

---

# Algèbre linéaire - Chapitre 4

## Applications linéaires

---

### 4.1 Rappels : Familles de vecteurs et Systèmes linéaires

Pour étudier une famille de vecteurs  $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , on se ramène souvent à l'étude d'un système linéaire.

#### Ce que je dois savoir

##### Liens entre familles et systèmes linéaires ( $AX = Y$ )

- **Famille Libre** : La famille  $\mathcal{F}$  est dite **libre** si le système linéaire homogène  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = 0$  admet **une unique solution** (la solution nulle  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ ).
- **Famille Génératrice** : La famille  $\mathcal{F}$  est dite **génératrice** si pour tout vecteur  $y \in \mathbb{R}^n$ , le système  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = y$  admet **au moins une solution**.
- **Base** : C'est une famille à la fois libre et génératrice. Pour tout vecteur  $y \in \mathbb{R}^n$ , le système  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = y$  admet **une unique solution**.

### 4.2 Applications Linéaires

Une application  $f : E \rightarrow F$  est dite **linéaire** si elle conserve les combinaisons linéaires.

Pour le démontrer en pratique, on vérifie séparément la conservation de la somme et du produit par un scalaire.

#### Méthode

##### Méthode : Montrer qu'une application est linéaire

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Pour prouver que  $f$  est linéaire, on procède en deux étapes :

##### 1. Conservation de l'addition :

Soient  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .

- D'un côté, on calcule l'image de la somme :  $f(u + v)$ .
- De l'autre, on calcule la somme des images :  $f(u) + f(v)$ .
- On constate que les deux résultats sont égaux.

**2. Conservation de la multiplication scalaire :**

Soient  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- D'un côté, on calcule l'image du vecteur multiplié :  $f(\lambda u)$ .
- De l'autre, on multiplie l'image par le scalaire :  $\lambda f(u)$ .
- On constate que les deux résultats sont égaux.

**Méthode****Méthode alternative : Une seule vérification**

$f$  est linéaire si et seulement si pour tous  $u, v \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

Cela permet de vérifier les deux propriétés (additivité et homogénéité) d'un seul coup !

**4.3 Exercices d'application****Exercice 1**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 3x$ . Cette application est-elle linéaire ?

**Exercice 2**

Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x, y) = x$ . Cette application est-elle linéaire ?

*Indication : Tester  $g((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$  et  $g(\lambda(x, y))$ .*

**Exercice 3**

Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $h(x, y) = (0, 0)$ . Cette application est-elle linéaire ?

**Exercice 4**

L'application  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $k(x, y) = (2x + y, x - 3y)$  est-elle linéaire ?

*Indication : Appliquer la méthode ci-dessus avec  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$ .*

**Exercice 5**

L'application  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $l(x) = x^2$  est-elle linéaire ?

*Indication : Calculer  $l(1 + 1)$  et comparer avec  $l(1) + l(1)$ .*

**Exercice 6**

L'application  $m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $m(x, y, z) = x + y + z + 1$  est-elle linéaire ?

*Indication : Vérifier si  $m(0_{\mathbb{R}^3}) = 0$ . Si ce n'est pas le cas, l'application ne peut pas être linéaire.*