 <small>CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE</small>	<b>Contrôle de connaissances et de compétences</b>	<b>FO-002-VLA-XX-001</b>
<b>30/01/2026</b>		<b>Page 1/2</b>

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
<b>Nom de l'enseignant</b>	Rémi Blanquet, Karine Serier
<b>Promotion</b>	BMC1 - S1
<b>Matière</b>	Mathématiques
<b>Durée de l'examen</b>	3h00
<b>Consignes</b>	— Calculatrice <b>NON</b> autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice	1	2	3	4	5	Total
Barème	5 pts	3 pts	4 pts	4 pts	4 pts	20 pts

## Exercice 1 : Équations

(5 points)

Résoudre :

- (1 pt)  $z - 2i = iz + 1$
- (1 pt)  $z^4 - 2z^3 - z + 2 = 0$
- (1 pt)  $2z^2 - (7 + 3i)z + (2 + 4i) = 0$
- (1 pt)  $z^4 = -1$
- (1 pt)  $z^6 = \frac{3}{1 - i\sqrt{3}}$

### Solution.

$$1. \ z - 2i = iz + 1 \Leftrightarrow z(1 - i) = 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{-1 + 3i}{2}$$

**Solution :**  $z = \frac{-1 + 3i}{2}$

- On remarque que  $z = 1$  et  $z = 2$  sont racines. On factorise :

$$z^4 - 2z^3 - z + 2 = (z - 1)(z - 2)(z^2 + z + 1)$$

Les racines de  $z^2 + z + 1 = 0$  sont  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $\bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ .

**Solutions :**  $z \in \{1, 2, j, \bar{j}\}$

3.  $\Delta = (7 + 3i)^2 - 8(2 + 4i) = 49 + 42i - 9 - 16 - 32i = 24 + 10i$

On cherche  $\delta = a + bi$  tel que  $\delta^2 = 24 + 10i$ , d'où  $a = 5, b = 1$ , donc  $\delta = 5 + i$ .

$$z = \frac{7 + 3i \pm (5 + i)}{4} \text{ donne } z_1 = 3 + i \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

**Solutions :**  $z \in \left\{ 3 + i, \frac{1 + i}{2} \right\}$

4.  $z^4 = -1 = e^{i\pi}$  donc  $z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

**Solutions :**  $z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$

5.  $\frac{3}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{3(1 + i\sqrt{3})}{4} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc  $z^6 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{\pi+6k\pi}{18}}$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

**Solutions :**  $z_k = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{\pi(1+6k)}{18}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

## Exercice 2 : Lieux géométriques

(3 points)

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie :

1. (1 pt)  $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$       2. (1 pt)  $\left|\frac{z+1}{z-2}\right| = 1$       3. (1 pt)  $\frac{2z-i}{z-2i} \in \mathbb{R}$

### Solution.

1.  $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \arg(z) - \arg(1+i) = \arg(z) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Donc  $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ . C'est la **demi-droite d'origine  $O$  (exclu) et de direction  $\vec{u}(0, 1)$** , soit l'axe des imaginaires purs strictement positifs.

2.  $|z+1| = |z-2|$  signifie que  $M$  est équidistant de  $A(-1, 0)$  et  $B(2, 0)$ .

C'est la **médiatrice du segment  $[AB]$** , soit la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$ .

3. Posons  $z = x + iy$ . On a  $\frac{2z-i}{z-2i} = \frac{2x+i(2y-1)}{x+i(y-2)}$

En multipliant par le conjugué du dénominateur et en annulant la partie imaginaire :

$$(2y-1)x - 2x(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2xy - x - 2xy + 4x = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$$

Donc  $x = 0$  avec  $z \neq 2i$ . C'est l'**axe des imaginaires purs privé du point  $2i$** .

### Exercice 3 : Polynômes

(4 points)

- (1,5 pts) Trouver  $a, b, c$  réels tel que  $X^2 + X + 1$  divise  $X^4 + aX^2 + bX + c$ .
- (1 pt) Déterminer tous les polynômes  $P$  qui vérifient :  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
- (1,5 pts) Décomposer en éléments simples :  $F(X) = \frac{X^4}{(X^2 - 1)(X + 3)}$

#### Solution.

- Les racines de  $X^2 + X + 1$  sont  $j$  et  $\bar{j}$ . Si  $X^2 + X + 1$  divise  $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ , alors :

$$P(j) = j^4 + aj^2 + bj + c = j + a\bar{j} + bj + c = 0$$

Comme  $j + \bar{j} = -1$  et  $j\bar{j} = 1$ , on obtient en séparant parties réelles et imaginaires :

$$c - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - a + b) = 0$$

Donc  $a - b = 1$  et  $2c = a + b + 1$ . En prenant  $a = 1, b = 0$ , on a  $c = 1$ .

**Solution :**  $a = 1, b = 0, c = 1$  (on vérifie :  $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ )

- En posant  $X = 0$  :  $P(0) = P(0)$  (ok). En posant  $X = i$  :  $P(-1) = 0$ .

Donc  $(X + 1)$  divise  $P$ . Soit  $P(X) = (X + 1)Q(X)$ , alors :

$$(X^2 + 1)Q(X^2) = (X^2 + 1)(X + 1)Q(X), \text{ donc } Q(X^2) = (X + 1)Q(X).$$

Par récurrence,  $Q(X) = \lambda(X + 1)^n$  et donc  $P(X) = \lambda(X + 1)^{n+1}$ .

**Solutions :**  $P(X) = \lambda(X + 1)^n, \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

- Division euclidienne :  $X^4 = (X^2 - 1)(X + 3)(X - 3) + 10X^2 - 9X - 27 + \dots$

$$\text{Après calcul : } F(X) = X - 3 + \frac{A}{X - 1} + \frac{B}{X + 1} + \frac{C}{X + 3}$$

$$A = \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{(-2) \cdot 2} = -\frac{1}{4}, C = \frac{81}{8 \cdot (-2)} = -\frac{81}{16}$$

**Décomposition :**  $F(X) = X - 3 + \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} - \frac{81/16}{X + 3}$

### Exercice 4 : Suites

(4 points)

Donner une expression en fonction de  $n$  puis calculer les limites des suites suivantes, définies par récurrence :

$$1. (1 \text{ pt}) \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$$

$$2. (1,5 \text{ pts}) \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

$$3. (1,5 \text{ pts}) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{2 + u_n} \end{cases}$$

On montrera que  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$  est géométrique.

### Solution.

1. Suite arithmético-géométrique. Point fixe :  $\ell = 2\ell - 6 \Rightarrow \ell = 6$ .

Posons  $v_n = u_n - 6$ , alors  $v_{n+1} = 2v_n$ , donc  $v_n = v_0 \cdot 2^n = -4 \cdot 2^n$ .

**Expression :**  $u_n = 6 - 4 \cdot 2^n = 6 - 2^{n+2}$  **Limite :**  $-\infty$

2. Équation caractéristique :  $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1$  ou  $r = 2$ .

Donc  $u_n = \alpha + \beta \cdot 2^n$ . Avec  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 0$  :  $\alpha + \beta = 1$  et  $\alpha + 2\beta = 0$ .

D'où  $\beta = -1$  et  $\alpha = 2$ .

**Expression :**  $u_n = 2 - 2^n$  **Limite :**  $-\infty$

3. Calculons  $v_{n+1}$  :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 3}{2 + u_n} - 3}{\frac{4u_n + 3}{2 + u_n} + 1} = \frac{4u_n + 3 - 3(2 + u_n)}{4u_n + 3 + 2 + u_n} = \frac{u_n - 3}{5u_n + 5} = \frac{1}{5}v_n$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{5}$  et  $v_0 = \frac{1 - 3}{1 + 1} = -1$ .

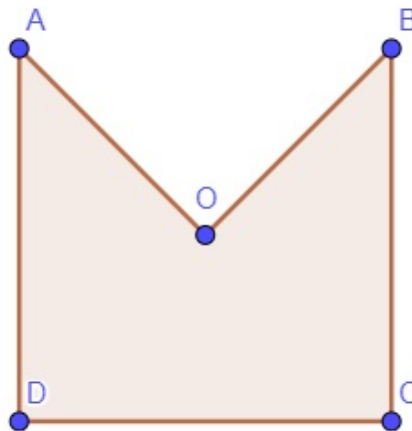
$$v_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ et } u_n = \frac{3 + v_n}{1 - v_n} = \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

**Expression :**  $u_n = \frac{3 \cdot 5^n - 1}{5^n + 1}$  **Limite :**  $3$

## Exercice 5 : Barycentre

(4 points)

Sur la figure ci-dessous,  $ABCD$  est une plaque métallique homogène carrée de centre  $O$ . On retire la partie triangulaire  $OAB$  pour obtenir la plaque pentagonale  $ADCBO$ .



On appelle  $H$  le centre d'inertie de la plaque  $OAB$  et  $G$  celui de la plaque  $ADCBO$  que l'on cherche. Justifier que  $O$  est barycentre de  $(H, 1), (G, 3)$  et en déduire que  $G$  est barycentre de  $(O, 4), (H, -1)$ .

### Solution.

**Partie 1 :** La plaque carrée  $ABCD$  a une aire proportionnelle à 4 (si on prend l'aire du triangle  $OAB$  comme unité). Le triangle  $OAB$  a une aire proportionnelle à 1. Donc le pentagone  $ADCBO$  a une aire

proportionnelle à 3.

Le centre d'inertie d'une plaque homogène est le barycentre des centres d'inertie de ses parties, pondérés par leurs aires.

Donc  $O$  (centre du carré  $ABCD$ ) est le barycentre de  $(H, 1)$  et  $(G, 3)$  car :

- $H$  est le centre d'inertie de la partie retirée (aire 1)
- $G$  est le centre d'inertie de la partie restante (aire 3)

**Partie 2 :** Puisque  $O = \text{bar}\{(H, 1), (G, 3)\}$ , on a :

$$1 \cdot \vec{OH} + 3 \cdot \vec{OG} = \vec{0}$$

On cherche  $G$  comme barycentre de  $(O, \alpha)$  et  $(H, \beta)$  :

$$\alpha \cdot \vec{GO} + \beta \cdot \vec{GH} = \vec{0}$$

De  $3\vec{OG} = -\vec{OH}$ , on tire  $\vec{OG} = -\frac{1}{3}\vec{OH}$ , donc :

$$\vec{GO} = \frac{1}{3}\vec{OH} \quad \text{et} \quad \vec{GH} = \vec{GO} + \vec{OH} = \frac{4}{3}\vec{OH}$$

Ainsi  $\vec{GO} = \frac{1}{4}\vec{GH}$ , ce qui donne  $4\vec{GO} = \vec{GH}$ , soit :

$$4\vec{GO} + (-1)\vec{GH} = \vec{0}$$

**Conclusion :**  $G = \text{bar}\{(O, 4), (H, -1)\}$