Analyse et Algèbre - TD3

Transformée de Laplace

Rappel : Pour une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, la **transformée de Laplace** de f est définie par :

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Cette intégrale converge pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$, où σ_0 dépend de f et est appelée l'**abscisse de convergence**.

Exercice 1 : Calcul direct de transformées

L'objectif est de calculer des transformées de Laplace directement à partir de la définition.

1. Calculer $\mathcal{L}\{1\}(s)$ pour $s > 0$ et déterminer l'abscisse de convergence.

Solution.

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

Cette intégrale converge pour $\mathrm{Re}(s) > 0$.

2. Calculer $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et déterminer l'abscisse de convergence.

Solution.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\,dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^{+\infty}$$

Pour que l'intégrale converge, il faut $\mathrm{Re}(s-a) > 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Re}(s) > a$.

Ainsi : $\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}}$ pour $\mathrm{Re}(s) > a$.

3. En utilisant les formules d'Euler, déduire $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$ et $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$.

Solution.

D'après la question précédente, $\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s-i\omega}$ et $\mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{s+i\omega}$.

Pour le cosinus :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s+i\omega)+(s-i\omega)}{(s-i\omega)(s+i\omega)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2+\omega^2} = \boxed{\frac{s}{s^2+\omega^2}}\end{aligned}$$

Pour le sinus :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{(s+i\omega)-(s-i\omega)}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i\omega}{s^2+\omega^2} = \boxed{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}}\end{aligned}$$

4. Montrer par récurrence que $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   utiliser une intégration par parties.

Solution.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^1}$. OK.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Calculons $\mathcal{L}\{t^{n+1}\}$ par intégration par parties :

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-st}\, dt$$

Posons $u = t^{n+1}$, $dv = e^{-st}dt$, donc $du = (n+1)t^n dt$ et $v = -\frac{e^{-st}}{s}$.

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\} = \left[-\frac{t^{n+1}e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{s}\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\, dt = 0 + \frac{n+1}{s}\mathcal{L}\{t^n\}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\} = \frac{n+1}{s} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

Conclusion : Par récurrence, $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Propriétés fondamentales

On souhaite démontrer les propriétés fondamentales de la transformée de Laplace.

1. **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Laplace, et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha\mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}$$

Solution.

Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) &= \int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-st}\, dt \\
&= \alpha\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt + \beta\int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}\, dt \\
&= \alpha\mathcal{L}\{f\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g\}(s)
\end{aligned}$$

La linéarité découle de celle de l'intégrale.

2. **Dérivation.** Soit f une fonction dérivable dont f et f' admettent des transformées de Laplace. Montrer que :

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

Solution.

Par intégration par parties avec $u = e^{-st}$ et $dv = f'(t)dt$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,dt \\
&= \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= 0 - f(0) + s\mathcal{L}\{f\}(s) \\
&= s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)
\end{aligned}$$

(On suppose que $\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} = 0$ pour s assez grand.)

3. En déduire que pour f deux fois dérivable :

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

Solution.

On applique la formule précédente à f' :

$$\mathcal{L}\{f''\} = \mathcal{L}\{(f')'\} = s\mathcal{L}\{f'\} - f'(0)$$

En remplaçant $\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$:

$$\mathcal{L}\{f''\} = s(s\mathcal{L}\{f\} - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

4. **Décalage en fréquence.** Montrer que si $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, alors :

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}\,dt \\
&= F(s-a)
\end{aligned}$$

5. **Application.** En utilisant les résultats précédents, calculer $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}$ et $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(5t)\}$.

Solution.

Pour t^2e^{3t} : On utilise le décalage en fréquence avec $f(t) = t^2$ et $a = 3$.

On sait que $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$, donc :

$$\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

Pour $e^{-2t}\cos(5t)$: On utilise le décalage avec $f(t) = \cos(5t)$ et $a = -2$.

On sait que $\mathcal{L}\{\cos(5t)\} = \frac{s}{s^2+25}$, donc :

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(5t)\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+25}$$

6. **Dérivation de la transformée.** Montrer que :

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

> **Solution.**
>
> On dérive $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ par rapport à s :
>
> $$\frac{dF}{ds} = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{\partial}{\partial s}(e^{-st})\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$
>
> Donc $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF}{ds}$.
>
> Par récurrence, on peut montrer : $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}$.

7. **Application.** En utilisant la propriété précédente, calculer $\mathcal{L}\{t\sin(\omega t)\}$ et $\mathcal{L}\{t\cos(\omega t)\}$.

> **Solution.**
>
> **Pour $t\sin(\omega t)$:** On a $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.
>
> $$\mathcal{L}\{t\sin(\omega t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = -\omega \cdot \frac{-2s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$
>
> **Pour $t\cos(\omega t)$:** On a $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
>
> $$\mathcal{L}\{t\cos(\omega t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = -\frac{(s^2+\omega^2) - s\cdot 2s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Exercice 3 : Abscisse de convergence

L'**abscisse de convergence** σ_0 d'une fonction f est le réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.

1. Déterminer l'abscisse de convergence des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = 1$

   (b) $f(t) = e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$

   (c) $f(t) = e^{t^2}$

   (d) $f(t) = \sin(t)$

   Solution.

   (a) Pour $f(t) = 1$: $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ converge si $\mathrm{Re}(s) > 0$. Donc $\sigma_0 = 0$.

   (b) Pour $f(t) = e^{at}$: $\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt$ converge si $\mathrm{Re}(s-a) > 0$, soit $\mathrm{Re}(s) > a$. Donc $\sigma_0 = a$.

   (c) Pour $f(t) = e^{t^2}$: Cette fonction croît plus vite que toute exponentielle e^{st} (quel que soit s). L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{t^2}e^{-st}dt$ diverge pour tout $s \in \mathbb{C}$. Cette fonction **n'admet pas de transformée de Laplace** ($\sigma_0 = +\infty$).

   (d) Pour $f(t) = \sin(t)$: $|\sin(t)| \leq 1$, donc $|f(t)e^{-st}| \leq e^{-\mathrm{Re}(s)t}$, qui est intégrable pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. Donc $\sigma_0 = 0$.

2. On considère la fonction $f(t) = e^{2t} + 3e^{-t} + \cos(t)$. Déterminer son abscisse de convergence.

   Solution.

   L'abscisse de convergence d'une somme est le maximum des abscisses de convergence de chaque terme :

   — e^{2t} : abscisse $\sigma_1 = 2$

   — $3e^{-t}$: abscisse $\sigma_2 = -1$

   — $\cos(t)$: abscisse $\sigma_3 = 0$

   Donc $\sigma_0 = \max(2, -1, 0) = 2$.

3. Soit f une fonction à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|f(t)| \leq Mt^n$ pour t assez grand. Montrer que f admet une transformée de Laplace et déterminer une majoration de son abscisse de convergence.

   Solution.

   Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ et t assez grand :

   $$|f(t)e^{-st}| \leq Mt^n e^{-\mathrm{Re}(s)t}$$

   Or $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\sigma t}dt$ converge pour tout $\sigma > 0$ (c'est $\frac{n!}{\sigma^{n+1}}$).

   Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 0$.

   Ainsi, toute fonction à croissance polynomiale admet une transformée de Laplace avec $\sigma_0 \leq 0$.

Exercice 4 : Équations différentielles d'ordre 1

1. En appliquant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-t}$ avec $y(0) = 1$.

Solution.

Étape 1 : Transformation. En appliquant $\mathcal{L}$ à l'équation :

$$\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 3\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{3}{s+1}$$

$$(s+2)Y(s) - 1 = \frac{3}{s+1}$$

Étape 2 : Résolution algébrique.

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

Décomposons $\frac{3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$:
- $s = -1 : 3 = A(1)$, donc $A = 3$
- $s = -2 : 3 = B(-1)$, donc $B = -3$

Donc :

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

Étape 3 : Transformation inverse.

$$y(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Vérification : $y(0) = 3 - 2 = 1$ et $y' + 2y = -3e^{-t} + 4e^{-2t} + 6e^{-t} - 4e^{-2t} = 3e^{-t}$

2. Résoudre l'équation différentielle avec paramètre $y' + ay = be^{ct}$ avec $y(0) = y_0$, où $a, b, c, y_0 \in \mathbb{R}$ et $a \neq c$.

Solution.

Transformation :

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = \frac{b}{s-c}$$

$$(s+a)Y(s) = y_0 + \frac{b}{s-c}$$

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{b}{(s-c)(s+a)}$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{b}{(s-c)(s+a)} = \frac{A}{s-c} + \frac{B}{s+a}$$

- $s = c : b = A(c+a)$, donc $A = \frac{b}{a+c}$
- $s = -a : b = B(-a-c)$, donc $B = -\frac{b}{a+c}$

Donc :

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{b}{a+c} \cdot \frac{1}{s-c} - \frac{b}{a+c} \cdot \frac{1}{s+a} = \left(y_0 - \frac{b}{a+c}\right) \frac{1}{s+a} + \frac{b}{a+c} \cdot \frac{1}{s-c}$$

Transformation inverse :

$$\boxed{y(t) = \left(y_0 - \frac{b}{a+c}\right) e^{-at} + \frac{b}{a+c} e^{ct}}$$

Cas particulier $a = c$: On obtient $Y(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{b}{(s-a)^2}$, d'où $y(t) = y_0 e^{-at} + bte^{at}$ (résonance).

Exercice 5 : Équations différentielles d'ordre 2

1. Résoudre $y'' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution.

Transformation :

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 0$$
$$(s^2 + 4)Y(s) = s$$
$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

Transformation inverse : On reconnaît $\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$.

$$\boxed{y(t) = \cos(2t)}$$

2. Résoudre $y'' + 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution.

Transformation :

$$s^2 Y(s) - s - 0 + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = 0$$
$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = s + 3$$
$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Décomposition :

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

— $s = -1$: $2 = A(1)$, donc $A = 2$
— $s = -2$: $1 = B(-1)$, donc $B = -1$

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Transformation inverse :

$$\boxed{y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}}$$

3. **Oscillateur amorti avec second membre.** Résoudre l'équation :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t)$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, où $\lambda > 0$, $\omega_0 > 0$ et $\omega \neq \omega_0$.

On prendra $\lambda = 1$, $\omega_0 = 2$ et $\omega = 3$, $F_0 = 10$.

Solution.

Avec les valeurs numériques : $y'' + 2y' + 4y = 10\cos(3t)$.

Transformation :

$$(s^2 + 2s + 4)Y(s) = \frac{10s}{s^2 + 9}$$

$$Y(s) = \frac{10s}{(s^2 + 2s + 4)(s^2 + 9)}$$

Décomposition :

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}$$

En multipliant et identifiant les coefficients :

$$10s = (As + B)(s^2 + 9) + (Cs + D)(s^2 + 2s + 4)$$

On obtient le système :

— s^3 : $A + C = 0$
— s^2 : $B + 2C + D = 0$
— s^1 : $9A + 4C + 2D = 10$
— s^0 : $9B + 4D = 0$

En résolvant : $A = 2$, $B = \frac{4}{5}$, $C = -2$, $D = -\frac{9}{5}$.

Transformation inverse :

Pour $\frac{2s+\frac{4}{5}}{s^2+2s+4} = \frac{2(s+1)-\frac{6}{5}}{(s+1)^2+3}$:

$$\mathcal{L}^{-1} = 2e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{6}{5\sqrt{3}}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)$$

Pour $\frac{-2s-\frac{9}{5}}{s^2+9}$:

$$\mathcal{L}^{-1} = -2\cos(3t) - \frac{3}{5}\sin(3t)$$

Solution finale :

$$y(t) = 2e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{2\sqrt{3}}{5}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t) - 2\cos(3t) - \frac{3}{5}\sin(3t)$$

Le premier terme est le régime transitoire (qui s'amortit), le second est le régime permanent.

4. **Cas de résonance.** Résoudre $y'' + 4y = 2\sin(2t)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Solution.

Transformation :

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{4}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2 + 4)^2}$$

On utilise la formule : $\mathcal{L}\{t\sin(\omega t)\} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$.

Ici, on a besoin de $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^2}\right\}$.

En utilisant la propriété de dérivation de la transformée et des manipulations, on peut montrer :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{16}(\sin(2t) - 2t\cos(2t))$$

Donc :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{4}(\sin(2t) - 2t\cos(2t))}$$

Remarque : Le terme $t\cos(2t)$ croît sans limite : c'est le phénomène de **résonance**.

Exercice 6 : Équations différentielles avec paramètres

Système masse-ressort-amortisseur. Un système mécanique vérifie :

$$mx'' + cx' + kx = F_0 u(t)$$

où $u(t)$ est la fonction de Heaviside, m la masse, c le coefficient d'amortissement, k la raideur du ressort, et F_0 la force appliquée.

Avec $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, trouver $x(t)$ en fonction des paramètres dans le cas sur-amorti ($c^2 > 4mk$).

Solution.

Transformation :

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = \frac{F_0}{s}$$

$$X(s) = \frac{F_0}{s(ms^2 + cs + k)}$$

Les racines de $ms^2 + cs + k = 0$ sont :

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Dans le cas sur-amorti, $c^2 > 4mk$, donc r_1 et r_2 sont réels négatifs distincts.

Posons $r_1 = -\alpha$ et $r_2 = -\beta$ avec $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$.

Décomposition :

$$X(s) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\alpha} + \frac{C}{s+\beta}$$

— $A = \frac{F_0}{m\alpha\beta} = \frac{F_0}{k}$
— $B = \frac{F_0}{m\cdot(-\alpha)(\beta-\alpha)} = \frac{F_0}{m\alpha(\alpha-\beta)}$
— $C = \frac{F_0}{m\cdot(-\beta)(\alpha-\beta)} = \frac{F_0}{m\beta(\beta-\alpha)}$

Transformation inverse :

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 + \frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\alpha - \beta}\right]}$$

où $\alpha = \frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$ et $\beta = \frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$.

Exercice 7 : Fonction échelon et fonctions discontinues

La fonction échelon de Heaviside $u(t-a)$ est définie par :

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ pour $a \geq 0$.

Solution.

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^{+\infty} u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^{+\infty} e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^{+\infty} = \frac{e^{-as}}{s}$$

2. **Théorème du décalage temporel.** Montrer que si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Solution.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} &= \int_0^{+\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt \\ &= \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st}dt\end{aligned}$$

Changement de variable $\tau = t-a$, donc $t = \tau + a$ et $dt = d\tau$:

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau = e^{-as}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-as}F(s)$$

3. Calculer $\mathcal{L}\{(t-2)^2u(t-2)\}$.

Solution.

On utilise le théorème précédent avec $f(t) = t^2$ et $a = 2$:

$$\mathcal{L}\{(t-2)^2u(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2\} = e^{-2s}\cdot\frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-2s}}{s^3}$$

4. Soit $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ t & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$. Exprimer f à l'aide de fonctions échelon et calculer sa transformée de Laplace.

Solution.

On peut écrire : $f(t) = t \cdot (u(t-1) - u(t-3))$.

Mais attention, pour utiliser le décalage, il faut écrire :

$$f(t) = (t-1+1)u(t-1) - (t-3+3)u(t-3)$$

$$f(t) = (t-1)u(t-1) + u(t-1) - (t-3)u(t-3) - 3u(t-3)$$

Transformée :

$$\begin{aligned} F(s) &= e^{-s}\mathcal{L}\{t\} + \frac{e^{-s}}{s} - e^{-3s}\mathcal{L}\{t\} - \frac{3e^{-3s}}{s} \\ &= \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{3e^{-3s}}{s} \\ &= e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right) \end{aligned}$$

5. Résoudre l'équation $y' + y = u(t-1)$ avec $y(0) = 0$.

Solution.

Transformation :

$$sY(s) + Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

Décomposition :

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Donc :

$$Y(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

Transformation inverse : Par le théorème de décalage,

$$y(t) = (1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$$

Soit :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 8 : Produit de convolution

Le **produit de convolution** de deux fonctions f et g est défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

1. Montrer que $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$.

   échanger les deux intégrales et faire un changement de variables.

Solution.

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt$$

Par Fubini, en échangeant l'ordre d'intégration (domaine : $0 \leq \tau \leq t < +\infty$) :

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(\int_\tau^{+\infty} g(t-\tau)e^{-st}dt \right) d\tau$$

Changement de variable $u = t - \tau$ dans l'intégrale intérieure :

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(\int_0^{+\infty} g(u)e^{-s(u+\tau)}du \right) d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \cdot \int_0^{+\infty} g(u)e^{-su}du = F(s) \cdot G(s)$$

2. En déduire $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$ par convolution.

Solution.
On a $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{1\} \cdot \mathcal{L}\{e^{-t}\}$.
Par le théorème de convolution :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = 1 * e^{-t} = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-t}(e^t - 1) = 1 - e^{-t}$$

Vérification par décomposition : $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$, donc $\mathcal{L}^{-1} = 1 - e^{-t}$.

3. Calculer $(t * \sin(t))$ de deux manières : par le calcul direct et par la transformée de Laplace.

Solution.
Méthode 1 : Calcul direct

$$(t * \sin(t)) = \int_0^t \tau \sin(t-\tau)d\tau$$

Intégration par parties avec $u = \tau$ et $dv = \sin(t-\tau)d\tau$:

$$\begin{aligned} &= [\tau\cos(t-\tau)]_0^t - \int_0^t \cos(t-\tau)d\tau \\ &= t\cos(0) - 0 - [\sin(t-\tau)]_0^t \\ &= t - (\sin(0) - \sin(t)) = t - \sin(t) \end{aligned}$$

Méthode 2 : Transformée de Laplace

$$\mathcal{L}\{t * \sin(t)\} = \mathcal{L}\{t\} \cdot \mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

Décomposition : $\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$

Donc : $\mathcal{L}^{-1} = t - \sin(t)$.

Exercice 9 : Lien avec la transformée de Fourier

La **transformée de Fourier** d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction **causale** (nulle pour $t < 0$). Montrer que :

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \mathcal{L}\{f\}(i\omega)$$

c'est-à-dire que la transformée de Fourier s'obtient en évaluant la transformée de Laplace sur l'axe imaginaire $s = i\omega$.

Solution.

Pour une fonction causale, $f(t) = 0$ pour $t < 0$, donc :

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Or, la transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

En posant $s = i\omega$ (avec $\mathrm{Re}(s) = 0$) :

$$\mathcal{L}\{f\}(i\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$$

Remarque : Cette relation n'est valide que si l'abscisse de convergence $\sigma_0 \leq 0$, sinon l'intégrale de Laplace ne converge pas pour $s = i\omega$.

2. Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-at}u(t)$ pour $a > 0$.

Solution.

On a $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$ pour $\mathrm{Re}(s) > -a$.

Comme $a > 0$, l'abscisse de convergence est $-a < 0$, donc on peut évaluer en $s = i\omega$:

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\}(\omega) = \frac{1}{i\omega + a} = \frac{a - i\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Le module est $|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ (filtre passe-bas du premier ordre).

3. Calculer la transformée de Fourier de $g(t) = e^{-a|t|}$ pour $a > 0$ (fonction non causale).

Indication : séparer l'intégrale en $t < 0$ et $t > 0$.

Solution.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt \\
&= \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{(a+i\omega)+(a-i\omega)}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

C'est une fonction lorentzienne, caractéristique des systèmes résonants.

4. **Application : fonction de transfert.** Un système soumis à une entrée $x(t)$, répond avec une sortie $y(t)$. Il est décrit par $y'' + 2y' + 2y = x(t)$.
   (a) Déterminer la fonction de transfert $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ en Laplace.
   (b) En déduire la réponse en fréquence $H(i\omega)$ et calculer son module.
   (c) Pour quelles fréquences ω le système amplifie-t-il le signal d'entrée ?

Solution.

(a) En appliquant Laplace (conditions initiales nulles) :

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

(b) Réponse en fréquence ($s = i\omega$) :

$$H(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + 2(i\omega) + 2} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega + 2} = \frac{1}{(2-\omega^2) + 2i\omega}$$

Module :

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 4}}$$

(c) Le système amplifie si $|H(i\omega)| > 1$, c'est-à-dire $\omega^4 + 4 < 1$, soit $\omega^4 < -3$.

C'est impossible pour $\omega \in \mathbb{R}$. Donc ce système n'amplifie jamais le signal : c'est un **filtre passe-bas** atténuateur.

Le maximum du gain est $|H(0)| = \frac{1}{2}$, atteint en $\omega = 0$ (DC).

Formulaire : Transformées de Laplace usuelles

Fonction $f(t)$	**Transformée** $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$	**Domaine**
1	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(s) > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > a$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > a$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \|a\|$
$u(t-a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\delta(t)$ (Dirac)	1	$\forall s$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$\forall s$

Table 1 – Transformées de Laplace élémentaires

Propriété	**Formule**
Dérivation temporelle	$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)$
Dérivation seconde	$\mathcal{L}\{f''\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
Intégration temporelle	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
Décalage fréquentiel	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
Multiplication par t	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$
Multiplication par t^n	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
Convolution	$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$

Table 2 – Propriétés de la transformée de Laplace