Séries de fonctions - Chapitre 4

Des produits scalaires aux coefficients de Fourier

Les fonctions périodiques

1 Les fonctions complexes périodiques

Les fonctions réelles suivantes sont-elles périodiques et si oui, quelle est leur période ?

1. $\cos(x)$: Oui, période $T = 2\pi$
2. $\sin(2\pi x)$: Oui, période $T = 1$ (car $\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$)
3. $\cos(x/2)$: Oui, période $T = 4\pi$ (car $\cos((x+4\pi)/2) = \cos(x/2 + 2\pi) = \cos(x/2)$)
4. $\sin(2x) + \cos(3x)$: Oui, période $T = 2\pi$ (le PPCM des périodes π et $\frac{2\pi}{3}$)
5. $\sin(nx)$: Oui, période $T = \frac{2\pi}{n}$
6. $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$: Oui, période $T = \frac{4\pi}{3}$
7. $x - \lfloor x \rfloor$: Oui, période $T = 1$ (c'est la fonction partie fractionnaire)

1. $\cos(x)$
2. $\sin(2\pi x)$
3. $\cos(x/2)$
4. $\sin(2x) + \cos(3x)$
5. $\sin(nx)$, n est un entier naturel non nul
6. $\cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$
7. $x - \lfloor x \rfloor$

Les fonctions complexes suivantes sont-elles périodiques et si oui, quelle est leur période ?

1. e^{ix} : Oui, période $T = 2\pi$ (car $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}e^{i2\pi} = e^{ix} \cdot 1 = e^{ix}$)
2. e^{2ix} : Oui, période $T = \pi$ (car $e^{2i(x+\pi)} = e^{2ix}e^{i2\pi} = e^{2ix}$)
3. $e^{ix/2\pi}$: Oui, période $T = 4\pi^2$ (car $e^{i(x+4\pi^2)/2\pi} = e^{ix/2\pi}e^{i2\pi} = e^{ix/2\pi}$)
4. $e^{2i\pi x/T}$: Oui, période T (car $e^{2i\pi(x+T)/T} = e^{2i\pi x/T}e^{i2\pi} = e^{2i\pi x/T}$)
5. $e^{inx} + e^{ipx}$: Oui, période $T = \frac{2\pi}{\mathrm{PGCD}(n,p)}$ (le PPCM des périodes $\frac{2\pi}{n}$ et $\frac{2\pi}{p}$)

1. e^{ix}
2. e^{2ix}
3. $e^{ix/2\pi}$
4. $e^{2i\pi x/T}$, T est un réel strictement positif
5. $e^{inx} + e^{ipx}$

Produit scalaire réel

2 Définition

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E une application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

telle que :

* symétrie : $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
* linéarité à gauche : $\langle \lambda u + v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
* positivité : $\langle u, u\rangle \geq 0$
* définie positivité : $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$

3 Dans $\mathbb{R}^3$

On se place dans $\mathbb{R}^3$, qu'on munit de la base

$$e_1 = (1, 2, 1), \qquad e_2 = (2, 1, -4), \qquad e_3 = (-3, 2, -1)$$

1. La famille est-elle orthogonale ?
2. Est-elle orthonormée ? Si non, définissez une base (f_1, f_2, f_3) orthonormée à partir de la famille (e_1, e_2, e_3).

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on note u_i ses coordonnées dans la base orthonormée (f_1, f_2, f_3). Cela signifie que

$$u = u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3$$

Déterminer les coordonnées de $u = (1, 0, 1)$ dans la base (f_1, f_2, f_3).

1. Vérifions si la famille est orthogonale :

$\langle e_1, e_2\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 2 + 2 - 4 = 0$ ✓

$\langle e_1, e_3\rangle = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -3 + 4 - 1 = 0$ ✓

$\langle e_2, e_3\rangle = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) = -6 + 2 + 4 = 0$ ✓

La famille est orthogonale.

2. Vérifions si elle est orthonormée :

$\|e_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$, donc $\|e_1\| = \sqrt{6}$

$\|e_2\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-4)^2 = 4 + 1 + 16 = 21$, donc $\|e_2\| = \sqrt{21}$

$\|e_3\|^2 = (-3)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9 + 4 + 1 = 14$, donc $\|e_3\| = \sqrt{14}$

La famille n'est pas orthonormée. Une base orthonormée est :

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 1, -4) = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}\right)$$

$$f_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, 2, -1) = \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

3. Coordonnées de $u = (1, 0, 1)$ dans la base (f_1, f_2, f_3) :

$u_1 = \langle u, f_1\rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$u_2 = \langle u, f_2\rangle = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} + 1 \cdot \frac{-4}{\sqrt{21}} = \frac{-2}{\sqrt{21}}$

$u_3 = \langle u, f_3\rangle = 1 \cdot \frac{-3}{\sqrt{14}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{14}}$

Donc $u = \frac{\sqrt{6}}{3} f_1 - \frac{2}{\sqrt{21}} f_2 - \frac{4}{\sqrt{14}} f_3$

4 Dans $\mathbb{R}[X]$

— Quelle est la dimension de $\mathbb{R}[X]$?

La famille $(1, X, X^2, X^3, \cdots)$ est appelée base hilbertienne de $\mathbb{R}[X]$: tout élément de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie de vecteurs de cette famille.

On munit cet espace du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

— Montrer que c'est bien un produit scalaire en vérifiant les propriétés ci-dessus.
— La famille $(1, X, X^2, X^3, \cdots)$ est-elle orthogonale ? Est-elle orthonormée ?
— Comment trouver a, b, c tels que la famille $(1, X - a, X^2 - bX - c)$ soit orthogonale ?
— Quelles sont les coordonnées de $P = 1 + 2X + 3X^2$ dans la base $(1, X, X^2, \cdots)$?
— Peut-on retrouver ces coordonnées avec le produit scalaire comme dans l'exercice précédent ?

Produit scalaire complexe

5 Définition

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E une application

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

telle que :

* symétrie conjuguée : $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
* linéarité à gauche : $\langle \lambda u + v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
* positivité : $\langle u, u\rangle \geq 0$
* définie positivité : $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$

6 Dans l'espace des fonctions complexes 2π-périodiques

On définit le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

Montrer que la famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

Les coefficients de Fourier d'une fonction f sont les coordonnées de f dans la base $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Déterminer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes :

Démonstration que c'est un produit scalaire :

Les propriétés de symétrie conjuguée, linéarité et positivité découlent des propriétés de l'intégrale et du conjugué complexe.

Démonstration que $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée :

Pour $n = m$: $\langle e^{inx}, e^{inx}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}dx = \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$

Pour $n \neq m$: $\langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = 0$

Donc la famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale. Pour l'orthonormaliser, on divise par $\sqrt{2\pi}$.

Coefficients de Fourier :

1. $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, donc $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_n = 0$ sinon.
2. $\sin(2\pi x)$: Cette fonction n'est pas 2π-périodique ! Elle est de période 1.
3. $\cos(x/2) = \frac{e^{ix/2}+e^{-ix/2}}{2}$, donc $c_{1/2} = \frac{1}{2}$, $c_{-1/2} = \frac{1}{2}$, $c_n = 0$ sinon.
4. $\sin(2x) + \cos(3x) = \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} + \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}$ Donc $c_2 = \frac{1}{2i}$, $c_{-2} = -\frac{1}{2i}$, $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_{-3} = \frac{1}{2}$, $c_n = 0$ sinon.
5. $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, 2\pi]$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-(1+in)x}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(1+in)x}}{-(1+in)}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-e^{-2\pi(1+in)}}{1+in} = \frac{1-e^{-2\pi}e^{-2\pi in}}{2\pi(1+in)}$$

1. $\cos(x)$
2. $\sin(2\pi x)$
3. $\cos(x/2)$
4. $\sin(2x) + \cos(3x)$
5. $\exp^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

Séries de fonctions - Chapitre 5
Produit scalaire - exercices intermédiaires

Produit scalaire

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

vérifiant :

— symétrie : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
— linéarité à gauche : $\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
— positivité : $\langle u, u \rangle \geq 0$
— définie positivité : $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

1 Dans $\mathbb{R}^n$

1. Montrer que le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ défini par, si $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$,

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

2. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Que penser de l'application avec des coefficients devant les produits ? Est-ce encore un produit scalaire ?

$$\langle u, v \rangle = 2u_1 v_1 + 6u_2 v_2 + \cdots + 3u_n v_n$$

4. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire ?
5. Peut-on choisir des coefficients réels comme on veut devant les produits ?
6. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Corrections — $\mathbb{R}^n$

1. C'est bien un produit scalaire :
   — symétrie : $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \langle v, u \rangle$;
   — linéarité à gauche : $\langle \lambda u + w, v \rangle = \sum_i (\lambda u_i + w_i) v_i = \lambda \sum_i u_i v_i + \sum_i w_i v_i$;
   — positivité : $\langle u, u \rangle = \sum_i u_i^2 \geq 0$;
   — définie positivité : $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u_i = 0$ pour tout i, donc $u = 0$.
2. Une base orthonormée est la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
3. L'application pondérée $\langle u, v \rangle = 2u_1 v_1 + 6u_2 v_2 + \cdots + 3u_n v_n$ est un produit scalaire car elle est symétrique, linéaire et telle que $\langle u, u \rangle = 2u_1^2 + 6u_2^2 + \cdots + 3u_n^2 > 0$ si $u \neq 0$ (tous les poids sont strictement positifs).
4. Une base orthonormée associée est obtenue en normalisant la base canonique : $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} e_2$, $\ldots$, $f_n = \frac{1}{\sqrt{3}} e_n$.
5. On ne peut pas « choisir comme on veut » : pour obtenir un produit scalaire diagonal $\langle u, v \rangle = \sum_i a_i u_i v_i$, il faut et il suffit que $a_i > 0$ pour tout i (sinon la positivité définie échoue).

6. Pour $\langle u, v\rangle = \sum_i a_i u_i v_i$ avec $a_i > 0$, une base orthonormée est $f_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}} e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

2 Dans $m_{2,2}(\mathbb{R})$

Dans l'espace des matrices 2×2, on définit l'application

$$\langle A, B\rangle = Tr(A^t\, B)$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. La base canonique est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

Corrections — $m_{2,2}(\mathbb{R})$

1. Oui :
   — symétrie : $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^t B) = \mathrm{Tr}((B^t A)^t) = \mathrm{Tr}(B^t A) = \langle B, A\rangle$;
   — linéarité : découle de la linéarité de la trace ;
   — positivité : $\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}(A^t A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$ et $= 0 \iff A = 0$.
2. En notant $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique, on a $\langle E_{ij}, E_{kl}\rangle = \mathrm{Tr}(E_{ji} E_{kl}) = \delta_{ik}\, \delta_{jl}$, donc cette base est orthonormée.

3 Dans l'espace des polynômes

Reprendre l'exercice 6

Indication — On procède comme à la question 6 : selon le produit scalaire choisi sur $\mathbb{R}[X]$ (par exemple $\langle P, Q\rangle = \int_a^b PQ$), on normalise une base naturelle ou on applique Gram–Schmidt pour construire une base orthonormée.

4 Dans l'espace des fonctions réelles 2π-périodiques

On définit l'application

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire
2. Montrer que la famille $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cdots)$ est orthonormée.
3. Déterminer les coordonnées de $f(x) = |x|$ définie sur $[0, 2\pi]$ sur cette base.

Corrections — fonctions 2π-périodiques

1. C'est bien un produit scalaire : symétrie, linéarité et positivité découlent des propriétés de l'intégrale de Riemann.
2. On a, pour $m, n \geq 1$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx = \begin{cases} \pi & m = n, \\ 0 & m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1\, dx = 2\pi.$$

   Ainsi la famille annoncée est orthogonale ; pour l'orthonormaliser, on utilise

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^c = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^s = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \quad (n \geq 1).$$

3. On considère la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $[0, 2\pi]$ (puisque $|x| = x$ sur

cet intervalle). Les coefficients de Fourier usuels sont

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n}.$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx).$$

Relativement à la base orthonormée $(\varphi_0, \varphi_n^c, \varphi_n^s)$, les coordonnées sont $\langle f, \varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$, $\langle f, \varphi_n^c\rangle = 0$ et $\langle f, \varphi_n^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx = -\frac{2\sqrt{\pi}}{n}$.