| estp | Contrôle de connaissances et de compétences | FO-002-VLA-XX-001 |
|---|---|---|
| 26/01/2026 | | Page 1/2 |

| ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1 | |
|---|---|
| **Nom de l'enseignant** | Maxime Berger & Antoine Perney |
| **Promotion** | BMC3 - S5 |
| **Matière** | Mathématiques |
| **Durée de l'examen** | 3h00 |
| **Consignes** | — Calculatrice **NON** autorisée<br>— Aucun document n'est autorisé |

# Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. **Calculs de développements limités.**

   (a) Donner le développement limité de $e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

   **Solution :**

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

   (b) Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

   **Solution :**

   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

   (c) En déduire le développement limité de $f(x) = e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(1 pt)*

   **Solution :**

On multiplie les DL en ne gardant que les termes d'ordre $\leq 3$ :

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. **Calcul de limite.** Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : *(1.5 pts)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

**Solution :**

On utilise le DL de $\sin x$ à l'ordre 5 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Donc :

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Et :

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120} + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} \boxed{\frac{1}{120}}$$

3. **Étude d'une fonction.** Soit $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

(a) À l'aide d'un développement limité, montrer que $g$ admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. *(0.75 pt)*

**Solution :**

On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc :

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

On peut prolonger $g$ par continuité en posant $g(0) = \frac{1}{2}$.

(b) En déduire la position de la courbe de $g$ par rapport à sa tangente horizontale en 0. *(0.75 pt)*

**Solution :**
Le DL de $g$ en 0 est :

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

La tangente en 0 est $y = \frac{1}{2}$ (horizontale car le terme en $x$ est nul).
On a $g(x) - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{24} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{24} < 0$ pour $x \neq 0$ petit.
Donc la courbe est **en dessous** de sa tangente au voisinage de 0.

# Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(2xy + 3)\,dx + (x^2 + 4y)\,dy = 0$$

   (a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$ est une différentielle totale. *(0.75 pt)*

**Solution :**
On pose $f(x, y) = 2xy + 3$ et $g(x, y) = x^2 + 4y$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, l'équation est exacte.

   (b) Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$. *(1 pt)*

**Solution :**
On cherche $F$ telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3$.
En intégrant par rapport à $x$ : $F(x, y) = x^2y + 3x + H(y)$
On vérifie avec $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + H'(y) = x^2 + 4y$.
Donc $H'(y) = 4y$, soit $H(y) = 2y^2 + C$.
**Conclusion :** $F(x, y) = x^2y + 3x + 2y^2$

   (c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. *(0.5 pt)*

**Solution :**
Les solutions sont données par $F(x, y) = K$ où $K$ est une constante :

$$\boxed{x^2y + 3x + 2y^2 = K}$$

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant un changement de variables linéaire. *(1.5 pts)*

**Solution :**
On pose $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$ et $F(X, Y) = f(x, y)$.
L'équation devient $(a + 2b)\frac{\partial F}{\partial X} + (c + 2d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$.
On choisit $a = 2$, $b = -1$ (donc $a + 2b = 0$) et $c = 1$, $d = 0$ (donc $c + 2d = 1$).

L'équation devient $\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$, dont les solutions sont $F(X,Y) = K(X)$.
En revenant aux variables initiales avec $X = 2x - y$ :

$$\boxed{f(x,y) = K(2x - y)}$$

où $K$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque.

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

En cherchant des solutions sous la forme $f(x,y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. *(1.25 pts)*

**Solution :**
En posant $f(x,y) = X(x)Y(y)$, on obtient :

$$X'Y - 3XY' = 2XY$$

En divisant par $XY$ :

$$\frac{X'}{X} - 3\frac{Y'}{Y} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{X' - 2X}{X} = 3\frac{Y'}{Y}$$

Le membre de gauche ne dépend que de $x$, le membre de droite que de $y$. Ils sont donc tous deux égaux à une constante $k$.
**Pour $X$ :** $\frac{X'-2X}{X} = k \Rightarrow X' = (k+2)X \Rightarrow X(x) = C_1 e^{(k+2)x}$
**Pour $Y$ :** $3\frac{Y'}{Y} = k \Rightarrow Y' = \frac{k}{3}Y \Rightarrow Y(y) = C_2 e^{ky/3}$
**Solutions :** $\boxed{f(x,y) = C\, e^{(k+2)x} e^{ky/3}}$ pour $k \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

## Exercice 3 : Modélisation – Refroidissement d'une pièce métallique (5 points)

Une pièce métallique de masse $m = 2$ kg et de capacité thermique massique $c = 500$ J/(kg·K) est initialement à la température $T_0 = 400$ K. Elle est plongée dans un bain thermostaté à la température constante $T_\infty = 300$ K.

Le transfert thermique entre la pièce et le bain suit la loi de Newton :

$$\frac{dQ}{dt} = -hS(T - T_\infty)$$

où $Q$ est l'énergie thermique de la pièce, $h = 25$ W/(m$^2$·K) est le coefficient d'échange et $S = 0{,}04$ m$^2$ est la surface d'échange.

On rappelle que $Q = mcT$ (à constante près).

1. Montrer que la température $T(t)$ de la pièce vérifie l'équation différentielle : *(1 pt)*

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc}(T - T_\infty)$$

**Solution :**
On a $Q = mcT + \text{cste}$, donc $\frac{dQ}{dt} = mc\frac{dT}{dt}$.
En substituant dans la loi de Newton :

$$mc\frac{dT}{dt} = -hS(T - T_\infty)$$

Soit :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc}(T - T_\infty)$$

2. On pose $\tau = \frac{mc}{hS}$ (constante de temps). Calculer la valeur numérique de $\tau$. *(0.5 pt)*

**Solution :**

$$\tau = \frac{mc}{hS} = \frac{2 \times 500}{25 \times 0{,}04} = \frac{1000}{1} = 1000 \text{ s}$$

3. Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale $T(0) = T_0$. *(1.5 pts)*

**Solution :**
On pose $\theta(t) = T(t) - T_\infty$. L'équation devient :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau}\theta$$

C'est une équation linéaire du premier ordre. La solution est :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau}$$

Avec $\theta_0 = T_0 - T_\infty = 400 - 300 = 100$ K.
Donc :

$$\boxed{T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau} = 300 + 100\,e^{-t/1000}}$$

4. Au bout de combien de temps la pièce atteint-elle la température de 320 K ? *(1 pt)*
*On donne* $\ln(5) \approx 1{,}6$.

**Solution :**
On résout $T(t) = 320$ :

$$300 + 100\,e^{-t/1000} = 320$$

$$100\,e^{-t/1000} = 20 \quad \Rightarrow \quad e^{-t/1000} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{t}{1000} = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5)$$

$$t = 1000\ln(5) \approx 1000 \times 1{,}6 = \boxed{1600 \text{ s} \approx 27 \text{ min}}$$

5. Vers quelle valeur tend $T(t)$ quand $t \to +\infty$ ? Interpréter physiquement. *(1 pt)*

**Solution :**

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(300 + 100\, e^{-t/1000}\right) = 300\ \mathsf{K}$$

**Interprétation :** La pièce métallique tend vers l'équilibre thermique avec le bain thermostaté. Elle atteint asymptotiquement la température $T_\infty = 300$ K du bain.