Algèbre linéaire - Chapitre 2
Espaces vectoriels

Résumé des idées

À retenir dans une semaine :

- Un espace vectoriel est un ensemble avec deux lois : une addition interne et une multiplication par un scalaire.
- Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel.
- Pour vérifier qu'un ensemble est un espace vectoriel :
  - Possède-t-il un vecteur nul ?
  - L'addition est-elle une loi interne ?
  - La multiplication par un scalaire est-elle une loi externe ?
  - Les règles de calcul de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont-elles vérifiées ?

Ce que je dois savoir

- Que signifie qu'une loi soit interne à un ensemble ?
- Quelles sont les règles de calculs pour les espaces vectoriels ?
- Qu'est-ce que le vecteur nul d'un espace vectoriel ?

2.1 Exercices

2.1.1 Les espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

1. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}$?
2. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}^2$?
3. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}^3$?

2.1.2 parties de $\mathbb{R}^2$

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

2.1.3 Dans un espace de fonctions

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles. Soit F l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1. $f(0) + f(1) = 0$
2. $f(0) = 0$
3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
4. $\forall x \in [0, 1], f(x) + f(1 - x) = 0$
5. $\forall x \in [0, 1], f(x) \geqslant 0$
6. $2f(0) = f(1) + 3$

Dans quel cas F est-il un espace vectoriel inclus dans E ?

2.1.4 Dans $\mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ des lois usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / \mathrm{x}_1 = 0\}$
2. $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / \mathrm{x}_1 = 1\}$
3. $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_2\}$
4. $\mathrm{F} = \{(x_1, \ldots, x_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / x_1 + \ldots + x_\mathrm{n} = 0\}$
5. $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_2 = 0\}$

2.1.5 Dans $\mathbb{R}[X]$

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. A_1 est l'ensemble des polynômes réels P vérifiant $\mathrm{P}(0) = 1$.
2. A_2 est l'ensemble des polynômes réels ayant a comme racine. ($a \in \mathbb{R}$ fixé).
3. A_3 est l'ensemble des polynômes réels ayant au moins une racine réelle.
4. A_4 est l'ensemble des polynômes réels de degré 3.

2.1.6 Dans l'espace des suites réelles

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. A_1 est l'ensemble des suites réelles convergentes vers 1.
2. A_2 est l'ensemble des suites réelles négligeables devant n^2

3. A_3 est l'ensemble des suites réelles équivalentes à n^2.
4. A_4 est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 3$$

5. A_5 est l'ensemble des suites réelles arithmétiques.
6. A_6 est l'ensemble des suites réelles géométriques.

2.1.7 Mélange

Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P'(0) = 2\}$;
3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \mid P\}$;
4. D l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;
5. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathcal{D}$.
6. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathcal{D}$.

Bases

2.1.8 Dans $\mathbb{R}^2$

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1), v_2 = (1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1,2)$ dans cette base (v_1, v_2).
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,2), v_2 = (3,4)$forment une base de $\mathbb{R}^2$. Trouver les composantes des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
3. Dans $\mathbb{R}^2$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

2.1.9 Dans $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1), v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ et $w = (1,2,-3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

2.1.10 avec un paramètre

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\{(1,0,t), (1,1,t), (t,0,1)\}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où

$$\begin{cases} Q_1 = X^2 + 1 \\ Q_2 = 3X^2 - X + 3 \\ Q_3 = X^2 - X - 1 \end{cases}$$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Sioui, déterminer les coordonnées de X.