estp	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
21/05/2025		**Page 1/3**

ANNÉE SCOLAIRE 2024-2025 – Semestre 6	
Nom de l'enseignant	Maxime BERGER, Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Convergence de séries (4 points)

Étudier la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes. Justifier soigneusement chaque réponse.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *(1 pt)*
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *(1 pt)*
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$ *(1 pt)*
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ *(1.5 pts)*

Exercice 2 : Série télescopique et comparaison (4 points)

1. Décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples. *(0.5 pt)*
2. En déduire la valeur de la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$. *(1 pt)*
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *(0.5 pt)*
4. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge. *(2 pts)*
   Indication : comparer avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

Exercice 3 : Algèbre linéaire (4 points)

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. *(1.5 pts)*
2. Ecrire E avec le mot clé "Vect", donner une base et la dimension. *(1 pt)*
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$.
   Montrer que f est une application linéaire. *(1 pt)*
4. Écrire la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. *(1 pt)*

Exercice 4 : Noyau et image (4 points)

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$g(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$$

1. Écrire la matrice B de g dans les bases canoniques. *(0.5 pt)*
2. Déterminer le noyau $\ker(g)$. Donner une base et la dimension. *(2 pts)*
3. Déterminer l'image Im(g). Donner une base et la dimension. *(1.5 pts)*

Exercice 5 : Calcul différentiel et intégrales curvilignes (4 points)

1. Soit $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$. Calculer la différentielle df. *(1 pt)*
2. Soit $g(x, y, z) = x^2 + y^2 z - z^3$. Calculer le gradient ∇g. *(0.5 pt)*
3. Soit $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xyz, z^2)$. Calculer la matrice jacobienne de $\vec{F}$ et la divergence div$(\vec{F})$. *(1.5 pts)*
4. Soit $\vec{G}(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$.
   Montrer que $\vec{G}$ dérive d'un potentiel scalaire et déterminer ce potentiel. *(1 pt)*
5. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} xy\,dx + (x + y)\,dy$
   où C est le segment de droite allant de $(0, 0)$ à $(1, 2)$, parcouru dans ce sens. *(1 pt)*