

Révisions – Mathématiques S5

BMC3 – Semestre 5

Développements limités

Exercice 1 – Produit et quotient de DL

1. Calculer le DL de $\frac{\sin x}{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. Calculer le DL de $\frac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 3.

Exercice 2 – DL par composition

On cherche le DL de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

1. En posant $u = \cos x - 1$, montrer que $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
2. En utilisant $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, en déduire le DL de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4.

Exercice 3 – Calcul de limites par DL

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

Exercice 4 – Prolongement et position par rapport à la tangente

Soit $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer $f(0)$.
2. Donner le DL de f à l'ordre 2 en 0, puis l'équation de la tangente à la courbe en 0.
3. En déduire la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Équations différentielles exactes

Exercice 5 – Équation exacte

Résoudre l'équation différentielle $(2xy + 1)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$.

1. Vérifier que l'équation est exacte.
2. Trouver $F(x, y)$ telle que $dF = f dx + g dy$.
3. En déduire la solution générale.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 6 – EDP

Résoudre l'équation $2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 4x$ par changement de variables.

Résoudre par séparation de variables : $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

Modélisation

Exercice 7 – Refroidissement de Newton

Un objet de température initiale $T_0 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ est placé dans une pièce à température ambiante $T_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. La loi de Newton stipule que :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

avec $k = 0,1 \text{ min}^{-1}$.

1. En posant $\theta(t) = T(t) - T_a$, montrer que $\theta' = -k\theta$ et résoudre.
2. Calculer la température après 10 minutes. (*On donne $e^{-1} \approx 0,37$.*)
3. Au bout de combien de temps la température sera-t-elle de $30 \text{ }^\circ\text{C}$? (*On donne $\ln 6 \approx 1,8$.*)

Exercice 8 – Croissance bactérienne avec limitation

Une population de bactéries $N(t)$ croît dans un milieu où les nutriments sont renouvelés à débit constant D , mais sont consommés proportionnellement à la population :

$$\frac{dN}{dt} = D - kN$$

avec $k = 0,5 \text{ h}^{-1}$, $D = 1000 \text{ bactéries/h}$, et $N(0) = 100 \text{ bactéries}$.

1. Déterminer la population d'équilibre N_{eq} .
2. Résoudre l'équation et donner $N(t)$.
3. Au bout de combien de temps la population atteint-elle 95% de sa valeur d'équilibre ? (*On donne $\ln 20 \approx 3$.*)