Algèbre linéaire - Chapitre 3

Familles de vecteurs

1 Combinaisons linéaires

- Dans $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1, -2)$ et $e_2 = (2, 3)$?
- Dans $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1, -2), e_2 = (2, 3), e_3 = (-4, 5)$?
- Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1, 3, 2)$ et $e_2 = (1, -1, 4)$?
- Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (3, 1, m)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1, 3, 2)$ et $e_2 = (1, -1, 4)$?
  (discuter suivant la valeur de m)

Si oui, donner toutes les combinaisons linéaires possibles.

1. u est combinaison linéaire de e_1 et e_2 si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u = ae_1 + be_2$.

   Trouver a et b nous conduit à un système linéaire :

$$\begin{aligned} a + 2b &= 1 \\ -2a + 3b &= 2 \end{aligned}$$

   On trouve $a = -1/7$ et $b = 4/7$. Donc u est combinaison linéaire de e_1 et e_2.
2. u est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3 si et seulement si il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u = ae_1 + be_2 + ce_3$.

   Trouver a, b et c nous conduit à un système linéaire :

$$\begin{aligned} a + 2b - 4c &= 1 \\ -2a + 3b + 5c &= 2 \end{aligned}$$

La première étape du pivot de gauss nous donne :

$$\begin{aligned} a + 2b - 4c &= 1 \\ 0 + 7b - 3c &= 3 \end{aligned}$$

On peut choisir c comme on veut dans $\mathbb{R}$. b et a sont ensuite déterminés en fonction de c.

3. u est combinaison linéaire de e_1 et e_2 si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u = ae_1 + be_2$.

   Trouver a et b nous conduit à un système linéaire :

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ 3a - b &= 5 \\ 2a + 4b &= 3 \end{aligned}$$

   Les premières étapes du pivot de Gauss nous donnent :

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ 0 - 4b &= 1 \\ 0 + 2b &= -1 \end{aligned}$$

   Le système est donc incompatible et u n'est pas combinaison linéaire de e_1 et e_2.

4. u est combinaison linéaire de e_1 et e_2 si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u = ae_1 + be_2$.

   Trouver a et b nous conduit à un système linéaire :

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \\ 3a - b &= 1 \\ 2a + 4b &= m \end{aligned}$$

   Les premières étapes du pivot de Gauss nous donnent :

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \\ 0 - 4b &= -8 \\ 0 + 2b &= m - 6 \end{aligned}$$

   Le système est compatible si et seulement si $m = 10$, dans ce cas, u est combinaison linéaire de e_1 et e_2.

   Si $m \neq 10$, le système est incompatible et u n'est pas combinaison linéaire de e_1 et e_2.

2 Sous-espace engendré

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, -1, 2)$ et $u_2 = (1, 1, -1)$.

— Les vecteurs $v_1 = (3, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 5, -1)$ sont-ils combinaison linéaire de u_1 et u_2 ?

— Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Démontrer que $v = (a, b, c)$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si $-a + 3b + 2c = 0$.

— En déduire un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de u_1 et de u_2.

1. v_1 est combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $v_1 = au_1 + bu_2$.

   Trouver a et b nous conduit à un système linéaire :

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \\ -a + b &= 1 \\ 2a - b &= 0 \end{aligned}$$

   Les premières étapes du pivot de Gauss nous donnent :

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \\ 0 + 2b &= 4 \\ 0 - 3b &= -6 \end{aligned}$$

   Les deux dernières lignes correspondent à la même équation, le système possède donc une solution.

2. v_2 est combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $v_2 = au_1 + bu_2$.

   Trouver a et b nous conduit à un système linéaire :

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -a + b &= 5 \\ 2a - b &= -1 \end{aligned}$$

   Les premières étapes du pivot de Gauss nous donnent :

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 0 + 2b &= 6 \\ 0 - 3b &= -3 \end{aligned}$$

   Le système est incompatible et v_2 n'est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2.

3. $v = (a, b, c)$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si le système suivant possède une solution :

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ -x + y &= b \\ 2x - y &= c \end{aligned}$$

   Les premières étapes du pivot de Gauss nous donnent :

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ 0 + 2y &= a + b \\ 0 - 3y &= c - 2a \end{aligned}$$

qu'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y &= (a+b)/2 \\ y &= (2a-c)/3 \end{aligned}$$

Le système est compatible si et seulement si $(2a-c)/3 = (a+b)/2$, c'est-à-dire

$$4a - 2c = 3a + 3b$$

c'est-à-dire

$$a - 3b - 2c = 0$$

c'est bien l'équation de l'énoncé.

4. Il suffit de trouver trois nombres a, b, c qui ne vérifient pas l'équation de l'énoncé. Par exemple, $(1,0,0)$ n'est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2.

Familles

3 Familles libres

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

— (u, v) avec $u = (1,2,3)$ et $v = (-1,4,6)$;

— (u, v, w) avec $u = (1,2,-1), v = (1,0,1)$ et $w = (0,0,1)$;

— (u, v, w) avec $u = (1,2,-1), v = (1,0,1)$ et $w = (-1,2,-3)$;

Sans calcul supplémentaire, dire si elles sont génératrices.

4 Dimension

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de $F, G, F \cap G$.

1. G est engendré par deux vecteurs donc $\dim G \leqslant 2$. Clairement v_4 et v_5 ne sont pas liés donc $\dim G \geqslant 2$ c'est-à-dire $\dim G = 2$.
2. F est engendré par trois vecteurs donc $\dim F \leqslant 3$. Un calcul montre que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, d'où $\dim F \geqslant 3$ et donc $\dim F = 3$.
3. Essayons d'abord d'estimer la dimension de $F \cap G$.

   D'une part $F \cap G \subset G$ donc $\dim(F \cap G) \leqslant 2$.

   Utilisons d'autre part la formule $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

   Comme $F + G \subset \mathbb{R}^4$, on a $\dim(F+G) \leqslant 4$ d'où on tire l'inégalité $\dim(F \cap G) \geqslant 1$.
   Donc soit $\dim(F \cap G) = 1$ ou bien $\dim(F \cap G) = 2$.

   Supposons que $\dim(F \cap G)$ soit égale à 2. Comme $F \cap G \subset G$ on aurait dans ce cas $F \cap G = G$ et donc $G \subset F$. En particulier il existerait $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, ainsi $\dim(F \cap G)$ n'est pas égale à 2.

On peut donc conclure $\dim(F \cap G) = 1$

Dimension

5 Dimension

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants. La dimension d'un espace vectoriel correspond au nombre de paramètres scalaires nécessaires pour décrire un vecteur.

1. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des matrices 2×3 à coefficients réels.
3. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n qui s'annulent en 0.
6. L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont la somme des coordonnées est nulle.

6 Bases

Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices ?

— Dans $\mathbb{R}^2$:

  — La famille $\{(1,0),(0,1)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$

  La famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est libre et génératrice.

  — La famille $\{(1,2),(2,4)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$

  La famille $\{(1,2),(2,4)\}$ n'est pas libre (les vecteurs sont colinéaires).

  — La famille $\{(1,0)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$

  La famille $\{(1,0)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$ (ne permet pas d'obtenir tous les vecteurs du plan).

— Dans $\mathbb{R}^3$:

  — La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$

  La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

  — La famille $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$

  La famille $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ est libre mais pas génératrice.

  — La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$

  La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ n'est ni libre ni génératrice (car $(1,1,0) = (1,0,0)+(0,1,0)$).

— Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 :

  — La famille $\{1, X, X^2\}$ dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

La famille $\{1, X, X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

— La famille $\{1+X, X+X^2, 1+X^2\}$ dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

La famille $\{1+X, X+X^2, 1+X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

— La famille $\{1, X, X\}$ dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

La famille $\{1, X, X\}$ n'est pas libre car X est pris deux fois.