ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Séries numériques (6 points)

1. **Série géométrique.** On considère la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (a) Rappeler le critère de convergence d'une série géométrique $\sum q^n$. *(0.5 pt)*
   (b) En déduire que la série converge et calculer sa somme. *(1 pt)*
2. **Critère de D'Alembert.** Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$ à l'aide du critère de D'Alembert. *(1.5 pts)*
3. **Série télescopique.** Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *(1.5 pts)*

   Indication : décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples.
4. **Équivalent.** On considère la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{n^2+3n}{n^4+2}$.
   (a) Trouver un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$. *(0.75 pt)*
   (b) En déduire la nature de la série. *(0.75 pt)*

Exercice 2 : Calcul différentiel vectoriel (4 points)

1. Soit le champ scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par :

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^3 - 2xz$$

   (a) Rappeler la définition du gradient d'un champ scalaire. *(0.5 pt)*
   (b) Calculer $\nabla f(x, y, z)$. *(1 pt)*
   (c) Évaluer ∇f au point $P = (1, 2, -1)$. *(0.5 pt)*

2. Soit le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2z,\ xy + z^2,\ yz - x)$$

   (a) Rappeler la définition de la divergence d'un champ de vecteurs. *(0.5 pt)*
   (b) Calculer div$(\vec{F})$. *(1 pt)*
   (c) Évaluer la divergence au point $Q = (2, -1, 3)$. *(0.5 pt)*

Exercice 3 : Algèbre linéaire (6 points)

1. **Système linéaire.** Résoudre le système suivant : *(1.5 pts)*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

2. **Espace vectoriel.** On considère l'ensemble :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$

   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. *(1.5 pts)*

3. **Application linéaire.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi(x, y) = (2x - y,\ x + 3y,\ x - y)$$

   (a) Montrer que φ est une application linéaire. *(1 pt)*
   (b) Écrire la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. *(0.5 pt)*
   (c) Déterminer $\ker(\varphi)$. *(0.75 pt)*
   (d) Déterminer une base de Im(φ) et sa dimension. *(0.75 pt)*

Problème : Étude d'une famille de séries et application (4 points)

On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série :

$$S(\alpha) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$$

Partie A : Étude de la convergence

1. **Cas $\alpha > 1$.**
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$. *(0.25 pt)*
   (b) En déduire que la série $S(\alpha)$ converge pour $\alpha > 1$. *(0.25 pt)*
2. **Cas $\alpha < 1$.**
   (a) Trouver un équivalent de $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ quand $n \to +\infty$ et le comparer à $\frac{1}{n^\beta}$ pour un β bien choisi. *(0.5 pt)*
   (b) En déduire que la série $S(\alpha)$ diverge pour $\alpha < 1$. *(0.5 pt)*
3. **Cas critique $\alpha = 1$.** On étudie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$.
   (a) En utilisant le critère de D'Alembert, peut-on conclure ? Justifier. *(0.5 pt)*
   (b) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que la série diverge. *(0.5 pt)*
   Indication : on rappelle que si f est positive décroissante, $\sum f(n)$ et $\int f(x)\,dx$ ont même nature.

Partie B : Application à l'algèbre linéaire

On considère l'espace vectoriel E des suites réelles $(u_n)_{n\geq 2}$ et l'application $T : E \to E$ définie par :

$$T((u_n)) = \left(\frac{u_n}{n \ln(n)} \right)_{n\geq 2}$$

4. Montrer que T est une application linéaire. *(0.5 pt)*
5. Déterminer $\ker(T)$. *(0.5 pt)*
6. T est-elle injective ? Justifier. *(0.5 pt)*

Rappels et formulaire

Séries de Riemann : La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Critère de D'Alembert : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.
— Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, la série converge.
— Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$ (ou $+\infty$), la série diverge.
— Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Série géométrique : Pour $|q| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes :
— Gradient : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
— Divergence : $\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

Théorème du rang : Si $f : E \to F$ est une application linéaire avec $\dim(E) < +\infty$, alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathsf{Im}(f))$$