1. loi exponentielle (λ)

2. $E(\mathrm{Exp}(\lambda)) = 1/\lambda$

$\mathrm{Var}(\mathrm{Exp}(\lambda)) = 1/\lambda^2$

3. On calcule la moyenne empirique : $\overline{X_4} = (90 + 120 + 40 + 75)/4$

$= 81{,}25$

(Souvent on note $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$)

La loi des grands nombres donne $\overline{X_n} \to 1/\lambda$

Donc on estime $\lambda \sim \dfrac{1}{\overline{X_n}}$

$\sim 1/81{,}25$

4 - Thm Central limite :

$$S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var}} \left(\overline{X_n} - \text{Espérance} \right) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Dans notre cas :

$n = 4$

$$S_4 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{\ldots}} \left(81{,}25 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$\sqrt{1/\lambda^2}$ $\sim \mathcal{N}(0,1)$

$$S_4 = 2(81{,}25 \times \lambda - 1) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

5- CT14 : Dans le tableau on lit $P(N(0,1) \leq 2{,}58) = 99{,}5\%$

$$P(N(0,1) \in [-2{,}58 ; 2{,}58]) = 99\%$$

6- On peut supposer que $S_4 \sim N(0,1)$

donc $2(81{,}25 \times \lambda - 1)$ tombe dans l'intervalle $[-2{,}58 ; 2{,}58]$ avec 99% de chances.

$$S_n = \frac{\sqrt{n}}{1/\lambda}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \underbrace{\text{suit}}_{\hookrightarrow \text{Théorème Central Limite}} \mathcal{N}(0,1).$$

$$= \sqrt{n}\left(\lambda \overline{X}_n - 1\right).$$

Soit q tq $P\left(\mathcal{N}(0,1) \in [-q,q]\right) = 0{,}99$.

Alors $P\left(S_n \in [-q,q]\right) = 0{,}99$

$$P\left(\sqrt{n}\left(\lambda \overline{X}_n - 1\right) \in [-q,q]\right) = 0{,}99.$$

$$P\left(\lambda \overline{X}_n \in \left[1 - \frac{q}{\sqrt{n}}, 1 + \frac{q}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0{,}99$$

$$P\left(\lambda \in \left[\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{q}{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}, \frac{1}{\overline{X}_n} + \frac{q}{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}\right]\right) = 0{,}99$$

Avec le tableau de Φ,

On trouve $q = 2{,}58$.

donc $\lambda \in \left[\frac{1}{81,25} - \frac{2,58}{2 \times 81,25} ; \frac{1}{81,25} + \frac{2,58}{2 \times 81,25}\right]$

avec probabilité 99%.

$\lambda \in \left[\underset{\text{(valeur négative)}}{0} , 1/35 \right]$ avec proba 99%

Qu'est-ce qu'on a fait dans cet exo :

1. On a modélisé les résultats de nos expériences par loi avec paramètre inconnu

2. On a pu estimer le paramètre avec la moyenne empirique

moyenne

3_ le TCL a donné un intervalle pour ce paramètre

Exercice 2 :

1. $P\left(\mathcal{N}(0,1) \leq 2{,}58\right)$

$= \Phi(2{,}58)$

$= 0{,}9951$

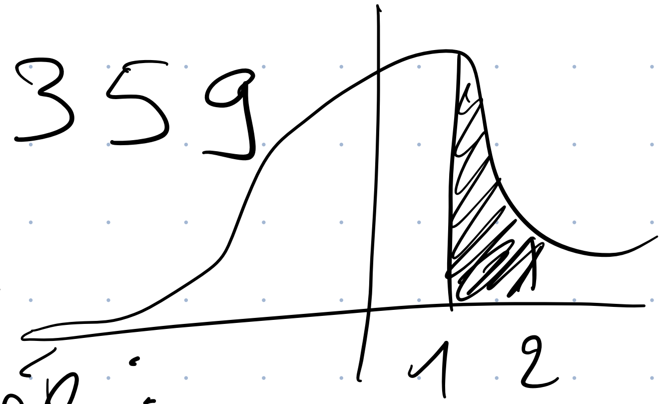
2. $P\left(\mathcal{N}(0,1) \in [1,2]\right)$

$= \Phi(2) - \Phi(1)$

$= 0{,}9772 - 0{,}8413$

$= 0,1359$

c'est l'aire hachurée :



3. On reconnaît la densité de la loi normale : l'intégrale vaut $\Phi(1,63) - \Phi(0)$

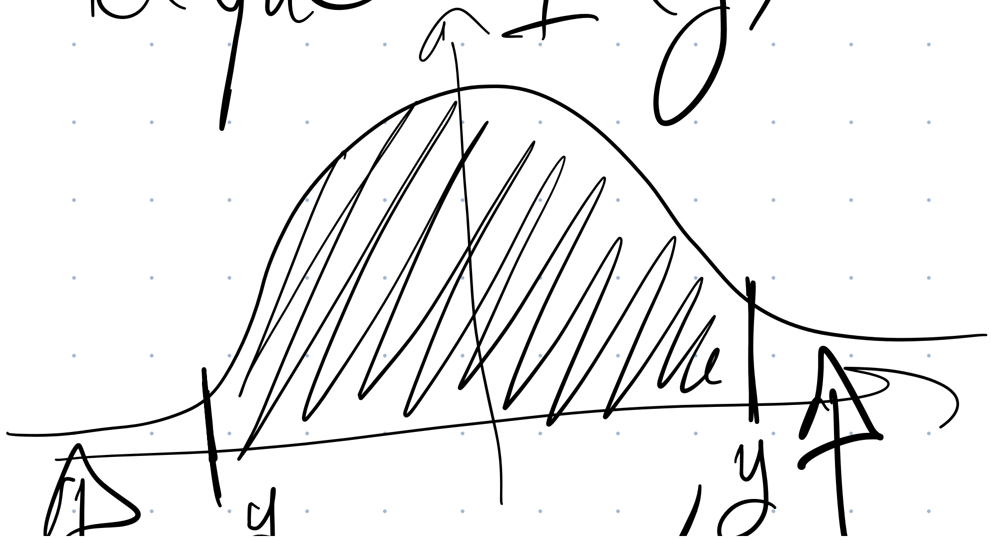
$= 0,9484 - 0,5$

$= 0,4484$

4- On cherche dans le tableau x tel que $\Phi(x) = 0,80$

$\rightarrow x = 0,85$

5. On cherche y tel que $\Phi(y) = 0,90$



Rebo 10%

Aire 80%

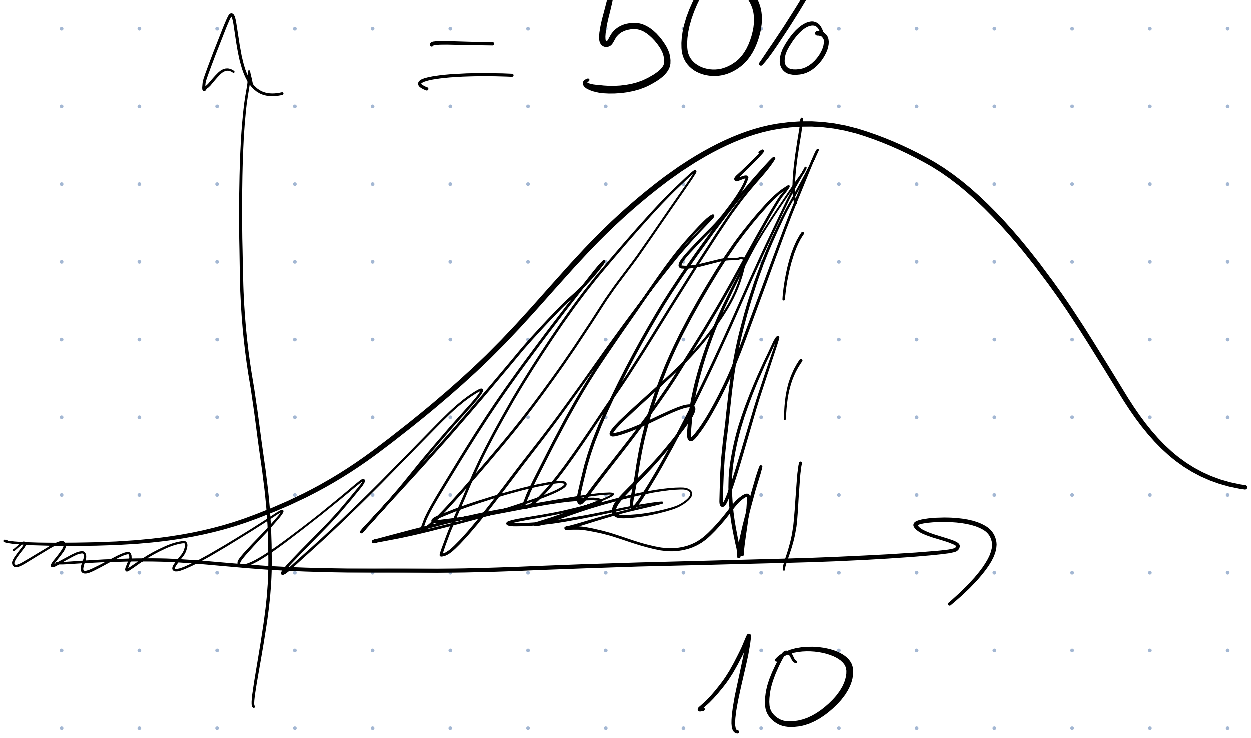
Rebo 10%

$\rightarrow y = 1{,}29.$

Exercice 3

1 - $P(N(10,20) \leq 10)$

$= 50\%$



2. $P(\mathcal{N}(50,10) \leq 70)$

Disons $X \sim \mathcal{N}(50,10)$

Alors $\dfrac{X-50}{\sqrt{10}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(X \leq 70) = P\left(\overbrace{\frac{X-50}{\sqrt{10}}}^{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{70-50}{\sqrt{10}} \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}} \right).$$

$$= \Phi(6,3) \sim 100\%$$