Méthode des éléments finis – TD3

Des éléments un peu plus complexes

Exercice 1 : Éléments de barre, ordre supérieur

On s'intéresse à l'équation de Laplace en 1D sur une barre de longueur L de section A et de module d'Young E. On considère une charge $f(x)$ appliquée à la barre.

$$-EA\,\Delta u = f(x)$$

avec $u(0) = 0$ et $u(L) = 1$.

1. Etablir la formulation variationnelle de l'équation différentielle pour l'écrire sous la forme

$$a(u, v) = \ell(v).$$

avec a une forme bilinéaire symétrique et ℓ une forme linéaire.

On découpe la barre en n éléments finis de longueur $h = \frac{L}{n}$:

$$x_0 = 0,\, x_1 = h,\, x_2 = 2h, \ldots, x_n = L$$

Eléments d'ordre 1 : La solution approchée sera cherchée sous la forme

$$u_h(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

où $\varphi_i(x)$ sont les fonctions d'interpolation et α_i sont les inconnues.

2. Rappelez l'expression de la matrice de rigidité élémentaire pour chaque élément fini.
3. Pour obtenir toutes les matrices de rigidité, en admettant qu'elles soient différentes sur tous les éléments, combien d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer ?
   Comparez ce nombre avec le nombre de noeuds du maillage.
4. Si on voulait doubler le nombre de points de discrétisation, en dédoublant le maillage, combien d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer ?

Essayons maintenant d'améliorer la solution en calculant moins d'intégrales :

On rappelle la formule générale pour un polynôme de Lagrange tel que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$:

$$\varphi_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}\,.$$

Element d'ordre 2 : On ajoute maintenant un noeud intermédiaire à chaque élément.

$$x_0 = 0,\, x_{1/2} = h/2,\, x_1 = h,\, x_{3/2} = 3h/2,\, x_2 = 2h, \ldots, x_{n-1/2} = (n-1)h/2,\, x_n = L$$

5. Comment est formée la solution approchée à partir des φ_* ?
6. Donner les expressions de φ_0, $\varphi_{1/2}$ et φ_1 entre 0 et h.

L'équation différentielle est toujours approchée par un système linéaire

$$K_e \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_{1/2} \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_0) \\ \ell(\varphi_{1/2}) \\ \ell(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

7. Donner la taille et l'expression de la matrice de rigidité élémentaire K_e.

8. Combien de calculs d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer par élément ?
9. Calculer le coefficient première ligne, première colonne de la matrice de rigidité élémentaire K_e.
10. Comparer les deux méthodes de raffinement du maillage.

11. On attribue une lettre pour chaque élément fini, a pour le premier, b pour le second, etc. Pour illustrer la construction de la matrice de rigidité globale, on utilise ces lettres pour les coefficients des matrices locales. Par exemple, pour 3 éléments d'ordre 1, la matrice de rigidité globale est assemblée comme suit :
$$\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & a+b & b & 0 \\ 0 & b & b+c & c \\ 0 & 0 & c & c \end{pmatrix}$$
(tous les coefficients notés a ne sont pas identiques mais on les note de la même façon pour simplifier l'écriture).

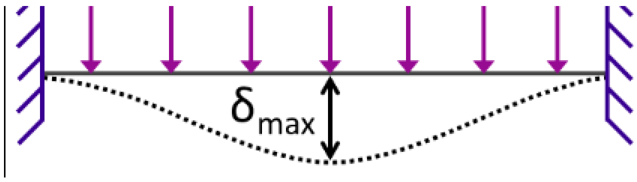
    Montrer comment s'assemble la matrice de rigidité globale pour 3 éléments d'ordre 2.

Element d'ordre 3 : On ajoute maintenant deux noeuds intermédiaires aux éléments finis.

12. Décrire les noeuds du maillage.
13. Comment est formée la solution approchée $u_h(x)$ à partir des φ_* ?
14. Déterminer les expressions formelles des polynômes de Lagrange pour le premier élément fini.
15. Donner la taille et l'expression de la matrice de rigidité élémentaire K_e.
16. Combien d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer par élément ?
17. Montrer comment s'assemble la matrice de rigidité globale pour 3 éléments d'ordre 3.

Exercice 2 : Éléments de poutre

On considère une poutre biencastrée soumise à une charge répartie uniformément.



Modélisation Mécanique : Une poutre en flexion subit des contraintes dues à une charge appliquée perpendiculairement à son axe longitudinal. Les principaux paramètres sont le module d'élasticité E, le moment d'inertie de la section I qu'on supposera constant, la longueur de la poutre L, et la distribution de la charge $q(x)$.

L'équation différentielle régissant le déplacement transversal $w(x)$ est :

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x),$$

où $w(x)$ est le déplacement transversal. Dans notre cas, la force q est répartie uniformément sur la poutre.

1. **Formulation Variationnelle** : Formulez le problème de flexion de la poutre en termes de formulation variationnelle.

Il y a cette fois deux inconnues par noeud :

— le déplacement transversal $w(x)$

— l'angle $\theta(x)$ qui est la dérivée première du déplacement transversal.

Pour écrire une solution approchée du problème w_h, il y aura donc deux types de polynômes interpolateurs :

— $\varphi_i(x)$ pour le déplacement transversal

— $\psi_i(x)$ pour l'angle.

Sur le premier élément fini, on cherchera alors $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ tels que

$$w(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \beta_0\psi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \beta_1\psi_1(x).$$

2. Que doivent vérifier les polynômes $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ pour que α_i soient bien les coefficients du déplacement transversal et β_i les coefficients de l'angle ?

   Ces polynômes sont appelés polynômes de Hermite et les expressions générales de ces polynômes sont les suivantes :

$$\varphi_i(X) = q_i(X)\left(1 - q_i'(x_i)(X - x_i)\right), \qquad \psi_i(X) = q_i(X)(X - x_i)$$

   avec $q_i(X) = (L_i(X))^2$, où $L_i(X) = \prod_{j\neq i} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$ est le polynôme de Lagrange associé à x_i.

   Remarquez que $q_i' = 2L_i'L_i$, puis vérifiez que ces polynômes satisfont les bonnes conditions

3. Exprimer les polynômes de Hermite pour le premier élément du maillage.

4. Le vecteur des inconnus est formé par $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$. Exprimez la matrice de rigidité élémentaire K_e.

5. Choisisser un coefficient dans la matrice et calculer l'intégrale. vous devriez trouver un coefficient en accord avec la forme suivante :

$$K_e = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix}$$

6. Ecrivez la matrice globale après assemblage en considérant trois éléments.