

# Analyse et Algèbre - TD3

*Transformée de Laplace*

**Rappel :** Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ , la **transformée de Laplace** de  $f$  est définie par :

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Cette intégrale converge pour  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ , où  $\sigma_0$  dépend de  $f$  et est appelée l'**abscisse de convergence**.

## Exercice 1 : Calcul direct de transformées

L'objectif est de calculer des transformées de Laplace directement à partir de la définition.

1. Calculer  $\mathcal{L}\{1\}(s)$  pour  $s > 0$  et déterminer l'abscisse de convergence.
2. Calculer  $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s)$  pour  $a \in \mathbb{R}$  et déterminer l'abscisse de convergence.
3. En utilisant les formules d'Euler, déduire  $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$  et  $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$ .
4. Montrer par récurrence que  $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
*utiliser une intégration par parties.*

## Exercice 2 : Propriétés fondamentales

On souhaite démontrer les propriétés fondamentales de la transformée de Laplace.

1. **Linéarité.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des transformées de Laplace, et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Montrer que :

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}$$

2. **Dérivation.** Soit  $f$  une fonction dérivable dont  $f$  et  $f'$  admettent des transformées de Laplace. Montrer que :

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

3. En déduire que pour  $f$  deux fois dérivable :

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 \mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

4. **Décalage en fréquence.** Montrer que si  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ , alors :

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

5. **Application.** En utilisant les résultats précédents, calculer  $\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}$  et  $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(5t)\}$ .

6. **Dérivation de la transformée.** Montrer que :

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

7. **Application.** En utilisant la propriété précédente, calculer  $\mathcal{L}\{t \sin(\omega t)\}$  et  $\mathcal{L}\{t \cos(\omega t)\}$ .

### Exercice 3 : Abscisse de convergence

L'**abscisse de convergence**  $\sigma_0$  d'une fonction  $f$  est le réel tel que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$  converge si et seulement si  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ .

- Déterminer l'abscisse de convergence des fonctions suivantes :

(a) $f(t) = 1$	(c) $f(t) = e^{t^2}$
(b) $f(t) = e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$	(d) $f(t) = \sin(t)$

- On considère la fonction  $f(t) = e^{2t} + 3e^{-t} + \cos(t)$ . Déterminer son abscisse de convergence.
- Soit  $f$  une fonction à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe  $M > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $|f(t)| \leq Mt^n$  pour  $t$  assez grand. Montrer que  $f$  admet une transformée de Laplace et déterminer une majoration de son abscisse de convergence.

### Exercice 4 : Équations différentielles d'ordre 1

- En appliquant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle  $y' + 2y = 3e^{-t}$  avec  $y(0) = 1$ .
- Résoudre l'équation différentielle avec paramètre  $y' + ay = be^{ct}$  avec  $y(0) = y_0$ , où  $a, b, c, y_0 \in \mathbb{R}$  et  $a \neq c$ .

### Exercice 5 : Équations différentielles d'ordre 2

- Résoudre  $y'' + 4y = 0$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .
- Résoudre  $y'' + 3y' + 2y = 0$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .
- Oscillateur amorti avec second membre.** Résoudre l'équation :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t)$$

avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ , où  $\lambda > 0$ ,  $\omega_0 > 0$  et  $\omega \neq \omega_0$ .

On prendra  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0 = 2$  et  $\omega = 3$ ,  $F_0 = 10$ .

- Cas de résonance.** Résoudre  $y'' + 4y = 2\sin(2t)$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ .

### Exercice 6 : Équations différentielles avec paramètres

**Système masse-ressort-amortisseur.** Un système mécanique vérifie :

$$mx'' + cx' + kx = F_0 u(t)$$

où  $u(t)$  est la fonction de Heaviside,  $m$  la masse,  $c$  le coefficient d'amortissement,  $k$  la raideur du ressort, et  $F_0$  la force appliquée.

Avec  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ , trouver  $x(t)$  en fonction des paramètres dans le cas sur-amorti ( $c^2 > 4mk$ ).

## Exercice 7 : Fonction échelon et fonctions discontinues

La fonction échelon de Heaviside  $u(t - a)$  est définie par :

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

1. Montrer que  $\mathcal{L}\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$  pour  $a \geq 0$ .

2. **Théorème du décalage temporel.** Montrer que si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , alors :

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$$

3. Calculer  $\mathcal{L}\{(t - 2)^2u(t - 2)\}$ .

4. Soit  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ t & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$ . Exprimer  $f$  à l'aide de fonctions échelon et calculer sa transformée de Laplace.

5. Résoudre l'équation  $y' + y = u(t - 1)$  avec  $y(0) = 0$ .

## Exercice 8 : Produit de convolution

Le **produit de convolution** de deux fonctions  $f$  et  $g$  est défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

1. Montrer que  $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$ .

*échanger les deux intégrales et faire un changement de variables.*

2. En déduire  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$  par convolution.

3. Calculer  $(t * \sin(t))$  de deux manières : par le calcul direct et par la transformée de Laplace.

## Exercice 9 : Lien avec la transformée de Fourier

La **transformée de Fourier** d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par :

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

1. Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction **causale** (nulle pour  $t < 0$ ). Montrer que :

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \mathcal{L}\{f\}(i\omega)$$

c'est-à-dire que la transformée de Fourier s'obtient en évaluant la transformée de Laplace sur l'axe imaginaire  $s = i\omega$ .

2. Calculer la transformée de Fourier de  $f(t) = e^{-at}u(t)$  pour  $a > 0$ .

3. Calculer la transformée de Fourier de  $g(t) = e^{-a|t|}$  pour  $a > 0$  (fonction non causale).

*Indication : séparer l'intégrale en  $t < 0$  et  $t > 0$ .*

4. **Application : fonction de transfert.** Un système soumis à une entrée  $x(t)$ , répond avec une sortie  $y(t)$ . Il est décrit par  $y'' + 2y' + 2y = x(t)$ .

(a) Déterminer la fonction de transfert  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  en Laplace.

(b) En déduire la réponse en fréquence  $H(i\omega)$  et calculer son module.

(c) Pour quelles fréquences  $\omega$  le système amplifie-t-il le signal d'entrée ?

## Formulaire : Transformées de Laplace usuelles

Fonction $f(t)$	Transformée $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$	Domaine
1	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re}(s) > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > a$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > a$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\text{Re}(s) >  a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\text{Re}(s) >  a $
$u(t-a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\delta(t)$ (Dirac)	1	$\forall s$
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$	$\forall s$

TABLE 1 – Transformées de Laplace élémentaires

Propriété	Formule
Dérivation temporelle	$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)$
Dérivation seconde	$\mathcal{L}\{f''\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
Intégration temporelle	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
Décalage fréquentiel	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
Multiplication par $t$	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$
Multiplication par $t^n$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
Convolution	$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$

TABLE 2 – Propriétés de la transformée de Laplace