Analyse et Algèbre - TD5

Distributions

Exercice 1 : Manipulation de distributions

On considère la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le support de la fonction ψ. La fonction ψ est-elle dans $\mathbb{D}$?
   On pourra étudier $\psi(-1+h)$ et $\psi(1-h)$, avec h un réel positif qui tend vers 0.

> **Solution.**
>
> On a $\psi(-1+h) = \mathrm{e}^{-1/(1-(1-h)^2)} = \mathrm{e}^{-1/(h^2)} \to 0$ quand $h \to 0$ car $-1/(h^2) \to -\infty$. Aussi $\psi(1-h) = 0$. Donc le support de ψ est $[-1, 1]$.

2. En déduire une fonction $\varphi \in \mathbb{D}$ dont le maximum est 3 et dont le support est $[-2, 2]$.

> **Solution.**
>
> Au point $x = 0$, la fonction ψ atteint son maximum qui vaut $\psi(0) = 1/e$, On définit alors $\varphi(x) = 3e\psi(x/2)$ pour $x \in [-2, 2]$, 0 ailleurs.

On définit les distributions suivantes :

$$T_1 = \delta_0, \quad T_2 = \delta_{-1} + \delta_1, \quad T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx, \quad T_4(\varphi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\varphi(x)dx$$

3. Quelles valeurs associent-elles à la fonction ψ et à la fonction φ ?

> **Solution.**
>
> On a
>
> $$T_1(\psi) = \psi(0) = 1/e \quad \text{et} \quad T_1(\varphi) = \varphi(0) = 3e\psi(0) = 3e/e = 3$$
>
> Pour T_2, on a
>
> $$T_2(\psi) = \psi(-1)+\psi(1) = 0 \quad \text{et} \quad T_2(\varphi) = \varphi(-1)+\varphi(1) = 3e\psi(-1/2)+3e\psi(1/2) = 6ee^{-4/3} = 6e^{-1/3}$$
>
> Pour T_3 :
>
> $$T_3(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x)dx = \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-1/(1-x^2)}dx = 0$$
>
> puisque la fonction intégrée est impaire. De même, $T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx = 0$.
>
> Pour T_4, on a
>
> $$T_4(\psi) = \int_5^{10} x\psi(x)dx = 0$$
>
> car ψ est nulle en dehors de $[-1, 1]$. De même, $T_4(\varphi) = \int_5^{10} x\varphi(x)dx = 0$.

4. Pour chaque distribution ci-dessus, existe-t-il une fonction f localement intégrable telle que $T(\varphi) = \int f\varphi$?

> **Solution.**
>
> Les diracs ne peuvent pas être représentés par une fonction localement intégrable, il faudrait

trouver une fonction f telle que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = \varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathbb{D}$. Donc que f soit nulle en dehors du point 0, donc nulle presque partout.

Pour T_3, on a $T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$, donc T_3 est construite à partir de la fonction $f(x) = x$. Pour T_4, on a $T_4(\varphi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\varphi(x)dx$, donc T_4 est construite à partir de la fonction $f(x) = \sqrt{x}1_{[5,10]}(x)$.

5. Les fonctions $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ suivantes sont-elles des distributions ?

$$T_1(\varphi) = \frac{1}{\varphi(0)}, \quad T_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx$$

Solution.

La fonction T_1 n'est pas définie pour toutes les fonctions de $\mathbb{D}$, donc elle n'est pas une distribution. La fonction T_2 n'est pas une distribution non plus, elle conduit à une intégrale qui n'est pas définie si φ est une fonction non nulle au voisinage de 0.

Il n'est pas facile de calculer les intégrales issues des distributions, le but de cette théorie n'est pas d'effectuer des calculs sur les fonctions $\mathbb{C}^\infty$ à support compact, on n'explicitera plus jamais de telle fonction φ.

Exercice 2 : Dériver une distribution

1. Soit T_1 la distribution associée à la fonction $f(x) = \text{signe}(x)$. C'est-à-dire : si φ est une fonction $\mathbb{C}^\infty$ à support compact,

$$T_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{signe}(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^{\infty} \varphi(x)dx$$

Calculer la dérivée de T_1 de deux manières différentes :

(a) En utilisant la définition de la dérivée d'une distribution.

(b) En utilisant la formule des sauts.

Solution.

Par définition. Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$T_1'(\varphi) = -T_1(\varphi') = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = 2\varphi(0).$$

Ainsi, $T_1' = 2\delta_0$.

Par la formule des sauts. On a un seul saut dans cette fonction, en $x = 0$. De plus, la dérivée sur les deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, \infty[$ est nulle car la fonction est constante, la formule des sauts donne donc

$$T_1' = \sigma\delta_0$$

où σ est la valeur du saut en $x = 0$: $\sigma = \text{signe}(0^+) - \text{signe}(0^-) = 2$.

2. Soit T_2 la distribution associée à la fonction $g(x) = |x|$. Calculer la dérivée de T_2.

Solution.

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$T_2'(\varphi) = -T_2(\varphi') = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx.$$

On exprime alors chacune de ces intervalles à l'aide d'une intégration par parties. Par exemple, on a

$$\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx = [x\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

On a de même

$$\int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx$$

soit

$$T_2'(\varphi) = -\int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Ainsi, T_2' est la distribution associée à la fonction $u = \mathbf{1}_{[0,+\infty[} - \mathbf{1}_{]-\infty,0]}$.

3. Soit T_3 la distribution associée à la fonction $h(x) = x^2$. Calculer la dérivée de T_3.

Solution.

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} T_3'(\varphi) = -T_3(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi'(x)dx &= -\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} x^2\varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{A\to\infty} \left[x^2\varphi(x)\right]_{-A}^{A} + \int_{-A}^{A} 2x\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Quand A tend vers l'infini, les deux termes tendent vers 0 car φ est à support compact. Donc la dérivée de T_3 est la distribution associée à la fonction $2x$:

$$T_3'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2x\varphi(x)dx$$

Exercice 3 : Multiplication par une fonction

Soit T une distribution et ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, φ une fonction $\mathbb{C}^\infty$ à support compact.

1. Montrer que $S(\varphi) = T(\psi\varphi)$ est bien une application de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution.

On a $S(\varphi) = T(\psi\varphi)$, et $\psi\varphi$ est encore une fonction $\mathbb{C}^\infty$ à support compact, donc S associe bien à chaque fonction de $\mathbb{D}$ un réel.

2. Que vaut alors S' ?

Solution.

On a $S'(\varphi) = -S(\varphi') = -T(\psi\varphi')$.

3. Soit (T_n) une suite de distributions qui converge vers T, c'est-à-dire que $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer que (T_n') converge vers T'.

Solution.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle T_n', \varphi \rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle \to -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle .$$

Exercice 4 : La valeur principale

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la distribution associée à ln $|x|$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tel que le support de φ soit contenu dans $[-a, a]$. Notons T la distribution associée à la fonction $\ln |x|$. Explicitez l'intégrale définissant $T'(\varphi)$.

Solution.

$$\begin{aligned}\langle T', \varphi \rangle &= -\langle T, \varphi' \rangle \\ &= -\int_{-a}^{a} \varphi'(x) \ln |x| dx\end{aligned}$$

2. La fonction logarithme pose problème au voisinage de 0, nous allons définir ε et écrire

$$\int_{-a}^{a} \ln |x| \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{a} \ln(x)\varphi'(x)dx \right)$$

Traiter les deux intégrales séparément pour un ε fixé et intégrer par parties.

Solution.

$$\int_{\varepsilon}^{a} \varphi'(x) \ln(x) dx = [\varphi(x) \ln(x)]_{\varepsilon}^{a} - \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx = -\varphi(\varepsilon) \ln(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

et

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \varphi'(x) \ln(-x) dx = [\varphi(x) \ln(-x)]_{-a}^{-\varepsilon} - \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \varphi(-\varepsilon) \ln(\varepsilon) - \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

3. Certains termes se simplifient quand ε tend vers 0, simplifiez au maximum.

Solution.

$$(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) \ln(\varepsilon) = (\varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) - \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon)) \ln(\varepsilon) = -2\varphi'(0)\varepsilon \ln(\varepsilon) + o(\varepsilon \ln(\varepsilon))$$

Mais comme $\varepsilon \ln(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, on conclut finalement que

$$\langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \left\langle \mathrm{vp}\, \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle .$$

La distribution $S(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ est appelée la valeur principale.

Exercice 5 : Encore plus de Diracs

Calculer explicitement $\left\langle x^\alpha \partial^\beta \delta_p, \phi \right\rangle$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$, où α et β sont des entiers et δ_p est la masse de Dirac au point $p \in \mathbb{R}$.

Quel est le support de $x^\alpha \partial^\beta \delta_p$?

Solution.

On a

$$\left\langle x^\alpha \partial^\beta \delta_p, \phi \right\rangle = \left\langle \partial^\beta \delta_p, x^\alpha \phi \right\rangle = (-1)^\beta \left\langle \delta_p, \partial^\beta \left(x^\alpha \phi\right) \right\rangle$$
$$\partial^\beta \left(x^\alpha \phi\right) = \sum_{k=0}^{\min(\alpha,\beta)} \binom{\beta}{k} \alpha \ldots (\alpha - k + 1) x^{\alpha-k} \partial^{\beta-k} \phi$$

Donc,

$$\left\langle x^\alpha \partial^\beta \delta_p, \phi \right\rangle = (-1)^\beta \sum_{k=0}^{\min(\alpha,\beta)} \binom{\beta}{k} \alpha \ldots (\alpha - k + 1) p^{\alpha-k} \partial^{\beta-k} \phi(p).$$

En particulier, le support est $\{p\}$ si $p \neq 0$, il est vide si $p = 0$ et $\alpha > \beta$.

Exercice 6 : Limites de distributions

On considère la fonction $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\chi(x) = 1$ si $x \in [-1, 1], \chi(x) = 0$ sinon.

1. Dire pourquoi la fonction χ définit donc une distribution $T_\chi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et rappeler la définition de T_χ.
2. On définit la suite (χ_n) par $\chi_n(x) = \frac{n}{2}\chi(nx)$. Déterminer la limite de (χ_n) au sens des distributions (i.e trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions (T_{χ_n}) associées à (χ_n)).
3. On définit la suite (ξ_n) par $\xi_n(x) = \chi(x-n)$. Déterminer la limite de (ξ_n) au sens des distributions (i.e trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de distributions (T_{ξ_n}) associées à (ξ_n)).

Soit p_ϵ définie par

$$p_\epsilon = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}[\cup]\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, 1\right] \\ \frac{1}{\epsilon} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right] \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon = \delta_{\frac{1}{2}}$ dans $\mathcal{D}'([0, 1[)$.