	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
22/01/2026		Page 1/2

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger
Matière	Méthode des éléments finis
Promotion	PGE2 - S7
Durée de l'examen	1h30
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Problème

Considérons l'équation différentielle suivante en dimension 1 :

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet : $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$.

1. Établissez la formulation variationnelle du problème. On introduira une forme bilinéaire $a(u, v)$ et une forme linéaire $L(v)$.
2. Définissez un maillage avec 2 éléments finis de longueur $h = 1/2$ et d'ordre 1. Donnez les noeuds x_0, x_1, x_2.
3. Donnez les polynômes de Lagrange φ_0, φ_1 et φ_2 associés à ce maillage.
4. Calculez la matrice de rigidité élémentaire K_e sur le premier élément $[0, h]$. On donne : $\int_0^h (1 - x/h)^2 dx = h/3$ et $\int_0^h (x/h)(1 - x/h) dx = h/6$.
5. Après l'avoir brièvement expliqué, on pourra utiliser le fait que les deux matrices de rigidité locales sont identiques.
   Établissez la matrice de rigidité globale K, puis appliquez les conditions aux limites pour obtenir le système réduit.
6. En prenant $f(x) = 1$, calculez le second membre $L(\varphi_1)$ et donnez la valeur de la solution approchée au noeud x_1.
7. La méthode des éléments finis a-t-elle plutôt tendance à sur-estimer ou à sous-estimer les contraintes appliquées sur une pièce ? Illustrez votre réponse avec un exemple.

Exercice 1 : Polynômes de Lagrange d'ordre 2

On considère une barre de longueur L, découpée en n éléments finis de longueur $h = L/n$.

On souhaite améliorer la précision de la méthode des éléments finis en utilisant des éléments d'ordre 2 : on ajoute un noeud intermédiaire au milieu de chaque élément.

Considérons le premier élément $[0, h]$ avec trois noeuds : x_0, $x_{1/2}$ et x_1.

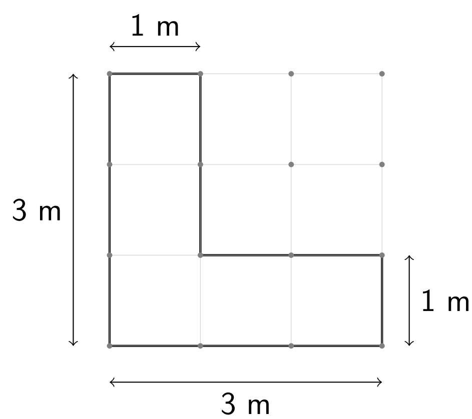
1. Rappelez les conditions que doivent vérifier les polynômes de Lagrange φ_0, $\varphi_{1/2}$ et φ_1 pour interpoler correctement la solution aux noeuds.
2. Voici les polynômes. Déterminez les éléments manquants $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ en justifiant votre choix :

$$\varphi_0(x) = a_1 \frac{(x - h/2)(x - h)}{h^2}$$
$$\varphi_{1/2}(x) = a_2 \frac{x(x - a_3)}{h^2}$$
$$\varphi_1(x) = a_4 \frac{x(x - a_5)}{a_6}$$

3. Quelles sont les dimensions de la matrice de rigidité élémentaire pour cet élément d'ordre 2 ? Quelles sont les dimensions de la matrice de rigidité globale ?
4. Donnez l'expression générale de la matrice de rigidité élémentaire pour l'équation $-u'' = f$.

Exercice 2 : Maillage 2D

Voici une pièce en forme de « L » qu'on souhaite mailler pour une analyse par éléments finis.



1. Proposez un maillage de cette pièce en utilisant des triangles. Numérotez clairement les noeuds et les éléments sur votre dessin.
2. Établissez le tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.
3. Pour un triangle de sommets $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, rappelez la méthode pour obtenir les polynômes de Lagrange $\varphi_A(x, y)$, $\varphi_B(x, y)$, $\varphi_C(x, y)$.
4. Expliquez brièvement comment est construite la matrice de rigidité globale à partir des matrices élémentaires.