	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
16/01/2026		Page 1/3

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger
Matière	Mathématiques - Analyse et Algèbre
Durée de l'examen	2h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Calcul tensoriel (4 points)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ qui n'est pas orthonormée. On donne les produits scalaires entre les vecteurs de la base :

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 3, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$$

1. Former la matrice (g_{ij}) avec $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. *(1 pt)*

Solution :

Comme le produit scalaire est symétrique, la matrice (g_{ij}) est :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit le vecteur $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ exprimé dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Quelles sont les composantes contravariantes de $\mathbf{v}$? *(0.5 pt)*

Solution :

Les composantes contravariantes sont directement les coordonnées données dans la base :

$$v^1 = 1, \quad v^2 = -1, \quad v^3 = 2$$

3. Calculer les composantes covariantes v_1, v_2, v_3 de ce vecteur. *(1 pt)*

Solution :

Les composantes covariantes se calculent avec le tenseur métrique : $v_i = g_{ij}v^j$.

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2 + g_{13}v^3 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$v_2 = g_{21}v^1 + g_{22}v^2 + g_{23}v^3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 1 - 3 - 2 = -4$$

$$v_3 = g_{31}v^1 + g_{32}v^2 + g_{33}v^3 = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3$$

4. Calculer la norme du vecteur $\mathbf{v}$. *(1 pt)*

Solution :

$$\|\mathbf{v}\|^2 = v^1v_1 + v^2v_2 + v^3v_3 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 3 = 1 + 4 + 6 = 11$$

Donc $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{11}$.

5. Rappelez la définition d'un tenseur, puis donner un exemple de quantité qui est un tenseur et une quantité qui n'est pas un tenseur. *(0.5 pt)*

Exercice 2 : Espaces L^p (4 points)

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = e^{ix-2x}, \qquad h(x) = \sin(3x^2)$$

1. Déterminer si f appartient à $L^1(]1, +\infty[)$. Si oui, calculer sa norme. *(1.5 pts)*

Solution :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

L'intégrale converge, donc $f \in L^1(]1, +\infty[)$ et $\|f\|_1 = 1$.

2. Déterminer si g appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^*)$. Si oui, calculer sa norme. *(1.5 pts)*

Solution :

$$\int_0^{+\infty} |e^{ix-2x}|^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx = \left[-\frac{e^{-4x}}{4} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

L'intégrale converge, donc $g \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$ et $\|g\|_2 = \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$.

3. Déterminer si h appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$. Si oui, donner sa norme. *(1 pt)*

Solution :

$|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et cette borne est atteinte (par exemple en $x = \pi/2$).
Donc $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|h\|_\infty = 1$.

Exercice 3 : Transformée de Laplace (4 points)

On note $\mathcal{L}\{f\}(s)$ la transformée de Laplace de f.

1. Calculer $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)$ directement à partir de la définition et préciser le domaine de convergence. *(1 pt)*

Solution :

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-3t}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+3)t}dt = \left[-\frac{e^{-(s+3)t}}{s+3}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s+3}$$

Cette intégrale converge pour $\text{Re}(s) > -3$.

2. En utilisant la propriété de décalage en fréquence $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, calculer $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\}$. *(1 pt)*
   On rappelle que $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Solution :
On utilise le décalage avec $f(t) = t^2$ et $a = -3$.
On a $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$.
Par décalage en fréquence :

$$\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\} = \frac{2}{(s+3)^3}$$

3. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-t}$ avec $y(0) = 0$ en utilisant la transformée de Laplace. *(2 pts)*

Solution :
Étape 1 : Transformation. En appliquant $\mathcal{L}$ à l'équation :

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Avec $y(0) = 0$:

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Étape 2 : Résolution algébrique.

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

— $s = -1 : 1 = A(1)$, donc $A = 1$
— $s = -2 : 1 = B(-1)$, donc $B = -1$

Donc $Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$.
Étape 3 : Transformation inverse.

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Exercice 4 : Équations aux dérivées partielles (4 points)

1. Soit $f(x,y) = e^{2x}\sin(3y)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *(1 pt)*

Solution :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}\sin(3y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x}\cos(3y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x}\sin(3y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9e^{2x}\sin(3y)$$

2. Vérifier que f est solution de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -5f$. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{2x}\sin(3y) - 9e^{2x}\sin(3y) = -5e^{2x}\sin(3y) = -5f$$

L'équation est bien vérifiée.

3. On considère l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+$ avec conditions aux bords $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

   On cherche une solution sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. Montrer que l'équation devient :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

où λ est une constante. *(1 pt)*

Solution :

En substituant $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

En divisant par $X(x)T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de t, le membre de droite ne dépend que de x. Pour que l'égalité soit vraie pour tout (x,t), les deux membres doivent être égaux à une constante $-\lambda$.

4. En déduire les deux équations différentielles vérifiées par X et T. *(0.5 pt)*

Solution :

— Pour T : $T' + \lambda T = 0$
— Pour X : $X'' + \lambda X = 0$

5. En prenant $\lambda = \mu^2 > 0$, montrer que les conditions aux bords imposent $\mu = \frac{n\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. *(1 pt)*

Solution :

Pour $\lambda = \mu^2 > 0$, la solution générale de $X'' + \mu^2 X = 0$ est :

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

Avec les conditions aux bords :

— $X(0) = 0$: $A = 0$

— $X(L) = 0$: $B\sin(\mu L) = 0$

Pour avoir $B \neq 0$ (solution non triviale), il faut $\sin(\mu L) = 0$, soit $\mu L = n\pi$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$.

Exercice 5 : Distributions (4 points)

On rappelle que la distribution de Dirac δ_a est définie par $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ pour toute fonction test φ.
On note H la fonction de Heaviside : $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$.

1. Soit $f(x) = H(x) - H(x-3)$ (« fonction porte » sur $[0, 3]$). Calculer la dérivée de f au sens des distributions. *(1 pt)*

> **Solution :**
> La fonction f vaut 1 sur $[0, 3[$ et 0 ailleurs.
> — La dérivée classique est nulle partout où f est continue.
> — Saut en $x = 0$: $\sigma_0 = 1 - 0 = 1$
> — Saut en $x = 3$: $\sigma_3 = 0 - 1 = -1$
> Donc $f' = \delta_0 - \delta_3$.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer la dérivée de g au sens des distributions en utilisant la formule des sauts. *(1 pt)*

> **Solution :**
> On calcule d'abord le saut en $x = 1$:
> — Limite à gauche : $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1$
> — Limite à droite : $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 3$
> — Saut : $\sigma_1 = 3 - 1 = 2$
> La dérivée classique (partie régulière) est :
>
> $$\{g'\}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
>
> Par la formule des sauts : $g' = \{g'\} + \sigma_1 \delta_1$
> **Donc :** $g'(x) = \{g'\}(x) + 2\delta_1$

3. Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculer la dérivée de h au sens des distributions et écrivez $\langle h', \varphi \rangle$ pour une fonction test φ. *(2 pts)*

Solution :

On identifie les points de discontinuité et on calcule les sauts :

En $x = 0$:

- Limite à gauche : $\lim_{x\to 0^-} h(x) = e^0 = 1$
- Limite à droite : $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 + 1 = 1$
- Saut : $\sigma_0 = 1 - 1 = 0$ (pas de discontinuité)

En $x = 2$:

- Limite à gauche : $\lim_{x\to 2^-} h(x) = 2 + 1 = 3$
- Limite à droite : $\lim_{x\to 2^+} h(x) = 5$
- Saut : $\sigma_2 = 5 - 3 = 2$

La dérivée classique est :

$$\{h'\}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Donc : $h'(x) = \{h'\}(x) + 2\delta_2$

Donc

$$\langle h', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \{h'\}(x)\varphi(x)dx + 2\varphi(2) = \int_{-\infty}^{0} e^x \varphi(x)dx + \int_0^2 \varphi(x)dx + 2\varphi(2)$$

Transformées de Laplace usuelles

Fonction $f(t)$	**Transformée** $\mathcal{L}\{f\}(s)$	**Domaine**
1	$\frac{1}{s}$	Re$(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re$(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	Re$(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Re$(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	Re$(s) > 0$
$u(t-a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	Re$(s) > 0$