Séries de fonctions - Chapitre 3
Révisions sur les complexes

Rappels sur les nombres complexes

Définitions et formes usuelles

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme :

$$z = a + ib \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$$

où a est la partie réelle $\Re(z)$ et b la partie imaginaire $\Im(z)$.

Forme algébrique : $z = a + ib$

Forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le **module** de z, et $\theta = \arg(z)$ est un **argument** de z (défini à 2π près).

Forme exponentielle (formule d'Euler) :

$$z = re^{i\theta}$$

avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Module, argument et conjugué

- Module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument : $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (attention au quadrant)
- Conjugué : $\overline{z} = a - ib$

Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

ou, sous forme exponentielle :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Racines n-ièmes de l'unité

Les solutions de $z^n = 1$ sont :

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

1 Module et argument

Écrire sous la forme $a + ib$, puis sou forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.
3. Nombre de module 1 et d'argument $\pi/4$.
4. Nombre de module 2 et d'argument $-\pi/6$.
5. Nombre de module 7 et d'argument $-\pi/2$.

2 Forme exponentielle → forme algébrique

Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants, donnés sous forme exponentielle :

1. $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{6}}$
2. $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$
3. $z_3 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$
4. $z_4 = 7e^{i\pi}$
5. $z_5 = 4e^{i0}$
6. $z_6 = 6e^{-i\frac{\pi}{2}}$

3 Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$,
2. $z_2 = 1 + i$,
3. $z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$,
4. $z_4 = i$,
5. $z_5 = -2i$,
6. $z_6 = -3$,
7. $z_7 = 1$
8. $z_8 = 9i$
9. $z_9 = -3$
10. $z_{10} = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$
11. $z_{11} = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$
12. $z_{12} = \sin x + i \cos x$.

4 Exponentielle

Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

5 Trigonométrique

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

6 Pour préparer les séries de fourier

Calculer les intégrales suivantes, pour toute valeur de n et m dans les entiers relatifs :

1. $$\int_0^\pi e^{inx}e^{imx}dx$$
2. $$\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)dx$$
3. $$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx$$
4. $$\int_0^\pi \cos(nx)\sin(mx)dx$$

7 Exponentielle

On pose

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad z_3 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$z_1, \qquad z_2, \qquad z_3, \qquad z_1z_2, \qquad \frac{z_1z_2}{z_2}$$

8 Racines carrées

Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.