Chapitre 5

Equations différentielles : Ordre 1

Les équations différentielles modélisent de nombreux phénomènes naturels : croissance de populations, désintégration radioactive, refroidissement, circuits électriques...

Ce chapitre présente les équations différentielles d'ordre 1, c'est-à-dire celles où seules y et y' interviennent.

5.1 Introduction aux équations différentielles

5.1.1 Définitions

Définition 5.1.1 ***Équation différentielle***
Une ***équation différentielle*** *est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui fait intervenir y et ses dérivées successives (y', y'', ...).*
*L'****ordre*** *d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivation qui apparaît dans l'équation.*

Exemple

- $y' = 2y$ est d'ordre 1
- $y'' + 3y' - 2y = 0$ est d'ordre 2
- $y' = x^2 + y$ est d'ordre 1

Définition 5.1.2 ***Solution d'une équation différentielle***
Une ***solution*** *d'une équation différentielle est une fonction qui, substituée à l'inconnue y, vérifie l'équation.*

Remarque *Une équation différentielle admet en général une* ***infinité de solutions****. Le nombre de paramètres dans la solution générale est égal à l'ordre de l'équation. Pour une équation d'ordre 1, il y a donc un seul paramètre (une constante C).*

Définition 5.1.3 ***Problème de Cauchy***
Un ***problème de Cauchy*** *(ou problème aux conditions initiales) consiste à trouver une solution particulière vérifiant une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$.*

Exemple

Montrer que $y = Cx^2$ est solution de $xy' = 2y$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.
Vérification : Si $y = Cx^2$, alors $y' = 2Cx$.
$xy' = x \cdot 2Cx = 2Cx^2 = 2y$ ✓
Avec la condition $y(2) = 8$, on obtient $C \cdot 4 = 8$, donc $C = 2$.
La solution particulière est $y = 2x^2$.

5.2 Équations linéaires à coefficients constants

5.2.1 Forme générale

Définition 5.2.1 ***Équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants***
C'est une équation de la forme :

$$y' + ay = b(x)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante et $b(x)$ est une fonction continue.

- *L'**équation homogène associée** est : $y' + ay = 0$*
- *Le terme $b(x)$ s'appelle le **second membre***

5.2.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 5.2.2 ***Solution de l'équation homogène***
Les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y_h(x) = Ce^{-ax}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

Remarque *La démonstration utilise le fait que $y'/y = -a$, donc $\ln|y| = -ax + K$, ce qui donne $y = Ce^{-ax}$.*

5.2.3 Résolution de l'équation complète

Théorème 5.2.3 ***Structure des solutions***
La solution générale de $y' + ay = b(x)$ est :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

où :

- $y_h(x) = Ce^{-ax}$ *est la solution générale de l'équation homogène*
- $y_p(x)$ *est une solution particulière de l'équation complète*

Remarque *Pour trouver y_p, on cherche une solution de même forme que $b(x)$:*

- *Si $b(x)$ est un polynôme de degré n, on cherche y_p polynôme de degré n*
- *Si $b(x) = ke^{\lambda x}$ avec $\lambda \neq -a$, on cherche $y_p = Ae^{\lambda x}$*
- *Si $b(x) = k\cos(\omega x)$ ou $k\sin(\omega x)$, on cherche $y_p = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$*

Exemple

Résoudre $y' + 2y = x^2$.

1) Équation homogène : $y' + 2y = 0$ donne $y_h = Ce^{-2x}$

2) Solution particulière : On cherche $y_p = ax^2 + bx + c$.
$y_p' = 2ax + b$
$y_p' + 2y_p = 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c)$
Identification avec x^2 :

— $x^2 : 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
— $x^1 : 2a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$
— $x^0 : b + 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$

Donc $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

3) Solution générale : $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

Exercice 5.1 Équations à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 2\sin x$
2. $y' - y = (x + 1)e^x$
3. $y' + y = x - e^x + \cos x$
4. $y' - 3y = e^{2x}$

5.3 Équations à variables séparables

Définition 5.3.1 ***Équation à variables séparables***
Une équation à variables séparables est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(y)\,dy = b(x)\,dx$$

ou de manière équivalente : $a(y) \cdot y' = b(x)$

Méthode ***Méthode de résolution***

1. *Écrire* $y' = \dfrac{dy}{dx}$
2. *Séparer les variables : mettre tous les* y *d'un côté, tous les* x *de l'autre*
3. *Intégrer chaque membre*
4. *Expliciter* y *si possible*

Exemple

Résoudre $9yy' = 4x$.

Séparation : $9y\,dy = 4x\,dx$

Intégration : $\int 9y\,dy = \int 4x\,dx$

$\frac{9y^2}{2} = 2x^2 + C$

$y^2 = \frac{4x^2}{9} + C'$

$y = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{9} + C'}$

Exemple

Résoudre $y' = 1 + y^2$.

Séparation : $\frac{dy}{1+y^2} = dx$

Intégration : $\arctan(y) = x + C$

Solution : $y = \tan(x + C)$

Exercice 5.2 **Variables séparables**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1 + x^2)y' + y^2 + 1 = 0$ avec $y(0) = 1$
2. $y' = 6y^2x$ avec $y(1) = \frac{1}{5}$
3. $y' = e^{-y}(2x - 4)$ avec $y(5) = 0$

5.4 Équations linéaires à coefficients variables

5.4.1 Forme générale

Définition 5.4.1 *Une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients variables est de la forme :*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I.

5.4.2 Solution de l'équation homogène

Théorème 5.4.2 *Les solutions de $y' + a(x)y = 0$ sont :*

$$y_h(x) = Ce^{-A(x)}$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

5.4.3 Méthode de variation de la constante

<u>**Méthode**</u> ***Variation de la constante***

Pour trouver une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$:

1) *On part de la solution homogène $y_h = Ce^{-A(x)}$*

2) *On cherche y_p sous la forme $y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$ où $C(x)$ est une fonction à déterminer*

3) *On substitue dans l'équation :*
$y_p' = C'(x)e^{-A(x)} - a(x)C(x)e^{-A(x)}$
$y_p' + a(x)y_p = C'(x)e^{-A(x)} = b(x)$

4) *Donc $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$ et $C(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,dx$*

Exemple

Résoudre $(1 - x^2)y' + 2xy = (1 + x)^2$.
On réécrit : $y' + \dfrac{2x}{1 - x^2}y = \dfrac{(1 + x)^2}{1 - x^2} = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

1) Équation homogène : $a(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

$A(x) = \displaystyle\int \frac{2x}{1 - x^2}\,dx = -\ln|1 - x^2|$

$y_h = Ce^{\ln|1-x^2|} = C(1 - x^2)$ (pour $|x| < 1$)

2) Variation de la constante :

$C'(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x} \cdot \dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{1 + x}{(1 - x)(1 - x^2)} = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$

$C(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(1 - x)^2}\,dx = \frac{1}{1 - x}$

3) Solution générale :

$y = (1 - x^2)\left(C + \dfrac{1}{1 - x}\right) = C(1 - x^2) + (1 + x)$

5.5 QCM d'entraînement

Exercice 5.3 QCM - Équations différentielles

1. La solution générale de $y' + 3y = 0$ est :

   a. $y = Ce^{3x}$ b. $y = Ce^{-3x}$ c. $y = 3Ce^{x}$

2. Une solution particulière de $y' - y = 2$ est :

   a. $y_p = 2$ b. $y_p = -2$ c. $y_p = 2x$

3. L'équation $yy' = x$ est de type :

   a. Linéaire b. Variables séparables c. Ni l'un ni l'autre

5.6 Exercices

Exercice 5.4 Résolution d'équations

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2xy = x$
2. $(x^2 + 1)y' = y$ avec $y(1) = 1$
3. $(1 + 2x)y' = y - 2$
4. $\dfrac{y' - 1}{x^2} = 1$
5. $xy' - 2y = -\ln x$

Exercice 5.5 Problème - Piscine et chlore

Le bassin d'une piscine municipale a une capacité de 600 000 litres d'eau. Pour respecter les normes d'hygiène, 30 000 litres d'eau sont renouvelés chaque heure et le taux de chlore maximum autorisé est de 0,25 mg/L.

Un soir, 1 kg de chlore est déversé par erreur dans le bassin à 20h (alors que le taux de chlore était initialement indétectable).

On modélise la concentration massique du chlore par une fonction $f(t)$ (en mg/L), où t est le temps écoulé depuis l'accident (en heures). On admet que f est solution de :

$$y' + 0{,}05y = 0$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer $f(0)$ et en déduire l'expression de $f(t)$.
3. Au bout de combien de temps pourra-t-on ouvrir la piscine au public ?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 5.6 Problème - Refroidissement d'une roche

On modélise le refroidissement d'une roche volcanique en supposant que le taux de refroidissement est proportionnel à la différence de température entre la roche et l'air ambiant.

On note T_a la température de l'air (constante) et $T(t)$ la température de la roche au temps t (en heures).

1. Montrer que $T(t)$ est solution de l'équation : $T' = -k(T - T_a)$ où $k > 0$.
2. Résoudre cette équation et montrer que $T(t) = Ce^{-kt} + T_a$.
3. Interpréter physiquement la constante C.
4. Application : Si $k = \ln 3$, $T_a = 20\text{ř}C$ et $T(0) = 500\text{ř}C$, calculer :
   a. La température après 30 minutes
   b. Le temps nécessaire pour atteindre 100řC

Exercice 5.7 Problème - Croissance de population

L'accroissement d'une population d'un pays est proportionnel à cette population. On sait que la population double tous les 50 ans.

1. Écrire l'équation différentielle modélisant cette situation.
2. Résoudre cette équation.
3. Déterminer la constante de proportionnalité k.
4. En combien de temps la population triple-t-elle ?

Exercice 5.8 Problème - Dissolution chimique

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20 g de ce composé et on observe que 5 minutes plus tard, il reste 10 g.

1. Écrire et résoudre l'équation différentielle.
2. Déterminer la constante de proportionnalité.
3. Combien de temps faut-il attendre pour qu'il reste seulement 1 g ?