estp	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
16/01/2026		**Page 1/3**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger
Matière	Mathématiques - Analyse et Algèbre
Durée de l'examen	2h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Calcul tensoriel (4 points)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ qui n'est pas orthonormée. On donne les produits scalaires entre les vecteurs de la base :

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 3, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$$

1. Former la matrice (g_{ij}) avec $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. *(1 pt)*
2. Soit le vecteur $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ exprimé dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Quelles sont les composantes contravariantes de $\mathbf{v}$? *(0.5 pt)*
3. Calculer les composantes covariantes v_1, v_2, v_3 de ce vecteur. *(1 pt)*
4. Calculer la norme du vecteur $\mathbf{v}$. *(1 pt)*
5. Rappelez la définition d'un tenseur, puis donner un exemple de quantité qui est un tenseur et une quantité qui n'est pas un tenseur. *(0.5 pt)*

Exercice 2 : Espaces L^p (4 points)

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = e^{ix-2x}, \qquad h(x) = \sin(3x^2)$$

1. Déterminer si f appartient à $L^1(]1, +\infty[)$. Si oui, calculer sa norme. *(1.5 pts)*
2. Déterminer si g appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^*)$. Si oui, calculer sa norme. *(1.5 pts)*
3. Déterminer si h appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$. Si oui, donner sa norme. *(1 pt)*

Exercice 3 : Transformée de Laplace (4 points)

On note $\mathcal{L}\{f\}(s)$ la transformée de Laplace de f.

1. Calculer $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)$ directement à partir de la définition et préciser le domaine de convergence. *(1 pt)*
2. En utilisant la propriété de décalage en fréquence $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, calculer $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\}$. *(1 pt)*
   On rappelle que $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-t}$ avec $y(0) = 0$ en utilisant la transformée de Laplace. *(2 pts)*

Exercice 4 : Équations aux dérivées partielles (4 points)

1. Soit $f(x, y) = e^{2x}\sin(3y)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *(1 pt)*
2. Vérifier que f est solution de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -5f$. *(0.5 pt)*
3. On considère l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+$ avec conditions aux bords $u(0, t) = u(L, t) = 0$.
   On cherche une solution sous la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$. Montrer que l'équation devient :
   $$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$
   où λ est une constante. *(1 pt)*
4. En déduire les deux équations différentielles vérifiées par X et T. *(0.5 pt)*
5. En prenant $\lambda = \mu^2 > 0$, montrer que les conditions aux bords imposent $\mu = \frac{n\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, puis donner la forme générale de $T(t)$. *(1 pt)*

Exercice 5 : Distributions (4 points)

On rappelle que la distribution de Dirac δ_a est définie par $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ pour toute fonction test φ.
On note H la fonction de Heaviside : $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$.

1. Soit $f(x) = H(x) - H(x-3)$ (« fonction porte » sur $[0, 3]$). Calculer la dérivée de f au sens des distributions. *(1 pt)*
2. Soit g la fonction définie par :
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
Calculer la dérivée de g au sens des distributions en utilisant la formule des sauts. *(1 pt)*
3. Soit h la fonction définie par :
$$h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
Calculer la dérivée de h au sens des distributions et écrivez $\langle h', \varphi \rangle$ pour une fonction test φ. *(2 pts)*

Transformées de Laplace usuelles

Fonction $f(t)$	**Transformée** $\mathcal{L}\{f\}(s)$	**Domaine**
1	$\frac{1}{s}$	Re$(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re$(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	Re$(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Re$(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	Re$(s) > 0$
$u(t-a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	Re$(s) > 0$