Suites et séries numériques

1 Des exemples

Donner deux exemples différents dans chacune des situations suivantes :

- ☐ une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0.

  Par exemple, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

- ☐ une suite bornée non convergente.

  Par exemple, $u_n = (-1)^n$.

- ☐ une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$.

  Par exemple, $u_n = (-2)^n$.

- ☐ une suite non monotone qui tend vers 0.

  Par exemple, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

- ☐ une suite positive qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

  Par exemple, $u_n = -\dfrac{1}{n}$, ou $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

2 Vrai ou Faux ?

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses avec une démonstration ou un contre-exemple.

- ☐ Toute suite non-majorée tend vers $+\infty$.

  Faux, la suite $u_n = n(-1)^n$ n'est pas majorée et ne tend pas vers l'infini.

- ☐ Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors, (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

  Faux, on forme par exemple la suite

  $$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

  qui converge vers 0 mais n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

- ☐ Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $1/q$.

Vrai, si $u_n = u_0 q^n$, alors $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0} q^{-n} = \frac{1}{u_0} \left(\frac{1}{q}\right)^n$.

☐ Soit (u_n) une suite croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. Si pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \geq N$ tel que $u_{n_0} > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ.

Faux, la suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers $\ell = 0$, pourtant il existe une infinité de valeurs de (u_n) qui sont strictement supérieures à ℓ.

☐ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et que (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n, alors (u_n) est croissante.

Faux, on peut prendre par exemple $f(x) = x^2$ et $u_0 \in]0, 1[$.

☐ Si (u_n) est divergente, alors (u_n) est non bornée.

Faux, la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente mais bornée.

☐ Si $u_n \to \ell$ et f continue, alors $f(u_n) \to f(\ell)$

Vrai, c'est la définition d'une fonction continue : $\lim_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$.

3 Étude de suites

Étudier la nature des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$

Le numérateur est borné car $|\sin(n)| \leq 1$ et $|3\cos(n^2)| \leq 3$. Le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc la suite tend vers 0.

b) $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

On conserve les termes dominants :

$$2n + (-1)^n = 2n\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) = 2n(1 + o(1))$$

u_n est équivalente à $\frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}$. donc la suite tend vers $\frac{2}{5}$.

c) $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$

On fait de même, on conserve les termes dominants :

$$n^3 + 5n = n^3\left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = n^3(1 + o(1))$$

Pour le dénominateur :

$$4n^2 + \sin(n) + \ln(n) = 4n^2(1 + \frac{\sin(n)}{4n^2} + \frac{\ln(n)}{4n^2}) = 4n^2(1 + o(1))$$

u_n est équivalente à $\frac{n^3}{4n^2} = \frac{n}{4}$. donc la suite tend vers $+\infty$.

d) $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

On mutliplie en haut et en bas par la quantité conjuguée pour reconnaître une identité remarquable :

$$u_n = \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2n+1-(2n-1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

Comme le dénominateur est équivalent à $2\sqrt{2n}$, on a u_n est équivalent à $\frac{2}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc la suite tend vers 0.

e) $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Par croissances comparées, l'exponentielle l'emporte sur les puissances donc la suite tend vers 0.

f) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

Par croissances comparées, les exponentielles (ici 2^n) l'emportent sur les puissances donc la suite tend vers 0.

g) $u_n = \dfrac{n!}{45^n}$

Par croissances comparées, les factorielles l'emportent sur les puissances donc la suite tend vers l'infini.

h) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

On peut étudier le rapport u_{n+1}/u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Donc la suite est décroissante et tend vers 0.

i) $u_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$.

On factorise par les termes dominants :

$$u_n = \frac{2^n(1 + \frac{n^3}{2^n})}{3^n(1 + \frac{n^2}{3^n})} = \frac{2^n(1 + o(1))}{3^n(1 + o(1))}$$

La suite est donc équivalente à $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc la suite tend vers 0.

4 *Plus difficile

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer un équivalent simple :

a) $u_n = \ln\left(2n^2 - n\right) - \ln(3n+1)$

On met en facteur le terme dominant dans chaque logarithme, de sorte que

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(2n^2\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) - \ln\left(3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right) \\ &= 2\ln n + \ln 2 + \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \ln(n) - \ln(3) - \ln\left(1+\frac{1}{3n}\right) \\ &= \ln n + \ln 2 - \ln 3 + v_n \end{aligned}$$

où la suite (v_n) tend vers 0 . On en déduit que u_n tend vers $+\infty$.

b) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, de sorte que

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}$$

On met encore en facteur, dans chaque racine carrée du dénominateur, le terme dominant (en n^2), et on trouve

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

Or, $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ tend vers 1 et $\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ tend également vers 1 . On en déduit que (u_n) converge vers 1.

c) $_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, a, b \in]0, +\infty[$

Si $a = b$, alors $u_n = 0$ pour tout n, et donc (u_n) converge vers 0 . Si $a > b$, alors a^n est prépondérant sur b^n au sens que

$$\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$$

puisque $|b/a| < 1$. On factorise donc par a^n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

On en déduit que dans ce cas, (u_n) converge vers 1. Si $b > a$, on factorise cette fois par b^n et c'est $(a/b)^n$ qui converge vers 0 . On trouve :

$$u_n = \frac{-1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$

(u_n) converge donc vers -1 dans ce cas.

d) $u_n = \frac{\ln(n+e^n)}{n}$

On factorise par e^n dans le logarithme. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln\left(e^n\left(1+ne^{-n}\right)\right)}{n} \\ &= \frac{n+\ln\left(1+ne^{-n}\right)}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part, ne^{-n} tend vers 0 (par exemple, on peut écrire $ne^{-n} = \frac{1}{\frac{e^n}{n}}$ et utiliser la comparaison des fonctions exponentielle et polynôme au voisinage de l'infini). Puisque la fonction ln est continue en 1 et $\ln(1)=0$, on en déduit que $\ln\left(1+ne^{-n}\right)$ tend vers 0. II vient $\ln\left(1+ne^{-n}\right)/n$ tend vers 0 , et donc la suite (u_n) converge vers 1 .

e) $u_n = \frac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

On factorise par le terme dominant dans chaque logarithme. On en déduit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(\sqrt{n})+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(n^2\right)+\ln\left(1+n^{-2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2\ln(n)+\ln\left(1+n^{-2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln n}}{2+\frac{\ln(1+n^{-2})}{\ln n}}. \end{aligned}$$

Puisque $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ln\left(1+n^{-2}\right)$ tendent vers $0, (u_n)$ converge vers $\frac{1}{4}$.

5 Formule de Stirling

a) Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$.
Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.

On a $y_n = x_{n+1} - x_n$. Donc

$$\sum_{n=0}^{N} y_n = \sum_{n=0}^{N}(x_{n+1}-x_n) = x_{N+1} - x_0.$$

Donc la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.

b) On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
A l'aide d'un développement limité, déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

2. Un petit calcul prouve que :

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

On effectue un développement limité de v_n-il faut pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 - et on a :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n est donc convergente.

c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}$$

On écrit $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Puisque la série $\sum_n v_n$ converge, d'après la première question la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel $l_,$ et en passant à l'exponentielle, on trouve que la suite (u_n) converge vers le réel e^l qui est strictement positif. Revenant à la définition de (u_n), ceci donne le résultat avec $C = e^{-l}$.

6 Télescopiques

a) Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{k^2 - 1} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1}$.

On met tout au même dénominateur, et on procède par identification :

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k + (a-b)}{k^2 - 1}.$$

On cherche donc a et b de sorte que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

On en déduit $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

b) En déduire la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}$.

La somme est télescopique :

$$\begin{aligned} u_n =& \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

soit

$$u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

On en déduit que (u_n) converge vers $\frac{3}{4}$.

c) Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$

L'idée est de factoriser $k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$. On cherche donc a et b tels que

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}.$$

On trouve $a = 1$ et $b = -1$. On en déduit que

$$v_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

et donc (v_n) converge vers 1 .

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Multipliant la différence de deux racines par la quantité conjuguée, on trouve

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

e) En déduire le comportement de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On somme alors ces inégalités, et les termes à gauche se télescopent :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) \leq u_n.$$

Par le théorème de comparaison, on en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Séries numériques

7 Paramètres

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de (a, b) la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Écrivons

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln n + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On obtient

$$u_n = (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + +O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, si $1+a+b \neq 0, u_n \sim_{+\infty} (1+a+b)\ln(n)$ et la série diverge grossièrement. Si $1+a+b = 0$ et $a+2b \neq 0, u_n \sim_{+\infty} \frac{a+2b}{n}$ et la série diverge par comparaison à une série de Riemann divergente. Si $1+a+b=0$ et $a+2b=0$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge absolument. Finalement, on a prouvé que $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

b) Dans le(s) cas où la série converge, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

On traite donc le cas $a=-2$ et $b=1$. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - 2\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1). \end{aligned}$$

On reconnait deux couples de deux sommes télescopiques et on trouve

$$S_n = \ln(1) - \ln(2) + \ln(n+2) - \ln(n+1) \to -\ln(2).$$

8 Avec l'exponentielle

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

1. La première somme ne pose pas de problèmes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} + e = 2e.$$

2. La deuxième somme est plus compliquée à cause du terme en n^2. Pour qu'il se simplifie bien avec le $n!$, le plus commode est de l'écrire

$$n^2 = n(n-1) + n$$

de sorte que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e + e - 2e = 0.$$

3. La méthode est similaire. Dit de façon algébrique, on va décomposer le polynôme X^3 dans la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$. En raisonnant d'abord avec le terme de plus haut degré, puis celui juste après, etc..., on trouve :

$$X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n\geq 2} \frac{3}{(n-2)!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= 5e.
\end{aligned}$$