

# Analyse et Algèbre - TD4

## Dérivées partielles et équations

### Exercice 1 : Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = e^{3y^3} \cos(xy)$
2.  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(x^2 - y)$
3.  $f(x, y) = \sqrt{2 - x^2 y^2}$

### Exercice 2 : Dériver des composées

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$

1. On définit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$ . Calculer  $g'(t)$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .
2. On définit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$ . Exprimer les dérivées partielles  $\frac{\partial h}{\partial u}$  et  $\frac{\partial h}{\partial v}$  en fonction des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

### Exercice 3 : Méthode de séparation des variables

On rappelle l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

On cherche une solution  $u$  définie sur  $[0, L] \times \mathbb{R}_+$  avec conditions initiales  $u(x, 0) = f(x)$  et conditions aux bords  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ .

1. Cette équation est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique ?
2. Essayons de trouver une solution sous la forme  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Que devient l'équation différentielle ?
3. Ecrivez cette équation sous la forme  $f(t) = g(x)$ .

Comme  $x$  et  $t$  sont des variables indépendantes, on en déduit que  $f(t) = g(x)$  est une constante  $-\lambda$ .

4. Déterminer les deux équations différentielles vérifiées par  $X$  et  $T$ .
5. Si  $\lambda < 0$ , pouvez-vous trouver une solution pour  $X$  vérifiant les conditions aux bords ?
6. Et si  $\lambda = 0$  ?
7. Il est donc nécessaire que  $\lambda$  soit positif, en écrivant  $\lambda = \mu^2$ , quelles sont les solutions  $X$  possibles ?
8. Pour que les conditions aux bords soient vérifiées, il faut que  $X(0) = X(L) = 0$ . Quelle contrainte cela impose-t-il sur  $\mu$  ?
9. En déduire les fonctions  $T$  possibles et en déduire les solutions  $u$  possibles qui s'écrivent  $u(x, t) = X(x)T(t)$ .
10. En utilisant le principe de superposition, donner toutes les solutions qu'on peut construire avec cette méthode.

## Exercice 4 : Changements de variables

On cherche toutes les fonctions  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = c$$

où  $c$  est un réel.

1. On pose  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

En utilisant le théorème de composition, montrer que  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}$ .

2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de  $f$ .
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

## Exercice 5 : Pour aller plus loin

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , est dite harmonique si son laplacien est nul :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Dans toute la suite, on fixe  $f$  une fonction harmonique.

1. On suppose que  $f$  est de classe  $C^3$ . Démontrer que  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$  sont harmoniques.
2. On suppose désormais que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est radiale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ . Démontrer que  $\varphi'$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.