

Composition de MATHÉMATIQUES (3h) : 35 points

■ Exercice 1 : Équations (8 points)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations ou systèmes suivants :

1. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

3. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2. $\ln(4x^2) = 2$

4. $\cos(7x) + \sin(7x) = 1$

■ Exercice 2 : Réponse d'un capteur à un changement de température (6 points)

Un capteur de température est initialement à l'équilibre thermique dans un environnement à 20°C . À l'instant $t = 0$, il est brusquement plongé dans un liquide maintenu à 80°C .

On modélise la température $T(t)$ indiquée par le capteur à l'instant t (en secondes) par la fonction :

$$T(t) = 80 - 60e^{-t/5}$$

où $T(t)$ est exprimée en degrés Celsius.

1. Quelle est la température initiale lue par le capteur ? Et la température à long terme ?
2. À quelle date le capteur affiche-t-il une température de 50°C ?
3. Déterminer la dérivée $T'(t)$, puis montrer que :

$$T'(t) = \frac{12}{e^{t/5}}$$

4. Interpréter le signe de $T'(t)$. Que peut-on dire de l'évolution de la température ?
5. Déterminer le temps mis par le capteur pour atteindre 95% de la température finale.

■ Exercice 3 : Logique, sommes et produits (10 points)

1. Donner la table de vérité de la proposition logique :

$$(P \Rightarrow Q)$$

2. Donner la table de vérité de la proposition logique :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

3. En déduire une équivalence logique.

4. Démontrer par récurrence que :

$$(*) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. Calculer les expressions suivantes :

$$- \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$- \prod_{k=1}^n e^{k-1}, \text{ on pourra utiliser la relation } (*).$$

■ Exercice 4 : Vecteurs et géométrie plane (11 points)

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé les points : $A(1, 2, 0)$, $B(0, 4, 6)$, $C(7, -1, 2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Calculer les longueurs AB et AC .
3. Calculer le produit scalaire entre les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et le produit vectoriel vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
4. En déduire le cosinus et le sinus de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
5. Donner une équation paramétrique de la droite (AB) .
6. Déterminer la distance du point C à la droite (AB) .