Algèbre linéaire - Chapitre 4
Applications linéaires

4.6 Matrice de passage d'une base à une autre

Idée générale :
Lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel, on peut choisir différentes bases pour exprimer les vecteurs. La **matrice de passage** permet de traduire les coordonnées d'un vecteur d'une base à une autre.

C'est comme un "dictionnaire" qui convertit les coordonnées : si on connaît les coordonnées d'un vecteur dans une base $\mathcal{B}$, la matrice de passage nous donne ses coordonnées dans une autre base $\mathcal{B}'$.

Méthode

Comment construire la matrice de passage ?
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E.
La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, se construit ainsi :

1. **Exprimer chaque vecteur de la nouvelle base** $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:
   - Quelles sont les coordonnées de e'_1 dans $\mathcal{B}$?
   - Quelles sont les coordonnées de e'_2 dans $\mathcal{B}$?
   - etc.

2. **Remplir les colonnes** de la matrice :
   - La 1ère colonne contient les coordonnées de e'_1 dans $\mathcal{B}$.
   - La 2ème colonne contient les coordonnées de e'_2 dans $\mathcal{B}$.
   - etc.

Attention à l'ordre ! Les colonnes contiennent les vecteurs de la **nouvelle** base exprimés dans l'**ancienne** base.

4.7 Exercices d'application

Exercice 1 : Cas simple dans $\mathbb{R}^2$

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, et une nouvelle base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Indication : Il faut exprimer v_1 et v_2 comme combinaisons linéaires de e_1 et e_2.

Solution.

C'est simple car on exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$!

$v_1 = (1, 1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$, donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 1)$.

$v_2 = (1, -1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$, donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(1, -1)$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Quand on part de la base canonique, les colonnes sont simplement les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base !

Exercice 2 : Matrice de passage inverse

Avec les mêmes bases que l'exercice 1, déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

Indication : Cette fois, il faut exprimer e_1 et e_2 comme combinaisons linéaires de v_1 et v_2.

Solution.

On cherche α, β tels que $e_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$, c'est-à-dire :

$$(1, 0) = \alpha(1, 1) + \beta(1, -1) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

On obtient le système : $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Donc $e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$, ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De même, pour $e_2 = \gamma v_1 + \delta v_2$:

$$(0, 1) = \gamma(1, 1) + \delta(1, -1) = (\gamma + \delta, \gamma - \delta)$$

On obtient : $\gamma + \delta = 0$ et $\gamma - \delta = 1$, d'où $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\delta = -\frac{1}{2}$.

Donc $e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$, ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut vérifier que $P \cdot Q = I_2$ (matrice identité), ce qui confirme que $Q = P^{-1}$.

Méthode

Comment changer les coordonnées d'un vecteur ?
Soit v un vecteur de E, et soient X ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et X' ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors :

$$\boxed{X = P \cdot X'}$$

Autrement dit : pour obtenir les coordonnées dans l'ancienne base, on multiplie les nouvelles coordonnées par la matrice de passage.
Propriétés importantes :

- La matrice de passage est **toujours inversible**.
- $(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$
- Pour obtenir les nouvelles coordonnées : $X' = P^{-1} \cdot X$

Exercice 3 : Changement de coordonnées

On reprend les bases de l'exercice 1. Soit $v = (3, 1)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$).

Quelles sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$?

Solution.

On utilise la formule $X' = P^{-1} \cdot X$ avec $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la matrice P calculée à l'exercice 1.

On calcule d'abord P^{-1}. Le déterminant de $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est $\det(P) = -1 - 1 = -2$, donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Puis :

$$X' = P^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$ sont $(2, 1)$.

Vérification : $2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 2(1, 1) + 1(1, -1) = (2, 2) + (1, -1) = (3, 1)$

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$f_1 = (1, 0, 1), \quad f_2 = (0, 1, 1), \quad f_3 = (1, 1, 0)$$

Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Solution.

On exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$:

- $f_1 = (1, 0, 1)$ a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ dans $\mathcal{B}$.
- $f_2 = (0, 1, 1)$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ dans $\mathcal{B}$.

— $f_3 = (1, 1, 0)$ a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Quand on part **de** la base canonique, les colonnes sont simplement les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base !

Méthode

Formule de changement de base pour une matrice
Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, alors :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
Interprétation : Pour exprimer f dans une nouvelle base :

1. On traduit de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ (multiplication par P, car $X = P \cdot X'$)
2. On applique f dans $\mathcal{B}$ (multiplication par A)
3. On traduit de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ (multiplication par P^{-1})

Exercice 5 : Changement de base d'une matrice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Indication : Utiliser la formule $A' = P^{-1}AP$ avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Solution.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est (voir exercice 1) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1}. Le déterminant de P est $\det(P) = -1 - 1 = -2$, donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculons AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Puis $A' = P^{-1}(AP)$:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice A' est diagonale ! Cela signifie que v_1 et v_2 sont des vecteurs propres de f, avec pour valeurs propres 4 et 2 respectivement.

Exercice 6 : Application géométrique

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$. Sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

1. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
2. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R' de r dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Interpréter géométriquement le résultat.

Solution.

1. On exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le déterminant est $\det(P) = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2$, donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculons RP :

$$RP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puis $R' = P^{-1}(RP)$:

$$R' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On remarque que $R' = R$: la matrice de la rotation est la même dans les deux bases ! C'est parce que $\mathcal{B}'$ est aussi une base orthonormée (à un facteur $\sqrt{2}$ près) obtenue par rotation de $\frac{\pi}{4}$ de la base canonique. Une rotation commute avec un changement de base qui est lui-même une rotation.