Analyse et Algèbre - TD5

Distributions

Exercice 1 : Le Dirac et la fonction de Heaviside

On rappelle que la distribution de Dirac δ_a est définie par $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(Rappel : une fonction test est une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.)

Les fonctions φ suivantes n'appartiennent pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'objectif de cet exercice est purement pédagogique.

1. Calculer $\langle \delta_0, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$.

   Solution.
   $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1$.

2. Calculer $\langle \delta_2, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

   Solution.
   $\langle \delta_2, \varphi \rangle = \varphi(2) = e^{-4}$.

3. Calculer $\langle \delta_{-1} + 2\delta_3, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = \cos(\pi x)$.

   Solution.
   $\langle \delta_{-1} + 2\delta_3, \varphi \rangle = \varphi(-1) + 2\varphi(3) = \cos(-\pi) + 2\cos(3\pi) = -1 + 2(-1) = -3$.

On note H la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. Calculer $\langle H, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = e^{-x}$.

   Indication : on rappelle l'action d'une distribution sur une fonction test : $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi(x)dx$.

   Solution.
   $\langle H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

5. Calculer $\langle H + 2\delta_{-\pi}, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = \cos(x)$.

   Solution.
   $\langle H + 2\delta_{-\pi}, \varphi \rangle = \langle H, \varphi \rangle + 2\langle \delta_{-\pi}, \varphi \rangle = 1 + 2\cos(-\pi) = 1 + 2(-1) = -1$.

Exercice 2 : Dériver des fonctions discontinues

Montrer que la dérivée (au sens des distributions) de la fonction de Heaviside H est égale à δ_0.

Indication : Utiliser la définition $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$.

Solution.

Par définition de la dérivée d'une distribution :

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$

Comme φ est à support compact, $\varphi(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc :

$$\langle H', \varphi \rangle = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = -\left(0 - \varphi(0)\right) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Ainsi $H' = \delta_0$.

On peut aussi calculer la dérivée des distributions en utilisant nos connaissances sur les dérivées classiques : On dérive quand c'est possible et ajoute des diracs aux points de discontinuité. Voir dans le dernier cours pour un exemple.

Pour chaque fonction f suivante, calculer sa dérivée au sens des distributions en utilisant la formule des sauts :

$$f' = \{f'\} + \sum_k \sigma_k \delta_{a_k}$$

où $\{f'\}$ désigne la dérivée classique de f là où elle existe, et $\sigma_k = f(a_k^+) - f(a_k^-)$ est le saut en a_k.

1. $f(x) = H(x-1)$ (Heaviside translatée)

Solution.

La fonction $H(x-1)$ vaut 0 pour $x < 1$ et 1 pour $x \geq 1$.

- La dérivée classique est nulle sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. - Il y a un saut en $x = 1$ de valeur $\sigma = 1 - 0 = 1$.

Donc $f' = \delta_1$.

2. $f(x) = H(x) - H(x-2)$ (fonction porte sur $[0, 2]$)

Solution.

Cette fonction vaut 1 sur $[0, 2[$ et 0 ailleurs.

- La dérivée classique est nulle partout où f est continue. - Saut en $x = 0$: $\sigma_0 = 1 - 0 = 1$. - Saut en $x = 2$: $\sigma_2 = 0 - 1 = -1$.

Donc $f' = \delta_0 - \delta_2$.

3. $f(x) = xH(x)$ (rampe)

Solution.

- La dérivée classique est 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$, soit $\{f'\} = H(x)$. - Il n'y a pas de saut en $x = 0$ car $f(0^-) = 0$ et $f(0^+) = 0$.

Donc $f' = H(x)$ (pas de Dirac car la fonction est continue).

4. $f(x) = x^2 H(x)$

Solution.

- La dérivée classique est 0 pour $x < 0$ et $2x$ pour $x > 0$, soit $\{f'\} = 2x \cdot H(x)$. - Pas de saut en $x = 0$ car $f(0^-) = 0 = f(0^+)$.

Donc $f' = 2x \cdot H(x)$.

Exercice 3 : Équation différentielle avec second membre impulsionnel

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y' + 2y = \delta_0$$

où y est une distribution.

1. Quelle est l'interprétation physique de cette équation ?

Solution.

Cette équation modélise un système linéaire du premier ordre (circuit RC, système mécanique amorti) soumis à une impulsion instantanée à $t = 0$. Le terme δ_0 représente une excitation de durée infiniment courte mais d'intensité infinie (comme un choc ou une décharge électrique).

2. On cherche y sous la forme $y = f \cdot H$ où f est une fonction continue et H la fonction de Heaviside. Calculer y' au sens des distributions.

Solution.

On utilise la règle de dérivation d'un produit au sens des distributions. Si $y = f \cdot H$:

$$y' = f' \cdot H + f \cdot H' = f' \cdot H + f(0)\delta_0$$

car $H' = \delta_0$ et $f(x)\delta_0 = f(0)\delta_0$.

3. En substituant dans l'équation, montrer que f doit vérifier $f' + 2f = 0$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer $f(0)$.

Solution.

En substituant $y = fH$ dans l'équation :

$$f'H + f(0)\delta_0 + 2fH = \delta_0$$

Soit :

$$(f' + 2f)H + f(0)\delta_0 = \delta_0$$

En identifiant :

— La partie régulière (coefficient de H) : $f' + 2f = 0$ sur $]0, +\infty[$.

— La partie singulière : $f(0) = 1$.

4. Résoudre l'équation différentielle $f' + 2f = 0$ et en déduire y.

Solution.

L'équation $f' + 2f = 0$ a pour solution générale $f(t) = Ce^{-2t}$.

Avec la condition $f(0) = 1$, on obtient $C = 1$, donc $f(t) = e^{-2t}$.

La solution est :

$$\boxed{y(t) = e^{-2t}H(t)}$$

C'est la réponse impulsionnelle du système : nulle pour $t < 0$, égale à e^{-2t} pour $t \geq 0$.

5. Vérifier que cette solution est correcte en calculant $y' + 2y$.

Solution.

Calculons $y' + 2y$ avec $y = e^{-2t}H(t)$:

$$y' = -2e^{-2t}H + e^{-2\cdot 0}\delta_0 = -2e^{-2t}H + \delta_0$$

Donc :

$$y' + 2y = -2e^{-2t}H + \delta_0 + 2e^{-2t}H = \delta_0 \quad \checkmark$$

Exercice 4 : Équation du second ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y'' + y = \delta_0$$

1. On cherche y sous la forme $y = f(t)H(t)$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Calculer y' et y'' au sens des distributions.

Solution.

$y' = f'H + f(0)\delta_0$

Pour y'', on dérive y' :

$$y'' = f''H + f'(0)\delta_0 + f(0)\delta_0'$$

où δ_0' est la dérivée du Dirac.

2. En substituant et en supposant $f(0) = 0$ (pour éviter le terme en δ_0'), montrer que f doit vérifier $f'' + f = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Solution.

En substituant :

$$f''H + f'(0)\delta_0 + f(0)\delta_0' + fH = \delta_0$$

Avec $f(0) = 0$, le terme en δ_0' disparaît :

$$(f'' + f)H + f'(0)\delta_0 = \delta_0$$

En identifiant :

— $f'' + f = 0$ sur $]0, +\infty[$

— $f'(0) = 1$

3. En déduire la solution y.

Solution.

L'équation $f'' + f = 0$ a pour solution générale $f(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

Avec $f(0) = 0$: $A = 0$.

Avec $f'(0) = 1$: $f'(t) = B\cos(t)$, donc $B = 1$.

La solution est :

$$\boxed{y(t) = \sin(t) \cdot H(t)}$$

Exercice 5 : Manipulations de fonctions test

On considère la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le support de la fonction ψ. La fonction ψ est-elle dans $\mathbb{D}$?
   On pourra étudier $\psi(-1+h)$ et $\psi(1-h)$, avec h un réel positif qui tend vers 0.

Solution.

Pour $|x| < 1$, on a $\psi(x) = e^{-1/(1-x^2)} > 0$.

Étudions le comportement aux bords :

— $\psi(1-h) = e^{-1/(1-(1-h)^2)} = e^{-1/(2h-h^2)} \to 0$ quand $h \to 0^+$ car $2h - h^2 \to 0^+$.

— De même, $\psi(-1+h) \to 0$.

Le support de ψ est $[-1, 1]$.

Pour vérifier que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, il faudrait montrer que toutes les dérivées de ψ sont continues et que le support de ψ est compact. Il faudrait pour cela exprimer la dérivée n-ième de ψ et vérifier que toutes les dérivées sont continues.

Contentons-nous de vérifier que la dérivée première est continue :

$$\psi'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-1/(1-x^2)}$$

qui tend bien vers 0 quand $x \to \pm 1$.

2. En déduire une fonction $\varphi \in \mathbb{D}$ dont le maximum est 3 et dont le support est $[-2, 2]$.

Solution.

Le maximum de ψ est atteint en $x = 0$ et vaut $\psi(0) = e^{-1}$.

On pose $\varphi(x) = 3e \cdot \psi(x/2)$.

— Le support de φ est $[-2, 2]$ (dilatation par 2).

— Le maximum vaut $\varphi(0) = 3e \cdot e^{-1} = 3$.

On définit les distributions suivantes :

$$T_1 = \delta_0, \quad T_2 = \delta_{-1} + \delta_1, \quad T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx, \quad T_4(\varphi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\varphi(x)dx$$

3. Quelles valeurs associent-elles à la fonction ψ ?

Solution.

— $T_1(\psi) = \psi(0) = e^{-1}$

— $T_2(\psi) = \psi(-1) + \psi(1) = 0 + 0 = 0$

- $T_3(\psi) = \int_{-1}^{1} x\, e^{-1/(1-x^2)} dx = 0$ (fonction impaire)
- $T_4(\psi) = \int_{5}^{10} \sqrt{x}\psi(x) dx = 0$ (car $\psi = 0$ sur $[5, 10]$)