Analyse et Algèbre - TD5

Distributions

Exercice 1 : Manipulation de distributions

On considère la fonction
$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le support de la fonction ψ. La fonction ψ est-elle dans $\mathbb{D}$?
   On pourra étudier $\psi(-1+h)$ et $\psi(1-h)$, avec h un réel positif qui tend vers 0.
2. En déduire une fonction $\varphi \in \mathbb{D}$ dont le maximum est 3 et dont le support est $[-2, 2]$.

   On définit les distributions suivantes :
$$T_1 = \delta_0, \quad T_2 = \delta_{-1} + \delta_1, \quad T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx, \quad T_4(\varphi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\varphi(x)dx$$
3. Quelles valeurs associent-elles à la fonction ψ et à la fonction φ ?
4. Pour chaque distribution ci-dessus, existe-t-il une fonction f localement intégrable telle que $T(\varphi) = \int f\varphi$?
5. Les fonctions $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ suivantes sont-elles des distributions ?
$$T_1(\varphi) = \frac{1}{\varphi(0)}, \quad T_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx$$

Il n'est pas facile de calculer les intégrales issues des distributions, le but de cette théorie n'est pas d'effectuer des calculs sur les fonctions $\mathbb{C}^\infty$ à support compact, on n'explicitera plus jamais de telle fonction φ.

Exercice 2 : Dériver une distribution

1. Soit T_1 la distribution associée à la fonction $f(x) = \text{signe}(x)$. C'est-à-dire : si φ est une fonction $\mathbb{C}^\infty$ à support compact,
$$T_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{signe}(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^{\infty} \varphi(x)dx$$
   Calculer la dérivée de T_1 de deux manières différentes :
   (a) En utilisant la définition de la dérivée d'une distribution.
   (b) En utilisant la formule des sauts.
2. Soit T_2 la distribution associée à la fonction $g(x) = |x|$. Calculer la dérivée de T_2.
3. Soit T_3 la distribution associée à la fonction $h(x) = x^2$. Calculer la dérivée de T_3.

Exercice 3 : Multiplication par une fonction

Soit T une distribution et ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, φ une fonction $\mathbb{C}^\infty$ à support compact.

1. Montrer que $S(\varphi) = T(\psi\varphi)$ est bien une application de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Que vaut alors S' ?
3. Soit (T_n) une suite de distributions qui converge vers T, c'est-à-dire que $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer que (T_n') converge vers T'.

Exercice 4 : La valeur principale

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la distribution associée à $\ln|x|$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tel que le support de φ soit contenu dans $[-a, a]$. Notons T la distribution associée à la fonction $\ln|x|$. Explicitez l'intégrale définissant $T'(\varphi)$.
2. La fonction logarithme pose problème au voisinage de 0, nous allons définir ε et écrire

$$\int_{-a}^{a} \ln|x|\varphi'(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{a} \ln(x)\varphi'(x)dx \right)$$

   Traiter les deux intégrales séparément pour un ε fixé et intégrer par parties.
3. Certains termes se simplifient quand ε tend vers 0, simplifiez au maximum.

La distribution $S(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ *est appelée la valeur principale.*

Exercice 5 : Encore plus de Diracs

Calculer explicitement $\left\langle x^\alpha \partial^\beta \delta_p, \phi \right\rangle$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, où α et β sont des entiers et δ_p est la masse de Dirac au point $p \in \mathbb{R}$.

Quel est le support de $x^\alpha \partial^\beta \delta_p$?

Exercice 6 : Limites de distributions

On considère la fonction $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\chi(x) = 1$ si $x \in [-1, 1], \chi(x) = 0$ sinon.

1. Dire pourquoi la fonction χ définit donc une distribution $T_\chi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et rappeler la définition de T_χ.
2. On définit la suite (χ_n) par $\chi_n(x) = \frac{n}{2}\chi(nx)$. Déterminer la limite de (χ_n) au sens des distributions (i.e trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions (T_{χ_n}) associées à (χ_n)).
3. On définit la suite (ξ_n) par $\xi_n(x) = \chi(x-n)$. Déterminer la limite de (ξ_n) au sens des distributions (i.e trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de distributions (T_{ξ_n}) associées à (ξ_n)).

Soit p_ϵ définie par

$$p_\epsilon = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}[\cup]\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, 1\right] \\ \frac{1}{\epsilon} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right] \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{\epsilon \to 0} p_\epsilon = \delta_{\frac{1}{2}}$ dans $\mathcal{D}'([0, 1[)$.