Analyse et Algèbre - TD1

Calcul vectoriel et tensoriel

Exercice 1 : Application directe

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique. On définit également le vecteur $\mathbf{v} = (2, 1, -3)$.

1. Rappeler les définitions puis déterminer les composantes covariantes v_i et contravariantes v^i de ce vecteur.

   Considérons maintenant une autre base qui n'est plus orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. On donne les produits scalaires entre les vecteurs de la base :

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 4, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$$

2. Former la matrice (g_{ij}) avec $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$.
3. Donner une condition sur la matrice (g_{ij}) pour que la base soit orthogonale.
4. Le tenseur représenté par la matrice g est appelée tenseur métrique, il code la géométrie de l'espace et est très utilisé en physique relativiste. De quel ordre est ce tenseur ?
5. Soit le vecteur $\mathbf{w} = (1, 2, 1)$ exprimé dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.
   Calculer les composantes contravariantes w^i et covariantes w_i de ce vecteur.
6. Si les vecteurs de la base sont divisés par deux, quelles sont les nouvelles composantes contravariantes et covariantes du vecteur $\mathbf{w}$?
7. Sous cette transformation, comment est modifié le premier coefficient de la matrice g ?
   On pourra noter f_1, f_2, f_3 les nouveaux vecteurs de la base. et G_{ij} la matrice dans la nouvelle base. Le tenseur métrique est-il
   - d'ordre $(2, 0)$ (2 fois contravariant) ?
   - d'ordre $(1, 1)$ (1 fois contravariant et 1 fois covariant) ?
   - ou d'ordre $(0, 2)$ (2 fois covariant) ?

Exercice 2 : Dans une vraie base

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, et de la base suivante donnée dans la base canonique :

$$\Big\{\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1),\, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 1),\, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\Big\}$$

on considère $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$,

1. Quelles sont les composantes contravariantes de $\mathbf{u}$?
2. Déterminer les composantes covariantes u_1, u_2, u_3 de $\mathbf{u}$ en fonction de u^1, u^2, u^3.
3. Montrer que le produit scalaire de deux vecteurs $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ est égal à $u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3$.
4. En utilisant toutes les questions précédentes, calculer le produit scalaire des deux vecteurs donnés dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$: $\mathbf{u} = (3, -1, 2)$ et $\mathbf{v} = (1, 3, 5)$.
5. Calculer la norme du vecteur $\mathbf{v}$.

Exercice 3 : Quelques exemples de tenseurs.

On considère le plan muni d'une *ancienne base* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et d'une *nouvelle base* $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. On note la *matrice de passage* de la nouvelle base à l'ancienne

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial e_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial e_1} \\ \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial e_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial e_2} \end{pmatrix}$$

Dans cet exercice, on passe d'un référentiel cartésien orthonormé aux coordonnées polaires.

1. Ecrivez les lois de transformation qui permettent de passer du système (x, y) au système (r, θ), puis leurs inverses.
2. En déduire l'expression de la matrice de changement de base. On considère une particule qui se déplace dans le plan avec le temps t comme paramètre.
   Soit $M(t)$ la position de la particule à l'instant t. On a donc le vecteur position de la particule $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$.
3. Ecrivez le vecteur position dans la base $\mathcal{B}'$. Le vecteur position est-il un tenseur ?
4. Considérons maintenant le vecteur vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$.
   (a) Montrer comment se transforment les composantes du vecteur vitesse lors du changement de base.
   (b) Le vecteur vitesse est-il un tenseur ? Justifier brièvement.

Exercice 4 : Symboles de Christoffel

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'une base quelconque $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. On se donne un champ de vecteurs

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3$$

Si l'on considère la dérivée de $\mathbf{A}$ le long de $\mathbf{e}_1$, on a :

$$\nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{A} = \partial_1\mathbf{A} = \partial_1\Big(A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3\Big)$$

Dans un repère quelconque, il faut dériver les vecteurs de la base :

$$\partial_1\mathbf{A} = (\partial_1 A^1)\mathbf{e}_1 + (\partial_1 A^2)\mathbf{e}_2 + (\partial_1 A^3)\mathbf{e}_3 + A^1(\partial_1\mathbf{e}_1) + A^2(\partial_1\mathbf{e}_2) + A^3(\partial_1\mathbf{e}_3)$$

Les symboles de Christoffel expriment les coordonnées de ces dérivées selon les vecteurs de la base :

$$\partial_j\mathbf{e}_i = \Gamma^1_{ij}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{ij}\mathbf{e}_2 + \Gamma^3_{ij}\mathbf{e}_3$$

Plaçons-nous par exemple en coordonnées polaires, avec $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta$.

1. En vous ramenant au système de coordonnées cartésiennes $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, déterminer la dérivée de $\mathbf{e}_r$ par rapport à θ.
2. Calculer tous les symboles de Christoffel pour les coordonnées cylindriques.