
Algèbre linéaire - Chapitre 4

Applications linéaires

4.6 Matrice de passage d'une base à une autre

Idée générale :

Lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel, on peut choisir différentes bases pour exprimer les vecteurs. La **matrice de passage** permet de traduire les coordonnées d'un vecteur d'une base à une autre.

C'est comme un "dictionnaire" qui convertit les coordonnées : si on connaît les coordonnées d'un vecteur dans une base \mathcal{B} , la matrice de passage nous donne ses coordonnées dans une autre base \mathcal{B}' .

Méthode

Comment construire la matrice de passage ?

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E .

La **matrice de passage** de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , notée $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, se construit ainsi :

1. **Exprimer chaque vecteur de l'ancienne base \mathcal{B} dans la nouvelle base \mathcal{B}' :**

- Quelles sont les coordonnées de e_1 dans \mathcal{B}' ?
- Quelles sont les coordonnées de e_2 dans \mathcal{B}' ?
- etc.

2. **Remplir les colonnes de la matrice :**

- La 1ère colonne contient les coordonnées de e_1 dans \mathcal{B}' .
- La 2ème colonne contient les coordonnées de e_2 dans \mathcal{B}' .
- etc.

Attention à l'ordre ! Les colonnes contiennent les vecteurs de l'**ancienne** base exprimés dans la **nouvelle** base.

4.7 Exercices d'application

Exercice 1 : Cas simple dans \mathbb{R}^2

Dans \mathbb{R}^2 , on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, et une nouvelle base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice de passage P de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' .

Indication : Il faut exprimer e_1 et e_2 comme combinaisons linéaires de v_1 et v_2 .

Solution.

On cherche α, β tels que $e_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$, c'est-à-dire :

$$(1, 0) = \alpha(1, 1) + \beta(1, -1) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

On obtient le système : $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Donc $e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$, ses coordonnées dans \mathcal{B}' sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De même, pour $e_2 = \gamma v_1 + \delta v_2$:

$$(0, 1) = \gamma(1, 1) + \delta(1, -1) = (\gamma + \delta, \gamma - \delta)$$

On obtient : $\gamma + \delta = 0$ et $\gamma - \delta = 1$, d'où $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\delta = -\frac{1}{2}$.

Donc $e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$, ses coordonnées dans \mathcal{B}' sont $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Matrice de passage inverse

Avec les mêmes bases que l'exercice 1, déterminer la matrice de passage Q de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Indication : Cette fois, il faut exprimer v_1 et v_2 dans la base canonique \mathcal{B} .

Solution.

C'est plus simple car on exprime dans la base canonique !

$v_1 = (1, 1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$, donc ses coordonnées dans \mathcal{B} sont $(1, 1)$.

$v_2 = (1, -1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$, donc ses coordonnées dans \mathcal{B} sont $(1, -1)$.

La matrice de passage de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut vérifier que $P \cdot Q = I_2$ (matrice identité), ce qui confirme que $Q = P^{-1}$.

Méthode

Comment changer les coordonnées d'un vecteur ?

Soit v un vecteur de E , et soient X ses coordonnées dans \mathcal{B} et X' ses coordonnées dans \mathcal{B}' .

Si P est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , alors :

$$X' = P \cdot X$$

Autrement dit : pour obtenir les coordonnées dans la nouvelle base, on multiplie les anciennes coordonnées par la matrice de passage.

Propriétés importantes :

- La matrice de passage est **toujours inversible**.
- $(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$
- Pour revenir en arrière : $X = P^{-1} \cdot X'$

Exercice 3 : Changement de coordonnées

On reprend les bases de l'exercice 1. Soit $v = (3, 1)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 (coordonnées dans la base canonique \mathcal{B}).

Quelles sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$?

Solution.

On utilise la formule $X' = P \cdot X$ avec $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la matrice P calculée à l'exercice 1 :

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de v dans \mathcal{B}' sont $(2, 1)$.

Vérification : $2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 2(1, 1) + 1(1, -1) = (2, 2) + (1, -1) = (3, 1)$

Exercice 4 : Dans \mathbb{R}^3

Dans \mathbb{R}^3 , on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$f_1 = (1, 0, 1), \quad f_2 = (0, 1, 1), \quad f_3 = (1, 1, 0)$$

Déterminer la matrice de passage Q de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Solution.

On exprime les vecteurs de \mathcal{B}' dans la base canonique \mathcal{B} :

- $f_1 = (1, 0, 1)$ a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ dans \mathcal{B} .
- $f_2 = (0, 1, 1)$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ dans \mathcal{B} .
- $f_3 = (1, 1, 0)$ a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ dans \mathcal{B} .

La matrice de passage de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} est donc :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Quand on passe **vers** la base canonique, les colonnes sont simplement les coordonnées des vecteurs de la base de départ !

Méthode

Formule de changement de base pour une matrice

Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire. Si A est la matrice de f dans la base \mathcal{B} et A' est la matrice de f dans la base \mathcal{B}' , alors :

$$A' = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Interprétation : Pour exprimer f dans une nouvelle base :

1. On traduit de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} (multiplication par P)
2. On applique f dans \mathcal{B} (multiplication par A)
3. On traduit de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' (multiplication par P^{-1})

Exercice 5 : Changement de base d'une matrice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .

Indication : Utiliser la formule $A' = P^{-1}AP$ avec P la matrice de passage de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Solution.

La matrice de passage de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} est (voir exercice 2) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1} . Le déterminant de P est $\det(P) = -1 - 1 = -2$, donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculons AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Puis $A' = P^{-1}(AP)$:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice A' est diagonale ! Cela signifie que v_1 et v_2 sont des vecteurs propres de f , avec pour valeurs propres 4 et 2 respectivement.

Exercice 6 : Application géométrique

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans \mathbb{R}^2 . Sa matrice dans la base canonique est :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$ (c'est la même que la base canonique!).

Quelle est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' ? Quelle est la matrice de r dans \mathcal{B}' ?

Solution.

Puisque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ (mêmes vecteurs), la matrice de passage est la matrice identité :

$$P = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de r dans \mathcal{B}' est donc :

$$R' = P^{-1}RP = I_2^{-1} \cdot R \cdot I_2 = R$$

C'est logique : si on ne change pas de base, la matrice reste la même!