
Algèbre linéaire - Chapitre 4

Applications linéaires

4.6 Matrice de passage d'une base à une autre

Idée générale :

Lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel, on peut choisir différentes bases pour exprimer les vecteurs. La **matrice de passage** permet de traduire les coordonnées d'un vecteur d'une base à une autre.

C'est comme un "dictionnaire" qui convertit les coordonnées : si on connaît les coordonnées d'un vecteur dans une base \mathcal{B} , la matrice de passage nous donne ses coordonnées dans une autre base \mathcal{B}' .

Méthode

Comment construire la matrice de passage ?

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E .

La **matrice de passage** de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , notée $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, se construit ainsi :

1. **Exprimer chaque vecteur de l'ancienne base \mathcal{B} dans la nouvelle base \mathcal{B}' :**

- Quelles sont les coordonnées de e_1 dans \mathcal{B}' ?
- Quelles sont les coordonnées de e_2 dans \mathcal{B}' ?
- etc.

2. **Remplir les colonnes de la matrice :**

- La 1ère colonne contient les coordonnées de e_1 dans \mathcal{B}' .
- La 2ème colonne contient les coordonnées de e_2 dans \mathcal{B}' .
- etc.

Attention à l'ordre ! Les colonnes contiennent les vecteurs de l'**ancienne** base exprimés dans la **nouvelle** base.

4.7 Exercices d'application

Exercice 1 : Cas simple dans \mathbb{R}^2

Dans \mathbb{R}^2 , on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, et une nouvelle base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice de passage P de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' .

Indication : Il faut exprimer e_1 et e_2 comme combinaisons linéaires de v_1 et v_2 .

Exercice 2 : Matrice de passage inverse

Avec les mêmes bases que l'exercice 1, déterminer la matrice de passage Q de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Indication : Cette fois, il faut exprimer v_1 et v_2 dans la base canonique \mathcal{B} .

Méthode

Comment changer les coordonnées d'un vecteur ?

Soit v un vecteur de E , et soient X ses coordonnées dans \mathcal{B} et X' ses coordonnées dans \mathcal{B}' .

Si P est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , alors :

$$X' = P \cdot X$$

Autrement dit : pour obtenir les coordonnées dans la nouvelle base, on multiplie les anciennes coordonnées par la matrice de passage.

Propriétés importantes :

- La matrice de passage est **toujours inversible**.
- $(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$
- Pour revenir en arrière : $X = P^{-1} \cdot X'$

Exercice 3 : Changement de coordonnées

On reprend les bases de l'exercice 1. Soit $v = (3, 1)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 (coordonnées dans la base canonique \mathcal{B}).

Quelles sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$?

Exercice 4 : Dans \mathbb{R}^3

Dans \mathbb{R}^3 , on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$f_1 = (1, 0, 1), \quad f_2 = (0, 1, 1), \quad f_3 = (1, 1, 0)$$

Déterminer la matrice de passage Q de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Méthode

Formule de changement de base pour une matrice

Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire. Si A est la matrice de f dans la base \mathcal{B} et A' est la matrice de f dans la base \mathcal{B}' , alors :

$$A' = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Interprétation : Pour exprimer f dans une nouvelle base :

1. On traduit de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} (multiplication par P)
2. On applique f dans \mathcal{B} (multiplication par A)
3. On traduit de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' (multiplication par P^{-1})

Exercice 5 : Changement de base d'une matrice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .

Indication : Utiliser la formule $A' = P^{-1}AP$ avec P la matrice de passage de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} .

Exercice 6 : Application géométrique

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans \mathbb{R}^2 . Sa matrice dans la base canonique est :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$ (c'est la même que la base canonique!).

Quelle est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' ? Quelle est la matrice de r dans \mathcal{B}' ?