

---

# Algèbre linéaire - Chapitre 1

## Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

---

### Résumé des idées

*À retenir dans une semaine :*

- Un espace vectoriel est un ensemble avec deux lois : une addition interne et une multiplication par un scalaire.
- Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel.
- Pour vérifier qu'un ensemble est un espace vectoriel :
  - Possède-t-il un vecteur nul ?
  - L'addition est-elle une loi interne ?
  - La multiplication par un scalaire est-elle une loi externe ?
  - Les règles de calcul de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont-elles vérifiées ?

### Ce que je dois savoir

- Que signifie qu'une loi soit interne à un ensemble ?
- Quelles sont les règles de calculs pour les espaces vectoriels ?
- Qu'est-ce que le vecteur nul d'un espace vectoriel ?

## 1.1 Exercices

### 1.1.1 Les espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

1. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans  $\mathbb{R}$  ?
2. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans  $\mathbb{R}^2$  ?
3. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans  $\mathbb{R}^3$  ?

### 1.1.2 parties de $\mathbb{R}^2$

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
2.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
3.  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
4.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

### 1.1.3 Dans un espace de fonctions

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni des opérations usuelles. Soit  $F$  l'ensemble des applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant l'une des conditions suivantes :

1.  $f(0) + f(1) = 0$
2.  $f(0) = 0$
3.  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
4.  $\forall x \in [0, 1], f(x) + f(1 - x) = 0$
5.  $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq 0$
6.  $2f(0) = f(1) + 3$

Dans quel cas  $F$  est-il un espace vectoriel inclus dans  $E$  ?

### 1.1.4 Dans $\mathbb{R}^n$

On munit  $\mathbb{R}^n$  des lois usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , lesquels sont des espaces vectoriels ?

1.  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$
2.  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$
3.  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2\}$
4.  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$
5.  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \times x_2 = 0\}$

### 1.1.5 Dans $\mathbb{R}[X]$

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1.  $A_1$  est l'ensemble des polynômes réels  $P$  vérifiant  $P(0) = 1$ .
2.  $A_2$  est l'ensemble des polynômes réels ayant  $a$  comme racine. ( $a \in \mathbb{R}$  fixé).
3.  $A_3$  est l'ensemble des polynômes réels ayant au moins une racine réelle.
4.  $A_4$  est l'ensemble des polynômes réels de degré 3.

### 1.1.6 Dans l'espace des suites réelles

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1.  $A_1$  est l'ensemble des suites réelles convergentes vers 1.
2.  $A_2$  est l'ensemble des suites réelles négligeables devant  $n^2$

3.  $A_3$  est l'ensemble des suites réelles équivalentes à  $n^2$ .
4.  $A_4$  est l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 3$$

5.  $A_5$  est l'ensemble des suites réelles arithmétiques.
6.  $A_6$  est l'ensemble des suites réelles géométriques.

### 1.1.7 Mélange

Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des espaces vectoriels :

1.  $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$ ;
2.  $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P'(0) = 2\}$ ;
3. Pour  $A \in \mathbb{R}[X]$  non-nul fixé,  $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \mid P\}$ ;
4. D l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont dérivables;
5.  $E_4$ , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' + a(x)y = 0$ , où  $a \in \mathcal{D}$ .
6.  $E_5$ , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' + a(x)y = x$ , où  $a \in \mathcal{D}$ .

## Bases

### 1.1.8 Dans $\mathbb{R}^2$

1. Montrer que les vecteurs  $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$ . Trouver les composantes du vecteur  $w = (1, 2)$  dans cette base  $(v_1, v_2)$ .
2. Montrer que les vecteurs  $v_1 = (1, 2), v_2 = (3, 4)$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$ . Trouver les composantes des vecteurs  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$  dans cette base  $(v_1, v_2, v_3)$ .
3. Dans  $\mathbb{R}^2$ , donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans  $\mathbb{R}^2$ , donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

### 1.1.9 Dans $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que les vecteurs  $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1)$  et  $v_3 = (1, 1, 0)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Trouver les composantes du vecteur  $w = (1, 1, 1)$  dans cette base  $(v_1, v_2, v_3)$ .
2. Montrer que les vecteurs  $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0)$  et  $v_3 = (1, 0, -1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Trouver les composantes du vecteur  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$  et  $w = (1, 2, -3)$  dans cette base  $(v_1, v_2, v_3)$ .
3. Dans  $\mathbb{R}^3$ , donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans  $\mathbb{R}^3$ , donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Déterminer pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  les vecteurs

$$\{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$$

forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Considérons la famille  $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$  où

$$\begin{cases} Q_1 = X^2 + 1 \\ Q_2 = 3X^2 - X + 3 \\ Q_3 = X^2 - X - 1 \end{cases}$$

$B$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ ? Si oui, déterminer les coordonnées de  $X$ .