TP3 : Interpolation polynomiale

Objectif : Approximer une fonction représentée par un nuage de point (x_i, y_i)

Méthode : Interpolation de Lagrange

Rappel :

Polynôme de Lagrange :

$$y(x) = \sum_{0 \le i \le n} L_i(x) y_i$$

Avec :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \ne j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Exercice 1 : interpolation d'un nuage de point

X	*Y*
-10	3.1623
-8	2.8284
-6	2.4495
-4	2.0000
-2	1.4142
0	0
2	1.4142
4	2.0000
6	2.4495
8	2.8284
10	3.1623

1. Définir les vecteurs lignes X et Y présentés dans le tableau
2. Définir la fonction *Lagrange* qui retourne la valeur des polynômes $L_i(x)$ en un point x donné :

$$L_i = Lagrange(X, x, i)$$

3. Définir la fonction *interpol* qui retourne la valeur *z* du polynôme de Lagrange en un point *x :*

$$z = \mathrm{int}erpol(X, \mathrm{Y}, \mathrm{x})$$

4. Définir la fonction *discretisation* qui discrétise un intervalle $[a,\ b]$ en n sous-intervalles avec un pas constant $h=(b-a)/n$

$$X = discr(a,b,n)$$

5. Tracer, dans l'intervalle [-10,10], les fonctions *interpol* et $\sqrt{|x|}$ en fonction de *X* sur la même figure (choisissez différents pas de discrétisation).
6. Calculer l'erreur absolue de l'approximation :

$$e = \max|z_i - y_i|$$

7. Calculer l'erreur quadratique :

$$e = \sum_{i=0}^{n}(z_i - y_i)^2$$

Exercice 2 : Etude de convergence

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$

L'objectif de cette partie est l'étude de la convergence de l'approximation de Lagrange quand n tend vers l'infini.

- Discrétiser l'intervalle [-1 1] en faisant appel à la fonction discrétisation (n à choisir librement)
- Tracer l'interpolation de Lagrange de la fonction *f* pour n=4
- Varier *n* et tester graphiquement la convergence de l'interpolation
- Refaite la même étude en considérant le nuage de point $x_i = \dfrac{b-a}{2}\cos\left(\dfrac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right) + \dfrac{b+a}{2};\ \ i = 0,\ 1,\ 2,\ n$

  $n =$ **nombre des points d'interpolation**