Composition de MATHÉMATIQUES (3h)

■ Exercice 1 : Limites (6 points)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-(1+x)}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\cos(x)-1}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)\sin(x)}{x^2}\right)$$

Solution

Au voisinage de 0 :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \qquad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad \sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

Ainsi

$$\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+o(x) \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-(1+x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{\cos(x)-1}=\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=\frac{-2}{1+o(x)} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\cos(x)-1}\right)=-2$$

$$\frac{(e^x-1)\sin(x)}{x^2}=\frac{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\times\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^2}=\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^2}=\frac{x}{2}+o(x) \text{ donc } \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)\sin(x)}{x^2}\right)=0$$

■ Exercice 2 : Inversibilité et expression de l'inverse via un polynôme annulateur (8 points)

Soit la matrice $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2.
2. Vérifier que $P^2-3P+2I_2=0_2$, où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 et 0_2 la matrice nulle d'ordre 2.
3. À partir de cette relation, déduisez que la matrice P est inversible et exprimez son inverse P^{-1} en fonction de P et I_2.
4. Utiliser cette expression pour calculer P^{-1}.

■ Exercice 3 : Déterminant et condition d'inversibilité (3 points)

Sans effectuer de calculs explicites, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls.
Préciser la propriété utilisée.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

■ Exercice 4 : Déterminant et condition d'inversibilité (3 points)

Pour quelle(s) valeur(s) du réel m la matrice suivante est-elle inversible ?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

■ Exercice 5 : Étude de la Conchoïde de Nicomède (20 points)

Partie 1 : Forme Paramétrique

La conchoïde de Nicomède est définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{\cos(t)} + \cos(t) \\ y(t) = 2\tan(t) + \sin(t) \end{cases}$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de t ;.

   (b) Étudier les symétries de la courbe.

2. (a) Calculer les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$.

   (b) En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent $\vec{V}(t)$ à la courbe à un point régulier M_t de coordonnées $(x(t), y(t))$.

3. (a) Déterminer les points où la tangente est horizontale ou verticale.

   (b) Donner les coordonnées cartésiennes de ces points.

4. Effectuer un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de $t = 0$ à l'ordre 3.

5. (a) Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque t approche $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

   (b) Que pouvez-vous en déduire ?

Partie 2 : Forme Polaire

La conchoïde de Nicomède est définie en coordonnées polaires par l'équation :

$$r(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} + 1$$

1. Déterminer le domaine de définition de θ et étudier les symétries de la courbe.

2. Convertir l'équation polaire en coordonnées cartésiennes $x(\theta)$ et $y(\theta)$.

3. (a) Étudier les limites de $x(\theta)$ et $y(\theta)$ lorsque θ approche $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

   (b) Donner l'équation des asymptotes.

4. Calculer la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$.

5. Déterminer l'angle α de la tangente à la courbe en un point de coordonnées (r, θ).

6. (a) Effectuer un développement limité de $r(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ à l'ordre 2.

   (b) En déduire la nature du point correspondant à $\theta = 0$.

Solution

Partie 1 : Forme Paramétrique

1. (a) Domaine de définition de x et y :
   $\cos(t) \neq 0$ si et seulement si $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Donc, le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) L'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.
   On a :

$$\forall t \in D_f, \quad x(-t) = \frac{2}{\cos(-t)} + \cos(-t) = \frac{2}{\cos t} + \cos t = x(t)$$

   donc x est paire.
   De même :

$$\forall t \in D_f, \quad y(-t) = 2\tan(-t) + \sin(-t) = -2\tan t - \sin t = -y(t)$$

   donc y est impaire.
   Par conséquent, la courbe est symétrique par rapport à laxe des abscisses.

2. (a) Les fonctions x et y sont dérivables sur l'ensemble de définition comme somme de fonctions dérivables. :

$$x'(t) = \frac{2\sin t}{\cos^2 t} - \sin t = \sin t \left(\frac{2}{\cos^2 t} - 1\right) \qquad y'(t) = \frac{2}{\cos^2 t} + \cos t$$

   (b) Un vecteur tangent à la courbe au point régulier $M_t = (x(t), y(t))$ est donné par :

$$\vec{V}(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\sin t \left(\frac{2}{\cos^2 t} - 1\right), \frac{2}{\cos^2 t} + \cos t\right)$$

3. (a) La tangente est horizontale lorsque $y'(t) = 0$:

$$y'(t) = \frac{2}{\cos^2 t} + \cos t = 0 \iff \cos t = -2^{\frac{1}{3}}$$

   Or $-2^{\frac{1}{3}} < -1$. Il n'y a pas de tangente horizontale.
   La tangente est verticale lorsque $x'(t) = 0$, soit :

$$\sin t \left(\frac{2}{\cos^2 t} - 1\right) = 0$$

   Deux cas sont possibles :
   — $\sin t = 0$ si et seulement si $t = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   — $\frac{2}{\cos^2 t} - 1 = 0$ si et seulement si $\cos^2 t = 2$, ce qui est impossible.
   Les tangentes sont donc verticales pour $t = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) Pour $t = 0$:

$$x(0) = \frac{2}{1} + 1 = 3, \quad y(0) = 0 + 0 = 0$$

   Pour $t = \pi$:

$$x(\pi) = \frac{2}{-1} - 1 = -3, \quad y(\pi) = 2 \cdot 0 + \sin(\pi) = 0$$

   Les coordonnées des points où la tangente est verticale sont $(3, 0)$ et $(-3, 0)$

4.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4), \quad \frac{1}{\cos t} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{5t^4}{24} + o(t^4)$$

$$x(t) = 2\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) + o(t^2) = 3 + t^2 + o(t^2)$$

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$y(t) = 2t + \frac{2t^3}{3} + t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 3t + \frac{t^3}{2} + o(t^3)$$

   On obtient :

$$x(t) = 3 + t^2 + o(t^2), \quad y(t) = 3t + \frac{t^3}{2} + o(t^3)$$

5. (a) Étude des limites quand $t \to \pm\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \cos t = 0^+, \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos t} = +\infty, \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \tan t = +\infty$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} x(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2}{\cos t} + \cos t\right) = +\infty$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} y(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (2\tan t + \sin t) = +\infty$$

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} \cos t = 0^+, \quad \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos t} = +\infty, \quad \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan t = -\infty$$

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} x(t) = \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{2}{\cos t} + \cos t\right) = +\infty$$

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} y(t) = \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} (2\tan t + \sin t) = -\infty$$

(b) Les deux coordonnées tendent vers linfini donc la courbe admet des branches infinies.

Partie 2 : Forme Polaire

1. Domaine : $\cos\theta \neq 0$ D'où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
   Symétrie : $\cos(-\theta) = \cos\theta$ donc $r(-\theta) = r(\theta)$: la courbe est symétrique par rapport à laxe des abscisses.
2. On utilise :

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta = \left(\frac{2}{\cos\theta} + 1\right)\cos\theta = 2 + \cos\theta$$

$$y(\theta) = r(\theta)\sin\theta = \left(\frac{2}{\cos\theta} + 1\right)\sin\theta$$

3. (a)

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \cos\theta = 0^+, \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} r(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2}{\cos\theta} + 1\right) = +\infty$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} x(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} (r(\theta)\cos\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\left(\frac{2}{\cos\theta} + 1\right)\cos\theta\right) = 2$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} y(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} (r(\theta)\sin\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\left(\frac{2}{\cos\theta} + 1\right)\sin\theta\right) = +\infty$$

   (b) Asymptote verticale d'équation $x = 2$.
4.

$$r'(\theta) = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

5. En coordonnées polaires, langle α entre la tangente et le rayon vecteur est donné par :

$$\tan\alpha = \frac{r'(\theta)}{r(\theta)}$$

6. (a) Développement limité en $\theta = 0$:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) \quad \text{(développement limité en 0 à l'ordre 2)}$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2) \text{ si } u \to 0 \text{ avec } u = \frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)} = 1 + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

$$r(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} + 1 = 2\left(1 + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right) + 1 = 2 + \theta^2 + o(\theta^2) + 1 = 3 + \theta^2 + o(\theta^2)$$

(b) Le point correspondant à $\theta = 0$ est à distance $r = 3$ sur laxe des abscisses. La courbe présente ici un point régulier non singulier avec une tangente dangle nul.