

	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
21/05/2025		Page 1/3

ANNÉE SCOLAIRE 2024-2025 – Semestre 6	
Nom de l'enseignant	Maxime BERGER, Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	<ul style="list-style-type: none"> — Calculatrice NON autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Convergence de séries (4 points)

Étudier la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes. Justifier soigneusement chaque réponse.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (1 pt)

Solution.

C'est une série géométrique de raison $r = \frac{2}{3}$.

Comme $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la série **converge**.

Sa somme vaut : $S = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (1 pt)

Solution.

C'est une série alternée de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vérifions le critère des séries alternées (Leibniz) :

- (a_n) est décroissante : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ✓
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ✓

Par le critère de Leibniz, la série **converge**.

Remarque : elle ne converge pas absolument car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$).

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$ (1 pt)

Solution.

Utilisons le critère de D'Alembert. Posons $u_n = \frac{n!}{3^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{3 \cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty > 1$.

Par le critère de D'Alembert, la série **diverge**.

4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ (1.5 pts)

Solution.

Cherchons un équivalent du terme général :

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{n^2(1 - \frac{1}{n^2})} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente.

Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^2 - 1}$ **converge**.

Exercice 2 : Série télescopique et comparaison (4 points)

1. Décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples. (0.5 pt)

Solution.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

En multipliant par $n(n+1)$: $1 = A(n+1) + Bn$

— $n = 0 : A = 1$

— $n = -1 : B = -1$

Donc $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2. En déduire la valeur de la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$. (1 pt)

Solution.

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

C'est une série télescopique. En développant :

$$S_N = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. (0.5 pt)

Solution.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$$

4. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge. (2 pts)

Indication : comparer avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

Solution.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$ est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Par comparaison série/intégrale, on a pour tout $N \geq 1$:

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^3} dx$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

L'intégrale converge, donc par comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge.

Exercice 3 : Algèbre linéaire (4 points)

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . (1.5 pts)

Solution.

Vérifions les trois axiomes d'un sous-espace vectoriel :

1) Non vide : $(0, 0, 0) \in E$ car $0 + 0 - 0 = 0$. ✓

2) Stabilité par addition : Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ dans E .

- $x_1 + y_1 - z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 - z_2 = 0$

- $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

- $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0$

Donc $u + v \in E$. ✓

3) Stabilité par multiplication : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z) \in E$.

- $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

- $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(x + y - z) = 0$

Donc $\lambda u \in E$. ✓

E est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- Ecrire E avec le mot clé "Vect", donner une base et la dimension. (1 pt)

Solution.

De $x + y - z = 0$, on tire $z = x + y$. Donc on peut choisir x et y comme paramètres libres :

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

Donc $E = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

Les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$ sont clairement linéairement indépendants.

Base de E : $\mathcal{B}_E = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

Dimension : $\dim(E) = 2$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$.

Montrer que f est une application linéaire. (1 pt)

Solution.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Additivité :

$$\begin{aligned}
f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2)) \\
&= (x_1 + y_1, x_1 - y_1, 2x_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, 2x_2) \\
&= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Homogénéité :

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\
&= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda x) \\
&= \lambda(x + y, x - y, 2x) = \lambda f(x, y) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

f est bien une application linéaire.

4. Écrire la matrice A de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . (1 pt)

Solution.

On calcule les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 :

- $f(1, 0) = (1, 1, 2)$
- $f(0, 1) = (1, -1, 0)$

La matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Noyau et image (4 points)

Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$g(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$$

1. Écrire la matrice B de g dans les bases canoniques. (0.5 pt)

Solution.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer le noyau $\ker(g)$. Donner une base et la dimension. (2 pts)

Solution.

$$(x, y, z) \in \ker(g) \Leftrightarrow g(x, y, z) = (0, 0)$$

On résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est le double de la première, donc on a une seule contrainte. On choisira deux paramètres libres y et z . On exprime alors x en fonction de y et z : $x = z - 2y$.

Les solutions sont :

$$(x, y, z) = (z - 2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$

Base de $\ker(g)$: $\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

Dimension : $\dim(\ker(g)) = 2$

3. Déterminer l'image $\text{Im}(g)$. Donner une base et la dimension. (1.5 pts)

Solution.

L'image de g est engendrée par les colonnes de B :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

On remarque que $(2, 4) = 2(1, 2)$ et $(-1, -2) = -(1, 2)$.

Donc $\text{Im}(g) = \text{Vect}\{(1, 2)\}$.

Base de $\text{Im}(g)$: $\{(1, 2)\}$

Dimension : $\dim(\text{Im}(g)) = 1$

Vérification par le théorème du rang : $\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ ✓

Exercice 5 : Calcul différentiel et intégrales curvilignes (4 points)

1. Soit $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$. Calculer la différentielle df . (1 pt)

Solution.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^{xy}$$

Donc :

$$df = (2xy + ye^{xy})dx + (x^2 + xe^{xy})dy$$

2. Soit $g(x, y, z) = x^2 + y^2z - z^3$. Calculer le gradient ∇g . (0.5 pt)

Solution.

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2yz \\ y^2 - 3z^2 \end{pmatrix}$$

3. Soit $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xyz, z^2)$. Calculer la matrice jacobienne de \vec{F} et la divergence $\text{div}(\vec{F})$. (1.5 pts)

Solution.

La matrice jacobienne est :

$$J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ yz & xz & xy \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

La divergence est :

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2x + xz + 2z$$

4. Soit $\vec{G}(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$.

Montrer que \vec{G} dérive d'un potentiel scalaire et déterminer ce potentiel. (1 pt)

Solution.

Vérifions la condition d'irrotationnalité : $\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial G_2}{\partial x} = 2x + 2y \quad \checkmark$$

Donc \vec{G} dérive d'un potentiel φ tel que $\nabla \varphi = \vec{G}$.

On intègre :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + y^2 \implies \varphi(x, y) = x^2y + xy^2 + h(y)$$

On vérifie avec la deuxième composante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + 2xy \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = C$$

Potentiel : $\varphi(x, y) = x^2y + xy^2 + C$

5. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C^+} xy \, dx + (x + y) \, dy$

où C est le segment de droite allant de $(0, 0)$ à $(1, 2)$, parcouru dans ce sens. (1 pt)

Solution.

Paramétrons le segment : $\gamma(t) = (t, 2t)$ pour $t \in [0, 1]$.

On a : $x = t$, $y = 2t$, $dx = dt$, $dy = 2dt$.

$$\begin{aligned}\int_{C^+} xy \, dx + (x + y) \, dy &= \int_0^1 (t)(2t) \, dt + (t + 2t)(2 \, dt) \\ &= \int_0^1 2t^2 \, dt + \int_0^1 6t \, dt \\ &= \left[\frac{2t^3}{3} \right]_0^1 + [3t^2]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}\end{aligned}$$