

Analyse et Algèbre - TD2

Espaces L^p

Exercice 1 : Application directe

On définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}, \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{3ix} \end{cases}, \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{ix} e^{-x} \end{cases}$$

Pour chacun des espaces L^p suivants, déterminer si f_1, f_2, f_3 , ou f_4 appartiennent à cet espace. Si c'est le cas, donner sa norme L^p .

$$L^1(\mathbb{R}_+^*), \quad L^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad L^1(]0, 1[), \quad L^2(]0, 1[), \quad L^1(]1, +\infty[), \quad L^2(]1, +\infty[)$$

Exercice 2 : Convergences

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$$

où $\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, \frac{1}{n}]$:

$$\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

1. Représenter les graphes des fonctions f_1, f_2, f_3 .
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0, 1]$.
3. Calculer $\|f_n\|_p$ pour tout $p > 1$ et $p = \infty$. En déduire que (f_n) converge dans $L^1(]0, 1[)$ mais pas dans $L^2(]0, 1[)$, ni dans $L^\infty(]0, 1[)$.

Exercice 3 : Inégalité de Hölder

Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. **L'inégalité de Hölder** affirme que pour toutes fonctions $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

1. Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors $\int_{\Omega} |fg| \leq \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |g|^2}$ et $fg \in L^1(\Omega)$.
2. Les espaces L^p sont fondamentaux en ingénierie pour caractériser différents aspects d'un signal ou d'une fonction physique. Considérons un signal électrique $I(t)$ représentant l'intensité du courant en fonction du temps $t \in [0, T]$.

- La norme L^1 : $\|I\|_1 = \int_0^T |I(t)| dt$ représente la **charge totale** transportée par le courant.
- La norme L^2 : $\|I\|_2 = \left(\int_0^T |I(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ représente l'**énergie** du signal.
- La norme L^∞ : $\|I\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |I(t)|$ représente l'**amplitude maximale** du signal (contrainte de sécurité).

Soit $I(t) = A \sin(\omega t)$ pour $t \in [0, T]$ avec $A > 0$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Calculer $\|I\|_1$, $\|I\|_2$ et $\|I\|_\infty$. Que représentent ces valeurs ?

Exercice 4 : L^2 et son produit scalaire

On rappelle que $L^2([a, b])$ est muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

1. Montrer que ce produit scalaire vérifie bien les axiomes d'un produit scalaire :
 - Symétrie : $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
 - Linéarité : $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$
 - Positivité : $\langle f, f \rangle \geq 0$ et $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p.
2. A l'aide de l'exercice précédent, retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.
3. Soient f et g deux fonctions orthogonales, montrer que (théorème de Pythagore) :

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$. Dans les espaces à valeurs complexes, on rappelle que le produit scalaire doit être sesquelinéaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

4. Montrer que $f_n \in L^2(]0, 1[)$ et calculer $\|f_n\|_2$.
5. Montrer que (f_n) est une famille orthogonale de $L^2(]0, 1[)$.
6. **Introduction aux séries de Fourier.** Pour une fonction $f \in L^2(]0, 1[)$, on définit les **coefficients de Fourier** de f par :

$$c_n = \langle f, f_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi nx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

La **série de Fourier** de f est alors définie comme la somme (formelle) :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$$

Soit $f(x) = \sin(12\pi x)$. Montrer que $f \in L^2(]0, 1[)$ et calculer les coefficients de Fourier $c_n = \langle f, f_n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

7. Soit f la fonction 1-périodique définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = x$. Montrer que $f \in L^2(]0, 1[)$ et calculer les coefficients de Fourier $c_n = \langle f, f_n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
8. Écrire la série de Fourier de $f(x) = x$ sous la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$. Que peut-on dire de cette série ? On pourra exprimer le résultat en termes de sinus.

Exercice 5 : Vers le produit de convolution

Pour deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} , on construit la fonction h suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$$

Cette opération réalise une sorte de moyenne de la fonction f par la fonction g .

1. Si f est intégrable et si g est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$, montrer que h est une fonction bornée.
2. Si f est intégrable et si g est la fonction $g = 1$ constante, que vaut h ?
3. Montrer que si f et g sont toutes les deux intégrables, alors h l'est aussi et $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. On pourra séparer les intégrales et effectuer un changement de variable.

Nous verrons tout l'intérêt de cette fonction dans la suite du cours.