ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger
Matière	Méthode des éléments finis
Promotion	PGE2 - S7
Durée de l'examen	1h30
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Problème

Considérons l'équation différentielle suivante en dimension 1 :

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet : $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$.

1. Établissez la formulation variationnelle du problème. On introduira une forme bilinéaire $a(u, v)$ et une forme linéaire $L(v)$.

Solution :

On multiplie par une fonction test v nulle aux bords et on intègre sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 (-u'' + u)v\, dx = \int_0^1 fv\, dx$$

Intégration par parties sur le terme $-u''v$:

$$\int_0^1 u'v'\, dx - [u'v]_0^1 + \int_0^1 uv\, dx = \int_0^1 fv\, dx$$

Comme $v(0) = v(1) = 0$, le terme de bord s'annule.
On obtient : $a(u, v) = L(v)$ avec :

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v'\, dx + \int_0^1 uv\, dx$$

$$L(v) = \int_0^1 f v \, dx$$

2. Définissez un maillage avec 2 éléments finis de longueur $h = 1/2$ et d'ordre 1. Donnez les noeuds x_0, x_1, x_2.

Solution :

Les noeuds sont : $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$.
Élément 1 : $[0, 1/2]$, Élément 2 : $[1/2, 1]$.

3. Donnez les polynômes de Lagrange φ_0, φ_1 et φ_2 associés à ce maillage.

Solution :

Sur l'élément $[0, h]$: $\varphi_0(x) = 1 - x/h$, $\varphi_1(x) = x/h$
Sur l'élément $[h, 2h]$: $\varphi_1(x) = 1 - (x - h)/h$, $\varphi_2(x) = (x - h)/h$
Avec $h = 1/2$:

— $\varphi_0(x) = 1 - 2x$ sur $[0, 1/2]$, 0 ailleurs
— $\varphi_1(x) = 2x$ sur $[0, 1/2]$ et $\varphi_1(x) = 2 - 2x$ sur $[1/2, 1]$
— $\varphi_2(x) = 2x - 1$ sur $[1/2, 1]$, 0 ailleurs

4. Calculez la matrice de rigidité élémentaire K_e sur le premier élément $[0, h]$. On donne : $\int_0^h (1 - x/h)^2 dx = h/3$ et $\int_0^h (x/h)(1 - x/h) dx = h/6$.

Solution :

La matrice de rigidité élémentaire est :

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_0, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

Avec $a(u, v) = \int_0^h u'v' dx + \int_0^h uv dx$.
Calcul des dérivées : $\varphi_0' = -1/h = -2$, $\varphi_1' = 1/h = 2$.
Terme de rigidité (dérivées) : $\int_0^h \varphi_0' \varphi_0' dx = 4h = 2$, etc.
Terme de masse : $\int_0^h \varphi_0^2 dx = h/3 = 1/6$, $\int_0^h \varphi_0 \varphi_1 dx = h/6 = 1/12$.

$$K_e = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 1/12 & -2 + 1/24 \\ -2 + 1/24 & 2 + 1/12 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 25/12 & -47/24 \\ -47/24 & 25/12 \end{pmatrix}$$

5. Après l'avoir brièvement expliqué, on pourra utiliser le fait que les deux matrices de rigidité locales sont identiques.
Établissez la matrice de rigidité globale K, puis appliquez les conditions aux limites pour obtenir le système réduit.

Solution :

On peut passer des intégrales sur le premier élément aux intégrales sur le second élément en utilisant la symétrie des fonctions φ_i. Le changement de variable est $u = 1 - x$.

Par assemblage, avec les deux éléments identiques :

$$K = \begin{pmatrix} 25/12 & -47/24 & 0 \\ -47/24 & 25/6 & -47/24 \\ 0 & -47/24 & 25/12 \end{pmatrix}$$

Avec $u(0) = u(1) = 0$, donc $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$, le système réduit est :

$$\frac{25}{6}\alpha_1 = L(\varphi_1)$$

6. En prenant $f(x) = 1$, calculez le second membre $L(\varphi_1)$ et donnez la valeur de la solution approchée au noeud x_1.

Solution :

$$L(\varphi_1) = \int_0^1 f\varphi_1 dx = \int_0^{1/2} 2x\,dx + \int_{1/2}^1 (2-2x)dx$$

$$= [x^2]_0^{1/2} + [2x - x^2]_{1/2}^1 = 1/4 + (2-1) - (1 - 1/4) = 1/4 + 1 - 3/4 = 1/2$$

Donc : $\frac{25}{6}\alpha_1 = \frac{1}{2}$

$$\alpha_1 = \frac{3}{25} = 0.12$$

7. La méthode des éléments finis a-t-elle plutôt tendance à sur-estimer ou à sous-estimer les contraintes appliquées sur une pièce ? Illustrez votre réponse avec un exemple.

Solution :

La méthode des éléments finis a tendance à sous-estimer les contraintes appliquées sur une pièce. Voir l'exemple du TD1.

Exercice 1 : Polynômes de Lagrange d'ordre 2

On considère une barre de longueur L, découpée en n éléments finis de longueur $h = L/n$.

On souhaite améliorer la précision de la méthode des éléments finis en utilisant des éléments d'ordre 2 : on ajoute un noeud intermédiaire au milieu de chaque élément.

Considérons le premier élément $[0, h]$ avec trois noeuds : x_0, $x_{1/2}$ et x_1.

1. Rappelez les conditions que doivent vérifier les polynômes de Lagrange φ_0, $\varphi_{1/2}$ et φ_1 pour interpoler correctement la solution aux noeuds.

Solution :

Les polynômes de Lagrange doivent vérifier la propriété d'interpolation :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

C'est-à-dire que φ_i vaut 1 au noeud x_i et 0 aux autres noeuds.

Plus précisément :
- $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_0(h/2) = 0$, $\varphi_0(h) = 0$
- $\varphi_{1/2}(0) = 0$, $\varphi_{1/2}(h/2) = 1$, $\varphi_{1/2}(h) = 0$
- $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(h/2) = 0$, $\varphi_1(h) = 1$

2. Voici les polynômes. Déterminez les éléments manquants $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ en justifiant votre choix :

$$\varphi_0(x) = a_1 \frac{(x - h/2)(x - h)}{h^2}$$
$$\varphi_{1/2}(x) = a_2 \frac{x(x - a_3)}{h^2}$$
$$\varphi_1(x) = a_4 \frac{x(x - a_5)}{a_6}$$

Solution :

En utilisant la formule de Lagrange et les conditions d'interpolation :

Pour φ_0 **:** On doit avoir $\varphi_0(0) = 1$.

$$\varphi_0(0) = a_1 \frac{(0 - h/2)(0 - h)}{h^2} = a_1 \frac{h^2/2}{h^2} = \frac{a_1}{2} = 1$$

Donc $a_1 = 2$.

Pour $\varphi_{1/2}$ **:** On doit avoir $\varphi_{1/2}(h/2) = 1$ et $\varphi_{1/2}(h) = 0$. La condition $\varphi_{1/2}(h) = 0$ impose $a_3 = h$.

$$\varphi_{1/2}(h/2) = a_2 \frac{(h/2)(h/2 - h)}{h^2} = a_2 \frac{(h/2)(-h/2)}{h^2} = -\frac{a_2}{4} = 1$$

Donc $a_2 = -4$.

Pour φ_1 **:** On doit avoir $\varphi_1(h) = 1$ et $\varphi_1(h/2) = 0$. La condition $\varphi_1(h/2) = 0$ impose

$a_5 = h/2$.

$$\varphi_1(h) = a_4 \frac{h(h - h/2)}{a_6} = a_4 \frac{h^2/2}{a_6} = 1$$

En normalisant avec $a_6 = h^2$, on obtient $a_4 = 2$.

Réponses : $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = h$, $a_4 = 2$, $a_5 = h/2$, $a_6 = h^2$.

3. Quelles sont les dimensions de la matrice de rigidité élémentaire pour cet élément d'ordre 2 ? Quelles sont les dimensions de la matrice de rigidité globale ?

Solution :

La matrice de rigidité élémentaire est de taille 3×3.

La matrice de rigidité globale est de taille $2n + 1 \times 2n + 1$.

4. Donnez l'expression générale de la matrice de rigidité élémentaire pour l'équation $-u'' = f$.

Solution :

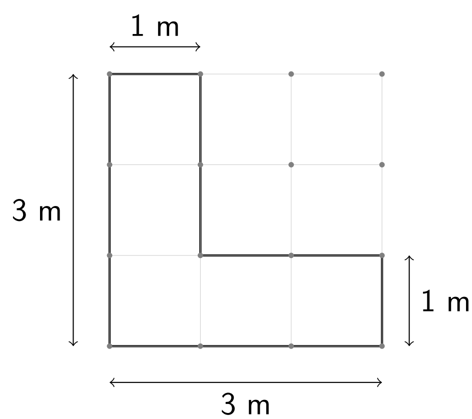
La matrice de rigidité élémentaire est :

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_0, \varphi_{1/2}) & a(\varphi_0, \varphi_1) \\ a(\varphi_{1/2}, \varphi_0) & a(\varphi_{1/2}, \varphi_{1/2}) & a(\varphi_{1/2}, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_1, \varphi_{1/2}) & a(\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

où $a(u, v) = \int_0^h u'(x)v'(x)\,dx$.

Exercice 2 : Maillage 2D

Voici une pièce en forme de « L » qu'on souhaite mailler pour une analyse par éléments finis.



1. Proposez un maillage de cette pièce en utilisant des triangles. Numérotez clairement les noeuds et les éléments sur votre dessin.

Solution :

Une solution possible avec 8 triangles et 7 noeuds :

Noeuds : 1=(0,0), 2=(1,0), 3=(2,0), 4=(3,0), 5=(1,1), 6=(2,1), 7=(3,1), 8=(0,1), 9=(1,2), 10=(0,2), 11=(1,3), 12=(0,3)

Éléments triangulaires reliant les noeuds appropriés.

2. Établissez le tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.

Solution :

Tableaux dépendant du maillage choisi par l'étudiant.

3. Pour un triangle de sommets $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, rappelez la méthode pour obtenir les polynômes de Lagrange $\varphi_A(x, y)$, $\varphi_B(x, y)$, $\varphi_C(x, y)$.

Solution :

On utilise l'élément de référence (triangle $A' = (0, 0)$, $B' = (1, 0)$, $C' = (0, 1)$) avec les polynômes :

$$\varphi'_A(r, s) = 1 - r - s, \quad \varphi'_B(r, s) = r, \quad \varphi'_C(r, s) = s$$

Puis on effectue un changement de variables affine pour passer au triangle réel :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + (x_B - x_A)r + (x_C - x_A)s$$

On inverse ce changement pour exprimer (r, s) en fonction de (x, y), puis on substitue dans les polynômes de référence.

4. Expliquez brièvement comment est construite la matrice de rigidité globale à partir des matrices élémentaires.

Solution :

La matrice globale est construite par assemblage :

(a) Initialiser une matrice $N \times N$ (N = nombre de noeuds) remplie de zéros
(b) Pour chaque élément, calculer sa matrice élémentaire K_e
(c) Ajouter les coefficients de K_e dans la matrice globale aux positions correspondant aux indices globaux des noeuds de l'élément
(d) Les contributions des éléments partageant des noeuds communs s'additionnent