

# Méthode des éléments finis – TD2

*Avec des équations différentielles partielles*

## Contexte

La méthode des éléments finis est une technique numérique puissante utilisée pour résoudre des équations différentielles partielles. Nous allons étudier un problème aux limites elliptique en dimension 1 : le problème de Dirichlet. Voici les étapes de la méthode :

1. Découper le domaine en éléments simples
2. Établir la formulation variationnelle de l'EDP
3. Ecrire la matrice élémentaire sur chaque élément
4. Assembler ces matrices pour obtenir la matrice de rigidité globale
5. Résoudre le système linéaire

Considérons l'équation différentielle suivante en dimension 1 :

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1)$$

où  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ , et  $f(x)$  est une fonction donnée.

**Conditions aux limites de Dirichlet : la valeur de l'inconnue est fixée au bord**

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

## Exemple concret d'application : Isolation thermique d'un mur



### Exemple

**Contexte :** Imaginons un mur de bâtiment de 1 mètre d'épaisseur, composé de plusieurs matériaux (béton, isolant, plâtre). On souhaite déterminer la distribution de température  $u(x)$  à travers le mur en régime stationnaire.

### Interprétation physique de l'équation :

- $u(x)$  : température (en degré C) à la position  $x$  dans le mur
- $p(x)$  : conductivité thermique du matériau (en  $W/(m \cdot K)$ )
  - Béton :  $p \approx 1.5 W/(m \cdot K)$
  - Isolant (laine de verre) :  $p \approx 0.04 W/(m \cdot K)$
  - Plâtre :  $p \approx 0.5 W/(m \cdot K)$
- $q(x)u$  : pertes thermiques volumiques (convection interne par exemple) (en  $W/(m^3 \cdot K)$ )
- $f(x)$  : sources de chaleur internes (par exemple, câbles électriques chauffants intégrés)

### Conditions aux limites :

- $u(0) = \alpha = 20$  degré C (température intérieure imposée par le chauffage)
- $u(1) = \beta = 5$  degré C (température extérieure en hiver)

**Cas simple :** Si  $p$  et  $q$  sont constants et  $f = 0$  (pas de source interne), on retrouve l'équation classique de diffusion :

$$-pu'' + qu = 0$$

**Résultat attendu :** La méthode des éléments finis permet de calculer la température en tout point du mur, et on pourra par exemple en déduire le flux thermique total :  $\Phi = -p \frac{du}{dx}$  pour dimensionner le chauffage.



## Exemple avec notre problème

Pour l'équation sur un segment  $[0, h]$  :

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x)$$

**Étape 1 :** Multipliez par  $v$  et intégrez sur  $[0, h]$  :

**Étape 2 :** Intégrez par parties sur le terme qui contient la dérivée seconde de  $u$ , on choisira la fonction test  $v$  pour être nulle au bord :  $v(0) = v(h) = 0$  :

**Étape 3 :** Formulation variationnelle finale :

Résoudre l'équation différentielle revient à trouver une fonction  $u$  telle que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{Pour toute fonction test } v.$$

avec  $a(u, v)$  une fonction bilinéaire symétrique et  $L(v)$  une fonction linéaire.

C'est cette équation qui donnera le système linéaire  $Ku = F$  à résoudre pour trouver  $u$ . (question 4.)

## Pourquoi cette formulation ?

- **Régularité** : On n'a besoin que de  $u'$  et  $v'$  (pas de  $u''$ )
- **Symétrie** :  $a(u, v)$  est symétrique :  $a(u, v) = a(v, u)$
- **Coercivité** : Sous certaines conditions,  $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$  garantit l'existence et l'unicité (Théorème de Lax-Milgram)

## Questions

### 1. Maillage

- (a) Définissez un maillage avec 4 éléments ( $0 = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = 1$ ), chacun de longueur  $h$ .

### 2. Formulation Variationnelle

- (a) Sur le premier élément  $[0, h]$ , suivez les 3 étapes ci-dessus et formulez le problème de Dirichlet sous sa forme variationnelle. On pourra choisir  $V_0 = \{v \in H^1(0, h) \mid v(0) = v(h) = 0\}$  comme espace de fonctions test.
- (b) Sur le second élément du maillage, comment la formulation variationnelle est-elle modifiée ?

### 3. Approximation dans un Espace de Dimension Finie

- (a) La méthode des éléments finis nous donnera une solution seulement sur les noeuds du maillage. Nous relierons ensuite ces points par des segments de droite.

Déterminez les expressions des fonctions  $\varphi_i$ , affines par morceaux et telles que  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ . Ces fonctions sont construites sur chaque intervalle séparément, on pourra séparer les différentes expressions en fonction de l'intervalle dans lequel se trouve  $x$ .

Pour obtenir une solution approchée de notre équation différentielle, nous chercherons alors une fonction  $u_h$  telle que

$$u_h = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \varphi_i$$

où les  $\alpha_i$  sont des coefficients inconnus que nous devons déterminer, ce sont les valeurs de la solution de l'équation différentielle sur les noeuds du maillage.

La fonction  $u_h$  devra vérifier les conditions au bord.

4. **Obtention du Système Linéaire** La matrice de rigidité élémentaire  $K_e$  associée au problème de Dirichlet sur l'élément  $[x_i, x_{i+1}]$  est

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_i, \varphi_i) & a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) & a(\varphi_{i+1}, \varphi_{i+1}) \end{pmatrix}$$

On supposera que  $p(x) = p_0$  et  $q(x) = q_0$  sont constants sur cet élément.

- (a) Montrer que si  $u = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \varphi_i$ , alors  $a(u, v) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i a(\varphi_i, v)$ .  
En déduire que

$$u \text{ vérifie } a(u, v) = L(v) \text{ sur } [x_i, x_{i+1}] \text{ pour } v = \varphi_i \text{ et } v = \varphi_{i+1} \Leftrightarrow K_e \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_i) \\ L(\varphi_{i+1}) \end{pmatrix}$$

- (b) Ecrivez la matrice de rigidité du premier élément  $[0, h]$ .  
(c) Sans vous lancer dans de longs calculs, explicitiez la matrice de rigidité sur chacun des autres éléments. Nous continuerons à supposer que les fonctions  $p$  et  $q$  sont constantes.  
(d) Etablissez la matrice de rigidité globale  $K$  et décrivez ses propriétés (par exemple : forme particulière, symétrie, définie positive).  
(e) En supposant maintenant que  $f$  est constante sur chaque élément, explicitiez le second membre du système linéaire.

## 5. Résolution Manuelle dans un Cas Simple

- (a) Considérez le cas où  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $f(x) = 1$  et dites à quelle équation différentielle du second ordre ces conditions correspondent.  
(b) Les équations du système linéaire trouvées précédemment ne prennent pas du tout en compte les conditions aux limites. Ecrivez les 3 équations sur  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  puis explicitiez la solution approchée  $u_h$ .  
(c) Calculez la solution exacte de l'équation différentielle avec conditions aux limites.  
(d) Comparez votre solution approchée avec la solution exacte et discutez de la précision de l'approximation à la fois aux noeuds du maillage et entre les noeuds.  
(e) Quelles méthodes proposez-vous pour améliorer l'approximation ?

## D'autres fonctions $p$ , $q$ , et $f$

Reprenez le problème avec  $p(x) = e^x$ ,  $q(x) = \sin(x)$ , et  $f(x) = x^2$ .