TP4 Intégration numériques

BOCQUEL Matéo

BROCHENY Edouard

Effectué le 18 juin 2019

Exercice : Intégration numérique

1. Calcul de l'intégrale analytique :

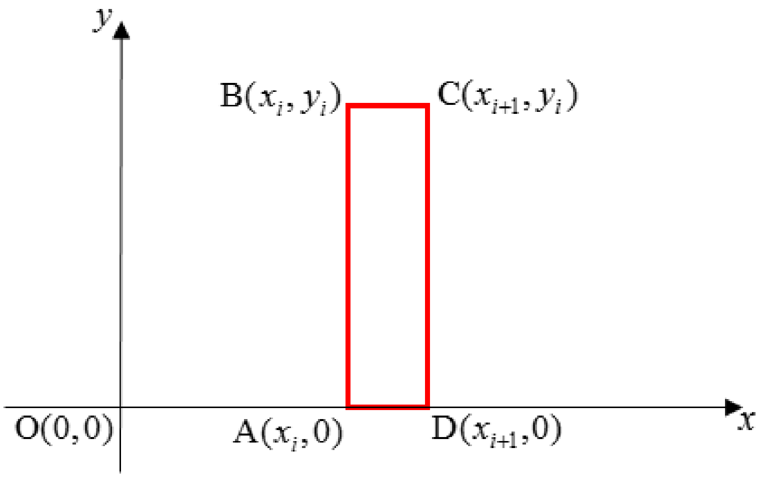
$$\int_0^{1.2} e^{-x} = [-e^{-x}]_0^{1.2} = -e^{-1.2} - (-e^{-0}) = 0.6988057881$$

2. A l'aide du TP précédent, nous discrétisons l'intervalle [a ; b]

```
function [X,h] = discr_i(a,b,n)

h = (b-a)/n;

for g=0:n
    X(g+1)=a+h*g
end
end
```

a. Méthode des rectangles à gauche

Elle permet de calculer l'intégrale numérique en sommant les surfaces des rectangles. On découpe en intervalles régulier afin d'avoir notre domaine d'intégration et on a une fonction constante sur chaque intervalle.



On définit sous Matlab la fonction rectangle de la manière suivante :

On démarre à 0 puis on incrémente jusqu'à la dixième valeur. Le terme -1 est important

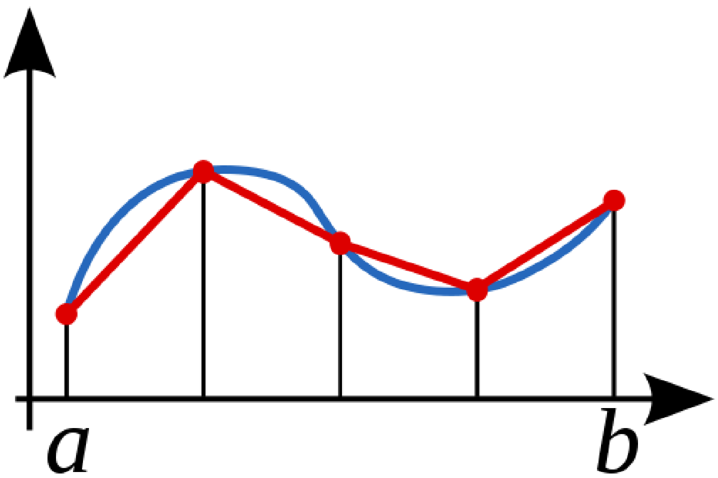
```
function int=rectangle(X,Y,h)
n=length(Y)
int=0
for i=1:n-1

int=Y(i)*h+int
end
end
```

car on enlève la onzième aire du rectangle : le point est sur le courbe mais le rectangle n'est pas présent. Cela permet d'avoir une plus grande précision. Pour obtenir le résultat L1=rectangle(X,Y,h).

b. Méthode des trapèzes

Cette méthode calcul la somme des aires des trapèzes adjacents selon un intervalle régulier. La surface d'un trapèze se détermine de la manière suivante :

$$S = \frac{(Petite\_base + Grande\_base) \times Hauteur}{2}$$



La fonction trapèze

```
function I=trapezes(a,b,n,h)
Q=[a:h:b];
I=0;
F=exp(-Q)
for m=1:n
I=I+(h/2)*(F(m)+F(m+1));
end
```

Elle utilise les variables a=début de l'intervalle, b=fin de l'intervalle, n= nombre d'intervalle, h=le pas

F désigne notre fonction

Le résultat de L2 s'obtient en appelant la fonction trapezes : L2 =trapezes(a,b,n,h)

c. Méthode Simpson

Elle permet le calcul approché d'une intégrale par 'l'interpolation d'un polynôme de degré 2. Le polynôme étant facile à intégrer on approche l'intégrale sur l'intervalle [a ; b]. Cette technique est basée sur les polynômes de Lagrange. Un polynôme de degré 2 de Lagrange prend la valeur 1 pour une seule des 3 abscisses et la valeur 0 pour les 2 autres. D'où nos 2 boucles « for » que nous avons effectué. La première concerne les valeurs paires la secondes les valeurs impaires.

$$I_s(f) = \frac{h}{3}[f(x_1) + f(x_{n+1}) + 4 \sum_{(i\_paire)} f(x_i) + 2 \sum_{(i\_impaire)} f(x_i)]$$

```
function S=simpson(a,b,n,h)
G=[a:h:b];
F=exp(-G);
S=h/3*(F(1)+F(n+1));
for j=2:2:n
    S=S+4*(h/3)*F(j);
end
for j=3:2:n
    S=S+2*(h/3)*F(j);
end
end
```

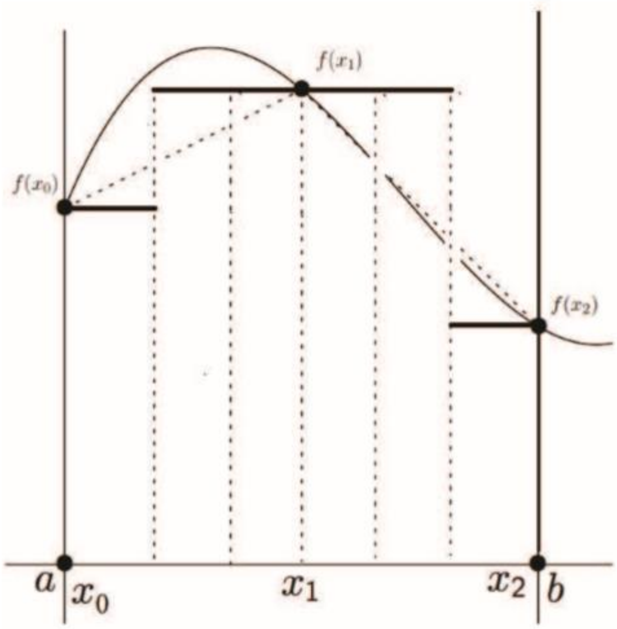


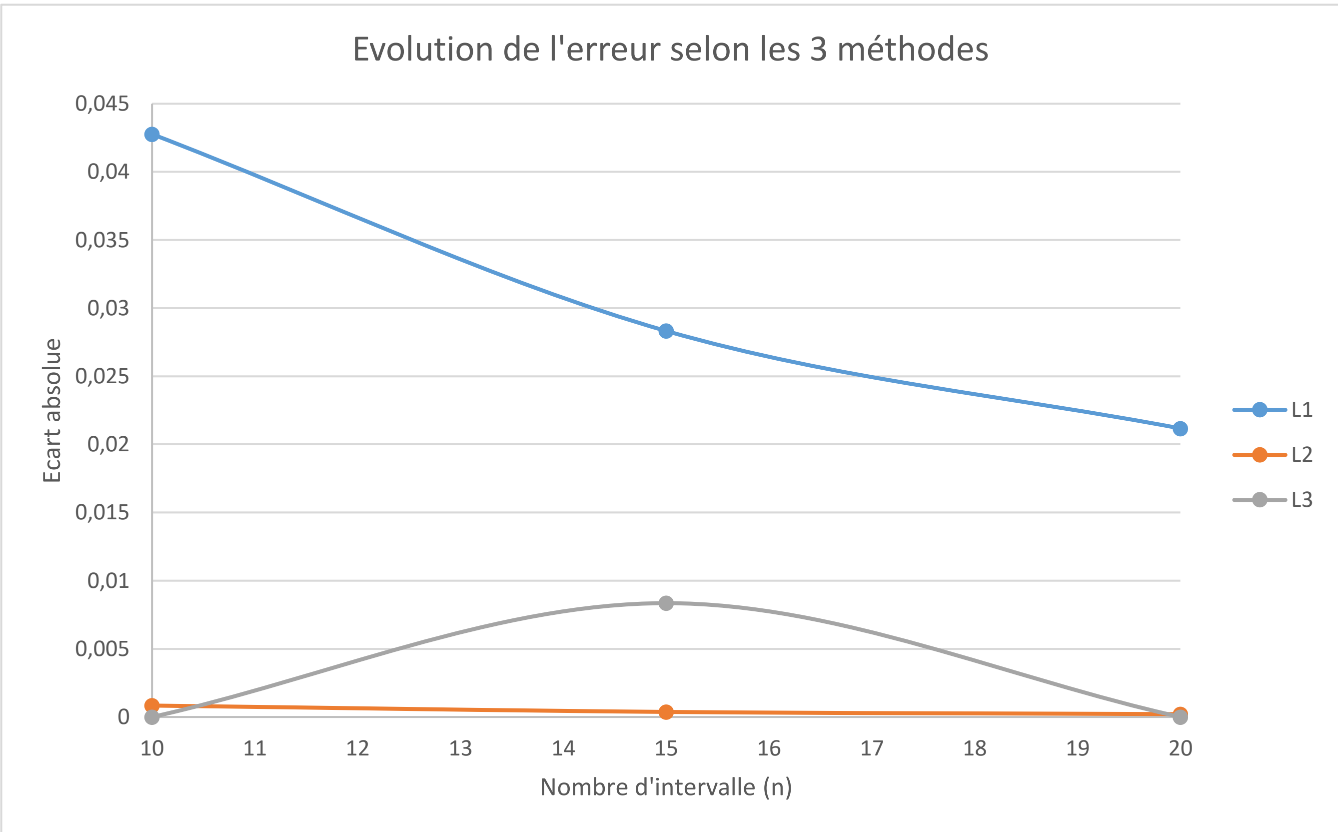
Tableau des résultats pour nos 3 valeurs d’intervalles

	N=10	N=15	N=20
L1	0.741572501131681	0.727130676283395	0.719979590889432
L2	0.699644153846413	0.699178444759883	0.699015417246798
L3	0.698806591734108	0.690452998743281	0.698805838380260

Cela se confirme dès lors que l’on calcule l’erreur relative

3. Erreur relative pour les 3 méthodes

	N=10	N=15	N=20
L1	0.042766713043884	0.028324888195597	0.021173802801634
L2	8.383657586156223e-04	3.726566720856361e-04	2.096291590001354e-04
L3	8.036463099436730e-07	0.008352789344517	5.029246175070057e-08



Interprétation et conclusion

On remarque que la méthode des rectangles gauche est peu précise, il serait nécessaire de mettre une valeur de N très haute pour atteindre le résultat. Il faut mettre une valeur de n supérieur à 10000 (n=10000 ; L1 = 0.698847717273651)

La méthode des trapèzes est précise dans notre cas où l'on a une fonction exponentielle. En revanche, si nous avons une fonction avec des oscillations importantes elle deviendra moins précise. Elle dépendra de la fonction que l'on a à approximer.

Pour ce qui est de la méthode Simpson on voit clairement que cette solution ne converge pas ici en passant de N=10 à N=15 on a une augmentation de l'écart par contre si on passe à N=20 l'écart diminue.

En conclusion, l'erreur absolue par la méthode de Simpson est extrêmement faible par rapport à celles des 2 autres méthodes. Ceci confirme que plus l'ordre est grand, plus la précision est bonne.