Séries de fonctions - Chapitre 3
Révisions sur les complexes

Rappels sur les nombres complexes

Définitions et formes usuelles

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme :

$$z = a + ib \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$$

où a est la partie réelle $\Re(z)$ et b la partie imaginaire $\Im(z)$.

Forme algébrique : $z = a + ib$

Forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le **module** de z, et $\theta = \arg(z)$ est un **argument** de z (défini à 2π près).

Forme exponentielle (formule d'Euler) :

$$z = re^{i\theta}$$

avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Module, argument et conjugué

- Module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument : $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (attention au quadrant)
- Conjugué : $\overline{z} = a - ib$

Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

ou, sous forme exponentielle :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Racines n-ièmes de l'unité

Les solutions de $z^n = 1$ sont :

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

1 Module et argument

Écrire sous la forme $a + ib$, puis sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.
3. Nombre de module 1 et d'argument $\pi/4$.
4. Nombre de module 2 et d'argument $-\pi/6$.
5. Nombre de module 7 et d'argument $-\pi/2$.

1. $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $3\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{8}}$
3. $1 + i = e^{i\frac{\pi}{4}}$
4. $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
5. $-7i = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$

2 Forme exponentielle → forme algébrique

Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants, donnés sous forme exponentielle :

1. $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{6}}$
2. $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$
3. $z_3 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$
4. $z_4 = 7e^{i\pi}$
5. $z_5 = 4e^{i0}$
6. $z_6 = 6e^{-i\frac{\pi}{2}}$

1. $5\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{5}{2}$
2. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
3. $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. -7
5. 4
6. $-6i$

3 Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$,
2. $z_2 = 1 + i$,
3. $z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$,
4. $z_4 = i$,
5. $z_5 = -2i$,
6. $z_6 = -3$,
7. $z_7 = 1$
8. $z_8 = 9i$
9. $z_9 = 0$
10. $z_{10} = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$
11. $z_{11} = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$
12. $z_{12} = \sin x + i\cos x$.

1. $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $1 + i = e^{i\frac{\pi}{4}}$
3. $-2\sqrt{3} + 2i = 4e^{i\frac{4\pi}{6}}$
4. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

5. $-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$
6. $-3 = 3e^{i\pi}$
7. $1 = e^{i0}$
8. $9i = 9e^{i\frac{\pi}{2}}$
9. $0 = 0e^{i0}$
10. On met sous forme exponentielle le numérateur et le dénominateur et on simplifie $-i\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

    donc $\frac{-i\sqrt{2}}{1+i} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
11. De même, $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5} = \frac{2^3}{\sqrt{2}^5}e^{i(\pi+5\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

12. $\sin x + i\cos x = e^{i(\frac{\pi}{2}-x)}$

4 Exponentielle

Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

1. en mettant le terme de droite sous forme exponentielle, on obtient $3\sqrt{3} - 3i = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}$ En cherchant $z = a+ib$, $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc $a = \ln(6)$ et $b = -\frac{\pi}{6}$ donc $z = \ln(6) - \frac{\pi}{6}i$

5 Trigonométrique

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

en utilisant la formule de Moivre, on obtient

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$$

En développant à l'aide du binôme de Newton :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(\cos\theta)^{5-k}(i\sin\theta)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} i^k(\cos\theta)^{5-k}(\sin\theta)^k$$

En séparant la partie réelle et imaginaire, on obtient :

$$\cos(5\theta) = \Re\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^5\right] = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(\cos\theta)^{5-k}(\sin\theta)^k\Re(i^k)$$

$$\sin(5\theta) = \Im\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^5\right] = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(\cos\theta)^{5-k}(\sin\theta)^k\Im(i^k)$$

En explicitant, on trouve :

$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

6 Pour préparer les séries de fourier

Calculer les intégrales suivantes, pour toute valeur de n et m dans les entiers relatifs :

1. $$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{imx}dx$$
2. $$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$$
3. $$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$$
4. $$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx$$

1. $$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{imx}dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n+m)x}dx$$

Si $n+m \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+m)x}dx = \left[\frac{e^{i(n+m)x}}{i(n+m)}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i(n+m)2\pi} - e^{i(n+m)0}}{i(n+m)} = \frac{1-1}{i(n+m)} = 0$$

Si $n+m=0$ (c'est-à-dire $m=-n$) :

$$\int_0^{2\pi} e^{i0}dx = \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$$

Donc : $\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{imx}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } m=-n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.
$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$$

En utilisant $\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}[\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)]$:

Si $n \neq \pm m$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)]dx = 0$$

Si $n = m \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}dx = \frac{1}{2}[x]_0^{2\pi} + 0 = \pi$$

Si $n=m=0$:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(0)dx = \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$$

Donc : $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n=m=0 \\ \pi & \text{si } n=m\neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3.
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$$

En utilisant $\sin(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}[\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)]$:

Si $n \neq \pm m$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)]dx = 0$$

Si $n = m \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}dx = \frac{1}{2}[x]_0^{2\pi} - 0 = \pi$$

Si $n=m=0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(0)dx = \int_0^{2\pi} 0dx = 0$$

Donc : $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4.
$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx$$

En utilisant $\cos(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}[\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x)]$:

Pour toute valeur de n et m :

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x)]dx = 0$$

Donc : $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$

7 Exponentielle

On pose

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad z_3 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$z_1, \qquad z_2, \qquad z_3, \qquad z_1z_2, \qquad \frac{z_1z_2}{z_2}$$

1. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ (déjà sous forme exponentielle)
2. $z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$
3. $z_3 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\pi+i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$
4. $z_1z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{2\pi}{3}} = 12e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{2\pi}{3}} = 12e^{i\frac{3\pi+8\pi}{12}} = 12e^{i\frac{11\pi}{12}}$
5. $\frac{z_1z_2}{z_2} = \frac{12e^{i\frac{11\pi}{12}}}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 4e^{i\frac{11\pi}{12}-i\frac{2\pi}{3}} = 4e^{i\frac{11\pi-8\pi}{12}} = 4e^{i\frac{3\pi}{12}} = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = z_1$

8 Racines carrées

Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Méthode 1 : Forme algébrique

On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = 1 + i$.

$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$

En identifiant partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

De la deuxième équation : $b = \frac{1}{2a}$ (avec $a \neq 0$)

En substituant dans la première : $a^2 - \frac{1}{4a^2} = 1$

En multipliant par $4a^2$: $4a^4 - 1 = 4a^2$, soit $4a^4 - 4a^2 - 1 = 0$

Posons $X = a^2$: $4X^2 - 4X - 1 = 0$

$\Delta = 16 + 16 = 32$, donc $X = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

Comme $X = a^2 \geq 0$, on prend $X = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Donc $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ et $b = \frac{1}{2a}$

Méthode 2 : Forme exponentielle

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les racines carrées sont : $\sqrt[2]{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}/2+ik\pi}$ avec $k \in \{0, 1\}$

Donc : $z_1 = 2^{1/4}e^{i\frac{\pi}{8}} = 2^{1/4}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$

et $z_2 = 2^{1/4}e^{i\frac{\pi}{8}+i\pi} = 2^{1/4}e^{i\frac{9\pi}{8}} = -2^{1/4}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$

Identification des valeurs

En comparant les deux méthodes, on a :

$$2^{1/4}\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

$$2^{1/4}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}} = \frac{1}{2^{3/4}\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

Comme $2^{1/4} = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/2}$, on a :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{2^{1/4}} = \frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

En fait, en utilisant les identités trigonométriques :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$