

# Analyse et Algèbre - TD5

## Distributions

### Exercice 1 : Le Dirac et la fonction de Heaviside

On rappelle que la distribution de Dirac  $\delta_a$  est définie par  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$  pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

(Rappel : une fonction test est une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à support compact.)

On note également la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Les fonctions  $\varphi$  suivante n'appartiennent pas à  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , l'objectif de cet exercice est purement pédagogique.

1. Calculer  $\langle \delta_0, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$ .

**Solution.**

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1.$$

2. Calculer  $\langle \delta_2, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ .

**Solution.**

$$\langle \delta_2, \varphi \rangle = \varphi(2) = e^{-4}.$$

3. Calculer  $\langle \delta_{-1} + 2\delta_3, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = \cos(\pi x)$ .

**Solution.**

$$\langle \delta_{-1} + 2\delta_3, \varphi \rangle = \varphi(-1) + 2\varphi(3) = \cos(-\pi) + 2\cos(3\pi) = -1 + 2(-1) = -3.$$

4. Calculer  $\langle H, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = e^{-x}$ .

*Indication : on rappelle l'action d'une distribution sur une fonction test :  $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi(x)dx$ .*

5. Calculer  $\langle H + 2\delta_{-\pi}, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = \cos(x)$ .

### Exercice 2 : Dérivées des fonctions discontinues

1. Montrer que la dérivée (au sens des distributions) de la fonction de Heaviside  $H$  est égale à  $\delta_0$ .

*Indication : Utiliser la définition  $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$ .*

**Solution.**

Par définition de la dérivée d'une distribution :

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x) dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx$$

Comme  $\varphi$  est à support compact,  $\varphi(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Donc :

$$\langle H', \varphi \rangle = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Ainsi  $H' = \delta_0$ .

2.

### Exercice 3 : avec la formule des sauts

Pour chaque fonction  $f$ , calculer sa dérivée au sens des distributions en utilisant la formule des sauts :

$$f' = \{f'\} + \sum_k \sigma_k \delta_{a_k}$$

où  $\{f'\}$  désigne la dérivée classique de  $f$  là où elle existe, et  $\sigma_k = f(a_k^+) - f(a_k^-)$  est le saut en  $a_k$ .

1.  $f(x) = H(x - 1)$  (Heaviside translatée)

**Solution.**

La fonction  $H(x - 1)$  vaut 0 pour  $x < 1$  et 1 pour  $x \geq 1$ .

- La dérivée classique est nulle sur  $] -\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$ . - Il y a un saut en  $x = 1$  de valeur  $\sigma = 1 - 0 = 1$ .

Donc  $f' = \delta_1$ .

2.  $f(x) = H(x) - H(x - 2)$  (fonction porte sur  $[0, 2]$ )

**Solution.**

Cette fonction vaut 1 sur  $[0, 2[$  et 0 ailleurs.

- La dérivée classique est nulle partout où  $f$  est continue. - Saut en  $x = 0$  :  $\sigma_0 = 1 - 0 = 1$ . - Saut en  $x = 2$  :  $\sigma_2 = 0 - 1 = -1$ .

Donc  $f' = \delta_0 - \delta_2$ .

3.  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  (rampe)

**Solution.**

- La dérivée classique est 0 pour  $x < 0$  et 1 pour  $x > 0$ , soit  $\{f'\} = H(x)$ . - Il n'y a pas de saut en  $x = 0$  car  $f(0^-) = 0$  et  $f(0^+) = 0$ .

Donc  $f' = H(x)$  (pas de Dirac car la fonction est continue).

4.  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

**Solution.**

- La dérivée classique est 0 pour  $x < 0$  et  $2x$  pour  $x > 0$ , soit  $\{f'\} = 2x \cdot H(x)$ . - Pas de saut en  $x = 0$  car  $f(0^-) = 0 = f(0^+)$ .

Donc  $f' = 2x \cdot H(x)$ .

### Exercice 5 : Dériver une distribution

1. Soit  $T_1$  la distribution associée à la fonction  $f(x) = \text{signe}(x)$ . Calculer la dérivée de  $T_1$  de deux manières différentes :

- (a) En utilisant la définition de la dérivée d'une distribution.  
 (b) En utilisant la formule des sauts.

**Solution.**

**Par définition.** Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned}\langle T_1', \varphi \rangle &= -\langle T_1, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \text{signe}(x) \varphi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0) - \varphi(-\infty) - (\varphi(+\infty) - \varphi(0)) = 2\varphi(0)\end{aligned}$$

Donc  $T_1' = 2\delta_0$ .

**Par la formule des sauts.** La dérivée classique est nulle. Le saut en 0 vaut  $\sigma = 1 - (-1) = 2$ .

Donc  $T_1' = 2\delta_0$ .

2. Soit  $T_2$  la distribution associée à la fonction  $g(x) = |x|$ . Calculer la dérivée de  $T_2$ .

**Solution.**

Par la formule des sauts :

- La dérivée classique est  $-1$  pour  $x < 0$  et  $+1$  pour  $x > 0$ , soit  $\{g'\} = \text{signe}(x)$ .
- Pas de saut car  $g$  est continue en 0.

Donc  $T_2' = \text{signe}(x)$  (au sens des distributions).

3. Soit  $T_3$  la distribution associée à la fonction  $h(x) = x^2$ . Calculer la dérivée de  $T_3$ .

**Solution.**

La fonction  $h(x) = x^2$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , sans discontinuité.

Donc  $T_3' = 2x$  (distribution associée à la fonction  $2x$ ).

## Exercice 6 : Équation différentielle avec second membre impulsif

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y' + 2y = \delta_0$$

où  $y$  est une distribution.

1. Quelle est l'interprétation physique de cette équation ?

**Solution.**

Cette équation modélise un système linéaire du premier ordre (circuit RC, système mécanique amorti) soumis à une impulsion instantanée à  $t = 0$ . Le terme  $\delta_0$  représente une excitation de durée infiniment courte mais d'intensité infinie (comme un choc ou une décharge électrique).

2. On cherche  $y$  sous la forme  $y = f \cdot H$  où  $f$  est une fonction continue et  $H$  la fonction de Heaviside. Calculer  $y'$  au sens des distributions.

**Solution.**

On utilise la règle de dérivation d'un produit au sens des distributions. Si  $y = f \cdot H$  :

$$y' = f' \cdot H + f \cdot H' = f' \cdot H + f(0)\delta_0$$

car  $H' = \delta_0$  et  $f(x)\delta_0 = f(0)\delta_0$ .

3. En substituant dans l'équation, montrer que  $f$  doit vérifier  $f' + 2f = 0$  sur  $]0, +\infty[$  et déterminer  $f(0)$ .

**Solution.**

En substituant  $y = fH$  dans l'équation :

$$f'H + f(0)\delta_0 + 2fH = \delta_0$$

Soit :

$$(f' + 2f)H + f(0)\delta_0 = \delta_0$$

En identifiant :

- La partie régulière (coefficient de  $H$ ) :  $f' + 2f = 0$  sur  $]0, +\infty[$ .
- La partie singulière :  $f(0) = 1$ .

4. Résoudre l'équation différentielle  $f' + 2f = 0$  et en déduire  $y$ .

**Solution.**

L'équation  $f' + 2f = 0$  a pour solution générale  $f(t) = Ce^{-2t}$ .

Avec la condition  $f(0) = 1$ , on obtient  $C = 1$ , donc  $f(t) = e^{-2t}$ .

La solution est :

$$y(t) = e^{-2t}H(t)$$

C'est la réponse impulsionnelle du système : nulle pour  $t < 0$ , égale à  $e^{-2t}$  pour  $t \geq 0$ .

5. Vérifier que cette solution est correcte en calculant  $y' + 2y$ .

**Solution.**

Calculons  $y' + 2y$  avec  $y = e^{-2t}H(t)$  :

$$y' = -2e^{-2t}H + e^{-2 \cdot 0}\delta_0 = -2e^{-2t}H + \delta_0$$

Donc :

$$y' + 2y = -2e^{-2t}H + \delta_0 + 2e^{-2t}H = \delta_0 \quad \checkmark$$

## Exercice 7 : Équation du second ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y'' + y = \delta_0$$

1. On cherche  $y$  sous la forme  $y = f(t)H(t)$  où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ . Calculer  $y'$  et  $y''$  au sens des distributions.

**Solution.**

$$y' = f'H + f(0)\delta_0$$

Pour  $y''$ , on dérive  $y'$  :

$$y'' = f''H + f'(0)\delta_0 + f(0)\delta'_0$$

où  $\delta'_0$  est la dérivée du Dirac.

2. En substituant et en supposant  $f(0) = 0$  (pour éviter le terme en  $\delta'_0$ ), montrer que  $f$  doit vérifier  $f'' + f = 0$  avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .

**Solution.**

En substituant :

$$f''H + f'(0)\delta_0 + f(0)\delta'_0 + fH = \delta_0$$

Avec  $f(0) = 0$ , le terme en  $\delta'_0$  disparaît :

$$(f'' + f)H + f'(0)\delta_0 = \delta_0$$

En identifiant :

- $f'' + f = 0$  sur  $]0, +\infty[$
- $f'(0) = 1$

3. En déduire la solution  $y$ .

**Solution.**

L'équation  $f'' + f = 0$  a pour solution générale  $f(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$ .

Avec  $f(0) = 0$  :  $A = 0$ .

Avec  $f'(0) = 1$  :  $f'(t) = B \cos(t)$ , donc  $B = 1$ .

La solution est :

$$y(t) = \sin(t) \cdot H(t)$$

## Exercice 4 : Manipulations de fonctions test

On considère la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le support de la fonction  $\psi$ . La fonction  $\psi$  est-elle dans  $\mathbb{D}$  ?  
On pourra étudier  $\psi(-1+h)$  et  $\psi(1-h)$ , avec  $h$  un réel positif qui tend vers 0.

**Solution.**

Pour  $|x| < 1$ , on a  $\psi(x) = e^{-1/(1-x^2)} > 0$ .

Étudions le comportement aux bords :

- $\psi(1-h) = e^{-1/(1-(1-h)^2)} = e^{-1/(2h-h^2)} \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0^+$  car  $2h - h^2 \rightarrow 0^+$ .
- De même,  $\psi(-1+h) \rightarrow 0$ .

Le support de  $\psi$  est  $[-1, 1]$ .

Pour vérifier que la fonction  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact, il faudrait montrer que toutes les dérivées de  $\psi$  sont continues et que le support de  $\psi$  est compact. Il faudrait pour cela exprimer la dérivée  $n$ -ième de  $\psi$  et vérifier que toutes les dérivées sont continues.

Contentons-nous de vérifier que la dérivée première est continue :

$$\psi'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-1/(1-x^2)}$$

qui tend bien vers 0 quand  $x \rightarrow \pm 1$ .

2. En déduire une fonction  $\varphi \in \mathbb{D}$  dont le maximum est 3 et dont le support est  $[-2, 2]$ .

**Solution.**

Le maximum de  $\psi$  est atteint en  $x = 0$  et vaut  $\psi(0) = e^{-1}$ .

On pose  $\varphi(x) = 3e \cdot \psi(x/2)$ .

- Le support de  $\varphi$  est  $[-2, 2]$  (dilatation par 2).
- Le maximum vaut  $\varphi(0) = 3e \cdot e^{-1} = 3$ .

On définit les distributions suivantes :

$$T_1 = \delta_0, \quad T_2 = \delta_{-1} + \delta_1, \quad T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx, \quad T_4(\varphi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\varphi(x)dx$$

3. Quelles valeurs associent-elles à la fonction  $\psi$  ?

**Solution.**

- $T_1(\psi) = \psi(0) = e^{-1}$
- $T_2(\psi) = \psi(-1) + \psi(1) = 0 + 0 = 0$
- $T_3(\psi) = \int_{-1}^1 x e^{-1/(1-x^2)} dx = 0$  (fonction impaire)
- $T_4(\psi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\psi(x)dx = 0$  (car  $\psi = 0$  sur  $[5, 10]$ )

4. Pour chaque distribution ci-dessus, existe-t-il une fonction  $f$  localement intégrable telle que  $T(\varphi) = \int f\varphi$  ?

**Solution.**

- $T_1 = \delta_0$  : Non, le Dirac n'est pas une fonction.
- $T_2 = \delta_{-1} + \delta_1$  : Non, même raison.
- $T_3$  : Oui, c'est la distribution associée à  $f(x) = x$ .
- $T_4$  : Oui, c'est la distribution associée à  $f(x) = \sqrt{x} \cdot \mathbf{1}_{[5,10]}(x)$ .

5. Les fonctions  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  suivantes sont-elles des distributions ?

$$S_1(\varphi) = \frac{1}{\varphi(0)}, \quad S_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx$$

**Solution.**

- $S_1$  n'est pas une distribution : elle n'est pas définie si  $\varphi(0) = 0$ .
- $S_2$  n'est pas une distribution : l'intégrale diverge au voisinage de 0 si  $\varphi(0) \neq 0$ .