estp	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
21/05/2025		**Page 1/3**

ANNÉE SCOLAIRE 2024-2025 – Semestre 6	
Nom de l'enseignant	Maxime BERGER, Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Convergence de séries (4 points)

Étudier la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes. Justifier soigneusement chaque réponse.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *(1 pt)*

Solution.

C'est une série géométrique de raison $r = \frac{2}{3}$.
Comme $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la série **converge**.
Sa somme vaut : $S = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *(1 pt)*

Solution.

C'est une série alternée de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Vérifions le critère des séries alternées (Leibniz) :

— (a_n) est décroissante : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ✓
— $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ✓

Par le critère de Leibniz, la série **converge**.

Remarque : elle ne converge pas absolument car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$).

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$ *(1 pt)*

Solution.

Utilisons le critère de D'Alembert. Posons $u_n = \frac{n!}{3^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{3 \cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty > 1$.
Par le critère de D'Alembert, la série **diverge**.

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ *(1.5 pts)*

Solution.

Cherchons un équivalent du terme général :

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{n^2(1-\frac{1}{n^2})} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente.
Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^2-1}$ **converge**.

Exercice 2 : Série télescopique et comparaison (4 points)

1. Décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples. *(0.5 pt)*

Solution.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

En multipliant par $n(n+1)$: $1 = A(n+1) + Bn$

- $n = 0$: $A = 1$
- $n = -1$: $B = -1$

Donc $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2. En déduire la valeur de la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$. *(1 pt)*

Solution.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

C'est une série télescopique. En développant :

$$S_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *(0.5 pt)*

Solution.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

4. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge. *(2 pts)*
Indication : comparer avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

Solution.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$ est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.
Principe de la comparaison série/intégrale (majoration) :
Comme f est décroissante, pour tout $x \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
En intégrant sur $[n, n+1]$: $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.
Appliquons ceci pour $n = 1, 2, \ldots, N-1$:

$$\int_1^2 f(x)\,dx \leq f(1), \quad \int_2^3 f(x)\,dx \leq f(2), \quad \ldots, \quad \int_{N-1}^{N} f(x)\,dx \leq f(N-1)$$

En sommant ces inégalités :

$$\int_1^N f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(N-1)$$

D'où vient le $1+$? On veut majorer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n)$, qui contient le terme $f(N)$ en plus. Donc :

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \underbrace{f(1) + f(2) + \cdots + f(N-1)}_{\geq \int_1^N f(x)\,dx} + f(N) \leq f(1) + \int_1^N f(x)\,dx$$

Avec $f(1) = \frac{1}{1^3} = 1$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^3} dx}$$

Le "$1+$" correspond au premier terme $f(1) = \frac{1}{1^3}$ de la série, qui n'est pas "couvert" par l'intégrale $\int_1^N$ dans la majoration.
Conclusion : Calculons l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

L'intégrale converge, donc la somme partielle est majorée par $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Par comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^3}$ **converge**.

Exercice 3 : Algèbre linéaire (4 points)

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. *(1.5 pts)*

Solution.

Vérifions les trois axiomes d'un sous-espace vectoriel :
1) Non vide : $(0, 0, 0) \in E$ car $0 + 0 - 0 = 0$. ✓
2) Stabilité par addition : Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ dans E.

— $x_1 + y_1 - z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 - z_2 = 0$
— $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
— $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0$

Donc $u + v \in E$. ✓
3) Stabilité par multiplication : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z) \in E$.

— $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$
— $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(x + y - z) = 0$

Donc $\lambda u \in E$. ✓
E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Ecrire E avec le mot clé "Vect", donner une base et la dimension. *(1 pt)*

Solution.

De $x + y - z = 0$, on tire $z = x + y$. Donc on peut choisir x et y comme paramètres libres :

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

Donc $E = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.
Les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$ sont clairement linéairement indépendants.
Base de E : $\mathcal{B}_E = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
Dimension : $\dim(E) = 2$

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$.
Montrer que f est une application linéaire. *(1 pt)*

Solution.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Additivité :

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2)) \\ &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1, 2x_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, 2x_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Homogénéité :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda x) \\ &= \lambda(x + y, x - y, 2x) = \lambda f(x, y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

f est bien une application linéaire.

4. Écrire la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. *(1 pt)*

Solution.

On calcule les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

— $f(1, 0) = (1, 1, 2)$

— $f(0, 1) = (1, -1, 0)$

La matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Noyau et image (4 points)

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$g(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$$

1. Écrire la matrice B de g dans les bases canoniques. *(0.5 pt)*

Solution.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer le noyau $\ker(g)$. Donner une base et la dimension. *(2 pts)*

Solution.

$(x, y, z) \in \ker(g) \Leftrightarrow g(x, y, z) = (0, 0)$

On résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est le double de la première, donc on a une seule contrainte. On choisira deux paramètres libres y et z. On exprime alors x en fonction de y et z : $x = z - 2y$.

Les solutions sont :

$$(x, y, z) = (z - 2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$

Base de $\ker(g)$ **:** $\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

Dimension : $\dim(\ker(g)) = 2$

3. Déterminer l'image Im(g). Donner une base et la dimension. *(1.5 pts)*

Solution.

L'image de g est engendrée par les colonnes de B :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

On remarque que $(2, 4) = 2(1, 2)$ et $(-1, -2) = -(1, 2)$.

Donc Im$(g) = $ Vect$\{(1, 2)\}$.

Base de Im(g) **:** $\{(1, 2)\}$

Dimension : $\dim(\text{Im}(g)) = 1$

Vérification par le théorème du rang : $\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ ✓

Exercice 5 : Calcul différentiel et intégrales curvilignes (4 points)

1. Soit $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$. Calculer la différentielle df. *(1 pt)*

Solution.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ye^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^{xy}$$

Donc :

$$df = (2xy + ye^{xy})dx + (x^2 + xe^{xy})dy$$

2. Soit $g(x, y, z) = x^2 + y^2z - z^3$. Calculer le gradient ∇g. *(0.5 pt)*

Solution.

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2yz \\ y^2 - 3z^2 \end{pmatrix}$$

3. Soit $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xyz, z^2)$. Calculer la matrice jacobienne de $\vec{F}$ et la divergence $\text{div}(\vec{F})$. *(1.5 pts)*

Solution.

La matrice jacobienne est :

$$J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ yz & xz & xy \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

La divergence est :

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2x + xz + 2z$$

4. Soit $\vec{G}(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$.
Montrer que $\vec{G}$ dérive d'un potentiel scalaire et déterminer ce potentiel. *(1 pt)*

Solution.

Vérifions la condition d'irrotationnalité : $\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 2x + 2y, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial x} = 2x + 2y \quad \checkmark$$

Donc $\vec{G}$ dérive d'un potentiel φ tel que $\nabla\varphi = \vec{G}$.
On intègre :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + y^2 \implies \varphi(x, y) = x^2y + xy^2 + h(y)$$

On vérifie avec la deuxième composante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + 2xy \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = C$$

Potentiel : $\varphi(x,y) = x^2y + xy^2 + C$

5. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy$
   où C est le segment de droite allant de $(0,0)$ à $(1,2)$, parcouru dans ce sens. *(1 pt)*

Solution.

Paramétrons le segment : $\gamma(t) = (t, 2t)$ pour $t \in [0,1]$.
On a : $x = t$, $y = 2t$, $dx = dt$, $dy = 2dt$.

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy &= \int_0^1 (t)(2t)\,dt + (t+2t)(2\,dt) \\
&= \int_0^1 2t^2\,dt + \int_0^1 6t\,dt \\
&= \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 + \left[3t^2\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}
\end{aligned}$$