Analyse et Algèbre - TD2

Espaces L^p

Exercice 1 : Application directe

On définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}, \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}, \qquad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{3ix} \end{cases}, \qquad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{ix}e^{-x} \end{cases}$$

Pour chacun des espaces L^p suivants, déterminer si f_1, f_2, f_3, ou f_4 appartiennent à cet espace. Si c'est le cas, donner sa norme L^p.

$$L^1(\mathbb{R}_+^*), \quad L^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad L^1(]0,1[), \quad L^2(]0,1[), \quad L^1(]1,+\infty[), \quad L^2(]1,+\infty[)$$

Solution.

Étudions chaque espace.

Pour $L^1(\mathbb{R}_+^*)$: Seule la fonction f_4 appartient à $L^1(\mathbb{R}_+^*)$:

$$\int_0^\infty |e^{ix}e^{-x}|dx = \int_0^\infty e^{-x} = 1$$

Pour $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$: Seules f_3 et f_4 appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, et on a

$$\|f_3\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^*} |e^{3ix}| = 1$$

$$\|f_4\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^*} |e^{ix}e^{-x}| = 1$$

Pour $L^1(]0,1[)$: 3 fonctions appartiennent à $L^1(]0,1[)$:

- f_2 et $\|f_2\|_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$
- f_3 et $\|f_3\|_1 = \int_0^1 |e^{3ix}|dx = 1$
- f_4 et $\|f_4\|_1 = \int_0^1 |e^{ix}e^{-x}|dx = 1 - e^{-1}$

Pour $L^2(]0,1[)$: 2 fonctions appartiennent à $L^2(]0,1[)$:

- f_3 et $\|f_3\|_2 = \left(\int_0^1 |e^{3ix}|^2dx\right)^{1/2} = 1$
- f_4 et $\|f_4\|_2 = \left(\int_0^1 |e^{ix}e^{-x}|^2dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 e^{-2x}dx\right)^{1/2}$ D'où

$$\|f_4\|_2 = \sqrt{\frac{1-e^{-2}}{2}}$$

Pour $L^1(]1,+\infty[)$: La fonction f_4 est la seule fonction à appartenir à $L^1(]1,+\infty[)$:

$$\int_1^\infty |f_4(x)|dx = \int_1^\infty e^{-x}dx = e^{-1}$$

Pour $L^2(]1,+\infty[)$ **:** 2 fonctions appartiennent à $L^2(]1,+\infty[)$:

— f_1 et $\|f_1\|_2 = \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx\right)^{1/2} = 1$

— f_4 et $\|f_4\|_2 = \left(\int_1^{+\infty} |e^{ix}e^{-x}|^2dx\right)^{1/2} = \left(\int_1^{+\infty} e^{-2x}dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{e^{-2}}{2}}$

Exercice 2 : Convergences

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{n}\,\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$$

où $\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\frac{1}{n}]$:

$$\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,\frac{1}{n}] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,\frac{1}{n}] \end{cases}$$

1. Représenter les graphes des fonctions f_1, f_2, f_3.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1]$.

Solution.

Pour $x \in]0,1]$ fixé, on a $f_n(x) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) = 0$ à partir d'un certain rang.

3. Calculer $\|f_n\|_p$ pour tout $p > 1$ et $p = \infty$. En déduire que (f_n) converge dans $L^1(]0,1[)$ mais pas dans $L^2(]0,1[)$, ni dans $L^\infty(]0,1[)$.

Solution.

Pour $p > 1$,

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n^{p/2}dx\right)^{1/p} = \frac{\sqrt{n}}{n^{1/p}}$$

Ainsi, si $p = 1$, $\|f_n\|_1 = 1/\sqrt{n} \to 0$ et $\|f_n\|_1$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. La fonction converge donc dans $L^1(]0,1[)$.

Pour $p = 2$, $\|f_n\|_2 = 1$ donc $\|f_n\|_2$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$. La fonction ne converge donc pas dans $L^2(]0,1[)$.

Pour $p = \infty$, $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. La fonction ne converge donc pas dans $L^\infty(]0,1[)$.

Exercice 3 : Inégalité de Hölder

Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. **L'inégalité de Hölder** affirme que pour toutes fonctions $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

1. Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors $\int_\Omega |fg| \leq \sqrt{\int_\Omega |f|^2 \cdot \int_\Omega |g|^2}$ et $fg \in L^1(\Omega)$.

Solution.

On applique l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$ (ils vérifient bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) :

$$\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\int_\Omega |f|^2}\sqrt{\int_\Omega |g|^2}$$

2. Les espaces L^p sont fondamentaux en ingénierie pour caractériser différents aspects d'un signal ou d'une fonction physique. Considérons un signal électrique $I(t)$ représentant l'intensité du courant en fonction du temps $t \in [0, T]$.

— La norme L^1 : $\|I\|_1 = \int_0^T |I(t)|dt$ représente la **charge totale** transportée par le courant.

— La norme L^2 : $\|I\|_2 = \left(\int_0^T |I(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ représente l'**énergie** du signal.

— La norme L^∞ : $\|I\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |I(t)|$ représente l'**amplitude maximale** du signal (contrainte de sécurité).

Soit $I(t) = A\sin(\omega t)$ pour $t \in [0, T]$ avec $A > 0$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Calculer $\|I\|_1$, $\|I\|_2$ et $\|I\|_\infty$. Que représentent ces valeurs ?

Solution.

Calculons les trois normes :

Norme L^∞ :

$$\|I\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |A\sin(\omega t)| = A$$

Cette valeur représente l'amplitude crête du courant, importante pour dimensionner les composants électriques (résistances, condensateurs, etc.).

Norme L^2 :

$$\|I\|_2^2 = \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t)dt = A^2 \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = A^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_0^T$$

Comme $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on a $2\omega T = 4\pi$, donc $\sin(4\pi) = 0$. Ainsi :

$$\|I\|_2^2 = A^2 \cdot \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad \|I\|_2 = A\sqrt{\frac{T}{2}}$$

Cette valeur est liée à l'énergie du signal. En ingénierie, on utilise souvent la valeur efficace (RMS) : $I_{\text{eff}} = \frac{\|I\|_2}{\sqrt{T}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$, qui correspond à la valeur du courant continu qui produirait la même puissance moyenne.

Norme L^1 :

$$\|I\|_1 = \int_0^T A|\sin(\omega t)|dt = A\int_0^T |\sin(\omega t)|dt$$

Sur une période complète, $\sin(\omega t)$ est positif sur $[0, T/2]$ et négatif sur $[T/2, T]$, donc :

$$\|I\|_1 = A\left(\int_0^{T/2} \sin(\omega t)dt - \int_{T/2}^T \sin(\omega t)dt\right) = A\left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^{T/2} - A\left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_{T/2}^T$$

$$= \frac{A}{\omega}\left(-\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi)\right) = \frac{A}{\omega} \cdot 4 = \frac{2AT}{\pi}$$

Cette valeur représente la charge totale transportée (en valeur absolue) sur la période, utile pour dimensionner les batteries ou les condensateurs.

Conclusion : Les différentes normes L^p capturent différents aspects du signal, chacun essentiel pour différentes applications en ingénierie : dimensionnement des composants (L^∞), calcul de puissance (L^2), et gestion de l'énergie (L^1).

Exercice 4 : L^2 et son produit scalaire

On rappelle que $L^2([a,b])$ est muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

1. Montrer que ce produit scalaire vérifie bien les axiomes d'un produit scalaire :
   - Symétrie : $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
   - Linéarité : $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$
   - Positivité : $\langle f, f\rangle \geq 0$ et $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.

Solution.

- Symétrie : $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle$
- Linéarité : $\langle \alpha f+\beta g, h\rangle = \int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))h(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)h(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)h(x)\,dx = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$
- Positivité : $\langle f, f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$ et f^2 est donc une fonction positive d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle presque partout. Donc $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.

2. A l'aide de l'exercice précédent, retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\|g\|_2$.

Solution.

On applique l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$:

$$|\langle f, g\rangle| \leq \int |fg| \leq \|f\|_2\|g\|_2$$

3. Soient f et g deux fonctions orthogonales, montrer que (théorème de Pythagore) :

$$\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

Solution.

C'est vrai dans tous les espaces munis d'un produit scalaire, en particulier dans L^2. En distribuant le produit scalaire par double linéarité, on obtient

$$\|f+g\|_2^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $f_n :]0,1[\to \mathbb{C}$ définie par $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$. Dans les espaces à valeurs complexes, on rappelle que le produit scalaire doit être sesquilinéaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

4. Montrer que $f_n \in L^2(]0,1[)$ et calculer $\|f_n\|_2$.

Solution.

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 1 dx\right)^{1/2} = 1$$

5. Montrer que (f_n) est une famille orthogonale de $L^2(]0,1[)$.

Solution.

Prenons $n \neq m$.

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_0^1 e^{2i\pi nx}e^{-2i\pi mx}dx = \int_0^1 e^{2i\pi(n-m)x}dx = \left[\frac{e^{2i\pi(n-m)x}}{2i\pi(n-m)}\right]_0^1 = 0$$

Donc (f_n) est une famille orthogonale.

6. **Introduction aux séries de Fourier.** Pour une fonction $f \in L^2(]0,1[)$, on définit les **coefficients de Fourier** de f par :

$$c_n = \langle f, f_n\rangle = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

La **série de Fourier** de f est alors définie comme la somme (formelle) :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$$

Soit $f(x) = \sin(12\pi x)$. Montrer que $f \in L^2(]0,1[)$ et calculer les coefficients de Fourier $c_n = \langle f, f_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution.

Regardons le produit scalaire de f avec chacun des f_n :

$$c_n = \langle f, f_n\rangle = \int_0^1 \sin(12\pi x)e^{-2i\pi nx}dx$$

On peut écrire le sinus à l'aide d'exponentielles complexes :

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Ainsi,

$$c_n = \langle f, f_n\rangle = \int_0^1 \frac{e^{12i\pi x} - e^{-12i\pi x}}{2i}e^{-2i\pi nx}dx = \frac{1}{2i}\Big(\langle f_6, f_n\rangle - \langle f_{-6}, f_n\rangle\Big)$$

Ainsi,

- Si n est différent de 6 ou -6, $c_n = 0$.
- Si $n = 6$, $c_6 = \frac{1}{2i}$
- Si $n = -6$, $c_{-6} = -\frac{1}{2i}$

7. Soit f la fonction 1-périodique définie sur $[0,1[$ par $f(x) = x$. Montrer que $f \in L^2(]0,1[)$ et calculer les coefficients de Fourier $c_n = \langle f, f_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution.

La fonction f est bornée sur $[0,1[$, donc $f \in L^2(]0,1[)$.

Calculons les coefficients de Fourier :

$$c_n = \langle f, f_n \rangle = \int_0^1 x e^{-2i\pi nx} dx$$

Pour $n = 0$:

$$c_0 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Pour $n \neq 0$, on utilise une intégration par parties avec $u = x$ et $dv = e^{-2i\pi nx} dx$:

$$c_n = \left[x \cdot \frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n} dx$$

$$c_n = \frac{e^{-2i\pi n}}{-2i\pi n} + \frac{1}{2i\pi n} \int_0^1 e^{-2i\pi nx} dx$$

Comme $e^{-2i\pi n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$c_n = \frac{1}{-2i\pi n} + \frac{1}{2i\pi n} \left[\frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n} \right]_0^1 = \frac{1}{-2i\pi n} + \frac{1}{2i\pi n} \cdot \frac{1-1}{-2i\pi n} = -\frac{1}{2i\pi n}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

- $c_0 = \frac{1}{2}$
- Pour $n \neq 0$, $c_n = -\frac{1}{2i\pi n}$

8. Écrire la série de Fourier de $f(x) = x$ sous la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$. Que peut-on dire de cette série ? On pourra exprimer le résultat en termes de sinus.

Solution.

D'après la question précédente, la série de Fourier de f est :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx} = c_0 + \sum_{n\neq 0} c_n e^{2i\pi nx} = \frac{1}{2} + \sum_{n\neq 0} \left(-\frac{1}{2i\pi n} \right) e^{2i\pi nx}$$

En regroupant les termes n et $-n$ pour $n > 0$, on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi n} \left(e^{2i\pi nx} - e^{-2i\pi nx} \right)$$

En utilisant la relation $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$, on trouve :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$$

Cette série de Fourier est une série infinie qui converge vers $f(x) = x$ (sauf aux points de discontinuité où elle converge vers la moyenne des limites à gauche et à droite, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$). C'est un exemple classique où une fonction non sinusoïdale est décomposée en une somme infinie de sinusoïdes.

Exercice 5 : Vers le produit de convolution

Pour deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$, on construit la fonction h suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt$$

Cette opération réalise une sorte de moyenne de la fonction f par la fonction g.

1. Si f est intégrable et si g est une fonction de $L^{\infty}(\mathbb{R})$, montrer que h est une fonction bornée.

Solution.

Par définition, g est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$|h(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|dt \leq M \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = M\|f\|_1$$

Ainsi, h est aussi bornée.

2. Si f est intégrable et si g est la fonction $g = 1$ constante, que vaut h ?

Solution.

Dans ce cas,

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt$$

Ainsi, h est une fonction constante.

3. Montrer que si f et g sont toutes les deux intégrables, alors h l'est aussi et $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. On pourra séparer les intégrales et effectuer un changement de variable.

   Nous verrons tout l'intérêt de cette fonction dans la suite du cours.

Solution.

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\right| dx \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,|g(x-t)|dtdx = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|dx\right)dt$$

En faisant le changement de variable $u = x - t$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)|du\right)dt = \|f\|_1\|g\|_1$$