estp CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-002**
26/01/2026		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 5	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. **Calculs de développements limités.**
   (a) Donner le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*
   (b) Donner le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*
   (c) En déduire le développement limité de $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(1 pt)*
2. **Calcul de limite.** Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : *(1.5 pts)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

3. **Étude d'une fonction.** Soit $g(x) = \dfrac{\tan x - x}{x^3}$ pour $x \neq 0$.
   (a) À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. *(0.75 pt)*
   (b) En déduire la position de la courbe de g par rapport à sa tangente horizontale en 0. *(0.75 pt)*

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(3x^2 + 2y)\,dx + (2x + 4y^3)\,dy = 0$$

   (a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est une différentielle totale. *(0.75 pt)*

   (b) Trouver une fonction $F(x,y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$. *(1 pt)*

   (c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. *(0.5 pt)*

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 6x$$

   en utilisant un changement de variables linéaire. *(1.5 pts)*

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = -f$$

   En cherchant des solutions sous la forme $f(x,y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. *(1.25 pts)*

Exercice 3 : Modélisation – Circuit RC (5 points)

Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F est initialement chargé à la tension $U_0 = 12$ V. À l'instant $t = 0$, on le décharge à travers une résistance $R = 100$ kΩ.

La tension $U(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$RC\frac{dU}{dt} + U = 0$$

1. Calculer la valeur numérique de la constante de temps $\tau = RC$. *(0.5 pt)*
2. Réécrire l'équation différentielle sous la forme $\dfrac{dU}{dt} = -\dfrac{U}{\tau}$. *(0.5 pt)*
3. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $U(0) = U_0$. *(1.5 pts)*
4. L'énergie stockée dans le condensateur est $E = \frac{1}{2}CU^2$. Exprimer $E(t)$ en fonction du temps. *(1 pt)*
5. Au bout de combien de temps l'énergie a-t-elle diminué de moitié ? *(1 pt)*
   On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.
6. Vers quelle valeur tend $U(t)$ quand $t \to +\infty$? Interpréter physiquement. *(0.5 pt)*

Exercice 4 : Modélisation – Pharmacocinétique (5 points)

On étudie l'évolution de la concentration $C(t)$ d'un médicament dans le sang après une injection intraveineuse.

Partie A – Modèle à élimination simple

On suppose que le médicament est éliminé à un taux proportionnel à sa concentration :

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

où $k = 0{,}2$ h^{-1} est la constante d'élimination et $C_0 = 100$ mg/L la concentration initiale.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $C(0) = C_0$. *(1 pt)*
2. Calculer la demi-vie $T_{1/2}$ du médicament (temps pour que $C(T_{1/2}) = \frac{C_0}{2}$). *(0.5 pt)*
   On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.

Partie B – Modèle avec perfusion continue

On administre maintenant le médicament par perfusion continue à un débit constant D (en mg/(L·h)). L'équation devient :

$$\frac{dC}{dt} = D - kC$$

3. Déterminer la concentration d'équilibre C_{eq} (solution constante de l'équation). *(0.5 pt)*
4. On pose $\theta(t) = C(t) - C_{\text{eq}}$. Montrer que θ vérifie l'équation $\dfrac{d\theta}{dt} = -k\theta$. *(0.5 pt)*
5. Résoudre et en déduire $C(t)$ avec $C(0) = 0$ (perfusion démarrant sans médicament dans le sang). *(1.5 pts)*
6. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} C(t)$. Interpréter médicalement ce résultat. *(0.5 pt)*
7. Si la concentration thérapeutique souhaitée est $C_{\text{th}} = 50$ mg/L, quel débit de perfusion D doit-on utiliser ? *(0.5 pt)*