estp CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
30/01/2026		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 3	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Barème	4 pts	4 pts	4 pts	3 pts	5 pts	**20 pts**

Exercice 1 : Convergence de séries *(4 points)*

Étudier la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes. Justifier soigneusement chaque réponse.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^n}{5^n}$ *(1 pt)*

> **Solution.**
> C'est une série géométrique de raison $r = \frac{-3}{5}$.
> Comme $|r| = \frac{3}{5} < 1$, la série **converge**.
> Sa somme vaut : $S = \frac{1}{1-\frac{-3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ *(1 pt)*

> **Solution.**
> C'est une série alternée de la forme $\sum(-1)^{n+1}a_n$ avec $a_n = \frac{1}{2n}$.
> Vérifions le critère des séries alternées (Leibniz) :
> — (a_n) est décroissante : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ✓

— $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ✓

Par le critère de Leibniz, la série **converge**.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ *(1 pt)*

Solution.

Utilisons le critère de D'Alembert. Posons $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$.

Par le critère de D'Alembert, la série **converge**.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3 + 2n + \cos(n)}$ *(1 pt)*

Solution.

Cherchons un équivalent du terme général quand $n \to +\infty$:

$$\frac{n+1}{n^3 + 2n + \cos(n)} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^3(1+\frac{2}{n^2}+\frac{\cos(n)}{n^3})} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n^2(1+\frac{2}{n^2}+\frac{\cos(n)}{n^3})} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente.

Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{n+1}{n^3+2n+\cos(n)}$ **converge**.

Exercice 2 : Noyau et image *(4 points)*

Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$h(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x - 3y + 6z)$$

1. Écrire la matrice B de h dans les bases canoniques. *(0.5 pt)*

Solution.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer le noyau $\ker(h)$. Donner une base et la dimension. *(2 pts)*

Solution.

$(x, y, z) \in \ker(h) \Leftrightarrow h(x, y, z) = (0, 0)$
On résout le système :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est le triple de la première, donc on a une seule contrainte. On choisira deux paramètres libres y et z. On exprime alors x en fonction de y et z : $x = y - 2z$.
Les solutions sont :

$$(x, y, z) = (y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$$

Base de $\ker(h)$ **:** $\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$
Dimension : $\dim(\ker(h)) = 2$

3. Déterminer l'image $\mathrm{Im}(h)$. Donner une base et la dimension. *(1.5 pts)*

Solution.

L'image de h est engendrée par les colonnes de B :

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

On remarque que $(-1, -3) = -(1, 3)$ et $(2, 6) = 2(1, 3)$.
Donc $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\{(1, 3)\}$.
Base de Im(h) **:** $\{(1, 3)\}$
Dimension : $\dim(\mathrm{Im}(h)) = 1$
Vérification par le théorème du rang : $\dim(\ker(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ ✓

Exercice 3 : Algèbre linéaire *(4 points)*

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. *(1.5 pts)*

Solution.

Vérifions les trois axiomes d'un sous-espace vectoriel :
1) Non vide : $(0, 0, 0) \in F$ car $2(0) - 0 + 0 = 0$. ✓
2) Stabilité par addition : Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ dans F.

— $2x_1 - y_1 + z_1 = 0$ et $2x_2 - y_2 + z_2 = 0$
— $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
— $2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (2x_1 - y_1 + z_1) + (2x_2 - y_2 + z_2) = 0$

Donc $u + v \in F$. ✓
3) Stabilité par multiplication : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z) \in F$.

— $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$
— $2\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda(2x - y + z) = 0$

Donc $\lambda u \in F$. ✓
F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire F avec le mot clé "Vect", donner une base et la dimension. *(1 pt)*

Solution.

De $2x - y + z = 0$, on tire $y = 2x + z$. Donc on peut choisir x et z comme paramètres libres :

$$(x, y, z) = (x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$$

Donc $F = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$.
Les vecteurs $e_1 = (1, 2, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$ sont clairement linéairement indépendants (le premier a une composante en x non nulle et le second a $x = 0$).
Base de F : $\mathcal{B}_F = \{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$
Dimension : $\dim(F) = 2$

3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(x, y) = (2x - y, x + 3y, x - y)$.
Montrer que φ est une application linéaire. *(1 pt)*

Solution.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Additivité :

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= \varphi(x_1+x_2, y_1+y_2) \\
&= (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2), (x_1+x_2)+3(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2)) \\
&= (2x_1-y_1+2x_2-y_2, x_1+3y_1+x_2+3y_2, x_1-y_1+x_2-y_2) \\
&= (2x_1-y_1, x_1+3y_1, x_1-y_1)+(2x_2-y_2, x_2+3y_2, x_2-y_2) \\
&= \varphi(x_1,y_1)+\varphi(x_2,y_2) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Homogénéité :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda(x,y)) &= \varphi(\lambda x, \lambda y) \\
&= (2\lambda x-\lambda y, \lambda x+3\lambda y, \lambda x-\lambda y) \\
&= \lambda(2x-y, x+3y, x-y) = \lambda\varphi(x,y) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

φ est bien une application linéaire.

4. Écrire la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. *(0.5 pt)*

Solution.

On calcule les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

— $\varphi(1,0) = (2,1,1)$
— $\varphi(0,1) = (-1,3,-1)$

La matrice de φ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Soit $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice A' de φ dans les bases $\mathcal{B}$ (départ) et $\mathcal{B}'$ (arrivée). *(0.5 pt)*

Solution.

Étape 1 : Calculons les images des vecteurs de $\mathcal{B}$:

— $\varphi(1,1) = (2\cdot 1-1, 1+3\cdot 1, 1-1) = (1,4,0)$
— $\varphi(1,-1) = (2\cdot 1-(-1), 1+3\cdot(-1), 1-(-1)) = (3,-2,2)$

Étape 2 : Exprimons ces images dans la base $\mathcal{B}'$.
Pour $(1,4,0) = \alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,1)$:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \beta+\gamma = 4 \\ \gamma = 0 \end{cases} \implies \gamma = 0,\ \beta = 4,\ \alpha = -3$$

Donc $[\varphi(1,1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $(3,-2,2) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1)$:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 3 \\ \beta+\gamma = -2 \\ \gamma = 2 \end{cases} \implies \gamma = 2,\ \beta = -4,\ \alpha = 5$$

Donc $[\varphi(1,-1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Série télescopique et comparaison *(3 points)*

1. Décomposer $\frac{1}{n(n+2)}$ en éléments simples. *(0.5 pt)*
   Montrer que : $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

Solution.

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$

En multipliant par $n(n+2)$: $1 = A(n+2) + Bn$

— $n = 0$: $A = \frac{1}{2}$

— $n = -2$: $B = -\frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

2. En déduire la valeur de la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$. *(1 pt)*

Solution.

$$S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

C'est une série télescopique. En développant :

$$S_N = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)$$

3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. *(0.5 pt)*

Solution.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right) = \frac{3}{4}$$

4. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ converge. *(1 pt)*

Indication : On pourra montrer que pour $x \in [n, n+1]$: $\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \leq \dfrac{1}{x\ln^2(x)} \leq \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$, puis utiliser le changement de variable $u = \ln(x)$ dans l'intégrale.

Solution.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x\ln^2(x)}$ est positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.

On a, pour $x \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \leq \dfrac{1}{x\ln^2(x)} \leq \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$.

En intégrant cette inégalité entre n et $n+1$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln^2(x)}dx \leq \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

Gardons seulement la partie gauche de cette inégalité, et sommons pour n allant de 2 à N :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \leq \int_2^{N+1} \frac{1}{x\ln^2(x)}dx$$

On peut calculer cette intégrale avec le changement de variable $u = \ln(x)$, $du = \frac{dx}{x}$:

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{x\ln^2(x)}dx = \int_{\ln 2}^{\ln(N+1)} \frac{1}{u^2}du = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln(N+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(N+1)}$$

Cette intégrale converge vers $\frac{1}{\ln 2}$ quand $N \to +\infty$.

La somme partielle $\sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ est donc bornée.

Comme la série est à termes positifs et ses sommes partielles sont bornées, la série $\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$ **converge**.

Exercice 5 : Calcul différentiel et intégrales curvilignes *(5 points)*

1. Soit $f(x,y) = x^3 - xy^2 + \ln(xy)$ (définie pour $xy > 0$). Calculer la différentielle df. *(1 pt)*

Solution.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y^2 + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + \frac{1}{y}$$

Donc :

$$df = \left(3x^2 - y^2 + \frac{1}{x}\right) dx + \left(-2xy + \frac{1}{y}\right) dy$$

2. Soit $g(x,y,z) = x^2y + yz^2 - xz$. Calculer le gradient ∇g. *(0.5 pt)*

Solution.

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - z \\ x^2 + z^2 \\ 2yz - x \end{pmatrix}$$

3. Soit $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2z, xz^2)$. Calculer la matrice jacobienne de $\vec{F}$ et la divergence div$(\vec{F})$. *(1.5 pts)*

Solution.

La matrice jacobienne est :

$$J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 2yz & y^2 \\ z^2 & 0 & 2xz \end{pmatrix}$$

La divergence est :

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + 2yz + 2xz$$

4. Soit $\vec{H}(x,y) = (3x^2 + 2y, 2x - 4y)$.
Montrer que $\vec{H}$ dérive d'un potentiel scalaire et déterminer ce potentiel. *(1 pt)*

Solution.

Vérifions la condition d'irrotationnalité : $\frac{\partial H_1}{\partial y} = \frac{\partial H_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = 2, \qquad \frac{\partial H_2}{\partial x} = 2 \quad \checkmark$$

Donc $\vec{H}$ dérive d'un potentiel φ tel que $\nabla\varphi = \vec{H}$.
On intègre :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2 + 2y \implies \varphi(x, y) = x^3 + 2xy + h(y)$$

On vérifie avec la deuxième composante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x + h'(y) = 2x - 4y \implies h'(y) = -4y \implies h(y) = -2y^2 + C$$

Potentiel : $\varphi(x, y) = x^3 + 2xy - 2y^2 + C$

5. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$
   où C est le segment de droite allant de $(1, 0)$ à $(0, 2)$, parcouru dans ce sens. *(1 pt)*

Solution.

Paramétrons le segment : $\gamma(t) = (1 - t, 2t)$ pour $t \in [0, 1]$.
On a : $x = 1 - t$, $y = 2t$, $dx = -dt$, $dy = 2dt$.

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy &= \int_0^1 ((1 - t) + 2t)(-dt) + ((1 - t) - 2t)(2dt) \\
&= \int_0^1 -(1 + t)\, dt + \int_0^1 2(1 - 3t)\, dt \\
&= \int_0^1 (-1 - t + 2 - 6t)\, dt \\
&= \int_0^1 (1 - 7t)\, dt \\
&= \left[t - \frac{7t^2}{2} \right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$