Algèbre linéaire - Chapitre 1

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Résumé des idées

À retenir dans une semaine :

- Nous interprèterons les vecteurs plutôt comme des points, et pas comme des flèches.
- Pour résoudre un système linéaire, on le rend **échelonné** avec le pivot de Gauss.
- On peut interpréter un système linéaire de 3 façons différentes :
  - Comme une intersection d'éléments géométriques (droites, plans, etc.).
  - Comme une combinaison linéaire de vecteurs.
  - Comme une équation matricielle.

Ce que je dois savoir

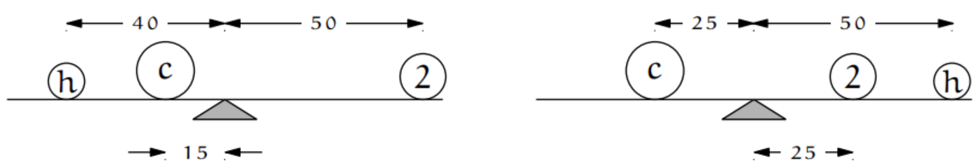
- Que signifie qu'un système soit échelonné ?
- Quelles sont les manipulations autorisées pour le pivot de Gauss ?
- Comment interpréter un système linéaire comme une combinaison de vecteurs ?

1.1 Exercices

1.1.1 Équations de réactions chimiques

Les équations de réactions chimiques peuvent être interprétées comme des systèmes linéaires.
Y a-t-il toujours une infinité de façon d'équilibrer l'équation ?

Transformer le problème suivant en système linéaire. Sans le résoudre, combien a-t-il de solutions ?



1.1.2 Combien de solutions ?

Ces systèmes admettent-ils zéro, une ou une infinité de solutions ?

a)
$$\begin{cases} -3x+2y &= 0 \\ -2y &= 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x+y &= 4 \\ y-z &= 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x+y &= 4 \\ y-z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x+y &= 4 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x+6y+z &= -0.5 \\ -z &= 2.5 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x-3y &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x+2y &= 4 \\ y &= 1 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 2x+y &= 0 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x-y &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} x+y-3z &= -1 \\ y-z &= 2 \\ z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

1.1.3 Systèmes d'équations linéaires

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x+2y=5 \\ x-4y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ x+y+2z=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-y=1 \\ -3x-3y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y+z=20 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+z=5 \\ x+y-z=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+z+w=5 \\ y-w=-1 \\ 3x-z-w=0 \\ 4x+y+2z+w=9 \end{cases}$$

1.1.4 Approfondissement

Résoudre

$$\begin{cases} 2\sin\alpha-\cos\beta+3\tan\gamma &= 3 \\ 4\sin\alpha+2\cos\beta-2\tan\gamma &= 10 \\ 6\sin\alpha-3\cos\beta+\tan\gamma &= 9 \end{cases}$$

1.1.5 Manipulation

La méthode de Gauss consiste à combiner les équations d'un système pour en former de nouvelles.

a) Peut-on obtenir l'équation $3x - 2y = 5$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

b) Peut-on obtenir l'équation $5x - 3y = 2$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

c) Peut-on obtenir $6x - 9y + 5z = -2$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 6x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

1.1.6 Interprétation

Choisir 3 systèmes linéaire dans un exercice précédent et l'écrire des 2 manières différentes :

1. Comme une combinaison linéaires de vecteurs.
2. Comme une équation matricielle.

Par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ou comme une équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1.1.7 Pour ceux qui s'ennuient

Une boîte contenant des pennies, des nickels et des dimes renferme treize pièces d'une valeur totale de 83 cents. Combien y a-t-il de pièces de chaque type dans la boîte ? (Ce sont des pièces américaines : un penny vaut 1 cent, un nickel 5 cents et un dime 10 cents.)