Analyse et Algèbre - TD5

Distributions

Exercice 1 : Le Dirac et la fonction de Heaviside

On rappelle que la distribution de Dirac δ_a est définie par $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(Rappel : une fonction test est une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.)

Les fonctions φ suivantes n'appartiennent pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'objectif de cet exercice est purement pédagogique.

1. Calculer $\langle \delta_0, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$.
2. Calculer $\langle \delta_2, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = e^{-x^2}$.
3. Calculer $\langle \delta_{-1} + 2\delta_3, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = \cos(\pi x)$.

   On note H la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. Calculer $\langle H, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = e^{-x}$.

   Indication : on rappelle l'action d'une distribution sur une fonction test : $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi(x)dx$.
5. Calculer $\langle H + 2\delta_{-\pi}, \varphi \rangle$ pour $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 2 : Dériver des fonctions discontinues

Montrer que la dérivée (au sens des distributions) de la fonction de Heaviside H est égale à δ_0.

Indication : Utiliser la définition $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$.

On peut aussi calculer la dérivée des distributions en utilisant nos connaissances sur les dérivées classiques : On dérive quand c'est possible et ajoute des diracs aux points de discontinuité. Voir dans le dernier cours pour un exemple.

Pour chaque fonction f suivante, calculer sa dérivée au sens des distributions en utilisant la formule des sauts :

$$f' = \{f'\} + \sum_k \sigma_k \delta_{a_k}$$

où $\{f'\}$ désigne la dérivée classique de f là où elle existe, et $\sigma_k = f(a_k^+) - f(a_k^-)$ est le saut en a_k.

1. $f(x) = H(x-1)$ (Heaviside translatée)
2. $f(x) = H(x) - H(x-2)$ (fonction porte sur $[0, 2]$)
3. $f(x) = xH(x)$ (rampe)
4. $f(x) = x^2 H(x)$

Exercice 3 : Équation différentielle avec second membre impulsionnel

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y' + 2y = \delta_0$$

où y est une distribution.

1. Quelle est l'interprétation physique de cette équation ?
2. On cherche y sous la forme $y = f \cdot H$ où f est une fonction continue et H la fonction de Heaviside. Calculer y' au sens des distributions.
3. En substituant dans l'équation, montrer que f doit vérifier $f' + 2f = 0$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer $f(0)$.
4. Résoudre l'équation différentielle $f' + 2f = 0$ et en déduire y.
5. Vérifier que cette solution est correcte en calculant $y' + 2y$.

Exercice 4 : Équation du second ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y'' + y = \delta_0$$

1. On cherche y sous la forme $y = f(t)H(t)$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Calculer y' et y'' au sens des distributions.
2. En substituant et en supposant $f(0) = 0$ (pour éviter le terme en δ_0'), montrer que f doit vérifier $f'' + f = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
3. En déduire la solution y.

Exercice 5 : Manipulations de fonctions test

On considère la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le support de la fonction ψ. La fonction ψ est-elle dans $\mathbb{D}$?
   On pourra étudier $\psi(-1+h)$ et $\psi(1-h)$, avec h un réel positif qui tend vers 0.
2. En déduire une fonction $\varphi \in \mathbb{D}$ dont le maximum est 3 et dont le support est $[-2, 2]$.

   On définit les distributions suivantes :

$$T_1 = \delta_0, \quad T_2 = \delta_{-1} + \delta_1, \quad T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx, \quad T_4(\varphi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\varphi(x)dx$$

3. Quelles valeurs associent-elles à la fonction ψ ?