# Algèbre linéaire - Chapitre 4
# Applications linéaires

## 4.8 Noyau d'une application linéaire

**Idée générale :**
Le **noyau** d'une application linéaire $f$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui sont envoyés sur le vecteur nul. C'est l'ensemble des "solutions de $f(x) = 0$".

Le noyau nous renseigne sur l'**injectivité** de l'application : plus le noyau est "petit", plus l'application est "proche" d'être injective.

**Méthode**

**Définition du noyau**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Le **noyau** de $f$, noté $\ker(f)$ (de l'allemand *Kern*), est défini par :

$$\boxed{\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

C'est l'ensemble des **antécédents** du vecteur nul $0_F$.
**Propriétés fondamentales :**

— $\ker(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de $E$.

— $0_E \in \ker(f)$ (le vecteur nul est toujours dans le noyau).

— $f$ est **injective** si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

**Méthode pour déterminer le noyau :**
1. Écrire le système d'équations $f(x) = 0$.
2. Résoudre ce système homogène.
3. Exprimer l'ensemble des solutions comme combinaisons linéaires de vecteurs de base.

**Exercice 1 : Noyau d'une application linéaire**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 2y - 2z)$$

1. Déterminer $\ker(f)$.

2. En déduire la dimension de $\ker(f)$.
3. L'application $f$ est-elle injective ?

**Solution.**

**1.** On cherche les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = (0, 0)$.

On résout le système :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est le double de la première, donc le système se réduit à :

$$x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$$

Les solutions sont de la forme $(x, y, x + y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On peut écrire : $(x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$.

Donc :

$$\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))}$$

**2.** Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ sont linéairement indépendants (non proportionnels), donc $\dim(\ker(f)) = 2$.

**3.** Comme $\ker(f) \neq \{0\}$, l'application $f$ n'est **pas injective**.

## 4.9 Image d'une application linéaire

**Idée générale :**
L'**image** d'une application linéaire $f$ est l'ensemble de tous les vecteurs qu'on peut atteindre en appliquant $f$. C'est l'espace "d'arrivée effectif" de l'application.

L'image nous renseigne sur la **surjectivité** de l'application : si l'image est tout l'espace d'arrivée, l'application est surjective.

### Méthode

**Définition de l'image**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
L'**image** de $f$, notée $\mathrm{Im}(f)$, est définie par :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}}$$

C'est l'ensemble des **valeurs** prises par $f$.
**Propriétés fondamentales :**

- $\mathrm{Im}(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de $F$.
- $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ (car $f(0_E) = 0_F$).
- $f$ est **surjective** si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

**Méthode pour déterminer l'image :**

1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
2. Calculer les images des vecteurs de base.

3. Extraire une base de l'image en éliminant les vecteurs dépendants.

**Exercice 2 : Image d'une application linéaire**

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$g(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(g)$ en calculant les images des vecteurs de la base canonique.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(g)$ et sa dimension.
3. L'application $g$ est-elle surjective ?

**Solution.**

**1.** Calculons les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ :

— $g(1, 0) = (1, 1, 2)$

— $g(0, 1) = (1, -1, 0)$

Donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}((1, 1, 2), (1, -1, 0))$.

**2.** Vérifions que ces vecteurs sont indépendants. Cherchons $\alpha, \beta$ tels que :

$$\alpha(1, 1, 2) + \beta(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$$

Le système donne : $\alpha + \beta = 0$, $\alpha - \beta = 0$, $2\alpha = 0$.

La seule solution est $\alpha = \beta = 0$, donc les vecteurs sont indépendants.

Une base de $\mathrm{Im}(g)$ est $\{(1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$ et $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$.

**3.** Comme $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, l'application $g$ n'est **pas surjective**.

**Remarque :** On peut vérifier avec le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$, soit $2 = \dim(\ker(g)) + 2$, donc $\dim(\ker(g)) = 0$ et $g$ est injective.

## 4.10 Le théorème du rang

### Méthode

**Théorème du rang (formule fondamentale)**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec $E$ de dimension finie $n$.

Alors :

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Autrement dit :

$$\boxed{n = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)}$$

où $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ est le **rang** de $f$.

**Interprétation :**

— Si $\ker(f)$ est "grand", alors $\mathrm{Im}(f)$ est "petit" (et vice versa).

— Cette formule permet souvent de déduire une dimension connaissant l'autre.

### Méthode

**Conséquences importantes**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.

**1. Condition d'injectivité :**

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = n$$

**2. Condition de surjectivité :**

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \Leftrightarrow \text{rg}(f) = p$$

**3. Cas particulier $n = p$ (endomorphisme) :**

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

## 4.11 Exercices d'application

**Exercice 3 : Application du théorème du rang**

Soit $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice (dans les bases canoniques) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de $h$ (rang de la matrice $A$).
2. En déduire la dimension de $\ker(h)$ grâce au théorème du rang.
3. Déterminer une base de $\ker(h)$.

**Solution.**

**1.** On échelonne la matrice $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 2 pivots, donc $\mathrm{rg}(h) = 2$.

**2.** Par le théorème du rang :

$$\dim(\ker(h)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rg}(h) = 4 - 2 = 2$$

**3.** On résout $AX = 0$. Le système échelonné donne :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Avec $x_3 = s$ et $x_4 = t$ comme paramètres libres :

— $x_2 = -s - t$

— $x_1 = -2x_2 - x_3 = 2s + 2t - s = s + 2t$

Donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s + 2t, -s - t, s, t) = s(1, -1, 1, 0) + t(2, -1, 0, 1)$.

Une base de $\ker(h)$ est $\boxed{\{(1, -1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)\}}$.

**Exercice 4 : Noyau et image avec des polynômes**

Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire définie par :

$$\varphi(P) = P - P(0) - P'(0) \cdot X$$

où $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré au plus 2.

1. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.
2. Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
3. Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

**Solution.**

**1.** Calculons les images des vecteurs de base :

Pour $P = 1$ : $P(0) = 1$, $P'(X) = 0$ donc $P'(0) = 0$.

$$\varphi(1) = 1 - 1 - 0 \cdot X = 0$$

Pour $P = X$ : $P(0) = 0$, $P'(X) = 1$ donc $P'(0) = 1$.

$$\varphi(X) = X - 0 - 1 \cdot X = 0$$

Pour $P = X^2$ : $P(0) = 0$, $P'(X) = 2X$ donc $P'(0) = 0$.

$$\varphi(X^2) = X^2 - 0 - 0 \cdot X = X^2$$

**2.** La matrice de $\varphi$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes sont les coordonnées de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$ dans la base.

**3.**

— $\ker(\varphi)$ : On cherche les $P = a + bX + cX^2$ tels que $\varphi(P) = 0$.

$\varphi(P) = a \cdot \varphi(1) + b \cdot \varphi(X) + c \cdot \varphi(X^2) = cX^2 = 0$

Donc $c = 0$, et $a, b$ sont quelconques.

$\boxed{\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(1, X)}$ avec $\dim(\ker(\varphi)) = 2$.

— $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(0, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(X^2)$.

$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2)}$ avec $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$.

**Vérification :** $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$

**Exercice 5 : Injectivité et surjectivité**

Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer si elle est injective, surjective, bijective, ou aucune de ces propriétés.

**a)** $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_1(x, y) = (x, y, x + y)$

**b)** $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$

**c)** $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_3(x, y) = (2x - y, -4x + 2y)$

**Solution.**

**a)** $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Noyau : $f_1(x, y) = (0, 0, 0) \Rightarrow x = 0, y = 0, x + y = 0$. Donc $\ker(f_1) = \{(0, 0)\}$.

$f_1$ est **injective**.

Image : $\mathrm{rg}(f_1) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\ker(f_1)) = 2 - 0 = 2 \neq 3$.

$f_1$ n'est **pas surjective** (car $\dim(\mathrm{Im}(f_1)) = 2 < 3$).

**b)** $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Noyau : $f_2(x, y, z) = (0, 0) \Rightarrow x + z = 0$ et $y + z = 0$, soit $x = -z$ et $y = -z$.

$\ker(f_2) = \{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-1, -1, 1))$. Donc $\dim(\ker(f_2)) = 1$.

$f_2$ n'est **pas injective**.

Image : $\mathrm{rg}(f_2) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

$f_2$ est **surjective**.

**c)** $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Noyau : $f_3(x, y) = (0, 0) \Rightarrow 2x - y = 0$ et $-4x + 2y = 0$.

Ces deux équations sont équivalentes (la seconde est $-2$ fois la première), donc $y = 2x$.

$\ker(f_3) = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 2))$. Donc $\dim(\ker(f_3)) = 1 \neq 0$.

$f_3$ n'est **ni injective ni surjective**.

(Puisque $\dim(E) = \dim(F) = 2$, non injective $\Leftrightarrow$ non surjective.)

### Exercice 6 : Détermination complète

Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$\psi(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

1. Déterminer la matrice de $\psi$ dans la base canonique.
2. Calculer $\ker(\psi)$ et en donner une base.
3. Calculer $\mathrm{Im}(\psi)$ et en donner une base.
4. Vérifier le théorème du rang.
5. Interpréter géométriquement $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.

**Solution.**

**1.** Calculons les images de la base canonique :

— $\psi(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$
— $\psi(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$
— $\psi(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$

La matrice de $\psi$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.** On résout $\psi(x, y, z) = (0, 0, 0)$, soit $x + y + z = 0$.

L'équation $x + y + z = 0$ définit un plan passant par l'origine.

Avec $y = s$ et $z = t$ comme paramètres : $x = -s - t$.

$(x, y, z) = (-s - t, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$

Une base de $\ker(\psi)$ est $\boxed{\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}}$ et $\dim(\ker(\psi)) = 2$.

**3.** $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 1)) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$.

Une base de $\mathrm{Im}(\psi)$ est $\boxed{\{(1, 1, 1)\}}$ et $\dim(\mathrm{Im}(\psi)) = 1$.

**4.** Vérification du théorème du rang :

$$\dim(\ker(\psi)) + \dim(\mathrm{Im}(\psi)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \quad \checkmark$$

**5.** Interprétation géométrique :

— $\ker(\psi)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ (plan passant par l'origine, de vecteur normal $(1, 1, 1)$).

— $\mathrm{Im}(\psi)$ est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$ (la "diagonale de l'espace").

$\psi$ est la **projection** sur la droite $(1, 1, 1)$ parallèlement au plan $x + y + z = 0$.