

# Révisions – Mathématiques S5

BMC3 – Semestre 5

## Développements limités

### Exercice 1 – Produit et quotient de DL

1. Calculer le DL de  $\frac{\sin x}{1+x}$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.

**Solution :**

On multiplie les DL en ne gardant que les termes d'ordre  $\leq 3$  :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+x} &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) (1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3) \\ &= x - x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

2. Calculer le DL de  $\frac{e^x}{1+x}$  à l'ordre 3.

**Solution :**

On a  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  et  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$ .

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) (1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3) \\ &= 1 - x + x^2 + x - x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

### Exercice 2 – DL par composition

On cherche le DL de  $\ln(\cos x)$  à l'ordre 4 au voisinage de 0.

1. En posant  $u = \cos x - 1$ , montrer que  $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ .

**Solution :**

On a  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ , donc :

$$u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

2. En utilisant  $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ , en déduire le DL de  $\ln(\cos x)$  à l'ordre 4.

**Solution :**

On a  $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ .

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

### Exercice 3 – Calcul de limites par DL

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

**Solution :**

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ , donc :

$$\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{1}{3}}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

**Solution :**

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  et  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$x \cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x - x \cos x = x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{1}{3}}$$

#### Exercice 4 – Prolongement et position par rapport à la tangente

Soit  $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$  pour  $x \neq 0$ .

1. Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer  $f(0)$ .

**Solution :**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \text{ donc } e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

On peut prolonger  $f$  par continuité en posant  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

2. Donner le DL de  $f$  à l'ordre 2 en 0, puis l'équation de la tangente à la courbe en 0.

**Solution :**

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

La tangente en 0 a pour équation :  $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{6}$

3. En déduire la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

**Solution :**

$$f(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\right) = \frac{x^2}{24} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{24} > 0 \text{ pour } x \neq 0 \text{ petit.}$$

Donc la courbe est **au-dessus** de sa tangente au voisinage de 0.

# Équations différentielles exactes

## Exercice 5 – Équation exacte

Résoudre l'équation différentielle  $(2xy + 1) dx + (x^2 + 2y) dy = 0$ .

1. Vérifier que l'équation est exacte.

**Solution :**

On pose  $f(x, y) = 2xy + 1$  et  $g(x, y) = x^2 + 2y$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x} = 2x$$

Comme  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ , l'équation est exacte.

2. Trouver  $F(x, y)$  telle que  $dF = f dx + g dy$ .

**Solution :**

On cherche  $F$  telle que  $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 1$ .

En intégrant par rapport à  $x$  :  $F(x, y) = x^2y + x + H(y)$

On vérifie avec  $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + H'(y) = x^2 + 2y$ .

Donc  $H'(y) = 2y$ , soit  $H(y) = y^2$ .

**Conclusion :**  $F(x, y) = x^2y + x + y^2$

3. En déduire la solution générale.

**Solution :**

Les solutions sont données par  $F(x, y) = K$  :

$$x^2y + x + y^2 = K$$

où  $K$  est une constante.

# Équations aux dérivées partielles

## Exercice 6 – EDP

Résoudre l'équation  $2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 4x$  par changement de variables.

**Solution :**

Avec  $X = x - 2y$  et  $Y = x$ , on a  $x = Y$  et  $y = \frac{Y-X}{2}$ .

On pose  $F(X, Y) = f(x, y)$ . Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot (-2) + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot 0 = -2 \frac{\partial F}{\partial X}$$

$$\text{L'équation devient : } 2 \left( \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} \right) - 2 \frac{\partial F}{\partial X} = 4Y$$

$$2 \frac{\partial F}{\partial Y} = 4Y, \text{ soit } \frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y$$

En intégrant par rapport à  $Y$  :  $F(X, Y) = Y^2 + K(X)$

En revenant aux variables initiales :  $f(x, y) = x^2 + K(x - 2y)$

où  $K$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  quelconque.

$$\text{Résoudre par séparation de variables : } \frac{\partial f}{\partial x} - 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

**Solution :**

On cherche  $f(x, y) = X(x)Y(y)$ .

$$X'Y - 3XY' = 2XY$$

$$\text{En divisant par } XY : \frac{X'}{X} - 3 \frac{Y'}{Y} = 2$$

Donc  $\frac{X'}{X} = 2 + 3 \frac{Y'}{Y}$ . Le membre de gauche ne dépend que de  $x$ , le membre de droite que de  $y$ . Ils sont égaux à une constante  $k$ .

$$\text{Pour } X : \frac{X'}{X} = k \Rightarrow X(x) = C_1 e^{kx}$$

$$\text{Pour } Y : 3 \frac{Y'}{Y} = k - 2 \Rightarrow Y' = \frac{k-2}{3} Y \Rightarrow Y(y) = C_2 e^{(k-2)y/3}$$

$$\text{Solutions : } f(x, y) = C e^{kx} e^{(k-2)y/3} \text{ pour } k \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}.$$

## Modélisation

### Exercice 7 – Refroidissement de Newton

Un objet de température initiale  $T_0 = 80$  °C est placé dans une pièce à température ambiante  $T_a = 20$  °C. La loi de Newton stipule que :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

avec  $k = 0,1 \text{ min}^{-1}$ .

1. En posant  $\theta(t) = T(t) - T_a$ , montrer que  $\theta' = -k\theta$  et résoudre.

**Solution :**

$$\theta' = T' = -k(T - T_a) = -k\theta$$

Donc  $\theta(t) = \theta_0 e^{-kt}$  avec  $\theta_0 = T_0 - T_a = 80 - 20 = 60$  °C.

$$\theta(t) = 60e^{-0,1t}, \text{ donc } T(t) = T_a + \theta(t) = 20 + 60e^{-0,1t} \text{ °C}$$

2. Calculer la température après 10 minutes. (On donne  $e^{-1} \approx 0,37$ .)

**Solution :**

$$T(10) = 20 + 60e^{-1} \approx 20 + 60 \times 0,37 = 20 + 22,2 = \boxed{42,2 \text{ °C}}$$

3. Au bout de combien de temps la température sera-t-elle de 30 °C ? (On donne  $\ln 6 \approx 1,8$ .)

**Solution :**

On résout  $T(t) = 30$  :

$$20 + 60e^{-0,1t} = 30 \Rightarrow 60e^{-0,1t} = 10 \Rightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{6}$$

$$-0,1t = -\ln 6 \Rightarrow t = \frac{\ln 6}{0,1} = \frac{1,8}{0,1} = \boxed{18 \text{ min}}$$

## Exercice 8 – Croissance bactérienne avec limitation

Une population de bactéries  $N(t)$  croît dans un milieu où les nutriments sont renouvelés à débit constant  $D$ , mais sont consommés proportionnellement à la population :

$$\frac{dN}{dt} = D - kN$$

avec  $k = 0,5 \text{ h}^{-1}$ ,  $D = 1000$  bactéries/h, et  $N(0) = 100$  bactéries.

1. Déterminer la population d'équilibre  $N_{eq}$ .

**Solution :**

À l'équilibre,  $\frac{dN}{dt} = 0$ , donc  $D - kN_{eq} = 0$ .

$$N_{eq} = \frac{D}{k} = \frac{1000}{0,5} = 2000 \text{ bactéries}$$

2. Résoudre l'équation et donner  $N(t)$ .

**Solution :**

On pose  $\theta = N - N_{eq}$ . Alors  $\theta' = N' = D - kN = D - k(N_{eq} + \theta) = -k\theta$ .

Donc  $\theta(t) = \theta_0 e^{-kt}$  avec  $\theta_0 = N(0) - N_{eq} = 100 - 2000 = -1900$ .

$$N(t) = N_{eq} + \theta(t) = 2000 - 1900e^{-0,5t}$$

$$\boxed{N(t) = 2000 - 1900e^{-0,5t}}$$

3. Au bout de combien de temps la population atteint-elle 95% de sa valeur d'équilibre ?  
(On donne  $\ln 20 \approx 3$ .)

**Solution :**

On cherche  $t$  tel que  $N(t) = 0,95 \times 2000 = 1900$ .

$$2000 - 1900e^{-0,5t} = 1900 \Rightarrow 1900e^{-0,5t} = 100 \Rightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{19} \approx \frac{1}{20}$$

$$-0,5t = -\ln 20 \Rightarrow t = \frac{\ln 20}{0,5} = \frac{3}{0,5} = \boxed{6 \text{ h}}$$