

	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
26/01/2026		Page 1/3

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
<b>Nom de l'enseignant</b>	Maxime Berger & Karine Serier
<b>Promotion</b>	BMC2 - S3
<b>Matière</b>	Mathématiques
<b>Durée de l'examen</b>	3h00
<b>Consignes</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Calculatrice <b>NON</b> autorisée</li> <li>— Aucun document n'est autorisé</li> </ul>

## Exercice 1 : Séries numériques (6 points)

1. **Série géométrique.** On considère la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

(a) Rappeler le critère de convergence d'une série géométrique  $\sum q^n$ . (0.5 pt)

**Solution :**

La série géométrique  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ . Dans ce cas, sa somme vaut  $\frac{1}{1-q}$ .

(b) En déduire que la série converge et calculer sa somme. (1 pt)

**Solution :**

Ici  $q = \frac{2}{3}$  et  $|q| = \frac{2}{3} < 1$ , donc la série converge.

Sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

2. **Critère de D'Alembert.** Étudier la convergence de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$  à l'aide du critère de D'Alembert. (1.5 pts)

**Solution :**

On pose  $u_n = \frac{n!}{3^n}$  et on calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{3 \cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1$$

Par le critère de D'Alembert, la série **diverge**.

3. **Série télescopique.** Calculer la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ . (1.5 pts)

*Indication : décomposer  $\frac{1}{n(n+1)}$  en éléments simples.*

**Solution :**

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La somme partielle s'écrit :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right)$$

C'est une somme télescopique :  $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ .

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = 1$$

4. **Équivalent.** On considère la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  où  $u_n = \frac{n^2+3n}{n^4+2}$ .

- (a) Trouver un équivalent simple de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . (0.75 pt)

**Solution :**

Quand  $n \rightarrow +\infty$  :

$$u_n = \frac{n^2+3n}{n^4+2} = \frac{n^2(1+\frac{3}{n})}{n^4(1+\frac{2}{n^4})} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

- (b) En déduire la nature de la série. (0.75 pt)

**Solution :**

On a  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$  avec  $u_n > 0$ .

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge (car  $2 > 1$ ).

Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série  $\sum u_n$  **converge**.

## Exercice 2 : Calcul différentiel vectoriel (4 points)

1. Soit le champ scalaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  défini par :

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^3 - 2xz$$

- (a) Rappeler la définition du gradient d'un champ scalaire. (0.5 pt)

**Solution :**

Le gradient d'un champ scalaire  $f$  est le vecteur des dérivées partielles :

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Il pointe dans la direction de plus grande croissance de  $f$ .

- (b) Calculer  $\nabla f(x, y, z)$ . (1 pt)

**Solution :**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3yz^2 - 2x$$

Donc :

$$\nabla f = (2xy - 2z, x^2 + z^3, 3yz^2 - 2x)$$

- (c) Évaluer  $\nabla f$  au point  $P = (1, 2, -1)$ . (0.5 pt)

**Solution :**

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2, -1) &= (2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1), 1^2 + (-1)^3, 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= (4 + 2, 1 - 1, 6 - 2) = (6, 0, 4) \end{aligned}$$

2. Soit le champ de vecteurs  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par :

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy + z^2, yz - x)$$

- (a) Rappeler la définition de la divergence d'un champ de vecteurs. (0.5 pt)

**Solution :**

La divergence d'un champ de vecteurs  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  est le scalaire :

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Elle mesure le taux d'expansion (ou de contraction) local du champ.

(b) Calculer  $\operatorname{div}(\vec{F})$ . (1 pt)

**Solution :**

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) = 2xz$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy + z^2) = x$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(yz - x) = y$$

Donc :

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2xz + x + y$$

(c) Évaluer la divergence au point  $Q = (2, -1, 3)$ . (0.5 pt)

**Solution :**

$$\operatorname{div}(\vec{F})(2, -1, 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 + (-1) = 12 + 2 - 1 = 13$$

### Exercice 3 : Algèbre linéaire (6 points)

1. **Système linéaire.** Résoudre le système suivant : (1.5 pts)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

**Solution :**

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 3 & | & -2 \\ 0 & -3 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

De  $L_2 : -3y + 3z = -2 \Rightarrow y = z + \frac{2}{3}$ .

En posant  $z = t$  (paramètre libre), on a  $y = t + \frac{2}{3}$ .

De  $L_1 : x = 3 - 2y + z = 3 - 2(t + \frac{2}{3}) + t = 3 - 2t - \frac{4}{3} + t = \frac{5}{3} - t$ .

**Solution :**  $(x, y, z) = (\frac{5}{3} - t, t + \frac{2}{3}, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

2. **Espace vectoriel.** On considère l'ensemble :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$

Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . (1.5 pts)

**Solution :**

On vérifie les trois conditions :

**1. Non vide :**  $(0, 0, 0) \in E$  car  $0 + 2 \cdot 0 - 0 = 0$ . ✓

**2. Stabilité par addition :** Soient  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E$ .

On a  $x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$  et  $x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$ .

Alors  $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2) = 0$ .

Donc  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in E$ . ✓

**3. Stabilité par multiplication :** Soit  $(x, y, z) \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a  $x + 2y - z = 0$ .

Alors  $\lambda x + 2(\lambda y) - \lambda z = \lambda(x + 2y - z) = 0$ .

Donc  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E$ . ✓

**Conclusion :**  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

3. **Application linéaire.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\varphi(x, y) = (2x - y, x + 3y, x - y)$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire. (1 pt)

**Solution :**

Soient  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) &= \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= (2(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2), \dots) \\ &= (2\lambda x_1 - \lambda y_1 + 2\mu x_2 - \mu y_2, \dots) \\ &= \lambda(2x_1 - y_1, x_1 + 3y_1, x_1 - y_1) + \mu(2x_2 - y_2, x_2 + 3y_2, x_2 - y_2) \\ &= \lambda\varphi(x_1, y_1) + \mu\varphi(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est linéaire.

- (b) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ . (0.5 pt)

**Solution :**

On calcule  $\varphi(1, 0) = (2, 1, 1)$  et  $\varphi(0, 1) = (-1, 3, -1)$ .

La matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer  $\ker(\varphi)$ . (0.75 pt)

**Solution :**

On résout  $\varphi(x, y) = (0, 0, 0)$  :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

De la 1ère équation :  $y = 2x$ . De la 3ème :  $y = x$ .

Donc  $2x = x \Rightarrow x = 0$ , puis  $y = 0$ .

**Conclusion :**  $\ker(\varphi) = \{(0, 0)\}$ .

(d) Déterminer une base de  $\text{Im}(\varphi)$  et sa dimension. (0.75 pt)

**Solution :**

Puisque  $\ker(\varphi) = \{0\}$ , on a  $\dim(\ker(\varphi)) = 0$ .

Par le théorème du rang :  $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\ker(\varphi)) = 2 - 0 = 2$ .

Une base de  $\text{Im}(\varphi)$  est formée des images des vecteurs de la base canonique :

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\{(2, 1, 1), (-1, 3, -1)\}$$

## Problème : Étude d'une famille de séries et application (4 points)

On considère, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la série :

$$S(\alpha) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$$

### Partie A : Étude de la convergence

#### 1. Cas $\alpha > 1$ .

- (a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$  :  $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ . (0.25 pt)

#### Solution :

Pour  $n \geq 2$ , on a  $\ln(n) \geq \ln(2) > 0$ .

Donc  $n^\alpha \ln(n) \geq n^\alpha$ , ce qui donne  $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ .

- (b) En déduire que la série  $S(\alpha)$  converge pour  $\alpha > 1$ . (0.25 pt)

#### Solution :

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge pour  $\alpha > 1$ .

Par comparaison, puisque  $0 < \frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ , la série  $S(\alpha)$  converge.

#### 2. Cas $\alpha < 1$ .

- (a) Trouver un équivalent de  $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et le comparer à  $\frac{1}{n^\beta}$  pour un  $\beta$  bien choisi. (0.5 pt)

#### Solution :

Pour  $\alpha < 1$ , prenons  $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$  (on a alors  $\alpha < \beta < 1$ ).

On a :

$$\frac{1/n^\alpha \ln(n)}{1/n^\beta} = \frac{n^\beta}{n^\alpha \ln(n)} = \frac{n^{\beta-\alpha}}{\ln(n)}$$

Comme  $\beta - \alpha > 0$ , on a  $n^{\beta-\alpha} \rightarrow +\infty$  et  $\frac{n^{\beta-\alpha}}{\ln(n)} \rightarrow +\infty$ .

Donc  $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \gg \frac{1}{n^\beta}$  pour  $n$  grand.

- (b) En déduire que la série  $S(\alpha)$  diverge pour  $\alpha < 1$ . (0.5 pt)

**Solution :**

Puisque  $\beta < 1$ , la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\beta}$  diverge.

Comme  $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \geq \frac{1}{n^\beta}$  pour  $n$  assez grand (puisque le rapport tend vers  $+\infty$ ), la série  $S(\alpha)$  **diverge** par comparaison.

3. **Cas critique**  $\alpha = 1$ . On étudie  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

- (a) En utilisant le critère de D'Alembert, peut-on conclure ? Justifier. (0.5 pt)

**Solution :**

On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n \ln(n)}{(n+1) \ln(n+1)} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \rightarrow 1 \times 1 = 1$$

Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure (limite = 1).

- (b) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que la série diverge. (0.5 pt)

*Indication : on rappelle que si  $f$  est positive décroissante,  $\sum f(n)$  et  $\int f(x) dx$  ont même nature.*

**Solution :**

La fonction  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$  est positive et décroissante sur  $[2, +\infty[$ .

On calcule :

$$\int_2^N \frac{dx}{x \ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_2^N = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

L'intégrale diverge, donc la série  $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$  **diverge**.

## Partie B : Application à l'algèbre linéaire

On considère l'espace vectoriel  $E$  des suites réelles  $(u_n)_{n \geq 2}$  et l'application  $T : E \rightarrow E$  définie par :

$$T((u_n)) = \left( \frac{u_n}{n \ln(n)} \right)_{n \geq 2}$$

4. Montrer que  $T$  est une application linéaire. (0.5 pt)

**Solution :**

Soient  $(u_n), (v_n) \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$T(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) = T((\lambda u_n + \mu v_n)) = \left( \frac{\lambda u_n + \mu v_n}{n \ln(n)} \right)$$

$$= \lambda \left( \frac{u_n}{n \ln(n)} \right) + \mu \left( \frac{v_n}{n \ln(n)} \right) = \lambda T((u_n)) + \mu T((v_n))$$

Donc  $T$  est linéaire.

5. Déterminer  $\ker(T)$ . (0.5 pt)

**Solution :**

$(u_n) \in \ker(T)$  si et seulement si  $\frac{u_n}{n \ln(n)} = 0$  pour tout  $n \geq 2$ .

Comme  $n \ln(n) \neq 0$  pour  $n \geq 2$ , cela équivaut à  $u_n = 0$  pour tout  $n$ .

Donc  $\ker(T) = \{(0, 0, 0, \dots)\}$  : la suite nulle.

6.  $T$  est-elle injective ? Justifier. (0.5 pt)

**Solution :**

Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à  $\{0\}$ .

Comme  $\ker(T) = \{0\}$ ,  $T$  est **injective**.

## Rappels et formulaire

**Séries de Riemann :** La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Critère de D'Alembert :** Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs.

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$ , la série converge.
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$  (ou  $+\infty$ ), la série diverge.
- Si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.

**Série géométrique :** Pour  $|q| < 1$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

**Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes :**

- Gradient :  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
- Divergence :  $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

**Théorème du rang :** Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire avec  $\dim(E) < +\infty$ , alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$