estp	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
21/05/2025		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2024-2025 – Semestre 6	
Nom de l'enseignant	Rémi Blanquet, Karine Serier
Promotion	BMC1 - S1
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	2h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

1 Exercice 1 : Équations

Résoudre :

1. $z - 2i = iz + 1$
2. $z^4 - 2z^3 - z + 2 = 0$
3. $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$
4. $z^4 = -1$
5. $z^6 = \dfrac{3}{1 - i\sqrt{3}}$

Solution.

1. $z - 2i = iz + 1 \Leftrightarrow z(1-i) = 1 + 2i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+2i}{1-i} = \dfrac{(1+2i)(1+i)}{2} = \dfrac{-1+3i}{2}$

   Solution : $\boxed{z = \dfrac{-1+3i}{2}}$
2. On remarque que $z = 1$ et $z = 2$ sont racines. On factorise :
   $z^4 - 2z^3 - z + 2 = (z-1)(z-2)(z^2+z+1)$
   Les racines de $z^2 + z + 1 = 0$ sont $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
   Solutions : $\boxed{z \in \{1, 2, j, \bar{j}\}}$
3. $\Delta = (7+3i)^2 - 8(2+4i) = 49 + 42i - 9 - 16 - 32i = 24 + 10i$
   On cherche $\delta = a + bi$ tel que $\delta^2 = 24 + 10i$, d'où $a = 5, b = 1$, donc $\delta = 5 + i$.

$z = \dfrac{7+3i \pm (5+i)}{4}$ donne $z_1 = 3+i$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

Solutions : $\boxed{z \in \left\{3+i, \dfrac{1+i}{2}\right\}}$

4. $z^4 = -1 = e^{i\pi}$ donc $z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$

   Solutions : $\boxed{z \in \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}}$

5. $\dfrac{3}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{3(1+i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

   Donc $z^6 = \dfrac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}e^{i\frac{\pi+6k\pi}{18}}$ pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

   Solutions : $\boxed{z_k = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}e^{i\frac{\pi(1+6k)}{18}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}}$

2 Exercice 2 : Lieux géométriques

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1. $\arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
2. $\left|\dfrac{z+1}{z-2}\right| = 1$
3. $\dfrac{2z-i}{z-2i} \in \mathbb{R}$

Solution.

1. $\arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = \arg(z) - \arg(1+i) = \arg(z) - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

   Donc $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$. C'est la **demi-droite d'origine O (exclu) et de direction** $\vec{u}(0,1)$, soit l'axe des imaginaires purs strictement positifs.
2. $|z+1| = |z-2|$ signifie que M est équidistant de $A(-1,0)$ et $B(2,0)$.

   C'est la **médiatrice du segment** $[AB]$, soit la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.
3. Posons $z = x+iy$. On a $\dfrac{2z-i}{z-2i} = \dfrac{2x+i(2y-1)}{x+i(y-2)}$

   En multipliant par le conjugué du dénominateur et en annulant la partie imaginaire :

   $(2y-1)x - 2x(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2xy - x - 2xy + 4x = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$

   Donc $x = 0$ avec $z \neq 2i$. C'est l'**axe des imaginaires purs privé du point** $2i$.

3 Exercice 3 : Polynômes

1. Trouver a, b, c réels tel que $X^2 + X + 1$ divise $X^4 + aX^2 + bX + c$.
2. Déterminer tous les polynômes P qui vérifient : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
3. Décomposer en éléments simples : $F(X) = \dfrac{X^4}{(X^2 - 1)(X + 3)}$

Solution.

1. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $\bar{j}$. Si $X^2 + X + 1$ divise $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$, alors :
   $P(j) = j^4 + aj^2 + bj + c = j + a\bar{j} + bj + c = 0$
   Comme $j + \bar{j} = -1$ et $j\bar{j} = 1$, on obtient en séparant parties réelles et imaginaires :
   $c - \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1 - a + b) = 0$
   Donc $a - b = 1$ et $2c = a + b + 1$. En prenant $a = 1, b = 0$, on a $c = 1$.
   Solution : $\boxed{a = 1, b = 0, c = 1}$ (on vérifie : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$)
2. En posant $X = 0$: $P(0) = P(0)$ (ok). En posant $X = i$: $P(-1) = 0$.
   Donc $(X + 1)$ divise P. Soit $P(X) = (X + 1)Q(X)$, alors :
   $(X^2 + 1)Q(X^2) = (X^2 + 1)(X + 1)Q(X)$, donc $Q(X^2) = (X + 1)Q(X)$.
   Par récurrence, $Q(X) = \lambda(X + 1)^n$ et donc $P(X) = \lambda(X + 1)^{n+1}$.
   Solutions : $\boxed{P(X) = \lambda(X + 1)^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}}$
3. Division euclidienne : $X^4 = (X^2 - 1)(X + 3)(X - 3) + 10X^2 - 9X - 27 + \ldots$
   Après calcul : $F(X) = X - 3 + \dfrac{A}{X - 1} + \dfrac{B}{X + 1} + \dfrac{C}{X + 3}$
   $A = \dfrac{1}{1 \cdot 4} = \dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{1}{(-2) \cdot 2} = -\dfrac{1}{4}$, $C = \dfrac{81}{8 \cdot (-2)} = -\dfrac{81}{16}$
   Décomposition : $\boxed{F(X) = X - 3 + \dfrac{1/4}{X - 1} - \dfrac{1/4}{X + 1} - \dfrac{81/16}{X + 3}}$

4 Exercice 4 : Suites

Donner une expression en fonction de n puis calculer les limites des suites suivantes, définies par récurrence :

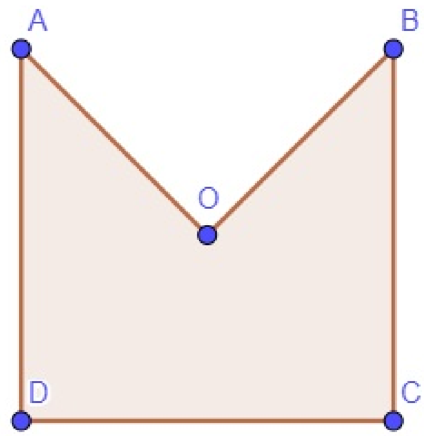
1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{2 + u_n} \end{cases}$ On montrera que $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$ est géométrique.

Solution.

1. Suite arithmético-géométrique. Point fixe : $\ell = 2\ell - 6 \Rightarrow \ell = 6$.
   Posons $v_n = u_n - 6$, alors $v_{n+1} = 2v_n$, donc $v_n = v_0 \cdot 2^n = -4 \cdot 2^n$.
   Expression : $\boxed{u_n = 6 - 4 \cdot 2^n = 6 - 2^{n+2}}$ **Limite :** $\boxed{-\infty}$
2. Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1$ ou $r = 2$.
   Donc $u_n = \alpha + \beta \cdot 2^n$. Avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$: $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + 2\beta = 0$.
   D'où $\beta = -1$ et $\alpha = 2$.
   Expression : $\boxed{u_n = 2 - 2^n}$ **Limite :** $\boxed{-\infty}$
3. Calculons v_{n+1} :
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n+3}{2+u_n} - 3}{\frac{4u_n+3}{2+u_n} + 1} = \frac{4u_n + 3 - 3(2 + u_n)}{4u_n + 3 + 2 + u_n} = \frac{u_n - 3}{5u_n + 5} = \frac{1}{5}v_n$$
   Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et $v_0 = \frac{1-3}{1+1} = -1$.
   $$v_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ et } u_n = \frac{3 + v_n}{1 - v_n} = \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$
   Expression : $\boxed{u_n = \dfrac{3 \cdot 5^n - 1}{5^n + 1}}$ **Limite :** $\boxed{3}$

5 Exercice 5 : Barycentre

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est une plaque métallique homogène carrée de centre O. On retire la partie triangulaire OAB pour obtenir la plaque pentagonale $ADCBO$.



On appelle H le centre d'inertie de la plaque OAB et G celui de la plaque $ADCBO$ que l'on cherche. Justifier que O est barycentre de $(H, 1), (G, 3)$ et en déduire que G est barycentre de $(O, 4), (H, -1)$.

Solution.

Partie 1 : La plaque carrée $ABCD$ a une aire proportionnelle à 4 (si on prend l'aire du triangle OAB comme unité). Le triangle OAB a une aire proportionnelle à 1. Donc le pentagone $ADCBO$ a une aire proportionnelle à 3.

Le centre d'inertie d'une plaque homogène est le barycentre des centres d'inertie de ses parties, pondérés par leurs aires.

Donc O (centre du carré $ABCD$) est le barycentre de $(H,1)$ et $(G,3)$ car :

— H est le centre d'inertie de la partie retirée (aire 1)

— G est le centre d'inertie de la partie restante (aire 3)

Partie 2 : Puisque $O = \text{bar}\{(H,1),(G,3)\}$, on a :

$$1 \cdot \vec{OH} + 3 \cdot \vec{OG} = \vec{0}$$

On cherche G comme barycentre de (O,α) et (H,β) :

$$\alpha \cdot \vec{GO} + \beta \cdot \vec{GH} = \vec{0}$$

De $3\vec{OG} = -\vec{OH}$, on tire $\vec{OG} = -\frac{1}{3}\vec{OH}$, donc :

$$\vec{GO} = \frac{1}{3}\vec{OH} \quad \text{et} \quad \vec{GH} = \vec{GO} + \vec{OH} = \frac{4}{3}\vec{OH}$$

Ainsi $\vec{GO} = \frac{1}{4}\vec{GH}$, ce qui donne $4\vec{GO} = \vec{GH}$, soit :

$$4\vec{GO} + (-1)\vec{GH} = \vec{0}$$

Conclusion : $\boxed{G = \text{bar}\{(O,4),(H,-1)\}}$