

# Analyse et Algèbre - TD2

## Espaces $L^p$

### Exercice 1 : Application directe

On définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}, \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{3ix} \end{cases}, \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{ix} e^{-x} \end{cases}$$

Pour chacun des espaces  $L^p$  suivants et chacune des fonctions précédentes, déterminer si elle appartient à cet espace. Si c'est le cas, donner sa norme  $L^p$ .

$$L^1(\mathbb{R}_+^*), \quad L^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad L^1(]0, 1[), \quad L^2(]0, 1[), \quad L^1(]1, +\infty[), \quad L^2(]1, +\infty[)$$

### Exercice 2 : Convergences

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$$

où  $\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, \frac{1}{n}]$  :

$$\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

1. Représenter les graphes des fonctions  $f_1, f_2, f_3$ .
2. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $]0, 1]$ .
3. Calculer  $\|f_n\|_p$  pour tout  $p \geq 1$  et  $p = \infty$ . En déduire que  $(f_n)$  converge dans  $L^1(]0, 1[)$  mais pas dans  $L^2(]0, 1[)$ , ni dans  $L^\infty(]0, 1[)$ .

### Exercice 3 : Inégalité de Hölder

Soit  $p, q > 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . **L'inégalité de Hölder** affirme que pour toutes fonctions  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

1. Montrer que si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Omega)$ , alors  $\int_{\Omega} |fg| \leq \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |g|^2}$  et  $fg \in L^1(\Omega)$ .
2. Les espaces  $L^p$  sont fondamentaux en ingénierie pour caractériser différents aspects d'un signal ou d'une fonction physique. Considérons un signal électrique  $I(t)$  représentant l'intensité du courant en fonction du temps  $t \in [0, T]$ .

- La norme  $L^1$  :  $\|I\|_1 = \int_0^T |I(t)| dt$  représente la **charge totale** transportée par le courant.
- La norme  $L^2$  :  $\|I\|_2 = \left( \int_0^T |I(t)|^2 dt \right)^{1/2}$  représente l'**énergie** du signal.
- La norme  $L^\infty$  :  $\|I\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |I(t)|$  représente l'**amplitude maximale** du signal (contrainte de sécurité).

Soit  $I(t) = A \sin(\omega t)$  pour  $t \in [0, T]$  avec  $A > 0$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Calculer  $\|I\|_1$ ,  $\|I\|_2$  et  $\|I\|_\infty$ . Que représentent ces valeurs ?

## Exercice 4 : $L^2$ et son produit scalaire

On rappelle que  $L^2([a, b])$  est muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

1. Montrer que ce produit scalaire vérifie bien les axiomes d'un produit scalaire :
  - Symétrie :  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
  - Linéarité :  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$
  - Positivité :  $\langle f, f \rangle \geq 0$  et  $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$  p.p.
2. A l'aide de l'exercice précédent, retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ .
3. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions orthogonales, montrer que (théorème de Pythagore) :

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et  $f_n : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$ . Dans les espaces à valeurs complexes, on rappelle que le produit scalaire doit être sesquelinéaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

4. Montrer que  $f_n \in L^2(]0, 1[)$  et calculer  $\|f_n\|_2$ .
5. Montrer que  $(f_n)$  est une famille orthogonale de  $L^2(]0, 1[)$ .
6. **Introduction aux séries de Fourier.** Pour une fonction  $f \in L^2(]0, 1[)$ , on définit les **coefficients de Fourier** de  $f$  par :

$$c_n = \langle f, f_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi nx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

La **série de Fourier** de  $f$  est alors définie comme la somme (formelle) :

$$S_n(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$$

Soit  $f(x) = \sin(12\pi x)$ . Montrer que  $f \in L^2(]0, 1[)$  et calculer les coefficients de Fourier  $c_n = \langle f, f_n \rangle$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

7. Soit  $f$  la fonction 1-périodique définie sur  $[0, 1[$  par  $f(x) = x$ . Montrer que  $f \in L^2(]0, 1[)$  et calculer les coefficients de Fourier  $c_n = \langle f, f_n \rangle$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
8. Écrire la série de Fourier de  $f(x) = x$  sous la forme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$ . Que peut-on dire de cette série ? On pourra exprimer le résultat en termes de sinus.

## Exercice 5 : Vers le produit de convolution

Pour deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$ , on construit la fonction  $h$  suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$$

Cette opération réalise une sorte de moyenne de la fonction  $f$  par la fonction  $g$ .

1. Si  $f$  est intégrable et si  $g$  est une fonction de  $L^\infty(\mathbb{R})$ , montrer que  $h$  est une fonction bornée.
2. Si  $f$  est intégrable et si  $g$  est la fonction  $g = 1$  constante, que vaut  $h$  ?
3. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont toutes les deux intégrables, alors  $h$  l'est aussi et  $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ . On pourra séparer les intégrales et effectuer un changement de variable.

Nous verrons tout l'intérêt de cette fonction dans la suite du cours.