estp	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
26/01/2026		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. **Calculs de développements limités.**
   (a) Donner le développement limité de e^x à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

Solution :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

   (b) Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

   (c) En déduire le développement limité de $f(x) = e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(1 pt)*

Solution :

On multiplie les DL en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 3 :

$$\begin{aligned}
e^x \ln(1+x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

2. **Calcul de limite.** Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : *(1.5 pts)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

Solution :
On utilise le DL de $\sin x$ à l'ordre 5 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Donc :

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Et :

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120} + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} \boxed{\frac{1}{120}}$$

3. **Étude d'une fonction.** Soit $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

(a) À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. *(0.75 pt)*

Solution :
On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc :

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

On peut prolonger g par continuité en posant $g(0) = \frac{1}{2}$.

(b) En déduire la position de la courbe de g par rapport à sa tangente horizontale en 0. *(0.75 pt)*

Solution :
Le DL de g en 0 est :
$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$
La tangente en 0 est $y = \frac{1}{2}$ (horizontale car le terme en x est nul).
On a $g(x) - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{24} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{24} < 0$ pour $x \neq 0$ petit.
Donc la courbe est **en dessous** de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(2xy + 3)\,dx + (x^2 + 4y)\,dy = 0$$

   (a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$ est une différentielle totale. *(0.75 pt)*

Solution :
On pose $f(x, y) = 2xy + 3$ et $g(x, y) = x^2 + 4y$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, l'équation est exacte.

   (b) Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$. *(1 pt)*

Solution :
On cherche F telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3$.
En intégrant par rapport à x : $F(x, y) = x^2y + 3x + H(y)$
On vérifie avec $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + H'(y) = x^2 + 4y$.
Donc $H'(y) = 4y$, soit $H(y) = 2y^2 + C$.
Conclusion : $F(x, y) = x^2y + 3x + 2y^2$

   (c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. *(0.5 pt)*

Solution :
Les solutions sont données par $F(x, y) = K$ où K est une constante :

$$\boxed{x^2y + 3x + 2y^2 = K}$$

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant un changement de variables linéaire. *(1.5 pts)*

Solution :
On pose $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$ et $F(X, Y) = f(x, y)$.
L'équation devient $(a + 2b)\frac{\partial F}{\partial X} + (c + 2d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$.
On choisit $a = 2$, $b = -1$ (donc $a + 2b = 0$) et $c = 1$, $d = 0$ (donc $c + 2d = 1$).

L'équation devient $\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$, dont les solutions sont $F(X,Y) = K(X)$.
En revenant aux variables initiales avec $X = 2x - y$:

$$\boxed{f(x,y) = K(2x - y)}$$

où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque.

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

En cherchant des solutions sous la forme $f(x,y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. *(1.25 pts)*

Solution :
En posant $f(x,y) = X(x)Y(y)$, on obtient :

$$X'Y - 3XY' = 2XY$$

En divisant par XY :

$$\frac{X'}{X} - 3\frac{Y'}{Y} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{X' - 2X}{X} = 3\frac{Y'}{Y}$$

Le membre de gauche ne dépend que de x, le membre de droite que de y. Ils sont donc tous deux égaux à une constante k.
Pour X : $\frac{X'-2X}{X} = k \Rightarrow X' = (k+2)X \Rightarrow X(x) = C_1 e^{(k+2)x}$
Pour Y : $3\frac{Y'}{Y} = k \Rightarrow Y' = \frac{k}{3}Y \Rightarrow Y(y) = C_2 e^{ky/3}$
Solutions : $\boxed{f(x,y) = C\, e^{(k+2)x} e^{ky/3}}$ pour $k \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Modélisation – Refroidissement d'une pièce métallique (5 points)

Une pièce métallique de masse $m = 2$ kg et de capacité thermique massique $c = 500$ J/(kg·K) est initialement à la température $T_0 = 400$ K. Elle est plongée dans un bain thermostaté à la température constante $T_\infty = 300$ K.

Le transfert thermique entre la pièce et le bain suit la loi de Newton :

$$\frac{dQ}{dt} = -hS(T - T_\infty)$$

où Q est l'énergie thermique de la pièce, $h = 25$ W/(m^2·K) est le coefficient d'échange et $S = 0{,}04$ m^2 est la surface d'échange.

On rappelle que $Q = mcT$ (à constante près).

1. Montrer que la température $T(t)$ de la pièce vérifie l'équation différentielle : *(1 pt)*

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc}(T - T_\infty)$$

Solution :
On a $Q = mcT + \text{cste}$, donc $\frac{dQ}{dt} = mc\frac{dT}{dt}$.
En substituant dans la loi de Newton :

$$mc\frac{dT}{dt} = -hS(T - T_\infty)$$

Soit :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc}(T - T_\infty)$$

2. On pose $\tau = \frac{mc}{hS}$ (constante de temps). Calculer la valeur numérique de τ. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\tau = \frac{mc}{hS} = \frac{2 \times 500}{25 \times 0{,}04} = \frac{1000}{1} = 1000 \text{ s}$$

3. Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale $T(0) = T_0$. *(1.5 pts)*

Solution :
On pose $\theta(t) = T(t) - T_\infty$. L'équation devient :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau}\theta$$

C'est une équation linéaire du premier ordre. La solution est :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau}$$

Avec $\theta_0 = T_0 - T_\infty = 400 - 300 = 100$ K.
Donc :

$$\boxed{T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau} = 300 + 100\, e^{-t/1000}}$$

4. Au bout de combien de temps la pièce atteint-elle la température de 320 K ? *(1 pt)*
On donne $\ln(5) \approx 1{,}6$.

Solution :
On résout $T(t) = 320$:

$$300 + 100\, e^{-t/1000} = 320$$

$$100\, e^{-t/1000} = 20 \quad \Rightarrow \quad e^{-t/1000} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{t}{1000} = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5)$$

$$t = 1000 \ln(5) \approx 1000 \times 1{,}6 = \boxed{1600 \text{ s} \approx 27 \text{ min}}$$

5. Vers quelle valeur tend $T(t)$ quand $t \to +\infty$? Interpréter physiquement. *(1 pt)*

Solution :

$$\lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(300 + 100\, e^{-t/1000}\right) = 300 \text{ K}$$

Interprétation : La pièce métallique tend vers l'équilibre thermique avec le bain thermostaté. Elle atteint asymptotiquement la température $T_\infty = 300$ K du bain.

Exercice 4 : Modélisation – Dynamique des populations (5 points)

On étudie l'évolution d'une population $N(t)$ au cours du temps t (exprimé en années).

Partie A – Modèle de Malthus (croissance exponentielle)

Dans un premier temps, on suppose que le taux de croissance de la population est proportionnel à la population elle-même :

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

où $r > 0$ est le taux de croissance intrinsèque.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $N(0) = N_0$. *(1 pt)*

Solution :
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à variables séparables.
On sépare les variables : $\frac{dN}{N} = r\,dt$
En intégrant : $\ln|N| = rt + C$
Donc : $N(t) = Ae^{rt}$ où $A = e^C$
Avec la condition initiale $N(0) = N_0$: $A = N_0$

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{rt}}$$

2. Calculer le temps de doublement T_2 de la population (temps pour que $N(T_2) = 2N_0$). *(0.5 pt)*
On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.

Solution :
On résout $N(T_2) = 2N_0$:

$$N_0 e^{rT_2} = 2N_0 \quad \Rightarrow \quad e^{rT_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad rT_2 = \ln(2)$$

$$\boxed{T_2 = \frac{\ln(2)}{r} \approx \frac{0{,}7}{r}}$$

Partie B – Modèle de Verhulst (croissance logistique)

Le modèle de Malthus prédit une croissance infinie, ce qui n'est pas réaliste. On introduit une capacité limite K (population maximale que l'environnement peut supporter). L'équation devient :

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

3. Vérifier que $N = 0$ et $N = K$ sont des solutions d'équilibre (solutions constantes). *(0.5 pt)*

Solution :
Une solution d'équilibre vérifie $\frac{dN}{dt} = 0$.
On résout : $rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0$
Ce produit est nul si et seulement si $N = 0$ ou $1 - \frac{N}{K} = 0$, c'est-à-dire $N = K$.

$$\boxed{\text{Les solutions d'équilibre sont } N = 0 \text{ et } N = K}$$

4. On pose $u = \frac{1}{N}$. Montrer que u vérifie l'équation différentielle linéaire : *(1 pt)*

$$\frac{du}{dt} = -ru + \frac{r}{K}$$

Solution :
On a $u = \frac{1}{N}$, donc $N = \frac{1}{u}$.
En dérivant par rapport à t : $\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$
On substitue dans l'équation de Verhulst :

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = r \cdot \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{uK}\right) = \frac{r}{u} - \frac{r}{u^2 K}$$

En multipliant par $-u^2$:

$$\frac{du}{dt} = -ru + \frac{r}{K}$$

5. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de $N(t)$ avec $N(0) = N_0$. *(1.5 pts)*

Solution :
L'équation $\frac{du}{dt} + ru = \frac{r}{K}$ est une EDO linéaire du premier ordre.
Solution homogène : $u_h = Ce^{-rt}$
Solution particulière : $u_p = \frac{1}{K}$ (constante)
Solution générale : $u(t) = Ce^{-rt} + \frac{1}{K}$
Condition initiale : $u(0) = \frac{1}{N_0}$, donc $C + \frac{1}{K} = \frac{1}{N_0}$, soit $C = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K} = \frac{K-N_0}{N_0 K}$
Donc : $u(t) = \frac{K-N_0}{N_0 K}e^{-rt} + \frac{1}{K}$
En revenant à $N = \frac{1}{u}$:

$$N(t) = \frac{1}{\frac{K-N_0}{N_0 K}e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{N_0 K}{(K - N_0)e^{-rt} + N_0}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par e^{rt} :

$$\boxed{N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}}$$

6. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} N(t)$. Interpréter biologiquement ce résultat. *(0.5 pt)*

Solution :
Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-rt} \to 0$ (car $r > 0$).
Donc :

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \frac{K}{1+0} = \boxed{K}$$

Interprétation : La population tend vers la capacité limite K de l'environnement. Contrairement au modèle de Malthus, la croissance est régulée et la population se stabilise à un niveau d'équilibre déterminé par les ressources disponibles.