estp CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
09/10/2025		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – BMC 2 Semestre 3	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger, Rémi Blanquet & Karine Serier
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	2h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

■ Exercice 1 : Limites (6 points)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-(1+x)}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\cos(x)-1}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)\sin(x)}{x^2}\right)$$

■ Exercice 2 : Inversibilité et expression de l'inverse via un polynôme annulateur (5 points)

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2.
2. Vérifier que $P^2 - 3P + 2I_2 = 0_2$, où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 et 0_2 la matrice nulle d'ordre 2.
3. À partir de cette relation, déduisez que la matrice P est inversible et exprimez son inverse P^{-1} en fonction de P et I_2.
4. Utiliser cette expression pour calculer P^{-1}.

■ Exercice 3 : Déterminant et condition d'inversibilité (3 points)

Sans effectuer de calculs explicites, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls.
Préciser la propriété utilisée.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

■ Exercice 4 : Combinaisons linéaires (6 points)

On se place dans $\mathbb{R}^3$, on note $e_1 = (1, 3, 2)$ et $e_2 = (1, -1, 4)$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$ est-il combinaison linéaire de e_1 et e_2 ?
2. Comment choisir le paramètre m pour que le vecteur $v = (3, 1, m)$ soit combinaison linéaire de e_1 et e_2 ?
3. Ecrire sous forme échelonnée les systèmes suivants, en déduire le nombre de solutions.

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ -3x - 3y = 2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 4y + z = 20 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$$

■ Exercice 5 : Étude de la Conchoïde de Nicomède (20 points)

Partie 1 : Forme Paramétrique

La conchoïde de Nicomède est définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{\cos(t)} + \cos(t) \\ y(t) = 2\tan(t) + \sin(t) \end{cases}$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de t.
   (b) Étudier les symétries de la courbe.
2. (a) Calculer les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$.
   (b) En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent $\vec{V}(t)$ à la courbe à un point régulier M_t de coordonnées $(x(t), y(t))$.
3. (a) Déterminer les points où la tangente est horizontale ou verticale.
   (b) Donner les coordonnées cartésiennes de ces points.
4. Effectuer un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de $t = 0$ à l'ordre 3.
5. (a) Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque t approche $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.
   (b) Que pouvez-vous en déduire ?

Partie 2 : Forme Polaire

La conchoïde de Nicomède est définie en coordonnées polaires par l'équation :

$$r(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} + 1$$

1. Déterminer le domaine de définition de θ et étudier les symétries de la courbe.
2. Convertir l'équation polaire en coordonnées cartésiennes $x(\theta)$ et $y(\theta)$.
3. (a) Étudier les limites de $x(\theta)$ et $y(\theta)$ lorsque θ approche $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.
   (b) Donner l'équation des asymptotes.
4. Calculer la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$.
5. Déterminer l'angle α de la tangente à la courbe en un point de coordonnées (r, θ).
6. (a) Effectuer un développement limité de $r(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ à l'ordre 2.
   (b) En déduire la nature du point correspondant à $\theta = 0$.