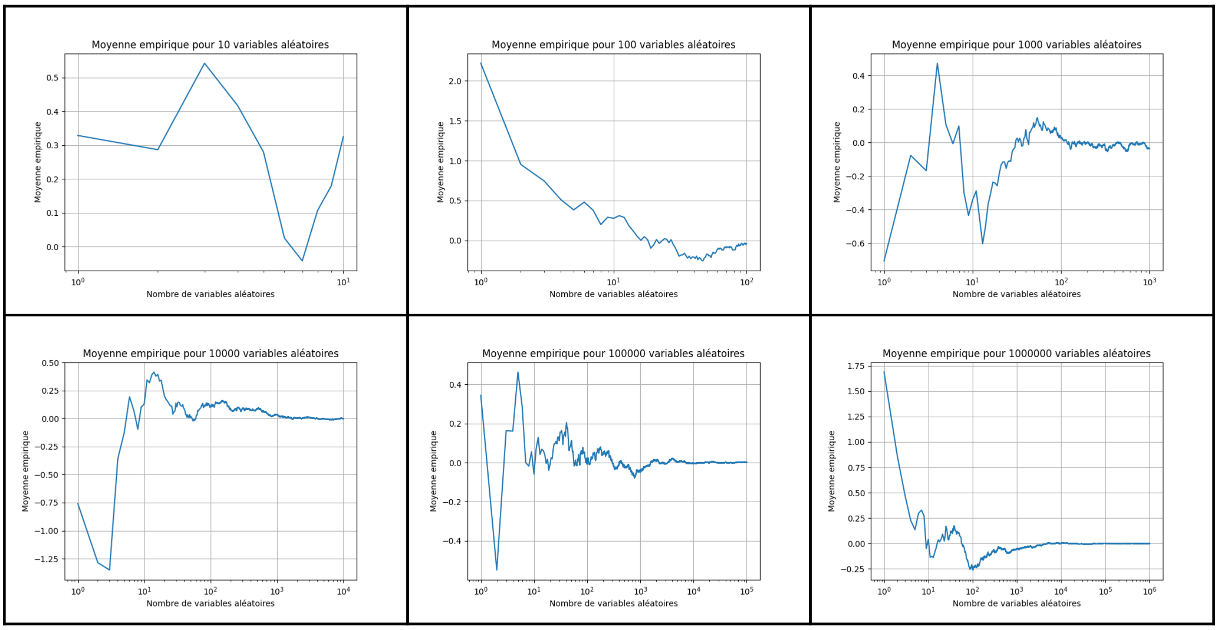

Figure 3: Moyenne empirique pour N variables aléatoires.

Il semblerai que la limite vers l'infini de la moyenne soit égale à 0.

Pour chaque N, nous avons également calculer l'espérance et l'écart type :

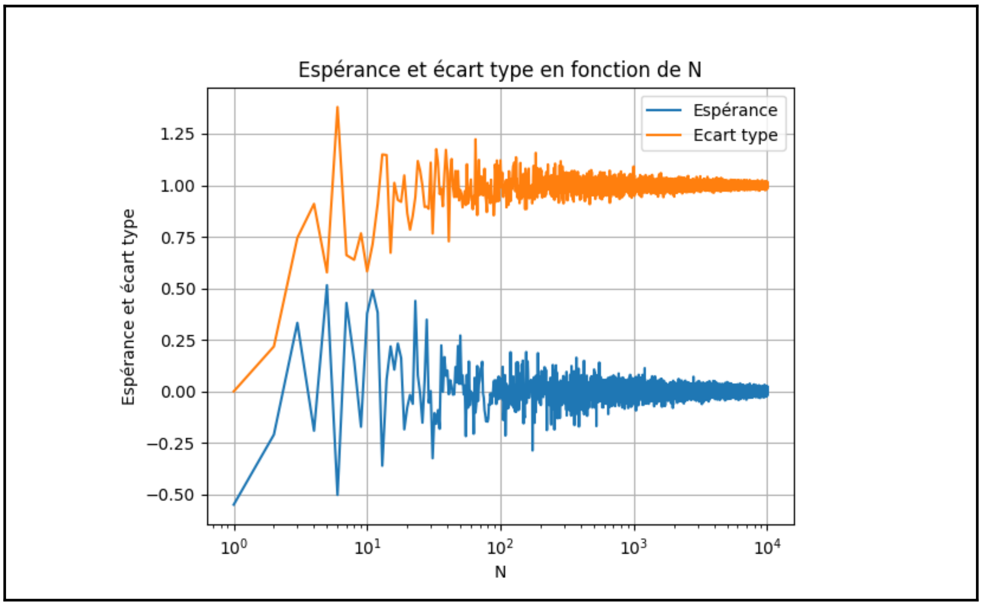

Figure 4: Espérance et écart-type en fonction de N variables aléatoires.

Nous pouvons remarquer que l'écart type tand vers 1. L'espérance tand par contre vers 0 comme la moyenne empirique. On viens de mettre en évidence la loi des grands nombres qui est : plus le nombre d'observations augmente, plus la moyenne empirique se rapproche de l'espérance théorique de la variable aléatoire.

2 Marche aléatoire

2.a Partie 1

2.b Partie 2