Algèbre linéaire - Chapitre 4
Applications linéaires

4.4 Matrice d'une application linéaire

idée générale :
Pour connaître une application linéaire, il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base.

Toute application linéaire $f : E \to F$ peut être décrite par un tableau de nombres, codant les images des vecteurs de la base de E.

Méthode

Comment construire la matrice d'une application linéaire ?

1. **Identifier une base de l'espace de départ** E. Par exemple, la base canonique :
   - Pour $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
   - Pour $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
   - Pour $\mathbb{R}_2[X]$: $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$.

2. **Calculer les images** de ces vecteurs par l'application f :

$$f(e_1), \quad f(e_2), \quad f(e_3), \quad \ldots$$

3. **Décomposer ces images dans une base** de l'espace d'arrivée.
   Quelles sont les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base de F ?

4. **Remplir les colonnes** de la matrice avec ces coordonnées :
   La première colonne contient les coordonnées du vecteur $f(e_1)$, la deuxième les coordonnées de $f(e_2)$, etc.
   Si f va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, la matrice aura m lignes et n colonnes.

4.5 Exercices d'application

Exercice 1 : Le cas standard

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

Calculez d'abord $f(1, 0)$, puis $f(0, 1)$.

Solution.

Dans la base canonique (e_1, e_2) avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$:

$$f(e_1) = f(1, 0) = (2, 1), \qquad f(e_2) = f(0, 1) = (-3, 4).$$

La matrice de f dans la base canonique a pour colonnes les coordonnées de $f(e_1)$ puis de $f(e_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Changement de dimension

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y, z) = (x + y, y - z)$. Déterminer la matrice B associée à g.

Indication : L'espace de départ est $\mathbb{R}^3$, il y aura donc 3 colonnes $(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$. L'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^2$, il y aura donc 2 lignes.

Solution.

Dans les bases canoniques, avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$g(e_1) = g(1, 0, 0) = (1, 0), \quad g(e_2) = g(0, 1, 0) = (1, 1), \quad g(e_3) = g(0, 0, 1) = (0, -1).$$

La matrice B (2 lignes, 3 colonnes) a ces vecteurs comme colonnes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Méthode

Comment calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire ? Pour calculer l'image d'un vecteur X via une application linéaire f représentée par une matrice A, il suffit de faire le produit matrice-vecteur :

$$f(X) = A \cdot X$$

où X est vu comme une colonne de coordonnées dans la base choisie.

— Écrire le vecteur X sous forme de colonne :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— Multiplier la matrice A par X pour obtenir le vecteur image Y :

$$Y = A \cdot X$$

— Les coordonnées de Y donnent $f(X)$ dans la base de l'espace d'arrivée.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+4y \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : De la matrice à la formule

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner l'expression de $h(x,y)$.

Solution.

Si la matrice de h dans la base canonique est $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$h(x,y) = C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ -1 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{h(x,y) = (y,-x)}$.

Exercice 4 : Cas général

Soit $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $k(x_1,\ldots,x_n) = x_1$. Quelle est la forme de la matrice associée ?

Indication : C'est une application qui va dans $\mathbb{R}$ (une seule composante), la matrice n'aura donc qu'une seule ligne (matrice ligne).

Solution.

On se place dans les bases canoniques. On calcule l'image des vecteurs de base $(e_1,\ldots,e_n)$:

$$k(e_1) = 1, \qquad k(e_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad k(e_n) = 0.$$

La matrice associée (matrice ligne $1 \times n$) a donc pour colonnes ces nombres, ce qui revient à :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}.$$