Révisions – Mathématiques S5

BMC3 – Semestre 5

Développements limités

Exercice 1 – Produit et quotient de DL

1. Calculer le DL de $\dfrac{\sin x}{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

> **Solution :**
> On multiplie les DL en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 3 :
> $$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+x} &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - x + x^2 - x^3\right) + o(x^3) \\ &= x - x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

2. Calculer le DL de $\dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 3.

> **Solution :**
> On a $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.
> $$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - x + x^2 - x^3\right) + o(x^3) \\ &= 1 - x + x^2 + x - x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

Exercice 2 – DL par composition

On cherche le DL de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

1. En posant $u = \cos x - 1$, montrer que $u = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$.

Solution :

On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc :

$u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

2. En utilisant $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, en déduire le DL de $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4.

Solution :

On a $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) = \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

Exercice 3 – Calcul de limites par DL

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

Solution :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc :

$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{1}{3}}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

Solution :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$\sin x - x\cos x = x - \dfrac{x^3}{6} - x + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3) = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \dfrac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\dfrac{1}{3}}$

Exercice 4 – Prolongement et position par rapport à la tangente

Soit $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer $f(0)$.

Solution :
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $e^x - 1 - x = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

$f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{6} + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$

On peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

2. Donner le DL de f à l'ordre 2 en 0, puis l'équation de la tangente à la courbe en 0.

Solution :
$e^x - 1 - x = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

$f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)$

La tangente en 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{6}$

3. En déduire la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Solution :
$f(x) - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{6}\right) = \dfrac{x^2}{24} + o(x^2) \sim \dfrac{x^2}{24} > 0$ pour $x \neq 0$ petit.

Donc la courbe est **au-dessus** de sa tangente au voisinage de 0.

Équations différentielles exactes

Exercice 5 – Équation exacte

Résoudre l'équation différentielle $(2xy + 1)\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$.

1. Vérifier que l'équation est exacte.

> **Solution :**
> On pose $f(x, y) = 2xy + 1$ et $g(x, y) = x^2 + 2y$.
> $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x$
> Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, l'équation est exacte.

2. Trouver $F(x, y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$.

> **Solution :**
> On cherche F telle que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 1$.
> En intégrant par rapport à x : $F(x, y) = x^2y + x + H(y)$
> On vérifie avec $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 + H'(y) = x^2 + 2y$.
> Donc $H'(y) = 2y$, soit $H(y) = y^2$.
> **Conclusion :** $F(x, y) = x^2y + x + y^2$

3. En déduire la solution générale.

> **Solution :**
> Les solutions sont données par $F(x, y) = K$:
> $$\boxed{x^2y + x + y^2 = K}$$
> où K est une constante.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 6 – EDP

Résoudre l'équation $2\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x$ par changement de variables.

Solution :

Avec $X = x - 2y$ et $Y = x$, on a $x = Y$ et $y = \frac{Y-X}{2}$.

On pose $F(X,Y) = f(x,y)$. Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot (-2) + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot 0 = -2\frac{\partial F}{\partial X}$$

L'équation devient : $2\left(\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y}\right) - 2\frac{\partial F}{\partial X} = 4Y$

$2\frac{\partial F}{\partial Y} = 4Y$, soit $\frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y$

En intégrant par rapport à Y : $F(X,Y) = Y^2 + K(X)$

En revenant aux variables initiales : $\boxed{f(x,y) = 4xy - 4y^2 + K(x-2y)}$

où K est une fonction $\mathcal{C}^1$ quelconque.

Résoudre par séparation de variables : $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

Solution :

On cherche $f(x,y) = X(x)Y(y)$.

$X'Y - 3XY' = 2XY$

En divisant par XY : $\frac{X'}{X} - 3\frac{Y'}{Y} = 2$

Donc $\frac{X'}{X} = 2 + 3\frac{Y'}{Y}$. Le membre de gauche ne dépend que de x, le membre de droite que de y. Ils sont égaux à une constante k.

Pour X **:** $\frac{X'}{X} = k \Rightarrow X(x) = C_1 e^{kx}$

Pour Y **:** $3\frac{Y'}{Y} = k - 2 \Rightarrow Y' = \frac{k-2}{3}Y \Rightarrow Y(y) = C_2 e^{(k-2)y/3}$

Solutions : $\boxed{f(x,y) = C\, e^{kx} e^{(k-2)y/3}}$ pour $k \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Modélisation

Exercice 7 – Refroidissement de Newton

Un objet de température initiale $T_0 = 80$ řC est placé dans une pièce à température ambiante $T_a = 20$ řC. La loi de Newton stipule que :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

avec $k = 0{,}1$ min^{-1}.

1. En posant $\theta(t) = T(t) - T_a$, montrer que $\theta' = -k\theta$ et résoudre.

Solution :
$\theta' = T' = -k(T - T_a) = -k\theta$
Donc $\theta(t) = \theta_0 e^{-kt}$ avec $\theta_0 = T_0 - T_a = 80 - 20 = 60$ řC.
$\theta(t) = 60e^{-0{,}1t}$, donc $T(t) = T_a + \theta(t) = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ řC

2. Calculer la température après 10 minutes. *(On donne $e^{-1} \approx 0{,}37$.)*

Solution :
$T(10) = 20 + 60e^{-1} \approx 20 + 60 \times 0{,}37 = 20 + 22{,}2 = \boxed{42{,}2 \text{ řC}}$

3. Au bout de combien de temps la température sera-t-elle de 30 řC ? *(On donne $\ln 6 \approx 1{,}8$.)*

Solution :
On résout $T(t) = 30$:
$20 + 60e^{-0{,}1t} = 30 \Rightarrow 60e^{-0{,}1t} = 10 \Rightarrow e^{-0{,}1t} = \dfrac{1}{6}$
$-0{,}1t = -\ln 6 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 6}{0{,}1} = \dfrac{1{,}8}{0{,}1} = \boxed{18 \text{ min}}$

Exercice 8 – Croissance bactérienne avec limitation

Une population de bactéries $N(t)$ croît dans un milieu où les nutriments sont renouvelés à débit constant D, mais sont consommés proportionnellement à la population :

$$\frac{dN}{dt} = D - kN$$

avec $k = 0{,}5$ h^{-1}, $D = 1000$ bactéries/h, et $N(0) = 100$ bactéries.

1. Déterminer la population d'équilibre N_{eq}.

Solution :
À l'équilibre, $\dfrac{dN}{dt} = 0$, donc $D - kN_{eq} = 0$.
$N_{eq} = \dfrac{D}{k} = \dfrac{1000}{0{,}5} = 2000$ bactéries

2. Résoudre l'équation et donner $N(t)$.

Solution :
On pose $\theta = N - N_{eq}$. Alors $\theta' = N' = D - kN = D - k(N_{eq} + \theta) = -k\theta$.
Donc $\theta(t) = \theta_0 e^{-kt}$ avec $\theta_0 = N(0) - N_{eq} = 100 - 2000 = -1900$.
$N(t) = N_{eq} + \theta(t) = 2000 - 1900e^{-0{,}5t}$
$\boxed{N(t) = 2000 - 1900e^{-0{,}5t}}$

3. Au bout de combien de temps la population atteint-elle 95% de sa valeur d'équilibre ?
   (On donne $\ln 20 \approx 3$*.)*

Solution :
On cherche t tel que $N(t) = 0{,}95 \times 2000 = 1900$.
$2000 - 1900e^{-0{,}5t} = 1900 \Rightarrow 1900e^{-0{,}5t} = 100 \Rightarrow e^{-0{,}5t} = \dfrac{1}{19} \approx \dfrac{1}{20}$
$-0{,}5t = -\ln 20 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 20}{0{,}5} = \dfrac{3}{0{,}5} = \boxed{6\text{ h}}$