Algèbre linéaire - Chapitre 4
Applications linéaires

4.8 Noyau d'une application linéaire

Idée générale :
Le **noyau** d'une application linéaire f est l'ensemble de tous les vecteurs qui sont envoyés sur le vecteur nul. C'est l'ensemble des "solutions de $f(x) = 0$".

Le noyau nous renseigne sur l'**injectivité** de l'application : plus le noyau est "petit", plus l'application est "proche" d'être injective.

Méthode

Définition du noyau
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Le **noyau** de f, noté $\ker(f)$ (de l'allemand *Kern*), est défini par :

$$\boxed{\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

C'est l'ensemble des **antécédents** du vecteur nul 0_F.
Propriétés fondamentales :

— $\ker(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de E.

— $0_E \in \ker(f)$ (le vecteur nul est toujours dans le noyau).

— f est **injective** si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Méthode pour déterminer le noyau :

1. Écrire le système d'équations $f(x) = 0$.
2. Résoudre ce système homogène.
3. Exprimer l'ensemble des solutions comme combinaisons linéaires de vecteurs de base.

Exercice 1 : Noyau d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 2y - 2z)$$

1. Déterminer $\ker(f)$.

2. En déduire la dimension de $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective ?

4.9 Image d'une application linéaire

Idée générale :
L'**image** d'une application linéaire f est l'ensemble de tous les vecteurs qu'on peut atteindre en appliquant f. C'est l'espace "d'arrivée effectif" de l'application.

L'image nous renseigne sur la **surjectivité** de l'application : si l'image est tout l'espace d'arrivée, l'application est surjective.

Méthode

Définition de l'image
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
L'**image** de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est définie par :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}}$$

C'est l'ensemble des **valeurs** prises par f.
Propriétés fondamentales :

- $\mathrm{Im}(f)$ est un **sous-espace vectoriel** de F.
- $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ (car $f(0_E) = 0_F$).
- f est **surjective** si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Méthode pour déterminer l'image :

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. Calculer les images des vecteurs de base.
3. Extraire une base de l'image en éliminant les vecteurs dépendants.

Exercice 2 : Image d'une application linéaire

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$g(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(g)$ en calculant les images des vecteurs de la base canonique.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(g)$ et sa dimension.
3. L'application g est-elle surjective ?

4.10 Le théorème du rang

Méthode

Théorème du rang (formule fondamentale)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec E de dimension finie n.
Alors :

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Autrement dit :

$$\boxed{n = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)}$$

où $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ est le **rang** de f.

Interprétation :

— Si $\ker(f)$ est "grand", alors $\mathrm{Im}(f)$ est "petit" (et vice versa).

— Cette formule permet souvent de déduire une dimension connaissant l'autre.

Méthode

Conséquences importantes

Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.

1. Condition d'injectivité :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n$$

2. Condition de surjectivité :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = p$$

3. Cas particulier $n = p$ (endomorphisme) :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

4.11 Exercices d'application

Exercice 3 : Application du théorème du rang

Soit $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice (dans les bases canoniques) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de h (rang de la matrice A).
2. En déduire la dimension de $\ker(h)$ grâce au théorème du rang.
3. Déterminer une base de $\ker(h)$.

Exercice 4 : Noyau et image avec des polynômes

Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire définie par :

$$\varphi(P) = P - P(0) - P'(0) \cdot X$$

où $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré au plus 2.

1. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
3. Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 5 : Injectivité et surjectivité

Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer si elle est injective, surjective, bijective, ou aucune de ces propriétés.

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_1(x, y) = (x, y, x + y)$

b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_3(x, y) = (2x - y, -4x + 2y)$

Exercice 6 : Détermination complète

Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$\psi(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

1. Déterminer la matrice de ψ dans la base canonique.
2. Calculer $\ker(\psi)$ et en donner une base.
3. Calculer $\mathrm{Im}(\psi)$ et en donner une base.
4. Vérifier le théorème du rang.
5. Interpréter géométriquement $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.