ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 3	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Barème	4 pts	4 pts	4 pts	3 pts	5 pts	**20 pts**

Exercice 1 : Convergence de séries *(4 points)*

Étudier la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes. Justifier soigneusement chaque réponse.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^n}{5^n}$ *(1 pt)*
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ *(1 pt)*
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}$ *(1 pt)*
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^3+2n+\cos(n)}$ *(1 pt)*

Exercice 2 : Noyau et image *(4 points)*

Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$h(x,y,z) = (x - y + 2z, 3x - 3y + 6z)$$

1. Écrire la matrice B de h dans les bases canoniques. *(0.5 pt)*
2. Déterminer le noyau $\ker(h)$. Donner une base et la dimension. *(2 pts)*
3. Déterminer l'image Im(h). Donner une base et la dimension. *(1.5 pts)*

Exercice 3 : Algèbre linéaire *(4 points)*

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. *(1.5 pts)*
2. Écrire F avec le mot clé "Vect", donner une base et la dimension. *(1 pt)*
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(x, y) = (2x - y, x + 3y, x - y)$.
   Montrer que φ est une application linéaire. *(1 pt)*
4. Écrire la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. *(0.5 pt)*
5. Soit $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
   Calculer la matrice A' de φ dans les bases $\mathcal{B}$ (départ) et $\mathcal{B}'$ (arrivée). *(0.5 pt)*

Exercice 4 : Série télescopique et comparaison *(3 points)*

1. Décomposer $\frac{1}{n(n+2)}$ en éléments simples. *(0.5 pt)*
   Montrer que : $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$
2. En déduire la valeur de la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$. *(1 pt)*
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. *(0.5 pt)*
4. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ converge. *(1 pt)*
   Indication : On pourra montrer que pour $x \in [n, n+1]$ *:* $\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \leq \dfrac{1}{x \ln^2(x)} \leq \dfrac{1}{n \ln^2(n)}$,
   puis utiliser le changement de variable $u = \ln(x)$ *dans l'intégrale.*

Exercice 5 : Calcul différentiel et intégrales curvilignes *(5 points)*

1. Soit $f(x, y) = x^3 - xy^2 + \ln(xy)$ (définie pour $xy > 0$). Calculer la différentielle df. *(1 pt)*
2. Soit $g(x, y, z) = x^2 y + yz^2 - xz$. Calculer le gradient ∇g. *(0.5 pt)*
3. Soit $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 z, xz^2)$. Calculer la matrice jacobienne de $\vec{F}$ et la divergence div$(\vec{F})$. *(1.5 pts)*
4. Soit $\vec{H}(x, y) = (3x^2 + 2y, 2x - 4y)$.
   Montrer que $\vec{H}$ dérive d'un potentiel scalaire et déterminer ce potentiel. *(1 pt)*
5. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$
   où C est le segment de droite allant de $(1, 0)$ à $(0, 2)$, parcouru dans ce sens. *(1 pt)*