Analyse et Algèbre - TD4

Dérivées partielles et équations

Exercice 1 : Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = e^{3y^3}\cos(xy)$

Solution.

Dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3y^3}\cdot(-y\sin(xy)) = -ye^{3y^3}\sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2e^{3y^3}\cos(xy) + e^{3y^3}\cdot(-x\sin(xy)) = e^{3y^3}(9y^2\cos(xy) - x\sin(xy))$$

Dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -ye^{3y^3}\cdot y\cos(xy) = -y^2e^{3y^3}\cos(xy)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{3y^3}\Big[(18y+81y^4)\cos(xy) - (9y^2\cdot x + 9y^2\cdot x)\sin(xy) - x^2\cos(xy)\Big]\\ &= e^{3y^3}\Big[(18y+81y^4-x^2)\cos(xy) - 18xy^2\sin(xy)\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= -e^{3y^3}\sin(xy) - y\cdot 9y^2e^{3y^3}\sin(xy) - ye^{3y^3}\cdot x\cos(xy)\\ &= -e^{3y^3}\Big[(1+9y^3)\sin(xy) + xy\cos(xy)\Big]\end{aligned}$$

2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(x^2-y)$

Solution.

Dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2-y) + (x^2+y^2)(-2x\sin(x^2-y)) = 2x\cos(x^2-y) - 2x(x^2+y^2)\sin(x^2-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2-y) + (x^2+y^2)\sin(x^2-y)$$

Dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\cos(x^2-y) - 4x^2\sin(x^2-y) - 2(3x^2+y^2)\sin(x^2-y) - 4x^2(x^2+y^2)\cos(x^2-y)\\ &= (2-4x^2(x^2+y^2))\cos(x^2-y) - (4x^2+6x^2+2y^2)\sin(x^2-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2\cos(x^2-y) + 2y\sin(x^2-y) + 2y\sin(x^2-y) - (x^2+y^2)\cos(x^2-y)\\ &= (2-x^2-y^2)\cos(x^2-y) + 4y\sin(x^2-y)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\sin(x^2-y) + 2x\sin(x^2-y) + 2x(x^2+y^2)\cos(x^2-y)$$

$$= 4x\sin(x^2-y) + 2x(x^2+y^2)\cos(x^2-y)$$

3. $f(x,y) = \sqrt{2-x^2y^2}$

Solution.

On écrit $f(x,y) = (2-x^2y^2)^{1/2}$.

Dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(2-x^2y^2)^{-1/2} \cdot (-2xy^2) = \frac{-xy^2}{\sqrt{2-x^2y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(2-x^2y^2)^{-1/2} \cdot (-2x^2y) = \frac{-x^2y}{\sqrt{2-x^2y^2}}$$

Dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-y^2\sqrt{2-x^2y^2} - (-xy^2)\cdot\frac{-xy^2}{\sqrt{2-x^2y^2}}}{2-x^2y^2}$$

$$= \frac{-y^2(2-x^2y^2) - x^2y^4}{(2-x^2y^2)^{3/2}} = \frac{-2y^2 + x^2y^4 - x^2y^4}{(2-x^2y^2)^{3/2}} = \frac{-2y^2}{(2-x^2y^2)^{3/2}}$$

Par symétrie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^2}{(2-x^2y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy\sqrt{2-x^2y^2} - (-xy^2)\cdot\frac{-x^2y}{\sqrt{2-x^2y^2}}}{2-x^2y^2}$$

$$= \frac{-2xy(2-x^2y^2) - x^3y^3}{(2-x^2y^2)^{3/2}} = \frac{-4xy + 2x^3y^3 - x^3y^3}{(2-x^2y^2)^{3/2}} = \frac{-4xy + x^3y^3}{(2-x^2y^2)^{3/2}}$$

Exercice 2 : Dériver des composées

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f\left(2+2t, t^2\right)$. Calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Solution.

On pose $x(t) = 2+2t$ et $y(t) = t^2$. Alors $g(t) = f(x(t), y(t))$.

Par la règle de la chaîne :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot y'(t)$$

On a $x'(t) = 2$ et $y'(t) = 2t$, donc :

$$\boxed{g'(t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2+2t,t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2+2t,t^2)}$$

2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f\left(uv, u^2+v^2\right)$. Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solution.

On pose $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u^2 + v^2$. Alors $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

On a $\frac{\partial x}{\partial u} = v$ et $\frac{\partial y}{\partial u} = 2u$, donc :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial u} = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2)}$$

De même :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

On a $\frac{\partial x}{\partial v} = u$ et $\frac{\partial y}{\partial v} = 2v$, donc :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial v} = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2)}$$

Exercice 3 : Méthode de séparation des variables

On rappelle l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

On cherche une solution u définie sur $[0,L] \times \mathbb{R}_+$ avec conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et conditions aux bords $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

1. Cette équation est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique ?

Solution.

L'équation de la chaleur s'écrit sous la forme générale $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + \ldots = 0$ avec $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$.

Le discriminant est $\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4(-1)(0) = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation est **parabolique**.

Remarque : Les équations paraboliques décrivent des phénomènes de diffusion, où l'information se propage instantanément mais avec atténuation.

2. Essayons de trouver une solution sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. Que devient l'équation différentielle ?

Solution.

On substitue $u(x,t) = X(x)T(t)$ dans l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

L'équation devient :

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

3. Ecrivez cette équation sous la forme $f(t) = g(x)$.

   Comme x et t sont des variables indépendantes, on en déduit que $f(t) = g(x)$ est une constante $-\lambda$.

Solution.

En divisant par $X(x)T(t)$ (supposés non nuls) :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de t, le membre de droite ne dépend que de x. Pour que l'égalité soit vraie pour tout (x,t), les deux membres doivent être égaux à une même constante. On pose cette constante égale à $-\lambda$ (convention classique) :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \quad \text{et} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

4. Déterminer les deux équations différentielles vérifiées par X et T.

Solution.

D'après la question précédente :

- Pour T : $T'(t) = -\lambda T(t)$, soit $\boxed{T' + \lambda T = 0}$
- Pour X : $X''(x) = -\lambda X(x)$, soit $\boxed{X'' + \lambda X = 0}$

5. Si $\lambda < 0$, pouvez-vous trouver une solution pour X vérifiant les conditions aux bords ?

Solution.

Si $\lambda < 0$, posons $\lambda = -\omega^2$ avec $\omega > 0$. L'équation $X'' + \lambda X = 0$ devient $X'' - \omega^2 X = 0$, qui a pour solution générale :

$$X(x) = A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x)$$

Avec les conditions aux bords :

- $X(0) = 0$: $A\cosh(0) + B\sinh(0) = A = 0$
- $X(L) = 0$: $B\sinh(\omega L) = 0$

Comme $\sinh(\omega L) \neq 0$ pour $\omega L \neq 0$, on a $B = 0$.

Donc $X \equiv 0$: **pas de solution non triviale** pour $\lambda < 0$.

6. Et si $\lambda = 0$?

Solution.

Si $\lambda = 0$, l'équation $X'' = 0$ a pour solution générale :

$$X(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux bords :
- $X(0) = 0$: $B = 0$
- $X(L) = 0$: $AL = 0$, donc $A = 0$

Donc $X \equiv 0$: **pas de solution non triviale** pour $\lambda = 0$.

7. Il est donc nécéssaire que λ soit positif, en écrivant $\lambda = \mu^2$, quelles sont les solutions X possibles ?

Solution.

Si $\lambda = \mu^2 > 0$, l'équation $X'' + \lambda X = 0$ devient $X'' + \mu^2 X = 0$.

La solution générale est :
$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

8. Pour que les conditions aux bords soient vérifiées, il faut que $X(0) = X(L) = 0$. Quelle contrainte cela impose-t-il sur μ ?

Solution.

Avec $X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$:
- $X(0) = 0$: $A\cos(0) + B\sin(0) = A = 0$
- $X(L) = 0$: $B\sin(\mu L) = 0$

Pour avoir $B \neq 0$ (solution non triviale), il faut $\sin(\mu L) = 0$, c'est-à-dire :

$$\mu L = n\pi \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Donc :
$$\boxed{\mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Les fonctions propres sont $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

9. En déduire les fonctions T possibles et en déduire les solutions u possibles qui s'écrivent $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Solution.

Pour chaque $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$, on a $\lambda_n = \mu_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$.

L'équation $T' + \lambda_n T = 0$ donne :

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Les solutions élémentaires sont donc :

$$\boxed{u_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}}$$

où B_n est une constante arbitraire.

10. En utilisant le principe de superposition, donner toutes les solutions qu'on peut construire avec cette méthode.

Solution.

L'équation de la chaleur étant linéaire, toute combinaison linéaire de solutions est encore solution.

La solution générale est donc :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}}$$

Les coefficients B_n sont déterminés par la condition initiale $u(x,0) = f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

C'est le développement en série de Fourier (en sinus) de f. Les coefficients sont :

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Remarque : Le facteur $e^{-n^2\pi^2 t/L^2}$ montre que les hautes fréquences (n grand) s'atténuent rapidement : c'est la diffusion thermique.

Exercice 4 : Changements de variables

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = c$$

où c est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

En utilisant le théorème de composition, montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}$.

Solution.

On pose $x(u,v) = \frac{u+v}{2}$ et $y(u,v) = \frac{v-u}{2}$. Alors $f(u,v) = g(x(u,v), y(u,v))$.

Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

On calcule :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

Or, par hypothèse, $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = c$, donc :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}}$$

2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.

Solution.

L'équation $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}$ signifie que la dérivée partielle de f par rapport à u est constante.

En intégrant par rapport à u :

$$f(u, v) = \frac{c}{2}u + \varphi(v)$$

où φ est une fonction arbitraire de v (la ń constante ż d'intégration peut dépendre de v).

3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Solution.

On a $f(u, v) = \frac{c}{2}u + \varphi(v)$ avec $f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$.

Pour revenir aux variables (x, y), on inverse le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

Donc :

$$g(x, y) = f(x - y, x + y) = \frac{c}{2}(x - y) + \varphi(x + y)$$

En posant $h = \varphi$ une fonction arbitraire de classe C^1, la solution générale est :

$$\boxed{g(x, y) = \frac{c}{2}(x - y) + h(x + y)}$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1 quelconque.

Vérification : $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{c}{2} + h'(x + y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{c}{2} + h'(x + y)$.

Donc $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{c}{2} + h' + \frac{c}{2} - h' = c$.

Exercice 5 : Pour aller plus loin

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite harmonique si son laplacien est nul :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe C^3.Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.

Solution.

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$:

Posons $g = \frac{\partial f}{\partial x}$. Alors :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

Or f est harmonique, donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. En dérivant par rapport à x :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0$$

Donc $\Delta g = 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}$ est harmonique.

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$: Par un raisonnement analogue (dériver l'équation $\Delta f = 0$ par rapport à y), $\frac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique.

Pour $h = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$:

Calculons $\frac{\partial h}{\partial x}$:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Puis $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Donc :

$$\Delta h = 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + x\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right) + y\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)$$

Le premier terme est $2\Delta f = 0$. Les deux autres termes sont $x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) = 0$ et $y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\Delta f) = 0$.

Donc $\Delta h = 0$: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique.

2. On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x,y) = \varphi\left(x^2 + y^2\right)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Solution.

On pose $r^2 = x^2 + y^2$, donc $f(x,y) = \varphi(r^2)$.

Calcul des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(r^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varphi''(r^2) \cdot 4x^2 + \varphi'(r^2) \cdot 2 = 4x^2\varphi''(r^2) + 2\varphi'(r^2)$$

Par symétrie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2\varphi''(r^2) + 2\varphi'(r^2)$$

Condition d'harmonicité :

$$\Delta f = 4(x^2 + y^2)\varphi''(r^2) + 4\varphi'(r^2) = 0$$

$$4r^2\varphi''(r^2) + 4\varphi'(r^2) = 0$$

En posant $s = r^2$ et $\psi(s) = \varphi'(s)$:

$$s\psi'(s) + \psi(s) = 0$$

C'est bien une **équation différentielle linéaire du premier ordre** en $\psi = \varphi'$:

$$\boxed{s\varphi''(s) + \varphi'(s) = 0}$$

Ou sous forme plus standard : $(s\varphi')' = 0$.

3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

Solution.

L'équation $s\varphi'(s) + \varphi'(s) = 0$ peut s'écrire $(s\varphi')' = 0$, donc :

$$s\varphi'(s) = C_1$$

où C_1 est une constante. Ainsi :

$$\varphi'(s) = \frac{C_1}{s}$$

En intégrant :

$$\varphi(s) = C_1 \ln(s) + C_2$$

où C_2 est une autre constante.

En revenant aux variables (x, y) avec $s = x^2 + y^2 = r^2$:

$$f(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2 = 2C_1 \ln(r) + C_2$$

En posant $A = 2C_1$ et $B = C_2$:

$$\boxed{f(x, y) = A \ln \sqrt{x^2 + y^2} + B = A \ln(r) + B}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $A, B \in \mathbb{R}$.

Remarque : La fonction $\ln(r)$ *est, à une constante multiplicative près, le potentiel créé par une charge ponctuelle en dimension 2 (ou une ligne de charge en dimension 3).*