

	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
26/01/2026		Page 1/2

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	<ul style="list-style-type: none"> — Calculatrice NON autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. Calculs de développements limités.

- (a) Donner le développement limité de e^x à l'ordre 4 au voisinage de 0. (0.5 pt)
- (b) Donner le développement limité de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. (0.5 pt)
- (c) En déduire le développement limité de $f(x) = e^x \ln(1 + x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. (1 pt)

2. Calcul de limite. Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : (1.5 pts)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

3. Étude d'une fonction. Soit $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

- (a) À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. (0.75 pt)
- (b) En déduire la position de la courbe de g par rapport à sa tangente horizontale en 0. (0.75 pt)

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(2xy + 3) dx + (x^2 + 4y) dy = 0$$

- (a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ est une différentielle totale. (0.75 pt)
- (b) Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $dF = f dx + g dy$. (1 pt)
- (c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. (0.5 pt)

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant un changement de variables linéaire. (1.5 pts)

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

En cherchant des solutions sous la forme $f(x, y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. (1.25 pts)

Exercice 3 : Modélisation – Refroidissement d'une pièce métallique (5 points)

Une pièce métallique de masse $m = 2$ kg et de capacité thermique massique $c = 500$ J/(kg·K) est initialement à la température $T_0 = 400$ K. Elle est plongée dans un bain thermostaté à la température constante $T_\infty = 300$ K.

Le transfert thermique entre la pièce et le bain suit la loi de Newton :

$$\frac{dQ}{dt} = -hS(T - T_\infty)$$

où Q est l'énergie thermique de la pièce, $h = 25$ W/(m²·K) est le coefficient d'échange et $S = 0,04$ m² est la surface d'échange.

On rappelle que $Q = mcT$ (à constante près).

1. Montrer que la température $T(t)$ de la pièce vérifie l'équation différentielle : (1 pt)

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc}(T - T_\infty)$$

2. On pose $\tau = \frac{mc}{hS}$ (constante de temps). Calculer la valeur numérique de τ . (0.5 pt)

3. Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale $T(0) = T_0$. (1.5 pts)

4. Au bout de combien de temps la pièce atteint-elle la température de 320 K ? (1 pt)

On donne $\ln(5) \approx 1,6$.

5. Vers quelle valeur tend $T(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$? Interpréter physiquement. (1 pt)