

# TD - Développements Limités

## Calcul de DL

## Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer un développement limité au voisinage de 0.

1.  $f_1(x) = e^{x^2}$  à l'ordre 5.
2.  $f_2(x) = \sqrt{1+x+x^2}$  à l'ordre 2.
3.  $f_3(x) = \exp(\sqrt{1+x})$
4.  $f_4(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$  à l'ordre 3.

## Calcul de limite

## Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x) \ln(1-x)}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x$

## Exercice 3

Prouver à l'aide d'un DL que la fonction  $f : x \mapsto (x - 1 - 2 \ln 2) \ln(x + 1)$  admet un minimum local en  $x_0 = 1$ .

## Exercice 4

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$  est prolongeable en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

## Capacité d'un condensateur

## Exercice 5

La capacité d'un condensateur plan est reliée à la distance  $d$  entre ses armatures par la relation :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

avec :

- $S$  la surface des armatures
- $\varepsilon_0$  une constante physique.

Dans un capteur capacitif, on fait varier la distance entre armatures d'une quantité  $x$  à mesurer supposée très inférieure à la distance  $d_0$ . La capacité du capteur vaut donc :

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 + x}$$

On aimerait bien simplifier cette expression à l'aide d'un développement limité et obtenir :

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} \left(1 - \frac{x}{d_0}\right) + o\left(\frac{x}{d_0}\right) \quad (*)$$

1. Faire apparaître, à constante près, (avec une factorisation bien choisie) une fonction dont on connaît un DL.
2. À quelle condition peut-on utiliser le DL ? Est-elle respectée ici ?
3. Retrouver la formule (\*).

### Exercice 6

On cherche à résoudre l'équation algébrique suivante :

$$k \frac{\cos(x)}{(1+x)^2} = x \quad \text{où } k = 0.1$$

1. En supposant que la solution soit petite par rapport à 1, linéariser l'équation précédente et en déduire une solution approchée de l'équation.
2. Une résolution numérique exacte donne  $x = 0,13$ . Qu'en pensez-vous ?

### Pression

### Exercice 7

Une salle de classe de hauteur  $h = 3m$ , contient de l'air dont la pression à une hauteur  $z$  du sol est donnée par

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

où :

- $M = 29g \cdot \text{mol}^{-1}$  est la masse molaire de l'air
  - $g$  est l'intensité du champ de pesanteur
  - $R$  la constante des gaz parfaits ( $R = 8,314J \cdot K^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )
  - $T = 293K$  est la température de l'air.
1. On pose  $H = \frac{RT}{Mg}$ . Montrer que  $H$  est homogène à une hauteur et donner sa valeur numérique. Comparer cette valeur à la hauteur de la salle de classe. En déduire une expression approchée au premier ordre de  $P(z) - P_0$ .
  2. Quelle erreur maximale commet-on en considérant la pression uniforme dans la salle de classe ?

### Champ de gravité terrestre

### Exercice 8

Soit le champ de gravité terrestre  $g(r) = g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$ .

Déterminer le développement limité à l'ordre 1 du champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $R_T$  et  $r$ . On supposera donc  $r - R_T \ll R_T$ .

### Rayonnement d'un corps

### Exercice 9

Un corps de surface extérieure  $S$  portée à la température  $T$  en contact avec une atmosphère à la température  $T_0$  rayonne une puissance différentielle  $P = S\sigma(T^4 - T_0^4)$ .

1. Par deux méthodes différentes, linéariser cette puissance différentielle pour  $T$  proche de  $T_0$ .
2. Vérifier que l'homogénéité de la formule est bien la même qu'avant le développement limité.

### Exercice 10

La mission Darwin aurait pour la localisation un des points de Lagrange du système Terre-Soleil. On admet qu'en un tel point  $L$  dit point de Lagrange, situé entre le Soleil et la Terre, à une distance  $d$  du Soleil, pour lequel une masse  $m$  déposée en  $L$  peut tourner à la même vitesse angulaire que la Terre, de sorte que le système  $S$ ,  $L$  et  $T$  reste constamment aligné.

L'équation donnant la position de  $L$  est :

$$0 = -\frac{GM_S m}{d^2} + \frac{GM_T m}{D-d} + m\Omega^2 d$$

où :

- $\Omega^2 = \frac{GM_S}{D^3}$  avec  $D$  la distance Soleil-Terre

- $M_S$  la masse du Soleil

- $M_T$  la masse de la Terre.

1. En déduire une relation uniquement entre les grandeurs  $x = \frac{d}{D}$  et  $\alpha = \frac{M_T}{M_S}$ .

Cette relation définit un des points dits de Lagrange du système Soleil-Terre. Numériquement, on trouve  $x = 0,989$ .

2. Retrouver une valeur similaire à l'aide d'un développement limité bien choisi.