
Algèbre linéaire - Chapitre 4

Applications linéaires

4.3 Matrice d'une application linéaire

idée générale :

Pour connaître une application linéaire, il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base.

Toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ peut être décrite par un tableau de nombres, codant les images des vecteurs de la base de E .

Méthode

Comment construire la matrice d'une application linéaire ?

1. **Identifier une base de l'espace de départ E .** Par exemple, la base canonique :

- Pour \mathbb{R}^2 : $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
- Pour \mathbb{R}^3 : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
- Pour $\mathbb{R}_2[X]$: $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$.

2. **Calculer les images** de ces vecteurs par l'application f :

$$f(e_1), \quad f(e_2), \quad f(e_3), \quad \dots$$

3. **Décomposer ces images dans une base** de l'espace d'arrivée.

Quelles sont les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base de F ?

4. **Remplir les colonnes** de la matrice avec ces coordonnées :

La première colonne contient les coordonnées du vecteur $f(e_1)$, la deuxième les coordonnées de $f(e_2)$, etc.

Si f va de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , la matrice aura m lignes et n colonnes.

4.4 Exercices d'application

Exercice 1 : Le cas standard

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

Calculez d'abord $f(1, 0)$, puis $f(0, 1)$.

Exercice 2 : Changement de dimension

Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y, z) = (x + y, y - z)$. Déterminer la matrice B associée à g .

Indication : L'espace de départ est \mathbb{R}^3 , il y aura donc 3 colonnes ($g(e_1), g(e_2), g(e_3)$). L'espace d'arrivée est \mathbb{R}^2 , il y aura donc 2 lignes.

Méthode

Comment calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire ? Pour calculer l'image d'un vecteur X via une application linéaire f représentée par une matrice A , il suffit de faire le produit matrice-vecteur :

$$f(X) = A \cdot X$$

où X est vu comme une colonne de coordonnées dans la base choisie.

- Écrire le vecteur X sous forme de colonne :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Multiplier la matrice A par X pour obtenir le vecteur image Y :

$$Y = A \cdot X$$

- Les coordonnées de Y donnent $f(X)$ dans la base de l'espace d'arrivée.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + 4y \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : De la matrice à la formule

Soit h une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner l'expression de $h(x, y)$.

Exercice 4 : Cas général

Soit $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $k(x_1, \dots, x_n) = x_1$. Quelle est la forme de la matrice associée ?

Indication : C'est une application qui va dans \mathbb{R} (une seule composante), la matrice n'aura donc qu'une seule ligne (matrice ligne).