

	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
16/01/2026		Page 1/3

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger
Matière	Mathématiques - Analyse et Algèbre
Durée de l'examen	2h00
Consignes	<ul style="list-style-type: none"> — Calculatrice NON autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Calcul tensoriel (4 points)

On se place dans \mathbb{R}^3 muni d'une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ qui n'est pas orthonormée. On donne les produits scalaires entre les vecteurs de la base :

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 3, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$$

- Former la matrice (g_{ij}) avec $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. (1 pt)

Solution :

Comme le produit scalaire est symétrique, la matrice (g_{ij}) est :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit le vecteur $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ exprimé dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Quelles sont les composantes contravariantes de \mathbf{v} ? (0.5 pt)

Solution :

Les composantes contravariantes sont directement les coordonnées données dans la base :

$$v^1 = 1, \quad v^2 = -1, \quad v^3 = 2$$

3. Calculer les composantes covariantes v_1, v_2, v_3 de ce vecteur. (1 pt)

Solution :

Les composantes covariantes se calculent avec le tenseur métrique : $v_i = g_{ij}v^j$.

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2 + g_{13}v^3 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$v_2 = g_{21}v^1 + g_{22}v^2 + g_{23}v^3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 1 - 3 - 2 = -4$$

$$v_3 = g_{31}v^1 + g_{32}v^2 + g_{33}v^3 = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3$$

4. Calculer la norme du vecteur \mathbf{v} . (1 pt)

Solution :

$$\|\mathbf{v}\|^2 = v^1v_1 + v^2v_2 + v^3v_3 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 3 = 1 + 4 + 6 = 11$$

Donc $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{11}$.

5. Rappelez la définition d'un tenseur, puis donner un exemple de quantité qui est un tenseur et une quantité qui n'est pas un tenseur. (0.5 pt)

Exercice 2 : Espaces L^p (4 points)

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = e^{ix-2x}, \quad h(x) = \sin(3x^2)$$

1. Déterminer si f appartient à $L^1([1, +\infty[)$. Si oui, calculer sa norme. (1.5 pts)

Solution :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

L'intégrale converge, donc $f \in L^1([1, +\infty[)$ et $\|f\|_1 = 1$.

2. Déterminer si g appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^*)$. Si oui, calculer sa norme. (1.5 pts)

Solution :

$$\int_0^{+\infty} |e^{ix-2x}|^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx = \left[-\frac{e^{-4x}}{4} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

L'intégrale converge, donc $g \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$ et $\|g\|_2 = \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$.

3. Déterminer si h appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$. Si oui, donner sa norme. (1 pt)

Solution :

$|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et cette borne est atteinte (par exemple en $x = \pi/2$).

Donc $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|h\|_\infty = 1$.

Exercice 3 : Transformée de Laplace (4 points)

On note $\mathcal{L}\{f\}(s)$ la transformée de Laplace de f .

1. Calculer $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)$ directement à partir de la définition et préciser le domaine de convergence. (1 pt)

Solution :

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-3t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+3)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s+3)t}}{s+3} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s+3}$$

Cette intégrale converge pour $\operatorname{Re}(s) > -3$.

2. En utilisant la propriété de décalage en fréquence $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, calculer $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\}$. (1 pt)

On rappelle que $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Solution :

On utilise le décalage avec $f(t) = t^2$ et $a = -3$.

On a $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$.

Par décalage en fréquence :

$$\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\} = \frac{2}{(s+3)^3}$$

3. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-t}$ avec $y(0) = 0$ en utilisant la transformée de Laplace. (2 pts)

Solution :

Étape 1 : Transformation. En appliquant \mathcal{L} à l'équation :

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Avec $y(0) = 0$:

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Étape 2 : Résolution algébrique.

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

— $s = -1 : 1 = A(1)$, donc $A = 1$

— $s = -2 : 1 = B(-1)$, donc $B = -1$

Donc $Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$.

Étape 3 : Transformation inverse.

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Exercice 4 : Équations aux dérivées partielles (4 points)

1. Soit $f(x, y) = e^{2x} \sin(3y)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. (1 pt)

Solution :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2e^{2x} \sin(3y), & \frac{\partial f}{\partial y} &= 3e^{2x} \cos(3y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4e^{2x} \sin(3y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -9e^{2x} \sin(3y)\end{aligned}$$

2. Vérifier que f est solution de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -5f$. (0.5 pt)

Solution :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{2x} \sin(3y) - 9e^{2x} \sin(3y) = -5e^{2x} \sin(3y) = -5f$$

L'équation est bien vérifiée.

3. On considère l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+$ avec conditions aux bords $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

On cherche une solution sous la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$. Montrer que l'équation devient :

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

où λ est une constante. (1 pt)

Solution :

En substituant $u(x, t) = X(x)T(t)$:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

En divisant par $c^2 X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de t , le membre de droite ne dépend que de x . Pour que l'égalité soit vraie pour tout (x, t) , les deux membres doivent être égaux à une constante $-\lambda$.

4. En déduire les deux équations différentielles vérifiées par X et T . (0.5 pt)

Solution :

- Pour T : $T'' + \lambda c^2 T = 0$
- Pour X : $X'' + \lambda X = 0$

5. En prenant $\lambda = \mu^2 > 0$, montrer que les conditions aux bords imposent $\mu = \frac{n\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, puis donner la forme générale de $T(t)$. (1 pt)

Solution :

Pour $\lambda = \mu^2 > 0$, la solution générale de $X'' + \mu^2 X = 0$ est :

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

Avec les conditions aux bords :

- $X(0) = 0 : A = 0$
- $X(L) = 0 : B \sin(\mu L) = 0$

Pour avoir $B \neq 0$ (solution non triviale), il faut $\sin(\mu L) = 0$, soit $\mu L = n\pi$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$.

Pour T , l'équation $T'' + \mu_n^2 c^2 T = 0$ a pour solution générale :

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$$

Exercice 5 : Distributions (4 points)

On rappelle que la distribution de Dirac δ_a est définie par $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ pour toute fonction test φ .
 On note H la fonction de Heaviside : $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$.

- Soit $f(x) = H(x) - H(x - 3)$ (« fonction porte » sur $[0, 3]$). Calculer la dérivée de f au sens des distributions. (1 pt)

Solution :

La fonction f vaut 1 sur $[0, 3[$ et 0 ailleurs.

- La dérivée classique est nulle partout où f est continue.
- Saut en $x = 0$: $\sigma_0 = 1 - 0 = 1$
- Saut en $x = 3$: $\sigma_3 = 0 - 1 = -1$

Donc $f' = \delta_0 - \delta_3$.

- Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer la dérivée de g au sens des distributions en utilisant la formule des sauts. (1 pt)

Solution :

On calcule d'abord le saut en $x = 1$:

- Limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$
- Limite à droite : $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3$
- Saut : $\sigma_1 = 3 - 1 = 2$

La dérivée classique (partie régulière) est :

$$\{g'\}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Par la formule des sauts : $g' = \{g'\} + \sigma_1 \delta_1$

Donc : $g'(x) = \{g'\}(x) + 2\delta_1$

- Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculer la dérivée de h au sens des distributions et écrivez $\langle h', \varphi \rangle$ pour une fonction test φ . (2 pts)

Solution :

On identifie les points de discontinuité et on calcule les sauts :

En $x = 0$:

- Limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = e^0 = 1$
- Limite à droite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 + 1 = 1$
- Saut : $\sigma_0 = 1 - 1 = 0$ (pas de discontinuité)

En $x = 2$:

- Limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 2 + 1 = 3$
- Limite à droite : $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 5$
- Saut : $\sigma_2 = 5 - 3 = 2$

La dérivée classique est :

$$\{h'\}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Donc : $h'(x) = \{h'\}(x) + 2\delta_2$

Donc

$$\langle h', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \{h'\}(x) \varphi(x) dx + 2\varphi(2) = \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx + \int_0^2 \varphi(x) dx + 2\varphi(2)$$

Transformées de Laplace usuelles

Fonction $f(t)$	Transformée $\mathcal{L}\{f\}(s)$	Domaine
1	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$u(t-a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$