

	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
21/05/2025		Page 1/3

ANNÉE SCOLAIRE 2024-2025 – Semestre 6	
Nom de l'enseignant	Maxime BERGER, Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	<ul style="list-style-type: none"> — Calculatrice NON autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Convergence de séries (4 points)

Étudier la nature (convergence ou divergence) des séries suivantes. Justifier soigneusement chaque réponse.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (1 pt)
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (1 pt)
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$ (1 pt)
4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ (1.5 pts)

Exercice 2 : Série télescopique et comparaison (4 points)

1. Décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples. (0.5 pt)
2. En déduire la valeur de la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$. (1 pt)
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. (0.5 pt)
4. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge. (2 pts)
Indication : comparer avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

Exercice 3 : Algèbre linéaire (4 points)

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . (1.5 pts)
2. Ecrire E avec le mot clé "Vect", donner une base et la dimension. (1 pt)
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$.
Montrer que f est une application linéaire. (1 pt)
4. Écrire la matrice A de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . (1 pt)

Exercice 4 : Noyau et image (4 points)

Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$g(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$$

1. Écrire la matrice B de g dans les bases canoniques. (0.5 pt)
2. Déterminer le noyau $\ker(g)$. Donner une base et la dimension. (2 pts)
3. Déterminer l'image $\text{Im}(g)$. Donner une base et la dimension. (1.5 pts)

Exercice 5 : Calcul différentiel et intégrales curvilignes (4 points)

1. Soit $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$. Calculer la différentielle df . (1 pt)
2. Soit $g(x, y, z) = x^2 + y^2z - z^3$. Calculer le gradient ∇g . (0.5 pt)
3. Soit $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xyz, z^2)$. Calculer la matrice jacobienne de \vec{F} et la divergence $\text{div}(\vec{F})$. (1.5 pts)
4. Soit $\vec{G}(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$.
Montrer que \vec{G} dérive d'un potentiel scalaire et déterminer ce potentiel. (1 pt)
5. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C^+} xy \, dx + (x + y) \, dy$
où C est le segment de droite allant de $(0, 0)$ à $(1, 2)$, parcouru dans ce sens. (1 pt)