estp	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
26/01/2026		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. **Calculs de développements limités.**
   (a) Donner le développement limité de e^x à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*
   (b) Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*
   (c) En déduire le développement limité de $f(x) = e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(1 pt)*
2. **Calcul de limite.** Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : *(1.5 pts)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

3. **Étude d'une fonction.** Soit $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.
   (a) À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. *(0.75 pt)*
   (b) En déduire la position de la courbe de g par rapport à sa tangente horizontale en 0. *(0.75 pt)*

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(2xy + 3)\,dx + (x^2 + 4y)\,dy = 0$$

   (a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$ est une différentielle totale. *(0.75 pt)*
   (b) Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$. *(1 pt)*
   (c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. *(0.5 pt)*

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

   en utilisant un changement de variables linéaire. *(1.5 pts)*

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

   En cherchant des solutions sous la forme $f(x, y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. *(1.25 pts)*

Exercice 3 : Modélisation – Refroidissement d'une pièce métallique (5 points)

Une pièce métallique de masse $m = 2$ kg et de capacité thermique massique $c = 500$ J/(kg·K) est initialement à la température $T_0 = 400$ K. Elle est plongée dans un bain thermostaté à la température constante $T_\infty = 300$ K.

Le transfert thermique entre la pièce et le bain suit la loi de Newton :

$$\frac{dQ}{dt} = -hS(T - T_\infty)$$

où Q est l'énergie thermique de la pièce, $h = 25$ W/(m^2·K) est le coefficient d'échange et $S = 0{,}04$ m^2 est la surface d'échange.

On rappelle que $Q = mcT$ (à constante près).

1. Montrer que la température $T(t)$ de la pièce vérifie l'équation différentielle : *(1 pt)*

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc}(T - T_\infty)$$

2. On pose $\tau = \frac{mc}{hS}$ (constante de temps). Calculer la valeur numérique de τ. *(0.5 pt)*
3. Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale $T(0) = T_0$. *(1.5 pts)*
4. Au bout de combien de temps la pièce atteint-elle la température de 320 K ? *(1 pt)*
   On donne $\ln(5) \approx 1{,}6$.
5. Vers quelle valeur tend $T(t)$ quand $t \to +\infty$? Interpréter physiquement. *(1 pt)*

Exercice 4 : Modélisation – Dynamique des populations (5 points)

On étudie l'évolution d'une population $N(t)$ au cours du temps t (exprimé en années).

Partie A – Modèle de Malthus (croissance exponentielle)

Dans un premier temps, on suppose que le taux de croissance de la population est proportionnel à la population elle-même :

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

où $r > 0$ est le taux de croissance intrinsèque.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $N(0) = N_0$. *(1 pt)*
2. Calculer le temps de doublement T_2 de la population (temps pour que $N(T_2) = 2N_0$). *(0.5 pt)*
   On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.

Partie B – Modèle de Verhulst (croissance logistique)

Le modèle de Malthus prédit une croissance infinie, ce qui n'est pas réaliste. On introduit une capacité limite K (population maximale que l'environnement peut supporter). L'équation devient :

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

3. Vérifier que $N = 0$ et $N = K$ sont des solutions d'équilibre (solutions constantes). *(0.5 pt)*
4. On pose $u = \frac{1}{N}$. Montrer que u vérifie l'équation différentielle linéaire : *(1 pt)*

$$\frac{du}{dt} = -ru + \frac{r}{K}$$

5. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de $N(t)$ avec $N(0) = N_0$. *(1.5 pts)*
6. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} N(t)$. Interpréter biologiquement ce résultat. *(0.5 pt)*