BACHELOR Semestre 1

Rémi Blanquet, Karine Serier, Maxime Berger

ESTP Dijon

Table des matières

Chapitre 1
Introduction

Ce polycopié regroupe l'ensemble des contenus mathématiques qui vous seront présentés lors de ce premier semestre dans l'enseignement supérieur.

Vous y trouverez des concepts que certains d'entre vous connaissent déjà comme les vecteurs, la fonction exponentielle, ou les polynômes. Les premiers chapitres de ce poly servent de révision, vous ne pourrez pas acquérir les compétences de cette formation si vous n'êtes pas à l'aise avec la **manipulation des fractions** ou des puissances.

Cependant, la manière de voir les choses sera différente du lycée. Le but est ici de renforcer un socle sur lequel vous bâtirez les compétences techniques des autres modules. Quelques exemples :

— Dans le cours de mécanique des sols, vous manipulerez des échelles logarithmiques, vous aurez pour cela besoin d'être familier avec les **fonctions exponentielle et logarithme**. Dans la partie Hydrogéologie, vous manipulerez des cartes pour visualiser les écoulements d'eau. Le calcul différentiel pour comprendre la théorie derrière ces lignes d'écoulement vous sera présenté au deuxième semestre avec les fonctions de plusieurs variables.

— Durant le cours de stabilité des ouvrages, vous linéariserez des équations complexes pour vous ramener à l'étude de **systèmes linéaires**. Vous calculerez des descentes de charges, être à l'aise avec les **barycentres** vous sera d'une grande utilité

— Les **vecteurs** seront l'objet central du cours de Mécanique générale, vecteur position, vecteur vitesse, champs de vitesse, forces de frottement.

D'autres parties de ce cours vous prépareront à la manipulation d'outils mathématiques plus poussés. Les **suites réelles** par exemple, pourront vous permettre dans un premier temps de modéliser certains phénomènes physiques (concentration des gaz à effet de serre au cours du temps par exemple) mais elles seront aussi une base pour l'étude des séries numériques en deuxième année, puis des séries de fonctions en troisième année. Un des buts ultimes de ces séries de fonctions sera de comprendre les séries de Fourier, objet central de la manipulation de signaux (calculer l'effet d'un séisme sur un immeuble, compresser des images en JPEG, réduire le bruit de fond sur les appels Teams, ...)

Pour certains chapitres, vous ne verrez pas leur utilité immédiate, ils vous présenteront en fait des concepts abstraits qui font le lien entre plusieurs autres chapitres. Creusez ces liens, ce sont eux qui vous permettront de comprendre les choses en profondeur. Les **nombres complexes** vous serviront plus tard, notamment pour comprendre ce que les nombres réels ne peuvent pas décrire. Ils font aussi le lien entre la trigonométrie, la géométrie des vecteurs, les polynômes.

Chapitre 2
Manipulation de fractions, puissances

2.1 Fractions

Simplifier les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible

$$A = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} + 2$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$$

$$C = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\right) \times \left(2 + \frac{5}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)$$

$$D = 2 - \frac{13}{5} + \left(2 + \frac{4}{3}\right)$$

$$E = \frac{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4}}{\dfrac{2}{5} \times \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}}$$

2.2 Puissances

Simplifier au maximum

$$A = \frac{2 \times 2^2 \times 2^4}{2^3 \times 2^5}$$

$$B = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^2 \times 7^2 \times 2}$$

$$C = \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^3 \times 3^2}$$

$$D = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$E = a^2 b^{-3} (ab)^5$$

Chapitre 3
Exponentielle et Logarithme népérien

Les fonctions **exponentielles** peuvent être utilisées dans de nombreuses applications, par exemple pour le calcul des intérêts en économie, la croissance d'une population, la dilatation thermique des matériaux de construction, etc.

Avant l'invention des calculatrices scientifiques, les **logarithmes** étaient utilisés sous forme de tables logarithmiques pour effectuer de nombreux calculs. Le mérite de l'invention des logarithmes revient à John Napier (d'où le qualificatif de **népérien**), bien que de nombreux scientifiques et mathématiciens aient contribué à la forme finale que nous utilisons aujourd'hui.

3.1 La fonction Exponentielle

3.1.1 Définition de la fonction exponentielle

Malgré son importance, cette fonction n'est pas facile à définir, nous admettons son existence pour le moment.

Théorème 3.1.1 ***Existence de la fonction exponentielle***

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

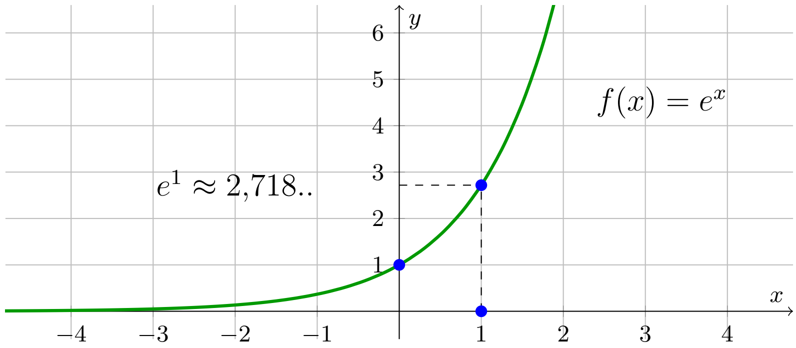
$$f(0) = 1 \quad \text{et, pour tout nombre réel } x \quad f'(x) = f(x)\,.$$

Cette fonction est appelée la fonction exponentielle et notée $\exp$.

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

On peut noter indifféremment $\exp(x)$ *ou* e^x

Le graphe de la fonction exponentielle :



Remarque

La fonction exponentielle :

— *est définie sur* $\mathbb{R}$*, continue, dérivable et strictement croissante.*

— *est strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *:* $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

— *vaut* 1 *au point* 0 *:* $\exp(0) = e^0 = 1$

— *tend vers* 0 *en moins l'infini :* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

— *tend vers l'infini en plus l'infini :* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

3.1.2 Propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle se comporte comme une fonction puissance :

Proposition 3.1.2

Pour tous (a, b) *deux nombres réels, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{a-b} = e^a / e^b$$
$$e^{-a} = 1/e^a \qquad (e^a)^n = e^{na}$$

Proposition 3.1.3 ***Croissances comparées***

La fonction exponentielle dicte son comportement lorsqu'elle est comparée à des fonctions polynomiales : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

3.1.3 QCM

1. Que vaut le produit $e^3 \times e^4$?

   a. e^{12} b. e^7 c. e^{34} d. e^{3^4}

2. La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = e^x$ est :

   a. $f'(x) = e^x$ c. $f'(x) = xe^x$
   b. $f'(x) = x$ d. $f'(x) = \ln(x)$

3. L'équation $e^x = 3$

   a. n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ c. a une unique solution : $x = \ln(3)$
   b. a une unique solution : $x = 3$ d. a une unique solution : $x = e^3$

4. Que vaut $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 e^x$?

   a. 0 c. $-\infty$
   b. $+\infty$ d. 4

5. Que vaut $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - e^x}{x}$?

   a. 0 c. $-\infty$
   b. $+\infty$ d. 1

3.2 La fonction Logarithme népérien

3.2.1 Définition de la fonction logarithme népérien

Théorème 3.2.1 ***La fonction logarithme népérien***

La fonction exponentielle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, c'est-à-dire que tout nombre réel strictement positif y peut s'écrire comme une exponentielle.

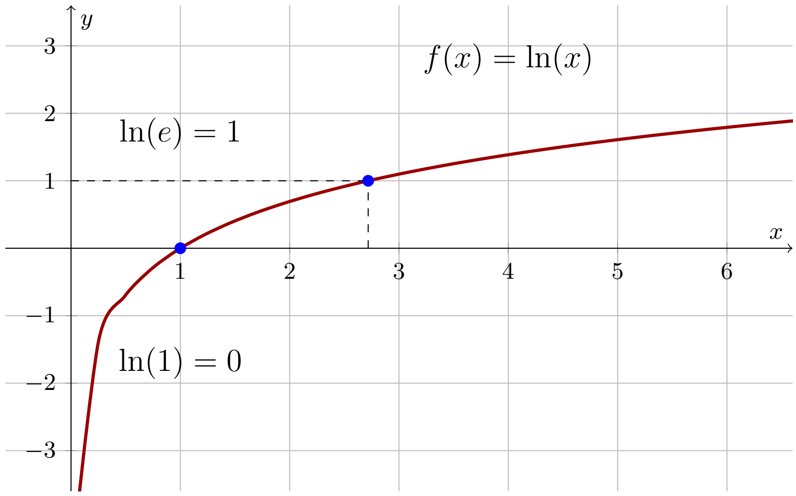
$$\forall y > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$$

La fonction Logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle, on la note $\ln$

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

à tout nombre réel strictement positif x, elle associe le nombre dont l'exponentielle vaut x, ce nombre est noté $\ln x$

Le graphe de la fonction logarithme népérien :



Comme les deux fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque

La fonction Logarithme népérien :

- *est définie sur* $\mathbb{R}_+^\star$, *continue, dérivable et strictement croissante.*
- *n'est pas définie au point* 0 *ni pour les nombres réels négatifs.*
- *vaut* 0 *au point* 1 *:* $\ln(1) = 0$
- *tend vers moins l'infini en* 0 *:* $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- *tend vers l'infini en plus l'infini :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Pour tout nombre réel x *et tout nombre réel strictement positif* y,
on a les propriétés suivantes :

$$e^x = y \iff x = \ln(y) \qquad e^{\ln(y)} = y$$

$$e^x > y \iff x > \ln(y) \qquad \ln(e^x) = x$$

Ces fonctions permettent également d'étendre la définition des puissances :

$$\forall a > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad a^b = \exp(b \ln a)$$

3.2.2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

Remarque
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ *et sa dérivée est la fonction inverse :*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Le logarithme transforme les produits en somme, il était utilisé par les astronomes du 16e siècle pour accélérer les multiplications de nombres à 10 chiffres.

Proposition 3.2.2 ***Propriétés algébriques***

Pour tous (a,b) *deux nombres réels strictement positifs, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln(\sqrt{a}\,) = \frac{1}{2}\ln(a)$$
$$\ln(1/a) = -\ln(a).$$
$$\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b). \qquad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

Il existe d'autres fonctions logarithmes, par exemple la fonction logarithme en base 10, $\log_{10}$ qui vérifie les mêmes propriétés de calcul mais qui est définie par :

$$\log_{10}(10) = 1\,.$$

Exercice 3.1 **Application directe**

1. Résoudre les équations :

$$(E_1) \quad e^x = 5 \qquad\qquad (E_3) \quad \ln(2x-1) = -2$$
$$(E_2) \quad \ln(x) = -5 \qquad\qquad (E_4) \quad \ln(1+x) = 100$$

2. Résoudre les systèmes :

$$\mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{rcl} -\ln x + 2\ln y & = & 1 \\ 3\ln x - 5\ln y & = & -1 \end{array} \right. \qquad \mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{rcl} -2\ln x + 3\ln y & = & -1 \\ -7\ln x - 8\ln y & = & 1 \end{array} \right.$$

Proposition 3.2.3 ***Croissances comparées***

Les fonctions puissances dictent leur comportement lorsqu'elles sont comparées à la fonction logarithme : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

3.2.3 QCM

1. Quelle est la valeur de la somme $\ln(4) + \ln(10)$?

   a. $\ln(14)$
   b. $\ln(40)$
   c. $\ln(4/10)$
   d. $\ln(10^4)$

2. La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$ est :

   a. $f'(x) = x$
   b. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
   c. $f'(x) = e^x$
   d. $f'(x) = \ln(x)$

3. L'équation $\ln(x) = -8$

   a. n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}_+^\star$
   b. a une unique solution $x = -8$
   c. a une unique solution $x = -\ln(8)$
   d. a une unique solution $x = e^{-8}$

4. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(x^3)$?

   a. 0
   b. $+\infty$
   c. $-\infty$
   d. x^6

5. Que vaut $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h}$?

   a. 0
   b. $+\infty$
   c. $-\infty$
   d. 1

3.3 Exercices

Exercice 3.2 **Positionnement**

1. Déterminer, en fonction de x, le signe des fonctions suivantes :

   a) f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = (x^2 + 4)e^x$$

   b) g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \frac{e^{-4x}}{-x^4 - 7}$$

   c) h définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$h(x) = (1 + e^{2x})(e^{-3x} + 4)$$

   d) i définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$i(x) = (x^2 - x - 6)e^x$$

2. Dans chacun des cas les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer leur dérivée :

   a) f définie par $f(x) = e^{2x}$
   b) g définie par $g(x) = e^{4x}$
   c) h définie par $h(x) = e^{3x+4}$
   d) i définie par $i(x) = e^{5x-2}$
   e) j définie par $j(x) = e^{-7x+1}$
   f) k définie par $k(x) = e^{-6x-3}$

3. Dans chacun des cas les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer leur dérivée :

   a) f définie par $f(x) = e^x + x^2$
   b) g définie par $g(x) = 3e^x + 4x + 5$
   c) h définie par $h(x) = 3x^2 - 4e^x$
   d) i définie par $i(x) = xe^x$
   e) j définie par $j(x) = (1 + x)e^x$
   f) k définie par $k(x) = 3x^2 - 4e^x$
   g) l définie par $l(x) = \dfrac{x^2 + 5}{e^x}$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^3 = e^x$
   b) $e^x - e^{-4} = 0$
   c) $e^x = 1$
   d) $e^x - e = 0$
   e) $e^{2x+4} = e^2$
   f) $e^x = 3$
   g) $e^x + 5 = 0$
   h) $e^{-3x+5} = 1$
   i) $e^x = 0$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a) $e^x > e^4$
   b) $e^{-2x} > 1$
   c) $e^{2x} < 6$
   d) $e^{3x+4} \geq e^{13}$
   e) $e^{-2x+5} \leq e^9$
   f) $e^{3x+5} \leq e^{6x-1}$
   g) $e^x \leq 4$
   h) $e^{2x+3} > 4$

Exercice 3.3 QCM

1. Pour tout nombre réel x, $A(x) = 1 - \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$ s'écrit également :

   a) $\dfrac{2}{e^{-x}+1}$ b) $\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$ c) 2

2. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}+3}{1+2e^{-x}}\right)$ est égale à :

   a) 3 b) $+\infty$ c) $\dfrac{3}{2}$

3. f est la fonction définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-2e^x}{x+1}$ alors sa dérivée f' s'écrit :

   a) $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+x)^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{-2xe^x}{(1+x)^2}$ c) $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1+x)^2}$

4. Le nombre $e^3(e^{-2})^5$ est égal à :

   a) e^6 b) e^{-30} c) e^{-7}

5. Pour tout réel x différent de $-\ln(2)$, la fraction $\dfrac{3-e^{-x-2}}{2e^{-x}-1}$ peut s'écrire aussi :

   a) $\dfrac{1-5e^x}{1+2e^x}$ c) $\dfrac{1-5e^x}{1-2e^x}$

   b) $\dfrac{1+5e^x}{1-2e^x}$ d) $\dfrac{1-5e^x}{-1+2e^x}$

Exercice 3.4 Puissances

Soit n un nombre entier relatif. Simplifier les écritures suivantes :

a) $2^{2n}\times 2$ c) $\left(2^{n+1}\right)^3\times 2^{-1}$ e) $\dfrac{2^{n+3}}{4^{-n}}\times 2^{-n}$

b) $\dfrac{2^{3n+1}}{2^{2n+1}}$ d) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{2n}}\times\dfrac{1}{8}$

Exercice 3.5 Parité et fonction exponentielle

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^x - e^{-x}, \qquad f_2(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Exercice 3.6 Dérivées et étude de fonctions avec $\ln$

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = \ln(2x+1) \qquad h(x) = x\ln(x) \qquad \ell(x) = \ln(\ln(x))$$
$$g(x) = \ln(x^2+1) \qquad k(x) = \frac{\ln(x)}{x} \qquad m(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Exercice 3.7 Limites et inéquations avec $\ln$

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - \ln(x)\right) \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

2. Résoudre les inéquations suivantes sur leur ensemble de définition :

(I_1) $\ln(x) \geq 1$

(I_2) $\ln(2x-1) < 0$

(I_3) $\ln(x^2-4) \leq \ln(3)$

(I_4) $\ln(x) + \ln(x-2) > \ln(3)$

Exercice 3.8 Équations

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad 3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0.$$

Exercice 3.9 Systèmes

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

1. $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$

Exercice 3.10 Exponentielle et valeur absolue

Démontrer que pour tout réel x, on a

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{|x|}.$$

Exercice 3.11 Un encadrement de e

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 3.12 Limites et exponentielle

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2e^x+e^{-2x}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2e^x+e^{-2x}}.$$

Exercice 3.13 Positivité

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2).$$

Démontrer que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3.14 Médecin légiste

Un inspecteur qui arrive sur le lieu d'un crime demande au médecin légiste de prendre la température de la victime. Elle est de $32°C$. Il prend la température de la pièce, qui est de $20°C$.

La loi de Newton sur le refroidissement d'un objet en milieu ambiant permet de modéliser la température de la victime en posant $T(t) = Ae^{-ct} + 20$ où $t > 0$ représente le temps, exprimé en heures, depuis la mort de la victime et $T(t)$ la température de la victime à l'instant t, en degrés Celsius.

Sachant qu'une demi-heure plus tard, la température de la victime est de $31°C$, déterminer l'heure du crime (on prendra comme hypothèse qu'au moment de sa mort, la température de la victime était de $37°C$).

Exercice 3.15 Pharmacocinétique

On injecte un médicament à un patient en intraveineuse. Dans de nombreux cas, la concentration dans le sang de la substance active, en $\mathrm{mg.L^{-1}}$, vérifie la relation

$$C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$$

où C_0 est la concentration initiale, t est le temps, exprimé en heures, après l'injection, et λ est un coefficient spécifique au médicament,

1. On appelle demi-vie du médicament le temps nécessaire pour que, après administration du médicament, sa concentration diminue de moitié. Calculer (en fonction de λ) le temps de demi-vie $T_{1/2}$ d'un médicament dont la concentration dans le sang satisfait la relation précédente. Quelle est la concentration après $2T_{1/2}$? Après $nT_{1/2}$?
2. L'aztréonam est un antibiotique qui est notamment utilisé chez les patients atteints de mucoviscidose pour soigner des infections bronchiques. Il n'est efficace que si sa concentration dans le sang dépasse $40\mathrm{mg.L}^{-1}$. On dispose de doses de $2\mathrm{g}$ et on souhaite connaitre le temps maximal entre deux injections pour maintenir cette concentration supérieure à $40\mathrm{mg.L}^{-1}$ chez un patient pesant $60\mathrm{kg}$. Sachant que le volume sanguin d'un adulte est d'environ $70\mathrm{mL.kg}^{-1}$ et que le temps de demi-vie de l'aztréonam, tel qu'indiqué par le fabricant, est de $1{,}7\mathrm{h}$, calculer
   a) le temps maximal séparant la première injection et la deuxième ;
   b) le temps maximal séparant les injections suivantes.

Exercice 3.16 **Point le plus proche de l'origine**

On considère la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = x + e^{2x}$.
Démontrer qu'il existe un réel c tel que $g(x) < 0$ si $x < c$ et $g(x) > 0$ si $x > c$.

b) En déduire qu'il y a un unique point sur la courbe de la fonction exponentielle qui minimise la distance à l'origine. On le note M_0.

c) Démontrer que la tangente à la courbe en M_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0).

Exercice 3.17 **Unique solution**

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\exp(1-x)$.

a) Dresser le tableau de variations de h.

b) Démontrer qu'il existe un unique $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $h(\rho) = -1$.

Exercice 3.18 **Équation différentielle**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, $f'(x) = 0$.

1. Que peut-on dire de f ?
2. On suppose de plus que $f(0) = 2$. Que peut-on alors dire de f ?

Exercice 3.19 **Tangente**

Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle aux points d'abscisse 0, 1 et 2.

Exercice 3.20 Simplification

Simplifier les expressions :

a) $(e^x)^5 e^{-2x}$

b) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$

c) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$

Exercice 3.21 Factorisation

Démontrer que pour tout réel x,

a) $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = e^x \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$.

b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

c) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

d) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

Exercice 3.22 Équations et inéquations

Résoudre les équations suivantes

$(E_1)\quad e^x = 1$

$(E_2)\quad e^{2x} = e$

$(E_3)\quad e^x = e^{-x}$

$(E_4)\quad e^{x^2} = (e^{-x})^2 e^3$

$(E_5)\quad e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}}$

Résoudre les inéquations suivantes

$(I_1)\quad e^x > e$

$(I_2)\quad e^{2x} \leq 1$

$(I_3)\quad (e^x)^3 \leq \frac{1}{e}$

$(I_4)\quad e^x - \frac{1}{e^x} > 0$

$(I_5)\quad e^{x^2} \geq e^{-x-1}$

Exercice 3.23 Étude

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Soit a un réel.
Déterminer l'équation de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

b) Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T . *Indication : on pourra étudier les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = e^x - y$, où y désigne l'équation de la tangente T_a.*

Exercice 3.24 Sens de variation

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

b) $f(x) = e^{2x} - 2x$

c) $f(x) = e^{x^2} - x^2$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

e) $f(x) = (2x+3)e^{-2x}$

Exercice 3.25 Limites

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

$f(x) = e^{-3x}$

$g(x) = e^x + e^{-x}$

$h(x) = x + e^x$

$k(x) = e^{2x} + e^x + 1$

$\ell(x) = e^{3x} - e^x$

$m(x) = \frac{e^x+1}{e^x+2}$

$n(x) = \dfrac{-2e^x}{1+e^x}$

Exercice 3.26 Limites

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2 - e^x \qquad g(x) = \frac{2e^x - x}{x^2} \qquad h(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$\ell(x) = e^{2x} - (x+1)e^x \qquad k(x) = \frac{\sqrt{e^x+2}}{x} \qquad t(x) = \frac{e^{2x}+x^2}{x^2+x-3}$$

Exercice 3.27 Limites

A l'aide d'un changement de variable, étudier la limite en $+\infty$ des fonctions :

$$f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x}, \qquad g(x) = \frac{2e^{x^2-1}}{x^2}, \qquad h(x) = x^3 e^{-\sqrt{x}}$$

Exercice 3.28 Études

Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes (sens de variations et limites) :

$f(x) = e^{-x}$

$g(x) = e^x + e^{-x}$

$h(x) = x + e^x$

$k(x) = e^{3x} - 3e^x$

$\ell(x) = e^{-x^2}$

$m(x) = (x-2)e^{-0.1x}$

$n(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

Exercice 3.29 Position relative

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2e^x$ et $g(x) = (x^2 - x - 1)\,e^x$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

b) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

c) Déterminer les limites de f et g en $-\infty$ et $+\infty$.

d) Dresser les tableaux de variations de f et g.

Exercice 3.30 Capteur solaire

Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'intéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0; 1]$ est la distance parcourue par le fluide en mètres depuis son entrée dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. a) Etudier les variations de la température T sur $[0; 1]$.
   b) En déduire la température maximale, au degré prés, atteinte par le fluide.
   c) Tracer dans un repére la courbe représentant la température T.

Exercice 3.31 D'après sujet bac Amérique du Sud 2018

f est la fonction définie sur $[0; 12]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver $(2 * x * \exp(-x))$ $-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser $(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$ $2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver $(2 * (1 - x) * \exp(-x))$ $2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser $(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$ $2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. (a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$ en le justifiant.
   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions dans $[0; 12]$.
   Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
3. étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

— x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
— $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1. (a) Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.
   (b) À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ?
   Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.
2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
   Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

Exercice 3.32 D'après sujet bac Amérique du Nord 2005

Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.
2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
   (a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
   (b) Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

Exercice 3.33 D'après sujet bac France Métropolitaine Septembre 2010

Partie A : étude d'une fonction

On considère les fonctions f, g et h définies et dérivables pour tout nombre réel x de l'intervalle $[4\ ;\ 6]$ par $f(x) = 100\left(e^x - 45\right)$, $g(x) = 10^6 e^{-x}$ et $h(x) = g(x) - f(x)$.
On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[4\ ;\ 6]$.

Résolution de l'équation $h(x) = 0$.

1. (a) Démontrer que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[4\ ;\ 6]$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction h.
   (c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[4\ ;\ 6]$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la valeur exacte du nombre réel α est égale à $3\ln 5$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie B : Application économique

Les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit de prix unitaire x, compris entre 4 et 6 euros :

- $f(x)$ est la quantité, exprimée en kilogrammes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire x ;
- $g(x)$ la quantité, exprimée en kilogrammes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire x.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

1. Quel est, exprimé au centime d'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché ? Justifier.
2. Quelle quantité de produit, exprimée en kilogrammes, correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

Exercice 3.34 Étude de fonctions

La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2} + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Justifier que $D_f =]-1;1[$.
2. étudier la parité de f.
3. Préciser les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. étudier les variations de f.
5. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
6. Faire une représentation graphique.

Exercice 3.35 Fonction auxiliaire

En vous aidant des variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$, démontrer que

$$\forall x \in]0;1[, \quad \frac{1}{x\ln x} \leq -e$$

Exercice 3.36 Inéquation et équation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x - 4 = 5e^{-x}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $1 \leq e^{2x-3} \leq e$.

Exercice 3.37 Radon

Le radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps. Si m est la masse de radon un certain jour (origine), x jours plus tard la masse $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = me^{-0{,}18x}$$

1. Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$. En déduire quelle est l'évolution de la masse en pourcentage en un jour.
2. Représenter qualitativement $\mathcal{C}_f$ sur une durée de 8 jours.
3. On appelle période le temps au bout duquel la masse a diminué de moitié. Calculer la période du radon en jours puis en heures. Contrôler graphiquement la réponse obtenue.

Exercice 3.38 Étude

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{20e^x}{e^x+1}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - 3x$. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dans un repère orthogonal, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f, Δ la droite d'équation $y = 3x$ et Δ' la droite d'équation $y = 3x + 20$.
   (a) Soit a un réel ; M le point d'abscisse a de $\mathcal{C}$ et N le point d'abscisse a de Δ. Quelles sont les ordonnées de M et N ?
   (b) Exprimer la distance MN en fonction de e^a. Justifier que $\lim\limits_{a\to-\infty} MN = 0$.
   (c) Soit P le point d'abscisse a de Δ'. Quelle est l'ordonnée de P ?
   (d) Exprimer la distance MP en fonction de e^a. Justifier que $\lim\limits_{a\to+\infty} MP = 0$.
   (e) Que représentent Δ et Δ' pour la courbe $\mathcal{C}$?
   (f) Représenter graphiquement $\mathcal{C}$, Δ et Δ' dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 0.5cm sur l'axe des ordonnées).

Exercice 3.39 Difficile

Trouver la plus grande valeur de $n^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On étudiera (sous son écriture exponentielle) la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{1/x}$ pour conduire la recherche.

Chapitre 4

Systèmes linéaires simples

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Définitions - Premiers exemples

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1 ***Système linéaire***

*Soient p et n deux entiers non nuls. On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** un système de la forme :*

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots + a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & \cdots + a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \quad\vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots + a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{cases}$$

*Les scalaires $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ sont appelés **coefficients** du système,*
*les $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ forment le **second membre**,*
*et $x_1, \ldots, x_p$ sont les **inconnues** du système.*

Résoudre un tel système consiste à trouver tous les p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifient simultanément les n équations.

Définition 4.1.2 ***Systèmes équivalents, système incompatible***

- *Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.*
- *Un système (S) est dit **incompatible** s'il n'admet aucune solution.*

Définition 4.1.3 *Systèmes homogènes, système homogène associé*

- *Un système est dit* ***homogène*** *si son second membre est nul.*
- *Le* ***système homogène associé*** *à un système (S) est le système (H) obtenu en remplaçant tous les membres b_i par 0.*

Exercice 4.1 Reconnaissance directe

Déterminer si le système suivant est linéaire ou non. Si oui, expliciter les coefficients et le second membre.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$$

Exercice 4.2 Présence d'un produit

Les systèmes suivants sont-ils linéaires ? Si oui, expliciter les coefficients et le second membre.

$$\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(x) + y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy + z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4.3 Système homogène

Le système suivant est-il linéaire et homogène ?

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + 0y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.4 Racine

Analyser la nature du système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

■ **Exercice 4.5** **Système avec paramètre**

Étudier la linéarité selon le paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + a^2 y = 3 \end{cases}$$

■ **Exercice 4.6** **Produit de fonction**

Le système suivant est-il linéaire ?

$$\begin{cases} x \cdot \sin(y) = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

■ **Exercice 4.7** **Trois équations, deux inconnues**

Le système suivant est-il linéaire ? Est-il incompatible ?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

4.1.2 Les différents cas possibles pour les systèmes linéaires

Méthode *On distingue trois cas pour un système de n équations à p inconnues :*

- ***Si** $n > p$: plus d'équations que d'inconnues. Deux cas possibles :*
  - *le système est incompatible.*
  - *certaines équations sont redondantes, et on revient au cas $n \leq p$.*
- ***Si** $n = p$: système carré d'ordre n. Trois cas possibles :*
  - *une unique solution (système de **Cramer**) ;*
  - *une infinité de solutions ;*
  - *aucune solution (système incompatible).*
- ***Si** $n < p$: deux cas possibles :*
  - *une infinité de solutions ;*
  - *aucune solution (système incompatible).*

4.1.3 Résolution dans des cas simples

Résolution par substitution

Exemple

Résolvons le système suivant par substitution :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 2 \\ 2x & + & 7y & = & 1 \end{array} \right.$$

Remarque *Cette méthode devient vite fastidieuse lorsque le nombre d'équations ou d'inconnues dépasse* 2.

Systèmes triangulaires (ou échelonnés)

Exemple

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +3y & +2z & = 2 \\ 0x & +2y & +5z & = 4 \\ 0x & +0y & +4z & = 8 \end{array} \right.$$

Ce système peut être résolu facilement par **remontée successive**.

Exemple

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +2y & -z & = 0 \\ 0x & +y & -2z & = 5 \end{array} \right.$$

Le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Une inconnue (par exemple z) peut être choisie libre.

4.2 Pivot de Gauss

4.2.1 Opérations Élémentaires

Définition 4.2.1 ***Opérations élémentaires***

Soit (S) un système. On appelle ***opérations élémentaires*** *les opérations suivantes :*

1. $L_i \leftrightarrow L_j$, $i \neq j$: *échange des lignes i et j.*
2. $L_i \leftarrow aL_i$, $a \neq 0$: *multiplication d'une ligne par un scalaire non nul.*
3. $L_i \leftarrow L_i + bL_j$, $i \neq j$: *addition d'un multiple de la ligne j à la ligne i.*
4. $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$, $a \neq 0$ et $i \neq j$: *combinaison des deux précédentes.*

Proposition 4.2.2 ***Opérations élémentaires et équivalence (admis)***

Toute opération élémentaire appliquée à un système (S) donne un système équivalent à (S).

4.2.2 Pivot de Gauss

Méthode *Cette méthode procède en deux temps :*

— *Élimination successive des inconnues à l'aide des opérations élémentaires pour passer du système initial à un système triangulaire équivalent.*

— *Remontée du système triangulaire obtenu.*

Exercice 4.8 **Entraînement**

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(S_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array} \right. \qquad (S_4) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Proposition 4.2.3 ***Caractérisation d'un système de Cramer par le pivot de Gauss***

Un système carré (S) est un système de Cramer si on peut trouver un pivot non nul à chaque étape du pivot de Gauss.

4.3 Exercices

Exercice 4.9 Maçons

Trois maçons et deux ouvriers polyvalents réalisent l'extension d'un bâtiment en 6 jours et gagnent au total 2520 €. Pour un travail similaire, cinq maçons et trois ouvriers polyvalents gagnent 2720 € et terminent le chantier en 4 jours.

Calculer le salaire journalier d'un maçon et celui d'un ouvrier polyvalent.

Exercice 4.10 Chantier

Le nombre de briques N sur un chantier (stock existant + livraisons) est représenté par l'équation :

$$N = a \times D + e$$

où :

- $D =$ nombre de jours,
- $a =$ constante,
- $e =$ stock existant avant le début des livraisons régulières.

Après 2 jours, le nombre de briques sur le chantier était de $22\,000$, et après 5 jours, il était de $40\,000$.

En supposant que les livraisons de briques sont régulières, calculer les valeurs de a et e, puis déterminer le nombre de briques après 8 jours.

Exercice 4.11 Répartition de charges sur poutre

Une poutre est appuyée sur trois points A, B et C, et soumise à des charges. Les réactions R_A, R_B, R_C vérifient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} R_A & + & R_B & + & R_C & = & 30 \\ 2R_A & + & R_B & + & 0R_C & = & 20 \\ 0R_A & + & R_B & + & 3R_C & = & 25 \end{array}\right.$$

Déterminer les réactions aux appuis. Interpréter le résultat.

■ Exercice 4.12 Dosage de béton

Un dosage impose : 1 m^3 de béton est composé de gravier (G), sable (S), ciment (C) et eau (E), vérifiant :

$$\begin{cases} G+S+C+E &= 1 \\ G &= 2S \\ C &= 0.15 \\ E &= 0.1 \end{cases}$$

Résoudre le système et donner les volumes de chaque composant. Vérifier que les proportions sont correctes pour un béton standard.

■ Exercice 4.13 Stabilisation d'un mur de soutènement

Un mur de soutènement exerce des réactions d'appui sur trois contreforts. Ces réactions vérifient :

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = 150 \\ 2R_1 + R_2 + 0R_3 = 110 \\ 0R_1 + R_2 + R_3 = 100 \end{cases}$$

Calculer R_1, R_2, R_3 et discuter la stabilité du mur.

■ Exercice 4.14 Répartition de coûts dans un chantier

Trois entreprises A, B et C réalisent un chantier. Leur répartition de charges obéit aux équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & \text{(total des coûts)} \\ 2x - y + 0z = 10 \\ 0x + y + z = 70 \end{cases}$$

Calculer les montants x, y, z payés par chaque entreprise.

■ Exercice 4.15 Résistance des matériaux

Une structure métallique repose sur 3 barres qui doivent supporter une charge totale de 900 N. La répartition des efforts est modélisée par :

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + F_3 = 900 \\ 2F_1 - F_2 + 0F_3 = 100 \\ 0F_1 + F_2 - 2F_3 = 0 \end{cases}$$

Trouver la force exercée sur chaque barre.

■ Exercice 4.16 **Approvisionnement d'un chantier**

Une centrale livre trois types de matériaux : sable (x), gravier (y), ciment (z). Un client commande trois mélanges M_1, M_2, M_3 définis par :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 30 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 50 \\ x & + & y & + & z & = & 25 \end{array}\right.$$

Déterminer la quantité de chaque composant à livrer.

■ Exercice 4.17 **Ventilation dans un bâtiment**

L'air circule dans 3 conduits x, y, z d'un réseau de ventilation. On impose :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & = & 200 & & \\ x & + & 0y & + & z & = & 180 \\ 0x & + & y & + & z & = & 220 \end{array}\right.$$

Trouver le débit d'air dans chaque conduit.

■ Exercice 4.18 **Budget d'un projet immobilier**

Trois catégories de dépenses : terrain (T), travaux (W), honoraires (H) avec contraintes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} T & + & W & + & H & = & 1\,000\,000 \\ 0T & + & W & - & 3T & = & 0 \\ 0T & + & 0W & + & H & = & 0.1(W+H) \end{array}\right.$$

Résoudre le système pour connaître la répartition du budget.

Chapitre 5

Trigonométrie

La trigonométrie a commencé il y a plus de 2000 ans, lorsque les astronomes ont travaillé sur la mesure des angles et des côtés des triangles. Le mot « trigonométrie » est composé de deux mots grecs « trigonon » et « metron » qui signifient respectivement triangle et mesure.

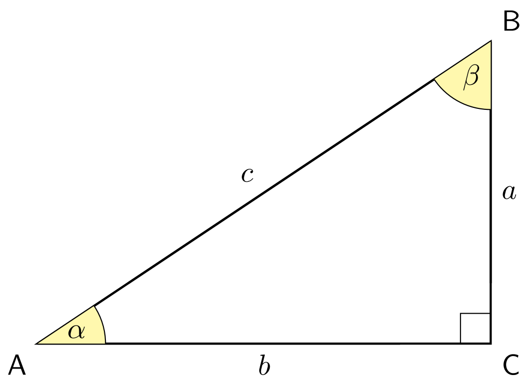
La trigonométrie présente un intérêt aussi bien théorique que pratique, car elle est utilisée en mathématiques, en topographie, en ingénierie, en physique, en navigation par satellite, ...

5.1 Trigonométrie du triangle

Soit ABC un triangle rectangle en C.

Les rapports $\dfrac{AC}{AB}, \dfrac{BC}{AB}, \dfrac{BC}{AC}$ ne dépendent que de l'angle $\widehat{BAC}$ noté α :

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}$$
$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}$$
$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AC}$$



Proposition 5.1.1 ***Propriétés fondamentales***

$0 < \cos\alpha < 1$ *et* $0 < \sin\alpha < 1$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$

QCM

1. $\cos(\alpha) = \dots$

   (a) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ (c) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

   (b) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ (d) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$

2. $\sin(\alpha) = \dots$

   (a) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ (c) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

   (b) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ (d) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$

3. $\tan(\alpha) = \dots$

   (a) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ (c) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

   (b) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ (d) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$

4. $\text{cotan}(\alpha) = 1/\tan(\alpha) = \dots$

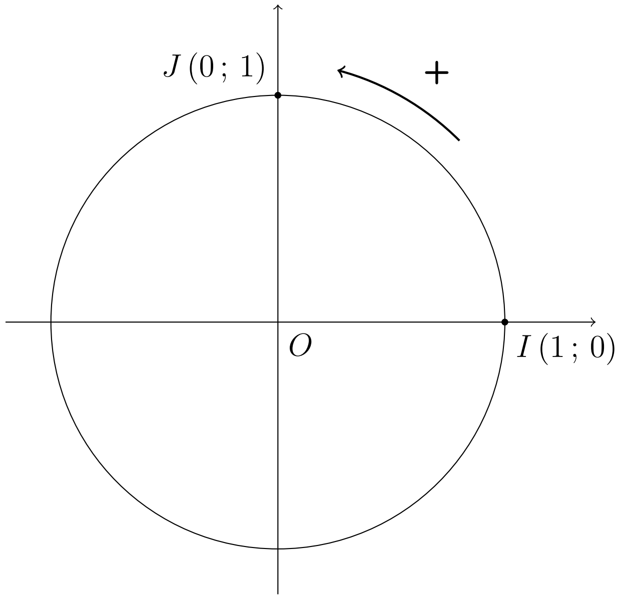
   (a) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ (c) $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

   (b) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ (d) $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$

5.2 Le cercle trigonométrique

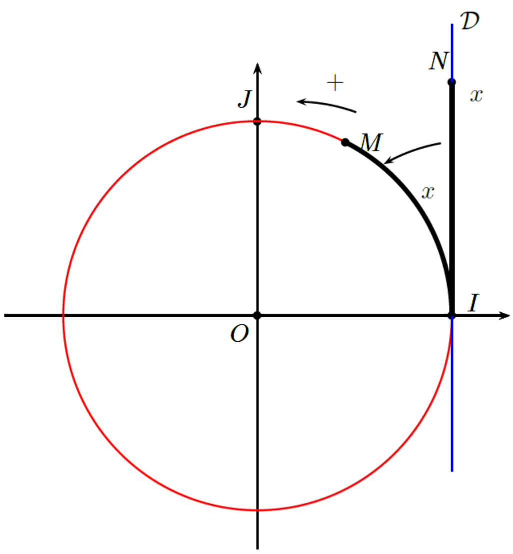
Définition 5.2.1 ***Cercle trigonométrique***

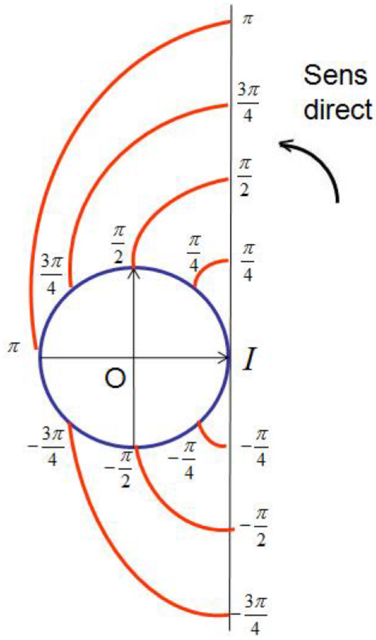
On appelle cercle trigonométrique *tout cercle dont le rayon est égal à l'unité de longueur et sur lequel on a choisi un sens de rotation* direct *ou sens positif.*
On choisit généralement le sens inverse des aiguilles d'une montre.



5.2.1 Se repérer sur le cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$, on considère le cercle trigonométrique de centre O et la droite $\mathcal{D}$ tangente en I au cercle. Cette droite est **graduée** et **le zéro coïncide avec le point** I.





> **Proposition 5.2.2** ***Cercle trigonométrique***
>
> *Tout point du cercle trigonométrique est* **l'image** *d'une* **infinité** *de réels de la droite $\mathcal{D}$.*

Rappel et méthode

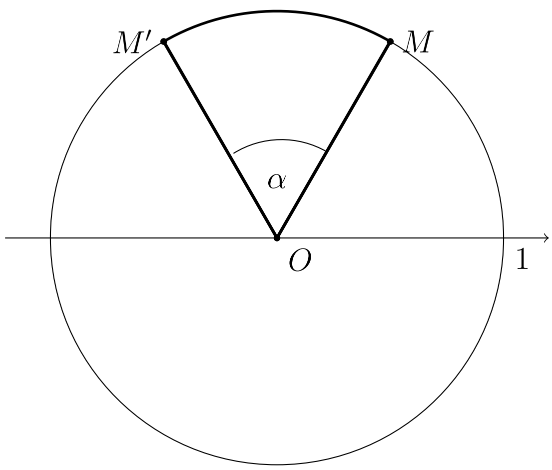
— Le périmètre d'un cercle de rayon 1 (un tour complet) vaut 2π.

— Pour tester si deux réels x et x' ont le même point image sur le cercle trigonométrique, on peut chercher si $x - x'$ est un multiple de 2π :
on cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = k.2\pi$.

5.2.2 Le Radian

Définition 5.2.3 ***Radian***

Le radian *est une unité de mesure des angles.*
La mesure d'un angle correspond à la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre d'un cercle de rayon 1*.*
Sur le dessin suivant, l'angle $\widehat{MOM'}$ *mesure* α *radians.*
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ *vaut* α*.*



La longueur d'un arc de cercle de rayon R et de mesure $\alpha > 0$ **exprimé en radians** est égale au produit αR **exprimé dans l'unité de** R.

Proposition 5.2.4 ***Mesure d'un angle en radian***

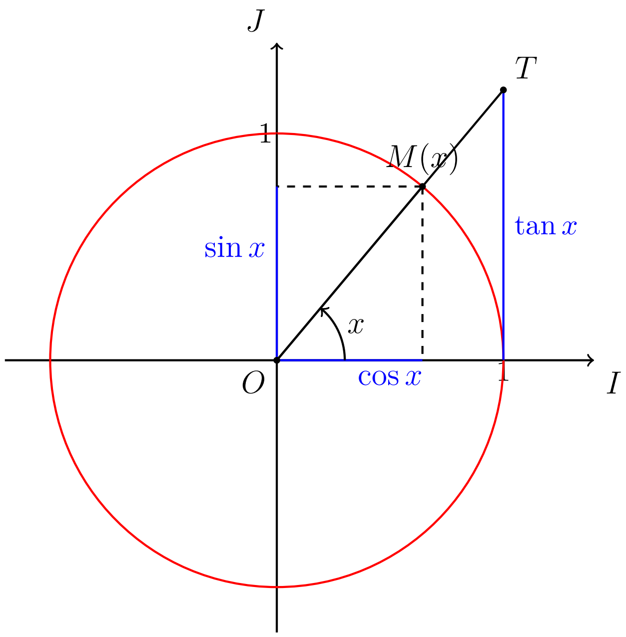
La mesure d'un angle en radian est proportionnelle *à la mesure du même angle en degrés.*
Un angle plat mesure 180 *en degrés ou* π *en radians.*

5.2.3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 5.2.5 ***Cosinus et sinus***

Soit un cercle trigonométrique dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. On considère un nombre réel x.

- *On appelle* cosinus *de x, noté $\cos x$, l'abscisse du point M associée à x.*
- *On appelle* sinus *de x noté $\sin x$, l'ordonnée du point M associée à x.*



5.2.4 Propriétés

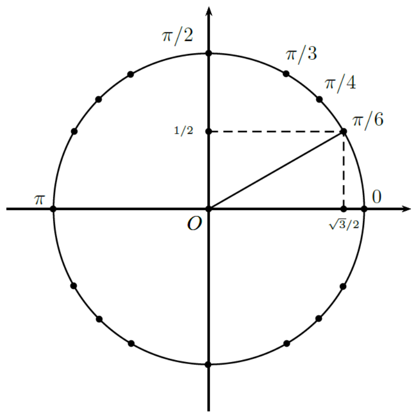
Exemple

Valeurs remarquables :

degrés	radians	sinus	cosinus
0	0	0	1
	$\pi/6$	$1/2$	
45			$\sqrt{2}/2$
	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	
90			0
	π	0	-1

Exemple

Figure à compléter :



Proposition 5.2.6 ***Propriétés***

Pour tout nombre réel x,

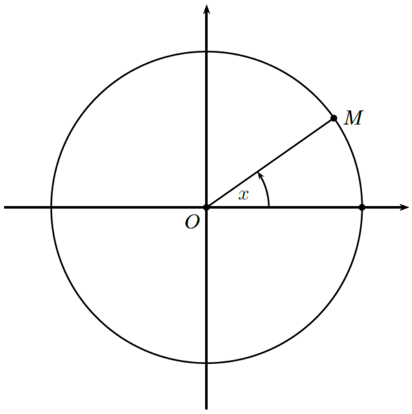
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos(x)$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin(x)$

Exemple

Placer les angles $x+\pi,\ \pi - x,\ x+\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}-x$



Exemple

Pour tout nombre réel x :

- $\cos(x+\pi) =$ $\qquad$ $\sin(x+\pi) =$
- $\cos(\pi - x) =$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) =$
- $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) =$ $\qquad$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) =$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$

5.2.5 QCM

1. Le cercle trigonométrique a ...

   (a) pour centre l'origine et pour rayon 1.
   (b) pour centre l'origine et pour diamètre 1.
   (c) pour centre l'origine et pour rayon 2π.
   (d) pour centre l'origine et pour diamètre 2π.

2. Sur le cercle trigonométique, un point M associé à l'angle x a ...
   (a) pour abscisse $\cos(x)$ et ordonnée $\sin(x)$.
   (b) pour abscisse $\sin(x)$ et ordonnée $\cos(x)$.
   (c) pour abscisse $\tan(x)$ et ordonnée $\sin(x)$.
   (d) pour abscisse $\cos(x)$ et ordonnée $\tan(x)$.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cdots$
   (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (b) $\frac{1}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) 1
   (e) 0

4. $\sin\left(\frac{18\pi}{4}\right) = \cdots$
   (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (b) $\frac{1}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) 1
   (e) 0

5. La mesure principale de $\frac{28\pi}{3}$ est
   (a) $\frac{2\pi}{3}$
   (b) $-\frac{2\pi}{3}$
   (c) $\frac{\pi}{3}$
   (d) $-\frac{\pi}{3}$

6. Soit x un réel quelconque, $\cos(x + 2\pi) = \cdots$
   (a) $\cos(x)$
   (b) $-\cos(x)$
   (c) $\sin(x)$
   (d) $-\sin(x)$

7. Soit x un réel quelconque, $\cos(x + \pi) = \cdots$
   (a) $\cos(x)$
   (b) $-\cos(x)$
   (c) $\sin(x)$
   (d) $-\sin(x)$

8. Soit x un réel quelconque, $\sin(-x) = \cdots$
   (a) $\cos(x)$
   (b) $-\cos(x)$
   (c) $\sin(x)$
   (d) $-\sin(x)$

5.3 Fonctions circulaires

5.3.1 Fonction cosinus

Définition 5.3.1 ***La fonction cosinus***

On définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1;1]$ qui à tout nombre réel x associe le cosinus du nombre x :

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$$

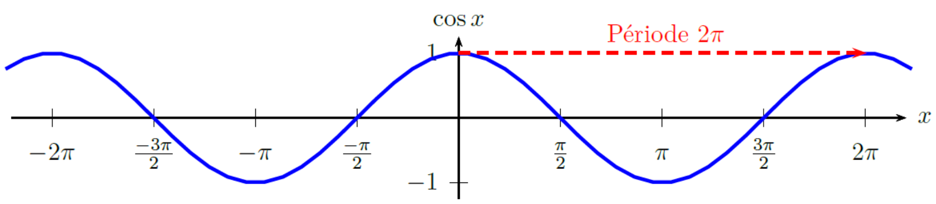
Proposition 5.3.2 ***Propriétés***

La fonction cosinus

- *est continue sur* $\mathbb{R}$
- *est périodique de période* 2π *:* $\quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(x+2k\pi) = \cos x$
- *est paire :* $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x$
- *est indéfiniment dérivable :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos x)' = -\sin x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



$\lim_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas !!

Exercice 5.1 **Questions**

1. la fonction cosinus est-elle monotone ?
2. les fonctions $x \longmapsto x\cos x$ et $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x}$ admettent une limite en en 0 ? En $+\infty$?

5.3.2 Limites à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

5.3.3 Fonction sinus

Définition 5.3.3 ***La fonction sinus***

On définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1;1]$ qui à tout nombre réel x associe le sinus du nombre x :

$$\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

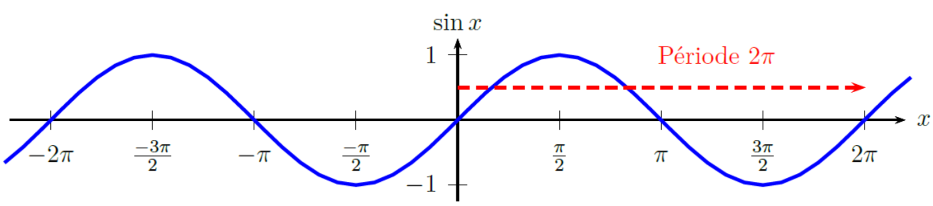
Proposition 5.3.4 ***Propriétés***

La fonction sinus

- *est continue sur* $\mathbb{R}$
- *est périodique de période* 2π *:* $\quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(x+2k\pi) = \sin x$
- *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(-x) = -\sin x$
- *est indéfiniment dérivable :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\sin x)' = \cos x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas !!

■ **Exercice 5.2** **Questions**

1. la fonction sinus est-elle monotone ?
2. les fonctions $x \longmapsto x \sin x$ et $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ admettent une limite en 0 ? En $+\infty$?

5.3.4 Limites à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5.3.5 Fonction tangente

Définition 5.3.5 ***La fonction tangente***

On note D_f l'ensemble

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On définit une fonction de D_f dans l'intervalle $[-1, 1]$ qui à tout nombre réel x associe la tangente du nombre x :

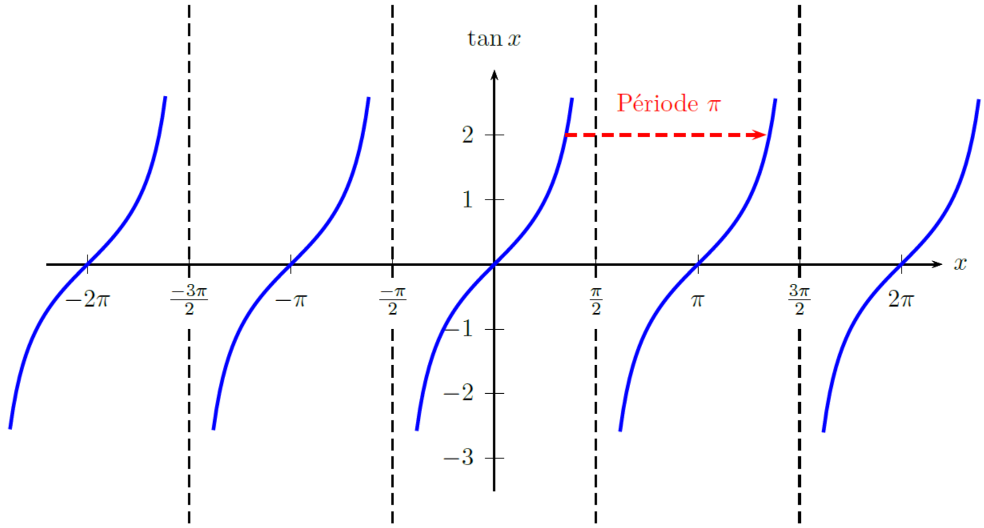
$$\tan : \begin{array}{rcl} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$

Proposition 5.3.6 ***Propriétés***

La fonction tangente

- *est continue sur tout intervalle de D_f*
- *est périodique de période π :* $\quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$
- *est impaire :* $\tan(-x) = -\tan x$
- *est dérivable :*
$$\forall x \in D_f,\ (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



5.3.6 QCM

Q1. La fonction $\cos$ est :

1. Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
2. Strictement croissante sur $[0, \pi]$
3. Bornée par 1 et -1
4. Périodique de période π

Q2. La fonction $\sin$ est :

1. Strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
2. Impaire
3. De période 2π
4. Convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Q3. La fonction tangente $\tan$ est définie sur :

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. Aucun intervalle de longueur π

Q4. On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos(x)$ existe

Q5. Les dérivées des fonctions trigonométriques usuelles sont :

1. $(\cos(x))' = -\sin(x)$
2. $(\sin(x))' = \cos(x)$
3. $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$
4. $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Q6. Concernant la croissance des fonctions :

1. $\sin$ est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. $\cos$ est décroissante sur $[0, \pi]$
3. $\tan$ est strictement croissante sur chacun de ses intervalles de définition
4. $\cos$ est croissante sur $[\pi, 2\pi]$

Q7. À propos du caractère borné :

1. $\cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
2. $\sin(x)$ est bornée par $[-1, 1]$
3. $\tan(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
4. $\tan(x)$ est non bornée sur chaque intervalle de définition

Q8. À propos des parités :

1. $\cos$ est paire
2. $\sin$ est impaire
3. $\tan$ est paire
4. $\tan$ est impaire

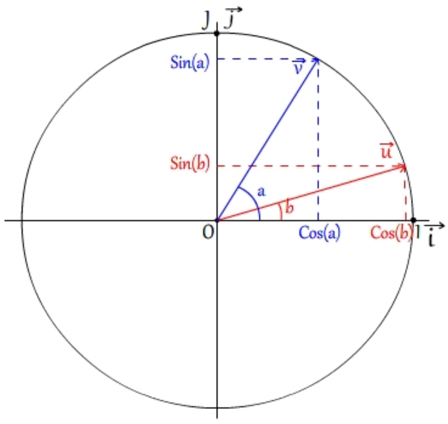
5.3.7 Exercices

Exercice 5.3 Produit scalaire

On considère dans un repère orthonormé les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du schéma ci-dessous.

1. En utilisant les deux expressions du produit scalaire appliqué à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, démontrer que

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b\,.$$



2. Démontrer que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. En déduire $\tan 2a$.
3. Exprimer $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) - \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right)$ en fonction de $\tan 2a$.
4. Montrer que

$$1 + \sin 4x - \cos 4x = 2\sqrt{2}\sin(2x)\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right).$$

5. (a) Vérifier la formule $\cot x - 2\cot 2x = \tan x$.
   (b) En déduire que

$$\begin{aligned} S_n &= \tan(x) + 2\tan(2x) + 4\tan(4x) + \cdots + 2^n\tan(2^n x) \\ &= \cot x - 2^{n+1}\cot 2^{n+1}x. \end{aligned}$$

6. Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
   (a) Calculer $\cos 2x$.
   (b) En déduire la valeur de x.

5.4 Équations trigonométriques

5.4.1 Équations du type $\cos x = a$ et $\sin x = b$

Si a, b sont des valeurs remarquables, on peut obtenir une expression exacte de la solution. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\cos x = \frac{1}{2}, \qquad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Sinon, on utilise la calculatrice et les fonctions réciproques $\cos^{-1}$ et $\sin^{-1}$ ainsi que les propriétés des fonctions cosinus et sinus.

5.4.2 Équations du type $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$, $\tan x = \tan y$

Résultats à connaître

$$\boldsymbol{\cos(x) = \cos(y) \iff x = \pm y + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

$$\boldsymbol{\sin(x) = \sin(y) \iff x = y + 2k\pi} \text{ ou } \boldsymbol{x = \pi - y + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

$$\boldsymbol{\tan(x) = \tan(y) \iff x = y + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

Autres types d'équations se ramenant aux précédentes :

1. $\sin u = \cos v \iff \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$.
2. $\sin u = -\sin v \iff \sin u = \sin(-v)$.
3. $\sin u = -\cos v \iff \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 5.4 **Équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin 3x = \sin x, \qquad \tan^2 x = 1$$

5.4.3 Équations du type $f(\cos x, \sin x, \tan x) = 0$

On peut distinguer deux familles de méthodes :

— celles qui ramènent l'équation initiale à une équation simple dans laquelle n'intervient plus qu'une seule fonction circulaire. Il faut utiliser les formules **d'addition, de duplication, de linéarisation**.

— celles qui introduisent un changement de variable, comme $t = \tan\frac{x}{2}$, avant de ramener à une équation simple dans laquelle n'intervient plus qu'une seule fonction circulaire ou la variable t.

Résoudre $a\cos x + b\sin x = c$.

Exemple

$\cos x - \sin x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

1. L'équation est équivalente à
$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
qui équivaut aussi à
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
2. On définit φ par : $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.
3. L'équation est équivalente à
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
4. c'est-à-dire
$\cos\left(x - (-\pi/4)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit
$$\cos(x + \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/6)$.
5. Alors
$$x + \pi/4 = \pi/6\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x + \pi/4 = -\pi/6\ [2\pi]$$
C'est-à-dire
$$x = -\pi/4 + \pi/6\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -\pi/4 - \pi/6\ [2\pi]$$
Finalement :
$$x = -\pi/12\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -5\pi/12\ [2\pi].$$

En résumé

— L'équation est équivalente à
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

— On définit φ par : $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

— L'équation est équivalente à $\cos(x-\varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, qui n'a des solutions que si

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1.$$

— On identifie, si possible, $\cos(x-\varphi)$ au cosinus d'un angle remarquable, on détermine $x-\varphi$ puis x.

5.4.4 Exercices :

Exercice 5.5 **Équations variées**

Résoudre les équations suivantes.

1. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$ (ramener l'équation à une seule fonction circulaire...)
2. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ (poser $t = \cos x$ puis se ramener à un équation du second degré)
3. $\cos 2x + 2\sin x \cos x = 0$ (penser à introduire $\sin 2x$...)
4. $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$ (utiliser les formules de l'angle double...)
5. $\cos x + \sin x = -1$
6. $\cos x + \cos 3x = 0$

5.5 Étude de fonction

Exemple

On étudie la fonction f définie par $x \mapsto f(x) = \cos^2 x \sin 2x$.

1. Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.
2. **Périodicité** :

$$f(x+\pi) = \cos^2(x+\pi)\sin\Big(2(x+\pi)\Big)$$

donc

$$f(x+\pi) = (-\cos x)^2 \sin(2x+2\pi) = \cos^2 x \sin 2x = f(x)$$

La période est π. On restreint l'étude de f à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. **Parité** :

$$f(-x) = \cos^2(-x)\sin(2(-x)) = \cos^2 x \sin(-2x)$$

donc

$$f(-x) = \cos^2 x(-\sin 2x) = -\cos^2 x \sin 2x = -f(x)$$

La fonction f est impaire. On restreint l'étude de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On complétera la courbe par une symétrie de centre O.

4. **Dérivée** : Écrivons $f(x) = 2\cos^3 x \sin x$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 6\cos^2 x(-\sin x)\sin x + 2\cos^3 x \cos x \\ & = & -6\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \\ & = & 2\cos^2 x(-3\sin^2 x + \cos^2 x) \\ & = & 2\cos^2 x(-3\sin^2 x + 1 - \sin^2 x) \\ & = & 2\cos^2 x(1 - 4\sin^2 x) \\ & = & 2\cos^2 x(1-2\sin x)(1+2\sin x) \end{array}$$

La résolution de $f'(x) = 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donne comme solutions $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$. On déduit le signe de $f'(x)$ sur les intervalles $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. **Monotonie** :

$$\begin{array}{|c|ccccc|} \hline x & 0 & & \pi/6 & & \pi/2 \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline & & & 3\sqrt{3}/8 & & \\ f & & \nearrow & & \searrow & \\ & 0 & & & & 0 \\ \hline \end{array}$$

5.6 Exercices

■ **Exercice 5.6** **Étude de fonctions**

Étudier les fonction suivantes.

$$x \mapsto f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}, \qquad x \mapsto g(x) = 1 - 8\cos x - 4\cos 2x, \qquad x \mapsto h(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2(2x)}.$$

■ **Exercice 5.7** **Déterminer des coefficients**

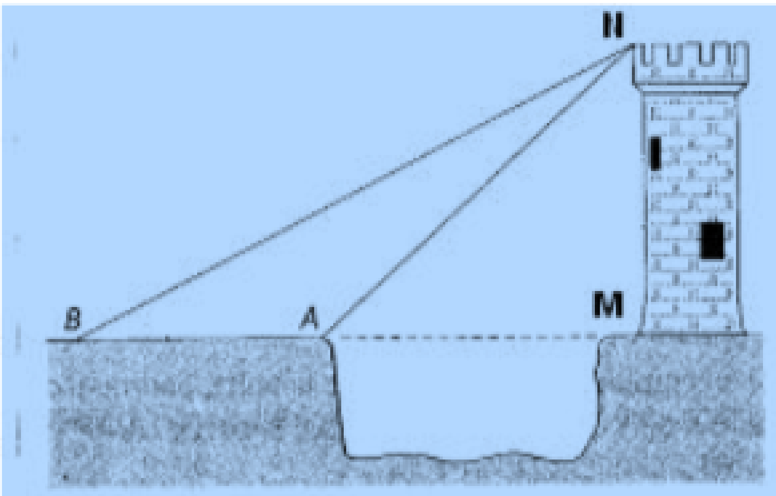
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax+b)e^{cx}$, où a, b, c sont trois nombres réels que l'on va déterminer.

Dans un repère du plan, on sait que la courbe représentative de f contient les points $(1;0)$ et $(0;1/3)$. Par ailleurs, cette courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $2/3$.

En utilisant les différentes informations de l'énoncé, déterminer la valeur de a, b, c.

■ **Exercice 5.8** **Tour**

Une tour est entourée par un large fossé comme le montre le dessin ci-dessous :



En se situant en A, l'angle $\widehat{MAN}$ vaut 42^o. En reculant de 10 mètres (AB $=$ 10) et en se positionnant en B l'angle $\widehat{MBN}$ vaut 27^o. Les triangles AMN et BMN sont rectangles en M (aplomb de N).

1. En exprimant MN de deux façons différentes (à l'aide de tangentes d'angle), calculer la longueur AM.
2. En déduire la hauteur de la tour.

Exercice 5.9 Duplication

1. À l'aide des formules de duplication, donner les valeurs exactes de $\cos^2 \dfrac{5\pi}{8}$ et $\sin^2 \dfrac{5\pi}{8}$.
2. Identifier un intervalle dans $[0; 2\pi]$ auquel appartient $\dfrac{5\pi}{8}$ qui permette de déterminer le signe de son cosinus et celui de son sinus.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{5\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{5\pi}{8}$.

Exercice 5.10 Égalités

1. Démontrer les égalités suivantes en précisant à chaque fois leur domaine de validité :
   (a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$
   (b) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$
   (c) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
   (d) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$
   (e) $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$
2. (a) Pour tout nombre réel $x \notin \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ établir la formule :
$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \sin(2x)}{1 + \sin 2x}.$$
   (b) On considère les nombres réels a et b tels que
$$0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ et } \tan a = \frac{1}{7} \text{ et } \tan b = 2.$$
   Déterminer c tel que $c = a + 2b$.

Exercice 5.11 Étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. La fonction f est-elle périodique ? paire ? impaire ?
3. Déterminer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 5.12 Équations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis sur $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \qquad \sin\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2} \qquad \sin\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. (a) Développer $\left(9-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$.
   (b) Résoudre sur $]-\pi,\pi]$ l'équation

$$3\cos^2 x-\left(9+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cos x+\frac{9}{\sqrt{2}}=0$$

   On posera $X=\cos x$.

Exercice 5.13 Étude de fonction

Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-8\cos(x)-4\cos(2x)$.

1. En étudiant la parité et la périodicité de f, montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0,\pi]$.
2. Étudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
3. Donner une valeur approchée de l'abscisse du point où la courbe coupe l'axe des abscisses entre 0 et π.

Exercice 5.14 Équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x=\sqrt{2}-1$$

Exercice 5.15 Étude de fonction

Étude de la fonction : $f : x\mapsto \frac{1}{2}\tan^2 x+\tan x$.

1. Justifier l'étude de f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
2. Étudier les variations de f sur cet intervalle. Préciser les asymptote é $\mathcal{C}_f$.

3. Résoudre l'équation : $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = 0.$
   On donnera une valeur approchée de l'une des solutions à 10^{-1} près.

Exercice 5.16 Somme

On veut calculer pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la somme

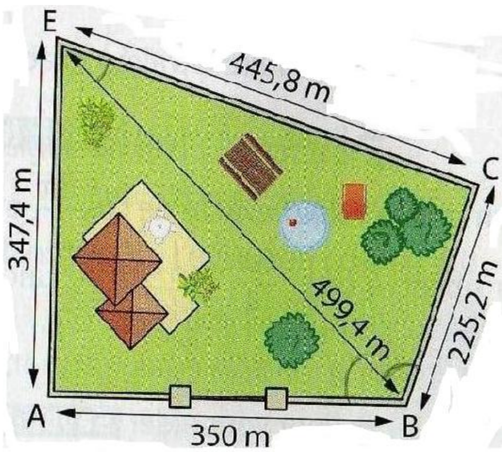
$$S_n = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$$

1. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) = \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)$
2. En déduire la valeur de $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times S_n$.
3. Conclure.

Exercice 5.17 Terrain

Un propriétaire souhaite mesurer la distance entre deux extrémités opposées de son terrain (AC sur la figure), malheureusement sa maison l'empêche d'effectuer cette mesure.

À l'aide des mesures connues, calculer la longueur AC.



Chapitre 6

Logique, sommes, produits

6.1 Logique

6.1.1 Opérateurs logiques

Définition 6.1.1 ***Proposition***

Une ***proposition*** *ou assertion est un énoncé mathématique qui a une valeur de vérité : vrai ou faux.*
exemple : 2 *est pair.*

Définition 6.1.2 ***Prédicat***

Un ***prédicat*** *est une expression dont la valeur de vérité dépend des variables qu'il contient.*
exemple : n *entier naturel est pair.*
Ici, la valeur de vérité de l'expression dépend de la valeur de n*.*

Définition 6.1.3 ***Négation***

La ***négation*** *de la proposition* P *est la proposition qui est vrai si et seulement si* P *est fausse.*

Définition 6.1.4 ***Conjonction et disjonction***

Si P et Q sont deux propositions, $(P$ et $Q)$ est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.

Si P et Q sont deux propositions, $(P$ ou $Q)$ est la proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions est vraie.

On peut résumer cela dans des tables de vérité.

P	Q	non P	P ou Q	P et Q
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

Toute la logique peut être construite à partir de ces trois opérateurs.

Proposition 6.1.5 ***Lois de De Morgan***

*Le **non**, le **ou** et le **et** sont reliés par les formules suivantes :*

$$\textbf{non } (P \textbf{ et } Q) = (\textbf{non } P) \textbf{ ou } (\textbf{non } Q)$$
$$\textbf{non } (P \textbf{ ou } Q) = (\textbf{non } P) \textbf{ et } (\textbf{non } Q)$$

Exercice 6.1 **Exemple 1 :**

Montrer ces formules avec une table de vérité.

Définition 6.1.6 ***Implication***

*Très utilisée, l'**implication** $P \Rightarrow Q$ est la proposition (non$P$ ou Q).*

Lorsque $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une **condition suffisante** à Q et que Q est une **condition nécessaire** à P

Exercice 6.2 **Exemple 2 :**

Donner la table de vérité de l'implication.

La négation d'une implication est donc $(P$ et non $Q)$. Attention, la négation d'une implication n'est donc pas une implication !

Définition 6.1.7 ***Équivalence***

On dit que P et Q sont ***équivalentes*** *si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On le note $P \Longleftrightarrow Q$.*

Définition 6.1.8 ***Contraposée***

On va l'utiliser plus loin dans ce chapitre comme méthode de raisonnement, la ***contraposée*** *de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition non $Q \Rightarrow$ non P. L'une est vraie si et seulement si l'autre est vraie.*

■ **Exercice 6.3** **Exemple 3 :**

Montrer à l'aide d'une table de vérité qu'une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.

6.1.2 Quantificateurs

Définition 6.1.9 ***Quantificateur universel***

Le quantificateur ***pour tout*** *(ou* ***quel que soit****) est noté $\forall$.*
La proposition $\left(\forall x \in E \quad P(x)\right)$ est vraie lorsque pour tout $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie.

Définition 6.1.10 ***Quantificateur existentiel***

Le quantificateur ***Il existe*** *est noté $\exists$.*
La proposition $\left(\exists x \in E \quad P(x)\right)$ est vraie lorsqu'il existe $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie.

Définition 6.1.11 ***Quantificateur d'unicité***

Le quantificateur ***Il existe un unique*** *est noté* $\exists!$.
La proposition $\big(\exists! x \in E \quad P(x)\big)$ *est vraie lorsqu'il existe un unique* $x \in E$ *tel que la proposition* $P(x)$ *est vraie.*

Proposition 6.1.12 ***Négation des quantificateurs***

La négation de $\big(\forall x \in E \quad P(x)\big)$ *est* $\big(\exists x \in E \quad \text{non } P(x)\big)$
La négation de $\big(\exists x \in E \quad P(x)\big)$ *est* $\big(\forall x \in E \quad \text{non } P(x)\big)$

Attention l'ordre des quantificateurs est très importants !
En effet la proposition suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \leq x < n+1$$

elle permet de définir la partie entière d'un réel.
Voyons ce qu'il se passe si on inverse l'ordre des quantificateurs, on obtient :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad n \leq x < n+1$$

Cette proposition est fausse il n'existe pas d'entier n qui permet d'encadrer tous les réels x ! Il suffit de prendre $x = n+2$ comme contre-exemple...

Il y a une autre erreur courante à éviter. Dans la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \leq x < n+1$$

L'expression $n \leq x < n+1$ cache un opérateur **et**.
En effet $n \leq x < n+1$ veut dire $n \leq x$ **et** $x < n+1$ de sorte que

$$\text{la négation de } (n \leq x < n+1) \text{ est } \Big(n > x \textbf{ ou } x \geq n+1\Big)$$

et surtout pas $n > x \geq n+1$.

Exercice 6.4 **Exemple 4 :**

Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists z \in \mathbb{R} \quad x < z < y$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)^2 - n^2$ impaire $\Rightarrow n$ impaire.

Que penser de leurs valeurs de vérité ?

6.2 Raisonnements

Le raisonnement est au coeur de l'activité mathématique. il y a très souvent plusieurs façons d'aborder un problème et bien souvent, choisir le bon type de raisonnement permet de se simplifier beaucoup la vie...

6.2.1 Raisonnement par déduction directe

L'objectif est de montrer $P \Rightarrow Q$.

Ce raisonnement porte mal son nom, même si on le rédige dans le sens direct (de P vers Q), bien souvent pour le construire on s'appuie d'abord sur Q pour "remonter" jusqu'à P. Pour montrer une équivalence, soit on raisonne par équivalence, soit on montre une double implication.

Exercice 6.5 **Exemple 5 :**

Montrer les propositions suivantes, a, b et x sont des nombres réels.

1. $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$
2. $x = -1 \iff x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

6.2.2 Raisonnement par contraposée

Nous avons déjà parlé de la contraposée dans la partie sur la logique. Parfois "retourner" un énoncé le rend plus simple à aborder...

Par exemple si l'on doit démontrer une différence, utiliser la contraposée permet de manipuler des égalités, et c'est souvent bien plus agréable...

Exercice 6.6 **Exemple 6 :**

Montrer les propositions suivantes :

1. Si $x \neq -1$ et $y \neq -1$ alors $xy + x + y \neq -1$
2. n^2 impair, alors n impair.

6.2.3 Raisonnement par l'absurde

Ce raisonnement, très employé, a été source de discorde entre mathématiciens du début du siècle dernier...

Le principe est de considérer la négation de la proposition que l'on souhaite démontrer et de tenter d'aboutir à une contradiction logique avec quelque chose que l'on a énoncé ou déjà démontré.

Exercice 6.7 **Exemple 7 :**

Montrer les propositions suivantes :

1. Soit n un entier naturel, $\forall p \in \mathbb{N}, p^2 \neq n^2 + 1$.
2. $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

6.2.4 Raisonnement par contre-exemple

Pour démontrer qu'une proposition est fausse, bien souvent la recherche d'un contre-exemple est la méthode la plus efficace !

■ **Exercice 6.8** **Exemple 8 :**

Montrer que les propositions suivantes sont fausses.

1. Un entier divisible par 4 et 6 est divisible par 24.
2. $\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < M$

6.2.5 Raisonnement par disjonction de cas

Diviser pour mieux régner... Une stratégie beaucoup utilisée en informatique qui peut s'avérer utile en mathématiques aussi.

■ **Exercice 6.9** **Exemple 9 :**

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 2n$ est un multiple de 3.

6.2.6 Raisonnement par analyse-synthèse

le principe est de construire ce que l'on cherche en présupposant de la véracité de la proposition. On cherche les conditions nécessairtes à sa réalisation en analyse et en synthèse on vérifie les propriétés souhaitées.

■ **Exercice 6.10** **Exemple 10 :**

Montrer qu'il existe une unique fonction paire f et une unique fonction impaire g telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = f(x) + g(x)$$

6.2.7 Raisonnement par récurrence

C'est un raisonnement qui vise à vérifier la véracité d'une propriété $P(n)$ pour tout entier naturel n supérieur à un entier de départ n_0.

Il ne nous apprend pas grand chose de pourquoi ça marche, mais il nous montre que ça marche ! On procède en trois étapes :

1. On vérifie que $P(n_0)$ est vraie, c'est l'**initialisation.**
2. On suppose qu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit vraie (éventuellement vraie pour tout entier inférieur à ce n), c'est l'**hypothèse de récurrence.**
3. On montre que sous l'hypothèse de récurrence, $P(n+1)$ est vraie, c'est l'**hérédité**.

Exercice 6.11 **Exemple 11 :**

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $n! \geq 2^{n-1}$
2. On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et :
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}$$
Montrer que :
$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}+u_n}$$

6.3 Exercices

Exercice 6.12 **En langage mathématique**

Écrire les énoncés suivants en langage mathématique :

1. f est majorée
2. f n'est pas minorée
3. f est bornée
4. f est croissante
5. f ne prend pas deux fois la même valeur

Exercice 6.13 **Négation**

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \quad m > n$
2. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad m > n$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, \quad x < z < y$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 3 \Rightarrow n > 6$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$

Exercice 6.14 **Conjecture de Goldbach**

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même. Voici deux célèbres problèmes ouverts :

— Conjecture de Goldbach (CG) :
$$\forall n > 2 \text{ pair}, \exists p, q \text{ premiers tels que } n = p + q$$

— Conjecture des nombres premiers jumeaux (CNJ) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \text{ premier tel que } p \leq n \text{ et } p + 2 \text{ premier}$$

1. Écrire la négation de ces deux conjectures.
2. Imaginons que l'année 2718 sera faste pour les mathématiques, une équipe de l'université de Maputo démontre l'implication :
$$(CG) \Rightarrow (CNJ)$$
Donner la contraposée de cette implication.
3. Quelque mois plus tard, un mathématicien démontrera que (CG) est fausse que pourra-t-on en déduire pour (CNJ) ?
4. L'année suivante, on découvrira une erreur dans la preuve de la fausseté de (CG). En revanche, une chercheuse bengalie parviendra à montrer que (CNJ) est fausse. Que peut-on en déduire pour (CG) ?

Exercice 6.15 Sommes

Montrer par récurrence :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Exercice 6.16 Somme de carrés

Montrer que si n est la somme de deux carrés d'entiers, alors le reste de la division euclidienne de n par 4 est toujours différent de 3.

Exercice 6.17 Somme de cubes

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ de deux manières différentes :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$$
2. en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2$$

Exercice 6.18 **Suite**

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$$

Montrer que :

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$$

6.4 Sommes

6.4.1 Définition

Définition 6.4.1 ***Somme***

On considère les n nombres réels (ou complexes) $a_1, ..., a_n$, l'écriture :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n$$

Représente la somme des $a_1, ..., a_n$, et k est l'indice muet de sommation.

On a les propriétés suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

6.4.2 Techniques de sommation

Pour le calcul des sommes, nous allons nous concentrer sur trois techniques de sommations.

1. **Les sommes de référence.**
   Il s'agit de formules vues au lycée dans le cadre de l'étude des suites numériques.

Théorème 6.4.2 ***Somme d'une suite arithmétique***

La somme de terme d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2}$$

$(n+1)$ *représente le nombre de terme qu'il y a entre* 0 *et* n,
il peut bien sûr en être autrement en fonction de la somme que l'on regarde.

.

Théorème 6.4.3 ***Somme d'une suite géométrique***

La somme de terme d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

q *étant la raison de la suite géométrique.*
$(n+1)$ *représente le nombre de terme qu'il y a entre* 0 *et* n,
il peut bien sûr en être autrement en fonction de la somme que l'on regarde.

.

Exercice 6.19 **Exemple 1 :**

Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} (2^k + k)$$

2. **Le téléscopage**

Théorème 6.4.4 ***Technique du téléscopage***

L'objectif est de jouer sur un changement d'indice pour simplifier la somme.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k &= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= a_{n+1} + \sum_{k=2}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n} a_k - a_1 \\
&= a_{n+1} - a_1
\end{aligned}$$

.

Exercice 6.20 **Exemple 2 :**

Calculer :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$$

En remarquant que : $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

3. **Le binôme de Newton**

Théorème 6.4.5 ***Formule du binôme de Newton***

La célèbre formule pour développer une somme à une certaine puissance.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

Où $\binom{n}{k}$ *est le coefficient binomial "*k *parmi* n*" :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Et $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$

.

Exercice 6.21 **Exemple 3 :**

Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$$

6.5 Produits

Définition 6.5.1 ***Produit***

On considère les n *nombres réels (ou complexes)* $a_1, ..., a_n$*, l'écriture :*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times ... \times a_n$$

On peut écrire par exemple :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

On a les propriétés suivantes :

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$$

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=1}^{n} b_k$$

Le téléscopage est la technique que l'on utilise la plupart du temps pour calculer une somme.

Exercice 6.22 **Exemple 4 :**

Calculer :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

en remarquant que $1 - \frac{1}{k^2} = (1 - \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k})$

6.6 Exercices

Exercice 6.23 **Propriétés**

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\sum_{k=1}^{n} (a + b_k) = a + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k$
4. $\sum_{k=1}^{n} a_k^p = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^p$
5. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}$
6. $\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$
7. $\prod_{k=1}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=1}^{n} b_k$

Exercice 6.24 **Sommes**

Calculer :

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{2k}}{2^{k+2}}$
3. $\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$
4. $\sum_{k=0}^{n} (2k + 3)$
5. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2k} 5^{n-k}$
6. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$

7. $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} i^2j^2$

8. $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)^2$

9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k$

10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$

11. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k}$

12. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=1}^{n}(i+j)$

Chapitre 7
Calcul vectoriel

7.1 Calcul vectoriel dans le plan

7.1.1 Rappels sur les vecteurs

Définition 7.1.1 ***Vecteur***

Dans le plan, un vecteur est la donnée d'une longueur d'un sens et d'une direction.

La puissance de cette notion réside dans le fait qu'elle se "détache" du plan euclidien habituel. Deux vecteurs peuvent être égaux même s'ils ne sont pas au même endroit, on sort du carcan de la géométrie euclidienne et de sa rigidité pour la première fois Nous creuserons cette idée plus tard avec l'algèbre linéaire.

On considère deux points du plan, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

$$\text{Les coordonnées du vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ sont : } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Pour les différencier des points de l'espace euclidien, on écrit les coordonnées des vecteurs en colonne.

Théorème 7.1.2 ***Opérations sur les vecteurs***

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

— *La somme des deux vecteurs est définie par :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

— *La multiplication par un nombre réel* λ *est définie par :* $\lambda\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

— *La norme d'un vecteur,* $\|\vec{u}\|$ *est définie par :* $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *C'est la longueur du vecteur* $\vec{u}$.

7.1.2 Colinéarité

Définition 7.1.3 *Colinéarité*

Deux vecteurs sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.

Cela se traduit par le fait que leurs coordonnées sont proportionnelles.

Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si$\exists k \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$, ce qui se traduit par $xy' - yx' = 0$

Exercice 7.1 **Exemple 1 :**

On considère les points $A(-3;6), B(2;9), C(3;4), D(9;2), E(5;8)$

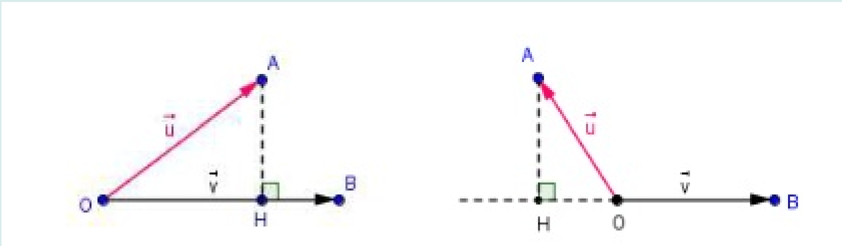
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}$
2. Parmi ces vecteurs, lesquels sont égaux ? Colinéaires ?

7.1.3 Produit scalaire

Définition 7.1.4 ***Produit scalaire***

Le produit scalaire est un produit entre deux vecteurs dont le résultat est un nombre. On peut le définir de trois façons différentes :

1. *Définition avec le projeté orthogonal.*



   H *est le projeté orthogonal de* A *sur* (OB).
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = OH \times OB$ *si* $\overrightarrow{OH}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *ont le même sens.*
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = OH \times OB$ *si* $\overrightarrow{OH}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont de sens contraire.*

2. *Définition avec les normes et cosinus.*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

3. *Définition avec les coordonnées.*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Ces trois définitions sont équivalentes. La seule difficulté avec cette notion est de jouer en combinant ces trois définitions pour résoudre un problème géométrique.

Proposition 7.1.5 ***Propriétés du produit scalaire***

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Le produit scalaire est distributif par rapport à la somme :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

☆ *Loi des cosinus pour trois points* A, B, C *quelconques :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

La propriété la plus utilisée :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux}$$

Exercice 7.2 **Exemple 2 :**

1. $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$
   Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2, (\vec{u} - \vec{v})^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.
2. On considère les points $A(3; 4), B(7; 6), C(1; 7)$. Déterminer $\|\overrightarrow{AB}\|, \|\overrightarrow{AB}\|, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une valeur approchée de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

7.1.4 Droites du plan

On connait déjà les droites avec la fameuse équation :

$$y = ax + b$$

Le problème d'envisager les droites comme des fonctions, c'est que l'on oublie toutes les droites verticales qui n'en sont pas...

En géométrie, on utilise plutôt l'équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0$$

Proposition 7.1.6 ***Vecteurs directeur et normal***

Si (d) est une droite d'équation

$$ax + by + c = 0$$

alors, le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de la droite et*

le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *est un vecteur normal de la droite.*

Théorème 7.1.7 ***Distance d'un point à une droite***

Pour une droite D du plan, la distance d'un point M à cette droite est la distance entre M et son projeté orthogonal sur D.
On peut calculer cette distance avec la formule de la distance d'un point par rapport à une droite :

$$d = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

où A est n'importe quel point de D et $\vec{n}$ n'importe quel vecteur normal à D.

Cette formule est obtenue en partant d'un point A quelconque de D, puis en décomposant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et en faisant un produit scalaire avec un vecteur $\vec{n}$ normal à D.

Exercice 7.3 **Exemple 3 :**

1. On considère la droite d'équation $22x - y + 3 = 0$. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de cette droite.
2. Soit $\vec{u} = \binom{1}{3}$ et $A = (2; -1)$.
   Donner l'équation de la droite (d) passant par A de direction $\vec{u}$ et l'équation de la droite (d') passant par A de normale $\vec{u}$
3. $M(3; -2)$, calculer la distance de M à (d) et (d')

7.2 Calcul vectoriel dans l'espace

7.2.1 Produit scalaire

On a les mêmes définitions et propriétés que dans le plan, on rajoute juste une coordonnée. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Proposition 7.2.1 ***Vecteur normal à un plan***

A l'image du vecteur normal à une droite dans le plan, on peut déterminer une équation de plan avec un vecteur normal.
Si P est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$,
alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal au plan P.

Exercice 7.4 **Exemple 4 :**

1. Déterminer l'équation du plan P passant par $A(1, 2, 0)$ de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Donner un vecteur normal aux plans suivants :

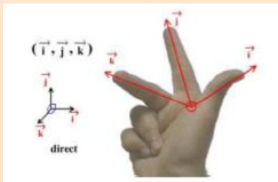
$$P_1 : x - y + z = 1, \qquad P_2 : 2x - y = 0, \qquad P_3 : x = 0, \qquad P_4 : y = -1, \qquad P_5 : z = 0$$

7.2.2 Produit vectoriel

Théorème 7.2.2 ***Définitions équivalentes du produit vectoriel***

Comme pour le produit scalaire, il y a trois définitions équivalentes pour le produit vectoriel.

1. ***Définition géométrique***
   Le sens direct dans l'espace est déterminé par le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On peut le modéliser avec notre main :



   Ce qui nous donne des relations du genre :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$$

2. ***Définition avec le sinus***

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \times \vec{w}$$

   avec $\vec{w}$ unitaire et directement orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. ***Définition avec les coordonnées***

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \times \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \times \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \times \vec{k}$$

   où nous avons noté $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Proposition 7.2.3 ***Propriétés du produit vectoriel***

Directement avec les définitions, on peut en déduire que

1. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors leur produit vectoriel est nul.*
2. *Le produit vectoriel est antisymétrique :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

3. *Le produit vectoriel est bilinéaire : pour tout a, b réels,*

$$\vec{u} \wedge (a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{u} \wedge \vec{v} + b\vec{u} \wedge \vec{w}$$

4. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

■ **Exercice 7.5** **Exemple 5 :**

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et en déduire l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.

7.2.3 Produit mixte

Il tient son nom de sa définition qui combine le produit scalaire et le produit vectoriel.

Définition 7.2.4 ***Produit mixte***

Le produit mixte des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans cet ordre, noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Proposition 7.2.5 ***Définition avec les coordonnées***

Avec les coordonnées, ça donne :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = x'' \times \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \times \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z'' \times \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Avec toujours $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

On peut utiliser aussi la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3$$

Proposition 7.2.6 ***Propriétés du produit mixte***

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$$

il est trilinéaire :

$$[a\vec{u} + b\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] = [a\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [b\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Et la propriété la plus utile :

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$$

Exercice 7.6 **Exemple 6 :**

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Calculer de deux façons différentes $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

7.2.4 Droites et plans de l'espace

1. **Équation paramétrique d'une droite**

   On définit une droite d à partir d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ par :

$$\begin{aligned} M = (x, y, z) \in d &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \end{aligned}$$

2. **Équation paramétrique d'un plan**
   On définit un plan P à partir d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :
   $$M = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$$
   à condition que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
3. **Équation cartésienne d'un plan**
   Pour trouver facilement une équation cartésienne d'un plan, on utilise le fait que le produit mixte d'un triplet de vecteurs coplanaires est nul.
   L'équation cartésienne du plan P passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et tels que $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires est :
   $$\begin{aligned} M \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ coplanaires} \\ &\Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 \end{aligned}$$
   Si on reprend la définition du produit mixte avec le produit scalaire, on en déduit que le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Une droite étant vue comme une intersection de deux plans, une équation cartésienne de droite revient à trouver deux équations cartésiennes de plans non confondus qui contiennent la droite qui nous intéresse.

Exercice 7.7 **Exemple 7 :**

1. Donner l'équation paramétrique de la droite passant par le point $A(1, -1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. Soit d la droite d'équation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$$
   Trouver un vecteur directeur et un point sur cette droite.
3. Donner l'équation paramétrique du pla passant par le point $A(1, -1, 2)$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
4. Donner une équation cartésienne et paramétrique passant par $A(0, -1, 2)$ dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
5. Soient $P_1 : x + y - z - 3 = 0$ et $P_2 : 2x - y + z + 1 = 0$. Montrer que l'intersection de ces plans est une droite et donner une équation paramétrique de cette droite.

7.3 Distances

On utilise la même logique que dans le plan.

Théorème 7.3.1 ***Formules de distance dans l'espace***

Pour calculer la distance d'un point M à une droite d de l'espace, on utilise la formule :

$$\frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

Avec $\vec{u}$ vecteur directeur de la droite d et A un point de d.

Pour calculer la distance d'un point M à un plan P de l'espace, on utilise la formule :

$$\frac{||\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}||}{||\vec{n}||}$$

Avec $\vec{n}$ vecteur normal au plan P et A point sur P.

Si le plan P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan, $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de l'espace et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point du plan, on peut utiliser directement la formule moins antipathique :

$$\frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercice 7.8 **Exemple 8 :**

1. Soit $A(2, -1, 0)$ et $M(3, 0, \frac{1}{2})$ deux points de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur. Donner une équation de la droite passant par A et de direction $\vec{u}$, puis calculer la distance de M à cette droite.
2. Calculer la distance du poitn $M(1, 2, 3)$ au plan $P : 2x - y + 2z - 1 = 0$

7.4 Sphères

On transpose la définition d'un cercle dans un plan avec une dimension de plus.

Définition 7.4.1 ***Sphère***

La sphère S de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est l'ensemble des points situés à une distance R de Ω.

On le traduit par :

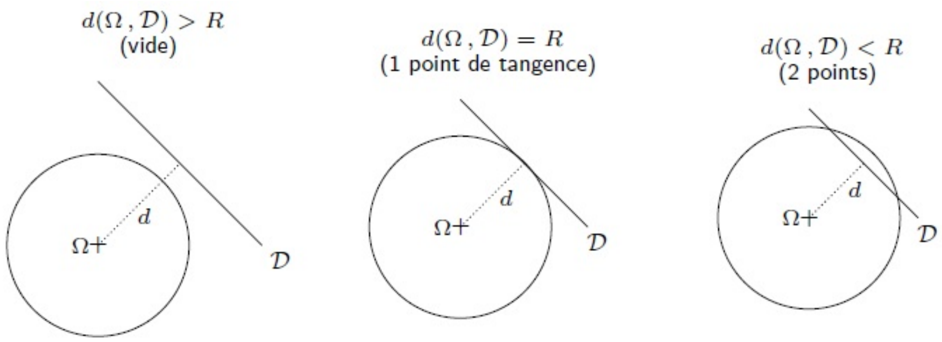
$$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

Ce qui donne comme équation pour la shpère S :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

7.4.1 Intersection d'une sphère et d'une droite

Il y a trois cas à envisager :



Exercice 7.9 **Exemple 9 :**

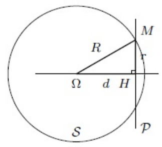
On considère la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$ et la droite d d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -5 + 3t \\ z = -8 + 4t \end{cases}$

1. Déterminer le rayon et le centre de S.
2. Montrer que d et S ont deux points d'intersection et calculer leurs coordonnées.

7.4.2 Intersection d'une sphère et d'un plan

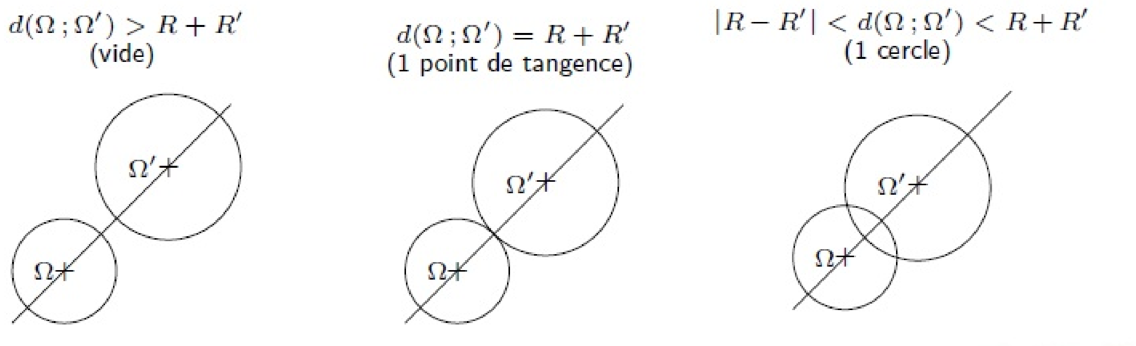
On calcule la distance du centre Ω de la sphère de rayon R avec le plan P et on distingue trois cas :

1. $d(\Omega, P) > R$ et l'intersection est vide.
2. $d(\Omega, P) = R$ et l'intersection est un point, le plan est tangent à la sphère.
3. $d(\Omega, P) < R$ et l'intersection est un disque de centre H, le projeté orthogonal de Ω sur P de rayon r qui vérifie $r^2 = R^2 - \Omega H^2$.



7.4.3 Intersection de deux sphères

On a encore 3 cas à envisager :



■ **Exercice 7.10** **Exemple 10 :**

Déterminer les intersections de sphères suivantes :

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad \text{et} \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 8 = 0$$

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9, \quad \text{et} \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$S_1 : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4, \quad \text{et} \quad S_2 : (x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 1$$

7.5 Exercices

■ **Exercice 7.11** **Droites et plans**

Soit d la droite passant par $A(-1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Soit P le plan d'équation $2x + y - z - 3 = 0$.

1. Montrer que d n'est pas orthogonale à P.
2. Déterminer une équation du plan contenant d et perpendiculaire à P.

Exercice 7.12 Produit vectoriel

On considère les points $A(-1,0,0), B(1,1,3), C(-1,2,-2), D(3,0,8), E(2,-2,-4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux.
3. Montrer que A, B, C, D sont coplanaires.

Exercice 7.13 Produit vectoriel

On considère les points $A(1,2,3), B(-1,3,4), C(-1,0,1), D(-1,6,7)$.

1. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont-ils coplanaires ?
3. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$.
4. Déterminer une équation du plan (ABC).
5. Donner une équation paramétrique de la droite d, orthogonale au plan (ABC) et passant par le point $S(3,3,3)$.
6. Etudier l'intersection de d avec le plan (ABC).

Chapitre 8
Nombres complexes

8.1 Introduction

Les complexes sont partout en science, vous les rencontrerez en mécanique, en électricité, dès qu'il s'agira de résoudre des équations polynomiales ou différentielles ..

8.2 Différentes formes

8.2.1 Forme algébrique

Définition 8.2.1 ***Nombre complexe***

On note i un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
Un nombre complexe z est un nombre qui s'écrit sous la forme (algébrique)

$$z = a + ib$$

avec a et b réels.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Définition 8.2.2 ***Partie réelle, partie imaginaire***

Lorsqu'on écrit $z = a + ib$, on dit que

- *a est la partie réelle de z*
- *b est la partie imaginaire de z.*

On note $a = \Re(z)$ ou $Re(z)$ et $b = \Im(z)$ ou $Im(z)$.

Définition 8.2.3 ***Nombre réel, imaginaire pur***

Tout complexe z tel que $b = 0$ s'écrit $z = a$: c'est un nombre réel.
Tout complexe z tel que $a = 0$ s'écrit $z = ib$: c'est un nombre imaginaire pur.

Addition

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ respectent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

Exercice 8.1 Premier calcul algébrique

On pose $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 2 - i$. Calculer sous forme algébrique

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2} \qquad \text{et} \qquad 2z_1 + 3z_2.$$

Exercice 8.2 Algébrique

On pose $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 3 - 4i$. Calculer sous forme algébrique

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2} \qquad \text{et} \qquad 2z_1 + 3z_2.$$

Exercice 8.3 Équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z + 2 = i(z - 1)$
- $iz - 3 = 2i$
- $\frac{z+1}{z-1} = 1 + i$.

Exercice 8.4 Système

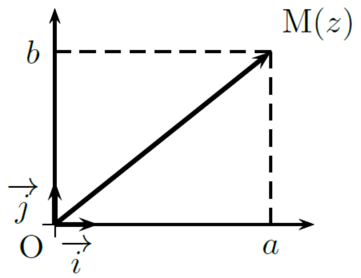
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$$

8.2.2 Représentation géométrique

Le plan complexe est le plan muni d'un repère orthonormé direct. Soit $z = a + ib$.

- $M\,(a;b)$ est **l'image** du complexe $z = a + ib$
  De même $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de $z = a + ib$
- $z = a + ib$ est **l'affixe** du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$



Proposition 8.2.4 ***Nombre complexe et vecteur***

Soit z_1 et z_2 les complexes d'image les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ et soit α et β deux réels :

- *l'image de $z_1 + z_2$ est le vecteur $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$*
- *l'image de αz_1 est le vecteur $\alpha\overrightarrow{V_1}$*
- *l'image de $\alpha z_1 + \beta z_2$ est le vecteur $\alpha\overrightarrow{V_1} + \beta\overrightarrow{V_2}$.*

Exercice 8.5 **Représentation**

Représenter les images A, B et C des complexes suivants :

$$z_A = 2 + 3i \qquad z_B = 3i - 2 \qquad z_C = -1 - 2i$$

Donner les affixes des milieux des segments $[AB]$ et $[BC]$.

8.2.3 Conjugué d'un complexe

Définition 8.2.5 ***Nombre conjugué***

Le conjugué du complexe $z = a + ib$ est le complexe $\bar{z} = a - ib$

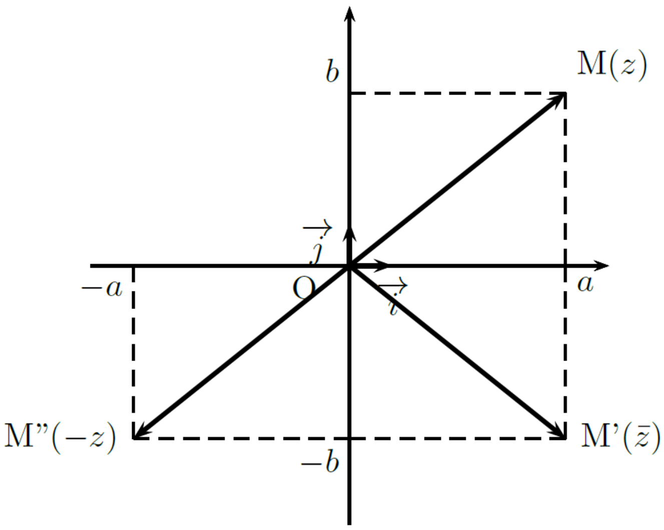
Exercice 8.6 Applications

$\overline{1+3i} =$ $\overline{i} =$ $\overline{-1} =$

$\overline{-2i} =$ $\overline{3} =$

Proposition 8.2.6 ***Image***

L'image de $\bar{z}$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des abscisses.
L'image de $-z$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'origine O du repère.



Proposition 8.2.7 ***Opérations et nombre conjugué***

1. $z\bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 = |z|^2$
2. $z + \bar{z} = 2Re(z)$
3. $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$
4. $\bar{\bar{z}} = z$

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
3. si $z_2 \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Exercice 8.7 Démonstration

Faire la démonstration des propriétés précédentes.

Exercice 8.8 **Conjugué**

Donner les conjugués des complexes suivants :

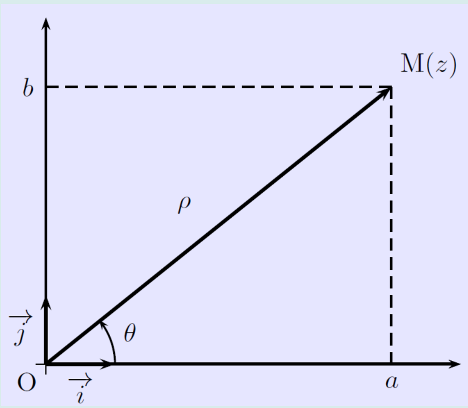
$$z_1 = (3-2i)(i-4) \qquad z_2 = \frac{3-2i}{2i-4} \qquad z_3 = \frac{(2-i)(1+i)}{2i(5+3i)}$$

8.2.4 Forme trigonométrique : module et argument

Définition 8.2.8 *Module et argument*

Soit $z = a + ib$ un complexe d'image M.

Le module de z, noté $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Si $z \neq 0$, un argument de z, noté $\arg(z)$, est une mesure en radian, de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.



$z = a + ib$

$\rho = |z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \arg(z) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$

$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho \sin\theta$

Exercice 8.9 **Questions**

— Où se situe l'image d'un affixe dont le module est égal à 2 ?

— Où se situe l'image d'un affixe dont le module est égal à 0 ?

— Où se situe l'image d'un affixe dont le module est égal à 1 ?

— Où se situe l'image d'un affixe dont l'argument est égal à 0 ?

— Où se situe l'image d'un affixe dont l'argument est égal à $\frac{\pi}{2}$?

Exercice 8.10 Argument et module

Soit $z = 2 - 2i\sqrt{3}$. Calculer $|z|$ et $\arg(z)$.

Proposition 8.2.9 ***Propriétés du module et de l'argument***

1. $|-z| = |z|$ *et si* $z \neq 0$ *alors* $\arg(-z) = \pi + \arg(z)[2\pi]$
2. $|\bar{z}| = |z|$ *et si* $z \neq 0$ *alors* $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$
3. - $\arg(z) = 0\ [2\pi]$ *si* $\mathcal{R}e(z) > 0$
   - $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$ *si* $\mathcal{R}e(z) < 0$
   - $\arg(z) = \pi/2\ [2\pi]$ *si* $\mathcal{I}m(z) > 0$
   - $\arg(z) = -\pi/2\ [2\pi]$ *si* $\mathcal{I}m(z) < 0$

Dans ce qui suit on pose $z = a+ib$, avec $\rho = |z| = ||\overrightarrow{OM}||$ et $\theta = \arg(z) = \left(\widehat{\vec{\ }, \overrightarrow{OM}}\right)$.

Définition 8.2.10 ***Forme trigonométrique***

On appelle forme trigonométrique de z *l'expression :*

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

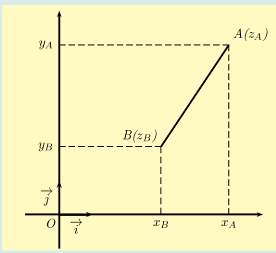
Exercice 8.11 Placement

Soit $z = i + \sqrt{3}$. Calculer $|z|$ et $\arg(z)$.
Donner la forme trigonométrique. Placer le point image d'affixe z dans le plan

Définition 8.2.11 ***Distance et module***

Soient A *et* B *deux points du plan complexe d'affixe respective* z_A *et* z_B, *on a alors*

$$AB = |z_B - z_A|$$



Exercice 8.12 Calculs

Calculer d'une part $AB = \sqrt{||\overrightarrow{AB}||^2}$ et $|z_B - z_A|$ d'autre part.

8.2.5 Forme exponentielle

Définition 8.2.12 ***Forme exponentielle***

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Ainsi $e^{i\theta}$ est le complexe de module 1 et d'argument θ.

*Tout complexe z **non nul** de module ρ et d'argument θ peut donc s'écrire*

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Exemple

Soit $z = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors

$$\overline{z} = 3e^{-i\frac{\pi}{6}} \qquad z^2 = 9e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \overline{z}^2 = 9e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Proposition 8.2.13 ***Formules d'Euler***

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Les formules d'Euler sont équivalentes à

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \qquad \text{et} \qquad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

Exercice 8.13 Forme exponentielle

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$1+i = \qquad 1-i = \qquad i = \qquad -i =$$

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i} = \qquad (1+i)^n = \qquad 7i = \qquad -7 =$$

Exercice 8.14 Forme exponentielle version 2

1. Mettre sous forme exponentielle les complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = 2i$.

2. En déduire la forme exponentielle puis la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.

3. Calculer directement la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.

Exercice 8.15 Formules d'Euler

En utilisant les formules d'Euler retrouver que $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Exercice 8.16 Forme trigonométrique

Écrire les expressions suivantes en utilisant les fonctions sinus et cosinus :

- $\dfrac{3e^{-i6x} + 3e^{i6x}}{2} =$
- $\dfrac{e^{i3x} + 7e^{i4x} + 7e^{-i4x} + e^{-i3x}}{8} =$
- $\dfrac{e^{i4x} - 5e^{i6x} + 5e^{-i6x} - e^{-i4x}}{-4i} =$

Exercice 8.17 Linéarisation

En utilisant les formules d'Euler, linéariser :

$$\sin(x)\cos(3x) \qquad \cos^4(x) \qquad \sin^4(x)\cos^2(x)$$

Calculer

$$\int \sin(x)\cos(3x)dx \qquad \int \cos^4(x)dx \qquad \int \sin^4(x)\cos^2(x)dx$$

8.3 Opérations

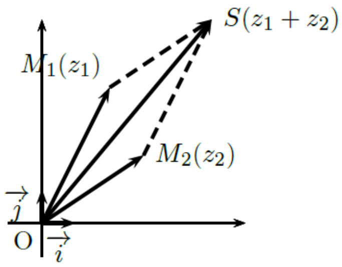
8.3.1 Somme et différence

Proposition 8.3.1 ***Somme***

Si z_1 a pour image M_1 et z_2 a pour image M_2, alors

$$z_1 + z_2 \text{ a pour image } S \text{ où } \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}.$$

Posons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.



Dans le triangle OM_1S, on a $OS \leq OM_1 + M_1S$ et $M_1S = OM_2$, on en déduit

$$OS \leq OM_1 + OM_2$$

d'oú

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Cette inégalité est appelée **inégalité triangulaire.**

Proposition 8.3.2 ***Différence et argument***

Si $z_2 - z_1$ a pour image D avec $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_1M_2}$, alors

$$M_1M_2 = ||\overrightarrow{M_1M_2}|| = |z_2 - z_1| \quad \text{et} \quad \text{l'angle } \left(\vec{i}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = \arg(z_2 - z_1)\,[2\pi].$$

■ **Exercice 8.18** **Distance et angle**

Dans le plan complexe, on donne

— le point A d'affixe $z_a = -3 + i$

— le point B d'affixe $z_b = -2 + 2i$

Calculer la distance AB et une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right)$.

8.3.2 Produit et quotient

Proposition 8.3.3 ***Produit, module et argument***

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \quad \textit{et} \quad \arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$$

Proposition 8.3.4 ***Inverse, module et argument***

Si $z \neq 0$, alors

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \ \textit{et} \ \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$$

Quotient, module et argument

Si $z_2 \neq 0$ alors

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ et } \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

■ **Exercice 8.19** **Affixes**

Démontrer que si z_a, z_b, z_c et z_d sont respectivement les affixes des points A, B, C et D

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_d - z_c}{z_b - z_a}\right) \quad [2\pi]$$

Partir de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right) = -\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right)$, puis utiliser la propriété précédente.

■ **Exercice 8.20** **Quatre points**

Dans le plan complexe, on donne les points A, B, C et D, d'affixe respective

$$z_a = -1 + i, \qquad z_b = 1 + 2i, \qquad z_c = 2 \qquad \text{et} \qquad z_d = -i$$

Calculer une mesure de chacun des angles $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right)$.

Utiliser le résultat de l'exercice précédent, et les formes trigonométriques des rapports qui interviennent.

Proposition 8.3.5 ***Puissance d'un nombre complexe, module et argument***

Pour tout complexe $z \neq 0$ et pour tout entier relatif n,

$$|z^n| = |z|^n \quad \textit{et} \quad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$$

Formule de Moivre

Pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n,

$$\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exercice 8.21 **Formule de Moivre**

1. Écrire la formule de Moivre pour $n = 2$.
2. Développer $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2$, et retrouver les formules de trigonométrie de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

8.3.3 QCM

Q1. La forme algébrique d'un nombre complexe z est :

1. $z = a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$
2. $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$
3. $z = r\,e^{i\theta}$
4. $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Q2. Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est :

1. $|z| = a^2 + b^2$
2. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
3. $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
4. $|z| = a + b$

Q3. La forme trigonométrique d'un nombre complexe z est donnée par :

1. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
2. $z = a + ib$
3. $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$
4. Elle est uniquement définie si $r = 1$

Q4. La forme exponentielle de z s'écrit :

1. $z = re^{i\theta}$
2. $z = \ln(r) + i\theta$
3. $z = |z|\,e^{i\arg(z)}$
4. $z = e^{i(a+ib)}$

Q5. Soit $z = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$, alors :

1. $z = 2e^{i\pi/3}$
2. $|z| = 2$
3. $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$
4. Re$(z) = 1$

Q6. Soit $z_1 = re^{i\theta_1}$, $z_2 = se^{i\theta_2}$, alors :

1. $z_1 z_2 = rs\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
3. $\bar{z_1} = r\, e^{-i\theta_1}$
4. $z_1 + z_2 = (r+s)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Q7. Le passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique nécessite :

1. Le module de z
2. L'argument de z
3. Que $z \neq 0$
4. Que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$

Q8. On a la formule d'Euler :

1. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
2. $e^{i\theta} = \tan(\theta) + i$
3. $e^{i\pi} = -1$
4. $e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

8.4 Équation du second degré

8.4.1 Racines carrées complexes d'un nombre complexe

Définition 8.4.1 ***Racines carrées***

Soit $u \in \mathbb{C}$. On appelle racines carrées de u les solutions de l'équation

$$z^2 = u, \quad z \in \mathbb{C}.$$

■ **Exercice 8.22** **Racines**

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 = 36 \qquad z^2 = -25 \qquad z^2 = 2i$$

Méthode dans le cas général

Soit $u = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = u$.

1. $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

2. $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |u| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$

3. En additionnant $(1) + (2)$, on déduit $2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a$ donc

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

4. si $x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ alors d'après (3) :

$$y = \frac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}}$$

et si $x = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ alors d'après (3) :

$$y = -\frac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}}$$

5. Finalement les deux solutions de l'équation $z^2 = a + ib$ sont

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{ib}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}}$$

et

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \frac{ib}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}}$$

Exemple

On cherche z tel que $z^2 = -2 + i2\sqrt{3}$.

1. En posant $z = x + iy$ on obtient $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$,
   donc x et y doivent vérifier le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

2. On peut aussi calculer le module de z : $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = 4$.
   Nous obtenons donc les 3 équations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \\ xy = \sqrt{3} & (3) \end{cases}$$

3. En additionnant $(1) + (2)$, on déduit $2x^2 = 2$, c'est-à-dire $x^2 = 1$
   donc $x = 1$ ou $x = -1$
4. D'après (3), si $x = 1$ alors $y = \sqrt{3}$ et si $x = -1$ alors $y = -\sqrt{3}$

Finalement les deux solutions de l'équation $z^2 = -2 + i2\sqrt{3}$ sont :

$$1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad -1 - i\sqrt{3}$$

8.4.2 Équation du second degré à coefficients complexe

Proposition 8.4.2 ***Forme générale***

On appelle équation du second degré à coefficients complexe, une équation du type

$$az^2 + bz + c = 0$$

avec $a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{C}$.

Proposition 8.4.3 ***Forme des solutions***

Ce type d'équations admet toujours deux solutions complexes, qui sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

avec $\delta^2 = b^2 - 4ac$.

Pour déterminer δ, on pose $\delta = x + iy$, puis on cherche x, y tels que $\delta^2 = b^2 - 4ac$, en écrivant $b^2 - 4ac$ sous forme algébrique. On peut donc utiliser la méthode de résolution du type $z^2 = u$.

■ **Exercice 8.23** **Équation à coefficients réels**

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 5 = 0$.

■ **Exercice 8.24** **Équation à coefficients complexes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (4 - i)z + 5 + i = 0$.

■ **Exercice 8.25** **Racines de P**

Soit $P(z) = 2z^3 - (1 + 4i)z^2 + (4 - 6i)z - 2 + 4i$.

1. Montrer que $1/2$ est racine de $P(z)$.
2. Factoriser $P(z)$ (*rappel : si α est une racine d'un polynôme P de degré n, alors $P(z)$ se factorise par $z - \alpha$, c'est-à-dire que $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n - 1$*).
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

8.5 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

8.5.1 Cas général

Définition 8.5.1 ***Racine*** $n^{\text{ièmes}}$

Soit $u \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq 2$. *Une racine* $n^{\text{ième}}$ *du complexe* u *est une solution de l'équation*

$$z^n = u.$$

Dès que $n \geq 3$, la méthode algébrique est déconseillée et on pose $z = \rho e^{i\theta}$.

Exemple

Pour trouver les racines cubiques de $-8i$, il s'agit de résoudre $z^3 = -8i$.

1. On pose $z = \rho e^{i\theta}$, l'équation devient

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

2. En identifiant module et argument, on obtient

$$\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

3. Solutions :

$k = 0 : z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, affixe de M_0
$k = 1 : z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, affixe de M_1
$k = 2 : z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$, affixe de M_2

Le triangle $M_0M_1M_2$ est équilatéral.

On peut aussi choisir comme valeurs de k, $-1, 0, 1$: si bien que la racine z_2 ci-dessus sera donnée sous la forme $z_{-1} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Proposition 8.5.2 ***Racines*** $n^{\text{ièmes}}$

Pour tout $u \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq 2$. *Il existe toujours exactement* n *solutions à équation*

$$z^n = u.$$

Exercice 8.26 **Racines quatrièmes de -4 :**

Résoudre $z^4 = -4$

8.5.2 Cas particulier : racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Définition 8.5.3 ***Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité***

Une racine $n^{\text{ième}}$ de 1 est une solution de l'équation

$$z^n = 1.$$

En posant $z = \rho e^{i\theta}$:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}.$$

Exemple

Pour trouver les racines cubiques de l'unité, il s'agit de résoudre $z^3 = 1$.
<u>Solutions :</u>

$k = 0 : z_0 = 1$

$k = 1 : z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$

$k = 2 : z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$

On notera que $1 + j + j^2 = 0$.

Exemple

Résolution de $z^3 = -8i$, par une technique se ramenant aux racines cubiques de l'unité.

1. Une racine évidente : $2i$
2. donc on cherche z tel que $z^3 = (2i)^3 \Longleftrightarrow \left(\frac{z}{2i}\right)^3 = 1$
3. On déduit que $\frac{z}{2i} = 1$ ou $\frac{z}{2i} = j$ ou $\frac{z}{2i} = j^2$
4. c'est-à-dire $z = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ou $z = 2ij = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ou $z = 2ij^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

8.5.3 QCM

Q1. Une équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, a toujours :

1. Deux solutions dans $\mathbb{R}$
2. Deux solutions dans $\mathbb{C}$
3. Une seule solution si $\Delta = 0$
4. Deux solutions distinctes si $\Delta \neq 0$

Q2. L'équation $z^2 + 1 = 0$ admet pour solutions :

1. i
2. $-i$
3. 1
4. $\sqrt{2}$

Q3. Le discriminant complexe Δ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est :

1. $b^2 - 4ac$
2. Toujours réel
3. Parfois complexe
4. Nécessaire pour appliquer la formule des racines

Q4. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors les solutions de $z^n = 1$ sont :

1. Les racines n-ièmes de l'unité
2. Réparties régulièrement sur le cercle de rayon 1
3. Données par $e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$
4. Toutes réelles si n est pair

Q5. L'équation $z^3 = 8$ admet comme solutions :

1. 2
2. $2e^{2i\pi/3}$
3. $2e^{-2i\pi/3}$
4. Une infinité de solutions

Q6. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, les solutions de $z^n = z_0$ sont données par :

1. $\sqrt[n]{|z_0|}e^{i(\arg(z_0)+2k\pi)/n}$
2. Une infinité de racines dans $\mathbb{C}$
3. n racines distinctes si $z_0 \neq 0$
4. Une seule racine si $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Q7. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité forme :

1. Un groupe multiplicatif
2. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$
3. Un polygone régulier à n sommets
4. Une droite dans le plan complexe

Q8. Une équation complexe du second degré peut avoir :

1. Deux racines égales
2. Une racine réelle et une imaginaire
3. Deux racines imaginaires pures
4. Des racines conjuguées

8.6 Retour sur les ensembles $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

8.6.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ (polynômes à coefficients complexes)

Théorème 8.6.1 ***Théorème de d'Alembert***

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad \exists a \in \mathbb{C} \text{ et } (\alpha_i, m_i)_{i\in I} \in \mathbb{C} \times \mathbb{N} \quad \text{tels que} \quad P(X) = a\prod_i (X - \alpha_i)^{m_i}$$

Étant donné un polynôme P, on cherche ses racines.

1. $P(X) = X^3 - 1$: après la recherche des racines cubique de 1 :
$$P(X) = (X-1)(X-j)(X-\bar{j})$$
2. $P(X) = X^6 + 1$: cherchons les racines sous la forme $X = \rho e^{i\theta}$, l'équation donne alors
$$\rho^6 e^{i6\theta} = e^{i\pi} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$
On touve finalement
$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$
Les 6 racines sont $\{e^{i\pi/6},\, e^{i\pi/2},\, e^{i5\pi/6},\, e^{i7\pi/6},\, e^{i3\pi/2},\, e^{i11\pi/6}\}$.
Et finalement
$$P(X) = (X - e^{-i\pi/6})(X - e^{i\pi/6})(X - e^{i\pi/2})(X - e^{i5\pi/6})(X - e^{-i5\pi/6})(X - e^{-i\pi/2}).$$
3. $P(X) = X^6 - 2X^3 + 1$: on remarque que
$$P(X) = (X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2(X-\bar{j})^2.$$

8.6.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ (polynômes à coefficients réels)

Proposition 8.6.2 ***Racines sur*** $\mathbb{R}[X]$

Étant donné un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$. Les racines de P sont soit réelles, soit complexes conjuguées.

On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ racine de } P &\iff a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \\
&\iff \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0} = \bar{0} \\
&\iff \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_0} = 0 \\
&\iff \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_0} = 0 \\
&\iff a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + a_0 = 0 \\
&\iff a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \\
&\iff P(\overline{\alpha}) = 0 \\
&\iff \overline{\alpha} \text{ racine de } P
\end{aligned}$$

Proposition 8.6.3 ***Racines complexes sur*** $\mathbb{C}[X]$

Étant donné $\alpha \in \mathbb{C}$. *Le produit* $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ *est à coefficients réels.*

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - (\alpha+\overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha} = X^2 - 2Re(\alpha)X + |\alpha|^2\,.$$

Proposition 8.6.4 ***Factorisation dans*** $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ *peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif (ou encore, aux racines complexes non réelles conjuguées).*

1. $P(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-\bar{j}) = (X-1)(X^2+X+1)$

2. $P(X) = X^6 + 1$
   $= (X-e^{-i\pi/6})(X-e^{i\pi/6})(X-e^{i\pi/2})(X-e^{-i\pi/2})(X-e^{i5\pi/6})(X-e^{-i5\pi/6})$
   $= (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$

Méthode pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

On peut, si nécessaire, rechercher les racines complexes du polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, puis développer les produits du type $(X-a_i)(X-\overline{a_i})$ lorsque $a_i \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ pour retrouver les polynômes de degré 2 irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et établir la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.27 **Polynôme**

On considère le polynôme $P(X) = X^5 - 1$.

1. Déterminer les racines complexes de P.
2. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

8.6.3 Division de polynômes

Dans le paragraphe suivant, on propose de prendre connaissance d'une technique exposée dans le cours sur les polynômes : la division euclidienne des polynômes. Si A et B sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, avec B non nul, il existe un unique couple (Q,R) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad deg(R) < deg(B)$$

Divisibilité : si $R = 0$, c'est-à-dire que $A = BQ$ on dit que « A est divisible par B » ou que « B divise A ».

(a) Division de x^4-3x^3+x+1 par x^2+2 :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & & +x & +1 & x^2 \quad +2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -2x^2 & & & x^2 \quad -3x \quad -2 \\ \cline{1-3}
 & -3x^3 & & & & \\
 & 3x^3 & & +6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & & & \\
 & & +2x^2 & & +4 & \\ \cline{3-5}
 & & & 7x & +5 &
\end{array}$$

Finalement,
x^4-3x^3+x+1
$=(x^2+2)(x^2-3x-2)+7x+5$

(b) Division de x^3+x^2-1 par $x-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \quad +2x \quad +2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & & & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & & \\
 & & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}$$

Finalement,
x^3+x^2-1
$=(x-1)(x^2+2x+2)+1$

(c) Division de x^3-x^2+x-1 par $x-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +x & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \quad +1 \\ \cline{1-3}
 & & x & & \\
 & & -x & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

donc,
$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$

il suit qu'en posant la division de x^2+1 par $x-i$ on obtient :

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & & +1 & x \quad -i \\ \cline{4-4}
-x^2 & +ix & & x \quad +i \\ \cline{1-2}
 & ix & & \\
 & -ix & -1 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

donc,
$x^2+1=(x-i)(x+i)$
Finalement, on obtient la forme factorisée :
x^3-x^2+x-1
$=(x-1)(x-i)(x+i)$

8.7 Exercices

Exercice 8.28 **Forme algébrique - Somme et produits**

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1=(2+5i)+(i+3)$ **2.** $z_2=4(-2+3i)+3(-5-8i)$ **3.** $z_3=(2-i)(3+8i)$
4. $z_4=(1-i)\overline{(1+i)}$ **5.** $z_5=i(1-3i)^2$ **6.** $z_6=(1+i)^3$

Attention ! Il y a un symbole de conjugaison dans z_4.

Exercice 8.29 Forme algébrique - Quotients

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1}{1+i}$ **2.** $z_2 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ **3.** $z_3 = \frac{1-2i}{3+i}$

4. $z_4 = \dfrac{(3+5i)^2}{1-2i}$ **5.** $z_5 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{3+6i}{3-4i}$

Exercice 8.30 Systèmes

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 &= i \\ -2z_1 + 3iz_2 &= -17 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3iz_1 + iz_2 &= i+7 \\ iz_1 + 2z_2 &= 11i \end{cases}$$

On donnera les résultats sous forme algébrique.

Exercice 8.31 Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ **2.** $z_2 = 9i$ **3.** $z_3 = -3$

4. $z_4 = \dfrac{-i\sqrt{2}}{1+i}$ **5.** $z_5 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$ **6.** $z_6 = \sin x + i\cos x$.

Exercice 8.32 Forme exponentielle, encore

On pose $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_3 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : z_1, z_2, z_3, z_1z_2, $\frac{z_1z_2}{z_3}$.

Exercice 8.33 Les deux à la fois - avec application

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \qquad z_2 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire z_3 sous forme algébrique.
2. Écrire z_3 sous forme trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 8.34 Forme algébrique, le retour

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+2i)^6 \qquad z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \qquad z_3 = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}.$$

Exercice 8.35 Réel positif

Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice 8.36 Forme exponentielle et formule d'Euler

Soient $a, b \in]0, \pi[$. écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{ia} \qquad z_2 = 1 - e^{ia} \qquad z_3 = e^{ia} + e^{ib} \qquad z_4 = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}.$$

Exercice 8.37 Le même module

Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Exercice 8.38 Homographie

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 8.39 Exponentielle

Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 8.40 Équations du premier degré

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z + 2i = iz - 1 \qquad (3+2i)(z-1) = i$$

$$(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i \qquad (4-2i)z^2 = (1+5i)z.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique.

■ **Exercice 8.41** **Équations avec des conjugués**

Résoudre les équations suivantes :

$$2z + i = \overline{z} + 1 \qquad 2z + \overline{z} = 2 + 3i \qquad 2z + 2\overline{z} = 2 + 3i.$$

■ **Exercice 8.42** **Racine carrée d'un nombre complexe**

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 8 - 6i$.

■ **Exercice 8.43** **Racine carré de deux façons**

Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
En déduire la valeur de $\cos \pi/12$.

■ **Exercice 8.44** **Racine carrée puis équation du second degré**

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $1 + 2\sqrt{2}i$ sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + iz - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

■ **Exercice 8.45** **Racines n-ièmes**

Résoudre les équations suivantes :

$$z^3 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z^6 = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}} \qquad z^5 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^2}.$$

■ **Exercice 8.46** **Presque des racines de l'unité**

Résoudre les équations suivantes :

$$(z-1)^5 = (z+1)^5 \qquad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0 \qquad (z+i)^n = (z-i)^n.$$

Exercice 8.47 Degré plus grand

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai à l'équation.
2. Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$.

Exercice 8.48 Lieu géométrique et arguments

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation demandée :

a. $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b. $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

c. $\arg(iz) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$

d. $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

e. $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Exercice 8.49 Lieux géométriques et module

Déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie

1. $|z-i| = |z+i|$

2. $\dfrac{|z-3+i|}{|z+5-2i|} = 1$

3. $|(1+i)z - 2i| = 2$

4. $|3+iz| = |3-iz|$

Exercice 8.50 écriture complexe de transformations

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \mapsto \frac{1}{i}z$

2. $z \mapsto z + (2+i)$

3. $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$

4. $z \mapsto (1 + i\tan\alpha)z - i\tan\alpha,\ \ \alpha \in [0, \pi/2[.$

Exercice 8.51 Une coquille d'escargot

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note A_0 le point d'affixe 6 et S la similitude de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On pose $A_{n+1} = S(A_n)$ pour $n \geq 1$.

1. Déterminer, en fonction de n, l'affixe du point A_n. En déduire que A_{12} est sur la demi-droite $(O, \vec{i})$.
2. Établir que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. Calculer la longueur du segment $[A_0A_1]$. En déduire la longueur ℓ de la ligne polygonale $A_0A_1A_2 \dots A_{12}$.

Exercice 8.52 Lieux géométriques

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z qui vérifient la condition.

1. $I(i)$ et $M'(iz)$ sont alignés avec M ; déterminer alors l'ensemble des points M' correspondants ;
2. $\Re e\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0$;
3. M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 sont les sommets d'un triangle rectangle.

Exercice 8.53 Linéariser !

1. Établir la formule de trigonométrie $\cos^4(\theta) = \cos(4\theta)/8 + \cos(2\theta)/2 + 3/8$.
2. Fournir une relation analogue pour $\sin^4(\theta)$.

Exercice 8.54 Linéariser à nouveau

Linéariser $\cos^5 x$, $\sin^5 x$ et $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 8.55 Addition

1. Démontrer la formule de trigonométrie $\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$.

2. Fournir une relation analogue pour $\sin(4\theta)$.

Exercice 8.56 Addition à nouveau

Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 8.57 Un calcul d'intégrale

Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt$.

Exercice 8.58 Sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky)$;
2. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$ et $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{(\cos x)^k}$,
   avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

3. $D_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ et $K_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k$, avec $x \neq 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.59 Module

Déterminer z pour que $z, 1 - z$ et z^2 aient le même module.

Exercice 8.60 Primitives

1. À l'aide des formules d'Euler, linéariser $f(x) = \cos 2x \sin 3x$ et $g(x) = \cos x \sin^5 x$.
2. En déduire les primitives $\displaystyle\int f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int g(x)\,dx$.
3. Par le calcul direct de $\displaystyle\int \cos x \sin^5 x\,dx$ puis par linéarisation de la primitive, retrouver le résultat de la question 2.

Exercice 8.61 Imaginaire pur ou réel ?

Soit le nombre complexe $T = \dfrac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)}$.

Établir si T est un imaginaire pur, ou un réel.

Exercice 8.62 Nouvelle équation

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2 + 2i)z - 3 + 6i = 0$

Exercice 8.63 Racines cinquièmes

Déterminer les racines cinquième du complexe $16(1 + i\sqrt{3})$.

Exercice 8.64 Racines

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^9 = 1$
2. En déduire les solutions de l'équation $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^9 = 1$

Chapitre 9

Suites réelles

9.1 Suites de référence

9.1.1 Suites arithmétiques

Définition 9.1.1 ***Suite arithmétique***

Une suite arithmétique est une suite dont le passage d'un terme au suivant s'obtient en ***ajoutant*** *toujours la même quantité r appelée la raison.*

De cette définition, découle la forme récurrente de la suite :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Théorème 9.1.2 ***Expression générale d'une suite arithmétique***

Avec un peu de réflexion, on en déduit l'expression en fonction de n :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Où u_p représente le premier terme de la suite.

On rappelle la formule de sommation :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

■ **Exercice 9.1** **Exemple 1 :**

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

1. $u_2 = 3$ et $r = 0,2$. Calculer u_{50}.
2. $u_6 = 4$ et $u_8 = 12$. Calculer r et u_5.
3. $u_2 = 7$ et $u_10 = 1$. Calculer r et u_0.

9.1.2 Suites géométriques

Définition 9.1.3 ***Suite géométrique***

Une suite géométrique est une suite dont le passage d'un terme au suivant s'obtient en ***multipliant*** *toujours la même quantité q appelée la raison.*

De cette définition, découle la forme récurrente de la suite :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$$

Théorème 9.1.4 ***Expression générale d'une suite géométrique***

Avec un peu de réflexion, on en déduit l'expression en fonction de n :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Où u_p représente le premier terme de la suite.

On rappelle la formule de sommation :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 9.2 **Exemple 2 :**

(u_n) est une suite géométrique de raison q.

1. $u_0 = 16$ et $q = 0,5$. Calculer u_8.
2. $u_6 = 9$ et $q = -3$. Calculer u_0.
3. $u_10 = 18$ et $u_9 = -6$. Calculer q.

9.1.3 Les suites arithmético-géométriques

Définition 9.1.5 ***Suites arithmético-géométriques***

Ces suites sont de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

Si $a = 1$, on retombe sur une suite arithmétique et si $b = 0$ sur une suite géométrique.

L'objectif, comme souvent avec les suites, est de trouver une expression en fonction de n. On se place donc dans le cas où $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Méthode de résolution des suites arithmético-géométriques

La réalisation de cet objectif se déroule en trois étapes :

1. On cherche un point fixe, c'est à dire un réel c tel que :
$$c = ac + b$$
2. On définit une suite auxiliaire v définie par :
$$v_n = u_n - c$$
Et on montre que v_n est géométrique (de raison a).
3. On exprime v en fonction de n et on en déduit une expression de u en fonction de n.

■ **Exercice 9.3** **Exemple 3 :**

Pour chacune des suites suivantes ; déterminer son expression en fonction de n.

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_0 = 150 \\ u_{n+1} = 0,8\, u_n + 45 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

9.1.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Ces suites sont de la forme :
$$\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

Méthode de résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Pour trouver une expression en fonction de n, on considère ce que l'on appelle l'équation caractéristique :
$$r^2 - ar - b = 0$$
On calcule le discriminant Δ et on distingue les trois cas habituels :

1. $\Delta > 0$
L'équation admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et dans ce cas, il existe λ et μ uniques tels que :
$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
2. $\Delta = 0$
L'équation admet une unique solution r et dans ce cas, il existe λ et μ uniques tels que :
$$u_n = (\lambda + \mu n) r^n$$

3. $\Delta < 0$ L'équation admet deux solutions complexes $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$ et dans ce cas, il existe λ et μ uniques tels que :

$$u_n = r^n\Big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\Big)$$

Remarque
Dans chacun des cas, le couple (λ, μ) est déterminé en appliquant les formules de u_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

■ **Exercice 9.4** **Exemple 4 :**

Pour chacune des suites suivantes, déterminer son expression en fonction de n.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

9.2 Variations et limites

9.2.1 Variations

Définition 9.2.1 ***Variations***

*Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier n, on a :*

$$u_{n+1} \geq u_n$$

*Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier n, on a :*

$$u_{n+1} \leq u_n$$

Dans la pratique, on dispose de quatre méthodes pour étudier les variations d'une suite :

1. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. Si $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
4. Utiliser une démonstration par récurrence.

Remarque
Attention, une suite n'est pas nécessairement croissante ou décroissante... Les suites géométriques à raisons négatives ne sont ni l'une ni l'autre.

9.2.2 Majoration et minoration

Définition 9.2.2 ***Majoration et minoration***

Une suite (u_n) est ***majorée*** *s'il existe M réel tel que $u_n \leq M$. Une suite (u_n) est* ***minorée*** *s'il existe m réel tel que $u_n \geq m$.*

Une suite croissante est minorée par son premier terme.
Une suite décroissante est majorée par son premier terme.
Une suite majorée et minorée est dite bornée.

Exercice 9.5 **Exemple 5 :**

Trouver un majorant et un minorant pour chacune des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{4}\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{-n}$

9.2.3 Limites

Contrairement aux fonctions, la limite d'une suite n'a de sens que pour n qui tend vers $+\infty$.

Définition 9.2.3 ***Limites***

On dit que (u_n) *converge vers une limite finie* $\ell \in \mathbb{R}$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$$

On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

On dit que (u_n) *diverge vers* $\pm\infty$ *si :*

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad n > N \Rightarrow |u_n| > M$$

On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$$

Une suite peut aussi ne pas avoir de limite, comme les fonctions. On parle parfois de divergence de seconde espèce.

Techniques de calcul de limites

On dispose de techniques très pratiques pour justifier de la convergence ou non d'une suite et parfois même de trouver sa limite.

1. Toute suite croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) est convergente.
2. si $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, alors nécessairement ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.
3. **Inégalité des accroissements finis**
   Si f est dérivable sur un intervalle I et si $\exists M > 0$ tel que $|f'(x)| \leq M$, alors pour tout couple a, b dans I, on a :
   $$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$
4. **Équivalents**
   Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **équivalentes** si :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$
   On note $u_n \sim v_n$.
   Deux suites équivalentes ont même limite.Il faut connaître les équivalents usuels pour u convergente vers 0.
   $$e^{u_n} - 1 \sim u_n \quad \ln(1 + u_n) \sim u_n \quad \sin u_n \sim u_n \quad \tan u_n \sim u_n$$
   $$(1 - u_n)^\alpha \sim \alpha u_n \quad 1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$$

5. **Sur les suites géométriques**
   - Si $|q| < 1$, alors q^n tend vers 0.
   - Si $q > 1$, alors q^n tend vers $+\infty$.
   - Si $q = 1$, alors $q^n = 1$, la suite est constante.
   - Si $q \leq -1$, alors q^n n'a pas de limite.

■ Exercice 9.6 Exemple 6 :

1. On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n+3}{3+u_n} \end{cases}$
   (a) Montrer par récurrence que $u_n \geq 0$ puis que $u_n - 3 \leq 0$.
   (b) Montrer que u_n est croissante.
   (c) En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.
2. On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$ On pose $f(x) = \frac{1}{1+x}$
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution l sur $]0, 1[$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
   (d) Montrer que $|u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
3. Calculer les limites des suites suivantes :
   (a)
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3^n - 5^n}{3^n + 5^n}$$
   (b)
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 - n}$$
   (c)
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$$
   (d)
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}$$
   (e)
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(1 + 2\tan(1/n))}{\sin(1/n)}$$

9.3 Suites extraites et suites adjacentes

9.3.1 Suites extraites

Définition 9.3.1 ***Suite extraite***

*Une **suite extraite** de la suite (u_n) est une suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi(n)$ est une suite strictement croissante d'indices.*

En particulier, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont extraites de (u_n).
Le résultat le plus utile sur les suites extraites est le suivant :

Théorème 9.3.2 ***Propriété fondamentale des suites extraites***

Si une suite (u_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Remarque
On se sert surtout de ce résultat pour montrer qu'une suite n'a pas de limite.

Par exemple, considérons la suite $u_n = (-1)^n$:

- *La suite extraite (u_{2n}) tend vers 1*
- *alors que la suite extraite (u_{2n+1}) tend vers -1.*

*donc la suite (u_n) n'a pas de limite. -1 et 1 sont appelés **valeurs d'adhérence** dans ce cas, ces deux valeurs "attirent" une infinité de terme de la suite (u_n).*

La réciproque de ce résultat est moins restrictive, il suffit que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite et (u_n) converge. Cela fonctionne avec n'importe quelle partition des entiers naturels, c'est une méthode de raisonnement très utilisée en arithmétique, notamment avec des tableaux de congruences.

■ **Exercice 9.7** **Exemple 7 :**

Soit (u_n) une suite réelle définie sur les entiers strictement positifs vérifiant :

$$0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}$$

Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (u_n) tend vers 0 en utilisant les suites extraites de termes pairs et impairs.

9.3.2 Suites adjacentes

Définition 9.3.3 ***Suites adjacentes***

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites ***adjacentes*** *si :*

1. (u_n) *est croissante*
2. (v_n) *est décroissante*
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} |v_n - u_n| = 0$

Théorème 9.3.4 ***Propriété des suites adjacentes***

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors :
Pour tout entier n, $u_n \leq v_n$ et (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice 9.8 **Exemple 8 :**

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 3 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 3 + \frac{1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

9.4 Exercices

Exercice 9.9 **Sommes**

Soit la suite u définie par :

$$u_n = (n+1)^2 - n^2$$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. Montrer que cette suite est arithmétique et préciser sa raison.
3. Calculer la somme des 100 premiers nombres impairs.

Exercice 9.10 Sommes

On considère les suites u et v telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2}; \quad u_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit w la suite telle que $w_n = u_n + v_n$. Montrer que w est géométrique et calculer la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite w.
2. Soit t la suite telle que $t_n = u_n + v_n$. Montrer que t est arithmétique et calculer la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite t.
3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exercice 9.11 Suites extraites

On considère les suites u et v telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Soit w la suite définie par :
$$w_n = v_n - u_n$$
Montrer que w est géométrique et déterminer sa limite.
2. Montrer que u est croissante et v décroissante.
3. On considère la suite t définie par :
$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$
Montrer que t est constante et en déduire la limite de u et v.

Exercice 9.12 Suites adjacentes

on considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4 + u_n} \end{cases}$$

On considère la suite v définie par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Montrer que v est géométrique et montrer qu'elle converge.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. trouver la limite de u.

■ Exercice 9.13 Équivalents

Quels sont les équivalents corrects en l'infini parmi les proposition suivantes ?

1. $n \sim n+1$
2. $n^2 \sim n^2+n$
3. $\ln n \sim \ln(10^6 n)$
4. $e^n \sim e^{n+10^6}$
5. $e^n \sim e^{2n}$
6. $\ln n \sim \ln{(n+1)}$

■ Exercice 9.14 Équation

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes en l'infini.

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \frac{n^3 - \sqrt{1-n^2}}{\ln n - 2n^2}$
4. $u_n = \sin{(\frac{1}{\sqrt{n+1}})}$

■ Exercice 9.15 Suite

On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +infty[$ par :

$$f(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
2. Montrer que :
$$3 \leq u_n \leq 4$$
3. Montrer que pout tout réel x de l'intervalle $[3,4]$, on :
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{12}$$
4. Montrer l'existence d'un unique $\alpha \in [3,4]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|u_n - \alpha$$
Puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{12})^{n+1}$$
6. En déduire la limite de u.

■ Exercice 9.16 Suite

Un jardinier décide de verser un seau d'eau au pied de chacun des peupliers qui bordent son champ. Il y a 95 peupliers, en ligne droite, espacés de 3 mètres et la prise d'eau est au pied du premier. Le jardinier ne porte qu'un seul seau à la fois. On suppose qu'il arrose les peupliers dans l'ordre d'alignement du plus proche au plus éloigné des arbres. On pose u_n la distance aller-retour pour arroser le n-ième arbre et revenir au point d'eau.

1. Calculer les distances qui correspondent aux 4 premiers aller-retours.
2. Quelle est la nature de u ? préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer la distance que doit parcourir le jardinier pour arroser tous ses peupliers.
5. Il commence sa lourde tâche ; mais épuisé, il décide de s'arrêter après avoir parcouru exactement 10 266 m. combien a-t-il arrosé d'arbres ?

■ Exercice 9.17 Suite

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par :

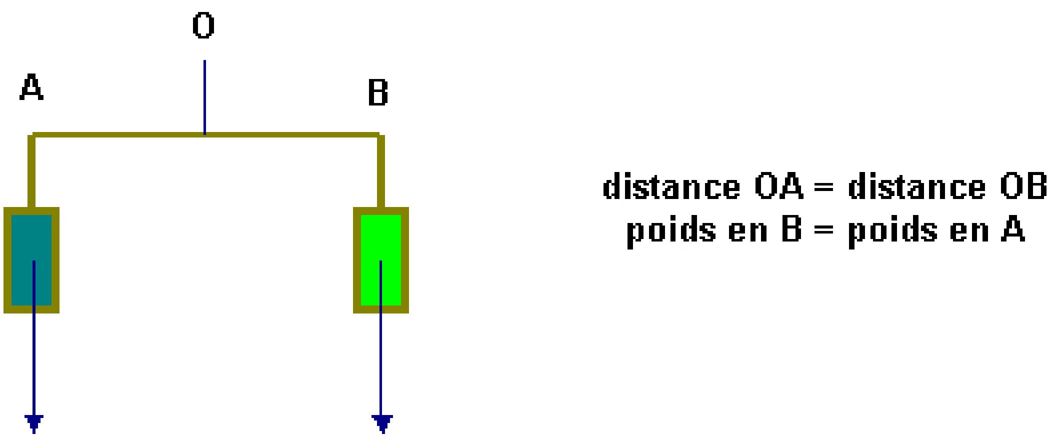
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in]0, \frac{2}{3}[$
3. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1}$, puis les variations de la suite (u_n).
5. Montrer que u converge.
6. Déterminer la limite de $(u_n)^n$ en $+\infty$.
7. Donner enfin la valeur de l.

Chapitre 10
Barycentres

10.1 Introduction : La loi des leviers ou balance d'Archimède

Loi 1 : Des poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux.



Loi 2 : Des poids inégaux s'équilibrent à des distances inégales et le plus grand sera situé à la plus petite distance.
Loi 3 : Des poids quelconques s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à ces poids.

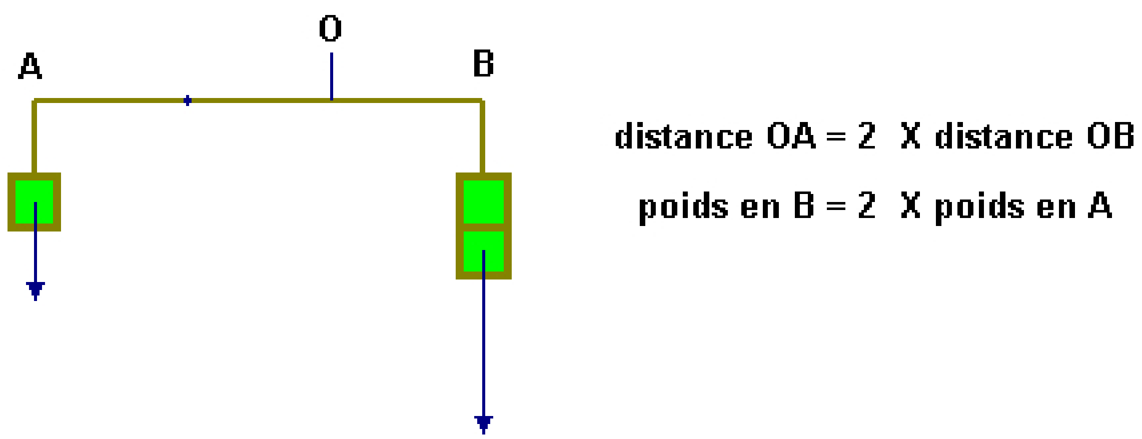
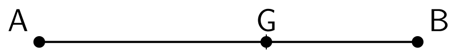


Illustration Si un point A est affecté d'un poids de 2 et un point B d'un poids de 3. On considére leur barycentre G.



D'après la loi des leviers, $\dfrac{GA}{GB} = 3/2$ ou encore $2GA = 3GB$. Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ étant **colinéaires** et de sens contraire, $2\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GB}$. Soit :

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

10.2 Barycentres de deux points pondérés

10.2.1 Définitions

Les définitions et propriétés qui suivent sont valables seulement dans le plan ou l'espace usuels.

Définition 10.2.1 ***Barycentre***

A et B sont des points, a et b sont des nombres réels tels que : $a+b \neq 0$.
Le **barycentre** *des points pondérés (A,a) et (B,b) est le point G défini par :*

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}\,.$$

Pour placer le point G, on peut utiliser l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 10.1 **Premier barycentre**

Soient deux points quelconques A et B. Construire le barycentre du système $\{(A,3);(B,1)\}$.

On convient d'écrire :

$$G \text{ bar } \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline a & b \end{array}.$$

10.2.2 Propriétés

Proposition 10.2.2 ***Propriété fondamentale***

Soit G le barycentre du système $\{(A,a);(B,b)\}$. Pour tout point M :

$$a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MG}.$$

■ **Exercice 10.2** **Propiété**

Démontrer la propriété précédente en utilisant la relation de Chasles à partir de la définition de G.

■ **Exercice 10.3** **Coordonnées**

On se place dans un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ du plan. On considère les points $A(1;2)$ et $B(-2;4)$.
Déterminer les coordonnées de G barycentre du système $\{(A,3);(B,1)\}$.

Proposition 10.2.3 ***Multiplication par un scalaire***

Si k est un réel non nul, le barycentre de (A,a) et (B,b) est aussi celui de (A,ka) et (B,kb).

On utilise cette propriété pour simplifier l'égalité $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ afin de faciliter la construction géométrique de G.

■ **Exercice 10.4** **Deux points**

Soient deux points quelconques A et B.
Construire le barycentre du système $\left\{\left(A,\frac{2}{7}\right);\left(B,\frac{-1}{7}\right)\right\}$.

Exercice 10.5 Milieu

Soient deux points quelconques A et B, et I le milieu de $[AB]$. Donner plusieurs systèmes $\{(A, a); (B, b)\}$ dont I est le barycentre.

Proposition 10.2.4 ***Position de*** G

Si G *est un barycentre du système* $\{(A, a); (B, b)\}$*, alors*

1. G *est sur la droite* (AB) *:* $G \in (AB)$.
2. *Si* a *et* b *sont de même signe, alors* G *est sur le segment* $[AB]$ *:* $G \in [AB]$.
3. *Si* a *et* b *sont de signe contraire, alors* $G \notin [AB]$.

10.2.3 QCM

Chaque question peut avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Q1. Soient deux points A et B. Le barycentre G de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ est :

1. Le point A
2. Le point B
3. Le milieu du segment $[AB]$
4. Le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Q2. Le barycentre G de $(A, 2), (B, 3)$ vérifie :

1. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$
4. $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Q3. Le point G, barycentre de $(A, 2), (B, -2)$, est :

1. Le point A
2. Le point B
3. Situé sur la droite (AB)
4. Non défini (car somme des poids nulle)

10.3 Barycentre de trois points pondérés

10.3.1 Définition et propriété fondamentale

Définition 10.3.1 ***Barycentre de trois points***

A, B, C sont des points, a, b, c sont des nombres réels tels que : $a+b+c \neq 0$.
*Le **barycentre** du système $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ est le point G défini par :*

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Proposition 10.3.2 ***Barycentre***

Soit G le barycentre du système $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$. Pour tout point M :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}.$$

On convient d'écrire :

$$G \text{ bar } \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline a & b & c \end{array}.$$

10.3.2 Propriétés

Proposition 10.3.3 ***Coplanarité***

Le barycentre de trois points pondérés non alignés de l'espace appartient au plan déterminé par ces trois points.

Proposition 10.3.4 ***Simplification***

On peut multiplier ou diviser par un même réel non nul tous les coefficients de plusieurs points pondérés sans changer leur barycentre.

Proposition 10.3.5 ***Barycentre partiel ou associativité***

On ne change pas le barycentre de 3 points pondérés si l'on remplace 2 points pondérés par leur barycentre (sous réserve d'existence) affecté de la somme de leurs coefficients.

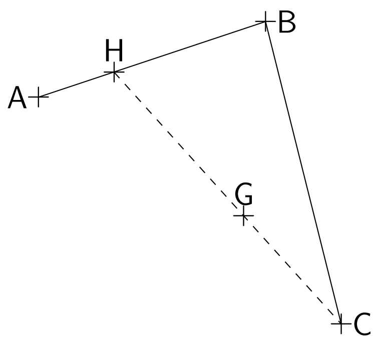
Autrement dit : Si
G est le barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ $(a + b + c \neq 0)$,
et H le barycentre du système $\{(A, a); (B, b)\}$ $(a + b \neq 0)$,

alors G est le barycentre du système $\{(H, a + b); (C, c)\}$.

Exercice 10.6 Système barycentrique

On cherche à construire le barycentre G du système $\{(A, 2); (B, 1); (C, 4)\}$.

1. Par exemple, on construit le barycentre H du système $\{(A, 2); (B, 1)\}$: $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. On construit le barycentre G du système $\{(H, 3); (C, 4)\}$: $\overrightarrow{HG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{HC}$.



Exercice 10.7 Rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle et G bar $\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$.

En considérant I bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ puis J bar $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline 1 & 3 \end{array}$, montrer que G bar $\begin{array}{c|c} I & J \\ \hline 1 & 2 \end{array}$, construire G.

Exercice 10.8 Triangle

Soit ABC un triangle ; I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$.
D est le barycentre du système $\{(A,3);(B,2)\}$; G est celui de $\{(A,3);(B,2);(C,1)\}$.

1. Construire le point D.
2. Démontrer que G est le barycentre du système $\{(D,5);(C,1)\}$ et également celui de $\{(I,2);(J,1)\}$ (indication : G bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array} \Longleftrightarrow G$ bar $\begin{array}{c|c|c|c} A & A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$).
3. En déduire que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes en G.

10.3.3 Isobarycentre de trois points

Définition 10.3.6 ***Isobarycentre***

Notons A, B, C trois points.

Le **barycentre** *du système $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ est appelé* **isobarycentre** *des points A, B, C et :*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Définition 10.3.7 ***Centre de gravité***

Le centre de gravité *d'un triangle ABC est l'isobarycentre des sommets.*

Exercice 10.9 Associativité

Soit ABC un triangle. À l'aide du théorème d'associativité, construire le centre de gravité du triangle ABC.

10.3.4 QCM

Chaque question peut avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Q1. Le barycentre de trois points pondérés $A(a), B(b), C(c)$, avec $a + b + c \neq 0$, est bien défini si :

1. Tous les poids sont positifs
2. Les points sont alignés
3. Les poids ne sont pas tous nuls
4. La somme des poids est non nulle

Q2. Dans un repère, soient $A(0,0), B(2,0), C(0,3)$. Le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées :

1. $(1, 1.5)$
2. $(1, 1)$
3. $(2, 3)$
4. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

Q3. L'isobarycentre de A, B, C correspond à :

1. Le barycentre de $(A,1), (B,1), (C,1)$
2. Le point d'intersection des médianes
3. Le centre de gravité
4. Le point le plus proche de A

Q4. Soient $A(1,1), B(3,5), C(4,-2)$. Le barycentre G de $(A,2), (B,1), (C,1)$ a pour coordonnées :

1. $(2.25, 1.5)$
2. $(2.25, 1)$
3. $(3, 1)$
4. $\left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{4}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-2)}{4}\right)$

Q5. Si G est le barycentre de $(A,1), (B,2), (C,3)$, alors :

1. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$
2. G est plus proche de C que de A
3. G appartient au plan défini par A, B, C
4. G est le centre de gravité du triangle ABC

10.4 Centre d'inertie d'une plaque homogène

10.4.1 Principes de base

Le principe du triangle

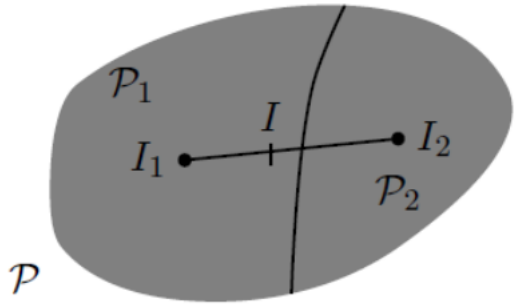
Le centre d'inertie d'une plaque triangulaire est le centre de gravité du triangle.

Le principe de symétrie

1. Si la plaque admet un centre de symétrie I, le centre d'inertie est le point I.
2. Si la plaque admet un axe de symétrie Δ, le centre d'inertie est sur la droite Δ.

Le principe de juxtaposition

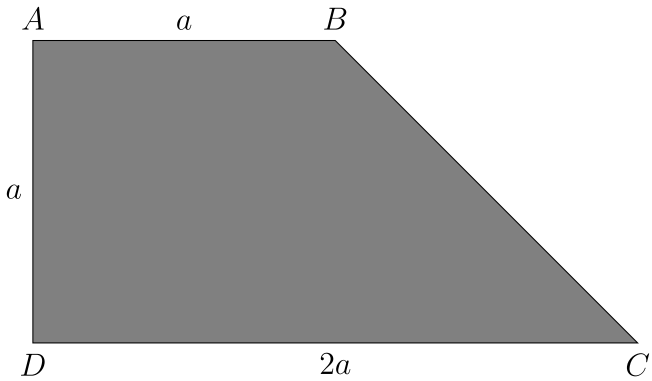
Le centre d'inertie I de la plaque $\mathcal{P}$ est le barycentre du système $\{(I_1, m_1), (I_2, m_2)\}$ où la plaque $\mathcal{P}_1$ a pour masse m_1, pour aire S_1 et pour centre d'inertie I_1 et $\mathcal{P}_2$ a pour masse m_2, pour aire S_2 et pour centre d'inertie I_2.
☞ Les aires étant proportionnelles aux masses alors le point I est le barycentre du système $\{(I_1, S_1); (I_2, S_2)\}$.



10.4.2 Exemples de plaques entières

■ **Exercice 10.10** **Trapèze**

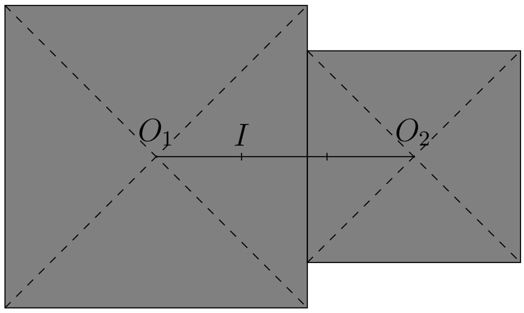
Dans une plaque métallique d'épaisseur constante, on a découpé le trapèze rectangle schématisé ci-dessous.



1. Déterminer la position du centre d'inertie I.
2. I est-il l'isobarycentre des sommets ?

■ Exercice 10.11 Côtés

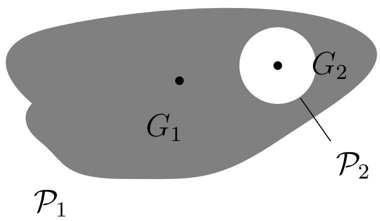
Une plaque est formée de deux carrés C_1 et C_2. Son centre d'inertie I est deux fois plus près de O_1 que de O_2.



Comparer les longueurs du côté de C_1 et du côté de C_2.

10.4.3 Point méthode : plaque évidée

On considère la plaque **homogène** $\mathcal{P}$ ci-dessous, où la partie grisée est la matiére, et la partie claire un évidement :



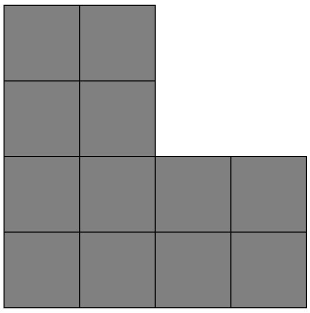
On définit $\mathcal{P}$ à partir de la plaque homogène complète $\mathcal{P}_1$, de centre d'inertie I_1, de masse m_1, d'aire S_1 évidée de la plaque homogène $\mathcal{P}_2$, de centre d'inertie I_2, de masse m_2, d'aire S_2 (les aires sont proportionnelles aux masses).

☞ Le centre d'inertie de $\mathcal{P}$ est le point G barycentre du système $\{(I_1, S_1); (I_2, -S_2)\}$.

10.4.4 Exemples de plaques évidées

■ **Exercice 10.12** **Plaque homogène**

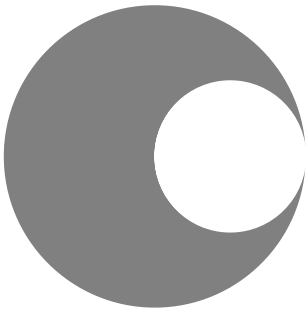
On considère la plaque homogène ci-dessous :



Déterminer le centre d'inertie G de la plaque en utilisant la méthode directe (juxtaposition de deux plaques pleines) puis en utilisant la méthode avec un évidement (plaque compléte à laquelle on enlève une plaque).

■ **Exercice 10.13** **Disque**

Dans un disque homogène d'épaisseur négligeable et de rayon $2r$, on découpe un disque tangent de rayon r.
Déterminer le centre de gravité de la plaque obtenue.



■ **Exercice 10.14** **Trois disques**

Déterminer le centre de gravité d'un système composé de trois disques pleins, homogènes de rayons respectifs 1,2 et 4 deux à deux tangents.

10.5 Exercices

■ **Exercice 10.15** **Étude de la position du barycentre G**

1. Soit G le barycentre des points massifs (A, a) et (B, b).
   (a) Étudier la position de G par rapport à A et B, en fonction de a et b.
   (b) À quelle condition G est-il le milieu du segment $[AB]$?
2. (a) Déterminer le barycentre D des points massifs (A, α), $(B, -\alpha)$, (C, α), avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Comment choisir α, β et γ pour que le barycentre D des points massifs (A, α), (B, β), (C, γ) forme avec A, B, C un parallélogramme ?

■ **Exercice 10.16** **Isobarycentre d'un triangle**

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points A' et A'' définis par :

$$2\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC}$$
$$3\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{A'A}.$$

   À quelle droite particulière du triangle appartient le point A'' ?
2. Construire les points B', B'', C', C'' définis par :

$$2\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB}, \quad 3\overrightarrow{C'C''} = \overrightarrow{C'C},$$
$$2\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}, \quad 3\overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{B'B}.$$

   Que peut-on dire des points A'', B'', C'' ?
3. Quel théorème classique a-t-on redémontré ?

■ **Exercice 10.17** **Associativité**

Soit ABC un triangle, D le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 2), (C, 3)\}$, E le barycentre de $\{(A, 2), (B, 3), (C, 1)\}$ et F le barycentre de $\{(A, 3), (B, 1), (C, 2)\}$.

Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est aussi le centre de gravité du triangle DEF.

Exercice 10.18 Isobarycentre et Barycentre

Donnons-nous une pyramide à base carrée $BCDE$. Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E. On note O le centre du carré $BCDE$ (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD)).

1. Démontrer que O est l'isobarycentre de B, C, D, E.
2. Démontrer que G est le barycentre de $(O, 4)$ et $(A, 1)$.
3. Soit G_1 le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de $[CD]$. Démontrer que $G \in (G_1 I)$. (Une figure est recommandée).

Exercice 10.19 Tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre, G l'isobarycentre des points A, B, C, D, et I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[AB], [CD], [BC], [AD], [BD]$ et $[AC]$. Soient A', B', C', D' les centres de gravité des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

1. (a) Montrer que G est le milieu du segment $[IJ]$.
   (b) Montrer que les droites $(IJ), (KL)$ et (MN) sont concourantes en G.
   (c) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $IKJL$?
2. (a) Montrer que G appartient au segment $[AA']$.
   (b) Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ et (DD') sont concourantes en G.
   (c) Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AA'}$.
   (d) En déduire que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = 3\overrightarrow{0}$.

Exercice 10.20 Fonction

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note I, J, K les points de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

1. (a) Étant donné un point M, calculer $f(M) = MI^2 + MJ^2 + MK^2$ à l'aide des coordonnées (x, y, z) de M.
   (b) En déduire que l'ensemble des points M tels que $f(M) = 3$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit G l'isobarycentre des points I, J, K.
   (a) Montrer que pour tout point M de l'espace, $f(M) = 3MG^2 + f(G)$.
   (b) Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

3. (a) Étant donné un point M, calculer $g(M) = MI^2 + MJ^2 - 2MK^2$ à l'aide des coordonnées (x, y, z) de M.
   (b) En déduire l'ensemble des points M tels que $g(M) = 4$.
4. (a) Montrer que pour tout point M de l'espace, $g(M) = -2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} - 2\overrightarrow{OK})$.
   (b) Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 10.21 Ensemble de points

On considère trois points non alignés A, B, C.
Quel est l'ensemble des points P défini par :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

lorsque M décrit une droite (D) ?

Exercice 10.22 Coplanaires

On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points S, T, U et V définis par

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BV} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Démontrer que les points S, T, U et V sont coplanaires.

Exercice 10.23 Barycentre des sommets d'un triangle

Soit ABC un triangle, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha' + \beta' + \gamma' \neq 0$. On considère M le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et (C, γ), puis M' le barycentre de $(A, \alpha'), (B, \beta'), (C, \gamma')$.
Démontrer que $M = M'$ si et seulement si les vecteurs (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont colinéaires.
Ce résultat subsiste-t-il si on considère le barycentre de 4 points ?

■ Exercice 10.24 Cercles d'Apollonius

Étant donnés deux points A et B du plan et k un réel strictement positif, on désigne par Γ_k l'ensemble des points M du plan distincts de B et tels que

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

1. Rappeler la nature de Γ_1.
2. On suppose désormais que $k \neq 1$. Démontrer que M appartient à Γ_k si et seulement si le produit scalaire
$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})$$
est nul.
3. En déduire que Γ_k est un cercle dont on précisera le diamètre.
4. **Application :** Soit ABC un triangle non isocèle en C et, sur la parallèle en B à (AC), les points C_1 et C_2 tels que $BC_1 = BC_2 = BC$. Démontrer que (CC_1) et (CC_2) sont sécantes avec (AB) en des points notés I et J. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que
$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$$
est le cercle de diamètre $[IJ]$.

■ Exercice 10.25 Une propriété du centre de gravité d'un triangle

Le but de l'exercice est de déterminer une propriété remarquable du centre de gravité d'un triangle à l'aide des barycentres. On commence par fixer un triangle ABC du plan.

1. Soit M un point distinct de A, B, C. On suppose que M est le barycentre de $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Démontrer que les droites (AM) et (BC) sont parallèles si et seulement si $\beta+\gamma = 0$.
2. On se donne P, Q, R trois points respectivement sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB), distincts des sommets. Démontrer que les droites $(AP), (BQ)$ et (CR) sont concourantes si et seulement s'il existe des réels α, β, γ tels que :
   — $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$,
   — $\beta+\gamma \neq 0$ et P est le barycentre de (B,β) et de (C,γ),
   — $\gamma+\alpha \neq 0$ et Q est le barycentre de (C,γ) et de (A,α),
   — $\alpha+\beta \neq 0$ et R est le barycentre de (A,α) et de (B,β).

   Exprimer alors les coefficients du point de concours comme barycentre de A, B et C.
3. On suppose désormais que les droites $(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes en M, point intérieur du triangle. On note H et h les distances respectives de A et M à la droite (BC). Établir que
$$\text{aire}(MCA) = \frac{1}{2}(H-h) \times PC, \quad \text{aire}(MAB) = \frac{1}{2}(H-h) \times PB.$$
En déduire que P est le barycentre de $(B, \text{aire}(MCA))$ et $(C, \text{aire}(MAB))$, puis que M est le barycentre de $(A, \text{aire}(MBC)), (B, \text{aire}(MCA))$ et $(C, \text{aire}(MAB))$.

4. Quelle propriété remarquable du centre de gravité d'un triangle vient-on de démontrer ?
5. Démontrer que le centre du cercle inscrit au triangle ABC est le barycentre de $(A, a), (B, b)$ et (C, c) où $a = BC, b = CA, c = AB$.

■ Exercice 10.26 Quadrilatère

Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. On définit le point G comme centre de gravité du triangle ABD et le point H celui du triangle CBD. Soit K le milieu de $[GH]$.

1. Faire un dessin soigné.
2. Exprimer K comme barycentre de A, B, C, D.
3. Soit I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$. Démontrer que I, J, K sont alignés. Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

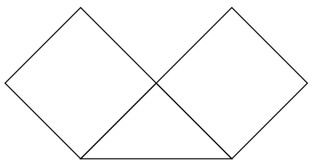
■ Exercice 10.27 Encore un isobarycentre

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.
Soit A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(3, 3), (-1, -1), (-2, -3), (3, -3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point E tel que $BCDE$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du barycentre G de $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1), (D, 1), (E, 1)\}$.
3. Montrer que A, G, L sont alignés, où L est le centre du parallélogramme $BCDE$.

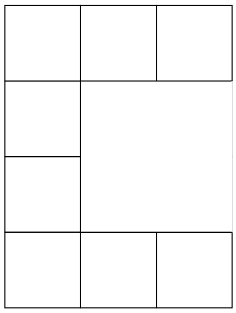
■ Exercice 10.28 Plaque Tangram

Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque homogène ci-dessous.



■ Exercice 10.29 Plaque Gros Trou

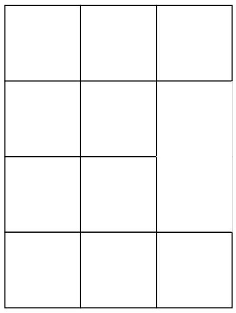
On considère la plaque homogène ci-dessous.



Déterminer la position de son centre d'inertie et le placer sur la figure avec une précision acceptable.

■ Exercice 10.30 Plaque Petit Trou

On considère la plaque homogène ci-dessous.



Déterminer la position de son centre d'inertie et le placer sur la figure avec une précision acceptable.

Chapitre 11

Polynômes

11.1 Définitions, degré et opérations

Définition 11.1.1 ***Polynôme***

On appelle ***polynôme*** *(à une indéterminée et à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) toute suite à support fini* (a_k)*. On note indifféremment un polynôme* P *par :*

$$P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

On utilise des X plutôt que des x pour différencier le polynôme en tant qu'animal algébrique à part entière de la fonction polynômiale que l'on regarde à travers ses images. Dans certains cas, sur les corps finis surtout, une même fonction polynômiale peut correspondre à plusieurs polynômes. On ne va pas s'appesantir sur des considérations algébriques de ce genre et à notre niveau confondre ces notations n'est pas très grave.

Définition 11.1.2 ***Degré***

Le ***degré*** *de* P*, noté* $\deg P$ *est la plus grande puissance de* X *dans* P*. Si* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$*, avec* $a_n \neq 0$*, alors* $\deg P = n$*.*

On note $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ celui des polynômes à coefficients complexes.

Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls, le degré du polynôme nul est $-\infty$ par convention.

Deux polynômes sont égaux s'ils ont même coefficients, en particulier, ils ont même degré.

Définition 11.1.3 ***Polynôme dérivé***

On définit le ***polynôme dérivé*** P' *de* P *par :*

$$P'(X) = a_1 + 2a_2X + ... + na_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}$$

Proposition 11.1.4 ***Propriétés du polynôme dérivé***

Pour les polynômes P *et* Q*, on a les propriétés suivantes :*

— *Si* $\deg P = n$*, alors* $\deg P' = n - 1$.

— *La somme de deux polynômes* P *et* Q *est un polynôme* $P + Q$ *et on a :*

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

— *Le produit de deux polynômes* P *et* Q *est un polynôme* PQ *et on a :*

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

— *Le produit d'un polynôme* P *par un nombre* λ *est un polynôme* λP *et on a :*

$$\deg(\lambda P) = \deg P$$

— *La composée de deux polynômes* P *et* Q *non nuls est un polynôme* $P \circ Q$ *et on a :*

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

Exercice 11.1 **Exemple 1 :**

On donne

$$P(X) = 2X^2 - X + 1, \qquad Q(X) = X^3 - X^2 + 2X + 1, \qquad R(X) = -2X^2 + 3X$$

Donner le degré de $P + Q$, PQ, PR, $P + R$ et $3P$.

11.2 Le second degré

Définition 11.2.1 ***Discriminant***

On s'intéresse aux polynômes $P(X) = aX^2 + bX + c$ *avec* a, b, c *réels et* a *non nul.*
On appelle ***discriminant*** *de* P *la quantité* $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 11.2.2 ***Forme canonique***

La forme canonique de P est :

$$aX^2 + bX + c = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Il n'est pas nécessaire de connaître par cœur cette formule, mais il faut savoir la retrouver.

11.2.1 Racines et factorisation

Théorème 11.2.3 ***Racines et factorisation du trinôme du second degré***

— *Si $\Delta > 0$,*
le polynôme P admet deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise par :

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$$

— *Si $\Delta < 0$,*
le polynôme P admet deux racines $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et il n'y a pas de factorisation réelle.

— *Si $\Delta = 0$,*
le polynôme P admet une racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et se factorise par :

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_0)^2$$

■ **Exercice 11.2** **Exemple 2 :**

Factoriser quand c'est possible les polynômes suivants :

$$f(X) = 3X^2 + X - 4 \qquad g(X) = X^2 - X + \frac{1}{4} \qquad h(X) = X^2 + X + 1$$

■ **Exercice 11.3** **Application**

Une pelouse rectangulaire mesurant 15 m sur 10 m est entourée d'une allée. L'aire totale de la pelouse et de l'allée est de $218{,}75$ m^2.

Calcule la largeur de l'allée.

11.2.2 Somme et produit

Proposition 11.2.4 ***Somme et produit***

Dans le cas où le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, on note $P = x_1 x_2$ le produit des deux racines et $S = x_1 + x_2$ la somme des deux racines. On a :

$$S = -\frac{b}{a} \qquad P = \frac{c}{a}$$

Réciproquement, les réels α et β vérifiant $\alpha + \beta = S$ et $\alpha\beta = P$ sont solutions de :

$$X^2 - SX + P = 0$$

Exercice 11.4 **Exemple 3 :**

Déterminer les réels α et β vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = 2 \end{cases}$$

11.2.3 Le cas complexe

Les formules explicitant les racines via le discriminant sont toujours vraies dans le cas d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes. La difficulté réside dans le fait de trouver un nombre complexe $a + ib$ dont le carré est égal à Δ.

On est amené à résoudre ce système :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = |\Delta| \\ a^2 - b^2 = Re(\Delta) \\ 2ab = Im(\Delta) \end{cases}$$

La dernière équation ne sert qu'à déterminer si a et b sont de même signe ou non.

Exercice 11.5 **Exemple 4 :**

Résoudre :

1. $$z^2 - (6 + i)z + (11 + 13i) = 0$$
2. $$2z^2 - (7 + 3i)z + (2 + 4i) = 0$$

11.3 Racines d'un polynôme

11.3.1 Division euclidienne

Théorème 11.3.1 ***Division euclidienne des polynômes***

Comme pour les nombres entiers, on peut définir une division euclidienne sur l'ensemble des polynômes. Si P et T sont des polynômes avec T non nul, il existe un ***unique*** *couple de polynômes (Q, R) tel que :*

$$P = TQ + R$$

Avec $\deg R < \deg T$.

Division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + X + 1$ par $X^2 + 2$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -3X^3 & & +X & +1 & X^2 \quad +2 \\
\cline{6-6}
-X^4 & & -2X^2 & & & X^2 \; -3X \; -2 \\
\cline{1-3}
 & -3X^3 & -2X^2 & +X & +1 & \\
 & 3X^3 & & +6X & & \\
\cline{2-4}
 & & -2X^2 & +7X & +1 & \\
 & & +2X^2 & & +4 & \\
\cline{3-5}
 & & & 7X & +5 &
\end{array}$$

Ce qui s'écrit $X^4 - 3X^3 + X + 1 = (X^2 + 2)(X^2 - 3X - 2) + 7X + 5$

Exercice 11.6 **Exemple 5 :**

Écrire la division euclidienne de P par T dans les cas suivants :

1. $P = 3X^4 + 2X^3 + X + 5, \quad T = X^2 + 2X + 3$
2. $P = X^3 + X^2 + 1, \quad T = X - 1$
3. $P = 2X^3 - 2X^2 + X + 1, \quad T = X + 1$

11.3.2 Factorisation

Théorème 11.3.2 ***Théorème de factorisation***

Pour tout nombre α, le reste de la division de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.
Si $P(\alpha) = 0$, alors P se factorise par $X - \alpha$ et α est appelé racine de P.

Définition 11.3.3 ***Multiplicité***

On dit qu'une racine α est de ***multiplicité*** *m pour P si $(X-\alpha)^m$ divise P. Si $m \geq 2$, alors α est aussi racine de P'.*

Exercice 11.7 **Exemple 6 :**

Trouver toutes les racines et leur multiplicité pour les polynômes suivants :

$$P = X^3 - 5X^2 + 7X - 3, \qquad Q = 9X^3 - 6X^2 - 20X - 8$$

$$T = X^3 - X^2 - X - 2, \qquad U = 3X^4 - 4X^3 + 1$$

11.3.3 Formule de Taylor

Théorème 11.3.4 ***Formule de Taylor pour les polynômes***

Si P est un polynôme de degré n, alors pour tout nombre réel a :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $a = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(0) + \frac{P'(0)}{1!}X + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k \end{aligned}$$

Ce premier contact avec une formule de Taylor peut sembler bizarre, un polynôme c'est une fonction particulièrement simple à exprimer, pourquoi s'embêter avec tout ça ? Et bien, l'idée va être d'approcher au moins localement toutes les fonctions par des polynômes On en reparlera plus tard !

11.3.4 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Lorsque l'on procède à une série de mesure, il est parfois agréable de trouver une fonction qui passe par tous ces points. La première approche que l'on peut faire est avec un polynôme d'interpolation de Lagrange. Pour un ensemble de coordonnées, on récupère l'unique polynôme unitaire de degré minimal passant par tous ces points.

Définition 11.3.5 ***Polynôme de Lagrange***

Soit $n+1$ nombres réels $a_0, ..., a_n$ deux à deux distincts.
*Pour tout i entier entre 0 et n, on définit le **polynôme de Lagrange** L_i par :*

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

Proposition 11.3.6 ***Polynôme de Lagrange***

L_i est l'unique polynôme vérifiant simultanément les trois conditions suivantes :

1. $\deg L_i = n$
2. $L_i(a_i) = 1$
3. $L_i(a_j) = 0$ *si* $i \neq j$

Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soit $n+1$ nombres réels $b_0, ..., b_n$, alors le polynôme P défini par :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$$

Est l'unique polynôme tel que :

1. $\deg P = n$
2. $P(a_i) = b_i$ pour tout i

■ **Exercice 11.8** **Exemple 7 :**

Trouver le polynôme P de plus petit degré tel que : $\begin{cases} P(1) = 3 \\ P(-1) = 2 \\ P(2) = -1 \end{cases}$

11.4 Fractions rationnelles

Définition 11.4.1 ***Fraction rationnelle***

*Une **fraction rationnelle** est un quotient de polynômes.*

D'un point de vue algébrique, les fractions rationnelles sont plus agréables à manipuler car tous ses éléments sont inversibles (on parle de corps des fractions rationnelles). Ce qui nous intéresse ici, c'est surtout la décomposition en éléments simples.

Soit $\frac{A}{B}$ une fraction rationnelle.

- Si α est racine de A mais pas de B, on dit que α est une racine de $\frac{A}{B}$ et l'ordre de α dans $\frac{A}{B}$ est la multiplicité de α dans A.
- Si α est racine de B mais pas de A, on dit que α est un pôle de $\frac{A}{B}$ et l'ordre de α dans $\frac{A}{B}$ est la multiplicité de α dans B.

On pose $\deg \frac{A}{B} = \deg A - \deg B$

11.4.1 Partie entière

Théorème 11.4.2 ***Partie entière d'une fraction rationnelle***

Soit F une fraction rationnelle, il existe un unique polynôme E tel que :

$$\deg(F - E) < 0$$

E est appelé ***partie entière*** *de F.*

D'un point de vue pratique, on s'en sort avec la division euclidienne.

Exercice 11.9 **Exemple 8 :**

Trouver la partie entière des fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{X^3 + 1}{X^2 + X - 2}, \qquad G(X) = \frac{X^5 + 3X^2 + 1}{X^3 - 5X^2 + 7X - 3}$$

11.4.2 Décomposition en éléments simples

Très utile, particulièrement pour le calcul intégral...

Soient P et Q deux polynômes réels tels que $\deg(P) < \deg(Q)$. C'est toujours possible quitte à soustraire la partie entière.

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{m_i} \times \prod_{j=1}^{k} (X^2 + \alpha_j X + \beta_j)^{p_j}$$

avec $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$ pour tout j.

Alors il existe une famille unique de réels $*$ tels que :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{*}{(X - a_i)^{m_i}} + \frac{*}{(X - a_i)^{m_i - 1}} + \dots + \frac{*}{X - a_i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{*X + *}{(X^2 + \alpha_j X + \beta_j)^{p_j}} \right)$$

Exercice 11.10 **Exemple 9 :**

Décomposer en éléments simples :

$$F(X) = \frac{X^3 + 1}{X^2 + X - 2}, \qquad G(X) = \frac{X^5 + 3X^2 + 1}{X^3 - 5X^2 + 7X - 3}, \qquad H(X) = \frac{1}{(X + 1)(X + 2)^2}$$

11.5 Exercices

Exercice 11.11 **Équation**

On considère l'équation :

$$x^4 - x^3 - 49x^2 - 71x + 120 = 0$$

Montrer que 1 et -3 sont solutions de cette équation. En déduire toutes les solutions de l'équation.

Exercice 11.12 **Polynôme**

Soient a, b des réels et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b, le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 11.13 **Divisibilité**

A quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{R}$, le polynôme X^4+aX^2+bX+c est-il divisible par X^2+X+1 ?

Exercice 11.14 **Équation**

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2. $P'(X) + XP(X) = X^2 + 1$

Exercice 11.15 **Division Euclidienne**

Soit $n \geq 2$. On considère les polynômes $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X - 1)^2$.

1. Quel est le degré du reste R de la division de A par B. Déterminer R. On pourra évaluer A et A' au point 1.
2. En effectuant le changement de variable $y = x - 1$, déterminer le quotient de la division euclidienne de A par B.

Exercice 11.16 **Une fonction de polynômes**

On définit l'application φ de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 vers l'ensemble des polynômes comme suit :

$$\varphi(P)(X) = XP(X + 2) - P(X^2)$$

On considère un polynôme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Déterminer $\varphi(P)$.

Exercice 11.17 Division Euclidienne

Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^n$ par $B = X^2 - 5X + 6$.

Exercice 11.18 Suite de polynômes

On considère la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = -2X \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier n, P_n est un polynôme de degré n. Déterminer le coefficient dominant de P_n.
2. Calculer $P_n(0)$, en déduire le coefficient constant de P_n.
3. Déterminer une relation entre $P_n(x)$ et $P_n(-x)$ pour tout x réel.
   En déduire la parité de P_n.

Exercice 11.19 Polynôme

Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P ?

Exercice 11.20 Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{X^3 - 5X - 6}{X^2 - 1}$$

$$G(X) = \frac{5}{(X-2)^2(X^2+1)}$$

Chapitre 12
Annales 2024-2025

Voici les sujets qui ont été posés lors des contrôles continus de l'année 2024-2025.

12.1 Exponentielles et logarithmes

1. Calculer $(e^4 \times e^{-1})^5$.
2. Exprimer $\ln(16) - \ln(2^{-8}) + \ln(2)$ en fonction de $\ln(2)$.
3. Résoudre $\ln(2x+1) > 4$.
4. Résoudre $e^{5x-2} = 1$.
5. Résoudre $e^{5x} = -1$.

12.2 Nombres complexes

Considérons les nombres complexes $z_1 = 1+i$, $z_2 = -4i$, $z_3 = 6i$ et $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Calculer les conjugués de z_1, z_2, z_3 et z_4.
2. Calculer $z_1 \times z_4$.
3. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_4}$.

12.3 Barycentres

Construire le centre d'inertie en justifiant :