	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-002
26/01/2026		Page 1/2

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 5	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. **Calculs de développements limités.**
   (a) Donner le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

   (b) Donner le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

   (c) En déduire le développement limité de $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(1 pt)*

Solution :
On multiplie les DL en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 3 :

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1-x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + x + x^2 + x^3\right) + o(x^3) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

2. **Calcul de limite.** Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : *(1.5 pts)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Solution :
On utilise le DL de e^x à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc :

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Et :

$$\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{1}{6}}$$

3. **Étude d'une fonction.** Soit $g(x) = \dfrac{\tan x - x}{x^3}$ pour $x \neq 0$.

   (a) À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. *(0.75 pt)*

Solution :
On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$, donc :

$$\tan x - x = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Ainsi :

$$g(x) = \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{15} + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}$$

On peut prolonger g par continuité en posant $g(0) = \frac{1}{3}$.

   (b) En déduire la position de la courbe de g par rapport à sa tangente horizontale en 0. *(0.75 pt)*

Solution :

Le DL de g en 0 est :

$$g(x) = \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{15} + o(x^2)$$

La tangente en 0 est $y = \frac{1}{3}$ (horizontale car le terme en x est nul).

On a $g(x) - \frac{1}{3} = \frac{2x^2}{15} + o(x^2) \sim \frac{2x^2}{15} > 0$ pour $x \neq 0$ petit.

Donc la courbe est **au-dessus** de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(3x^2 + 2y)\,dx + (2x + 4y^3)\,dy = 0$$

(a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est une différentielle totale. *(0.75 pt)*

Solution :
On pose $f(x,y) = 3x^2 + 2y$ et $g(x,y) = 2x + 4y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, l'équation est exacte.

(b) Trouver une fonction $F(x,y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$. *(1 pt)*

Solution :
On cherche F telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2y$.
En intégrant par rapport à x : $F(x,y) = x^3 + 2xy + H(y)$
On vérifie avec $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + H'(y) = 2x + 4y^3$.
Donc $H'(y) = 4y^3$, soit $H(y) = y^4 + C$.
Conclusion : $F(x,y) = x^3 + 2xy + y^4$

(c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. *(0.5 pt)*

Solution :
Les solutions sont données par $F(x,y) = K$ où K est une constante :

$$\boxed{x^3 + 2xy + y^4 = K}$$

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 6x$$

en utilisant un changement de variables linéaire. *(1.5 pts)*

Solution :
On pose $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$ et $F(X,Y) = f(x,y)$.
L'équation devient $(3a - b)\frac{\partial F}{\partial X} + (3c - d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 6x$.
On choisit $a = 1$, $b = 3$ (donc $3a - b = 0$) et $c = 1$, $d = 0$ (donc $3c - d = 3$).

Avec ce choix, $X = x + 3y$ et $Y = x$, donc $x = Y$.
L'équation devient $3\frac{\partial F}{\partial Y} = 6Y$, soit $\frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y$.
En intégrant par rapport à Y : $F(X,Y) = Y^2 + K(X)$, où K est une fonction $\mathcal{C}^1$ quelconque.
En revenant aux variables initiales :

$$\boxed{f(x,y) = x^2 + K(x+3y)}$$

où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque.

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = -f$$

En cherchant des solutions sous la forme $f(x,y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. *(1.25 pts)*

Solution :
En posant $f(x,y) = X(x)Y(y)$, on obtient :

$$X'Y + 2XY' = -XY$$

En divisant par XY :

$$\frac{X'}{X} + 2\frac{Y'}{Y} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{X'+X}{X} = -2\frac{Y'}{Y}$$

Le membre de gauche ne dépend que de x, le membre de droite que de y. Ils sont donc tous deux égaux à une constante k.
Pour X **:** $\frac{X'+X}{X} = k \Rightarrow X' = (k-1)X \Rightarrow X(x) = C_1 e^{(k-1)x}$
Pour Y **:** $-2\frac{Y'}{Y} = k \Rightarrow Y' = -\frac{k}{2}Y \Rightarrow Y(y) = C_2 e^{-ky/2}$
Solutions : $\boxed{f(x,y) = C\, e^{(k-1)x} e^{-ky/2}}$ pour $k \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Modélisation – Circuit RC (5 points)

Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F est initialement chargé à la tension $U_0 = 12$ V. À l'instant $t = 0$, on le décharge à travers une résistance $R = 100$ kΩ.

La tension $U(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$RC\frac{dU}{dt} + U = 0$$

1. Calculer la valeur numérique de la constante de temps $\tau = RC$. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\tau = RC = 100 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 1 \text{ s}$$

2. Réécrire l'équation différentielle sous la forme $\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{\tau}$. *(0.5 pt)*

Solution :
On part de $RC\frac{dU}{dt} + U = 0$, donc $RC\frac{dU}{dt} = -U$.
En divisant par $RC = \tau$:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{\tau}$$

3. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $U(0) = U_0$. *(1.5 pts)*

Solution :
C'est une équation à variables séparables :

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{\tau}$$

En intégrant : $\ln|U| = -\frac{t}{\tau} + K$
Donc : $U(t) = Ae^{-t/\tau}$ où $A = e^K$
Avec la condition initiale $U(0) = U_0$: $A = U_0 = 12$ V

$$\boxed{U(t) = U_0 e^{-t/\tau} = 12\, e^{-t}}$$

(avec t en secondes et U en volts)

4. L'énergie stockée dans le condensateur est $E = \frac{1}{2}CU^2$. Exprimer $E(t)$ en fonction du temps. *(1 pt)*

Solution :
On a $U(t) = U_0 e^{-t/\tau}$, donc :

$$E(t) = \frac{1}{2}CU(t)^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 e^{-2t/\tau}$$

Avec $E_0 = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \times 144 = 7{,}2 \times 10^{-4}$ J :

$$\boxed{E(t) = E_0\, e^{-2t/\tau} = 7{,}2 \times 10^{-4}\, e^{-2t} \text{ J}}$$

5. Au bout de combien de temps l'énergie a-t-elle diminué de moitié ? *(1 pt)*
On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.

Solution :
On résout $E(t) = \frac{E_0}{2}$:

$$E_0 e^{-2t/\tau} = \frac{E_0}{2}$$

$$e^{-2t/\tau} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2t}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$t = \frac{\tau \ln(2)}{2} = \frac{1 \times 0{,}7}{2} = \boxed{0{,}35 \text{ s}}$$

6. Vers quelle valeur tend $U(t)$ quand $t \to +\infty$? Interpréter physiquement. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\lim_{t \to +\infty} U(t) = \lim_{t \to +\infty} 12\, e^{-t} = 0 \text{ V}$$

Interprétation : Le condensateur se décharge complètement à travers la résistance. Toute l'énergie électrique initialement stockée est dissipée par effet Joule dans la résistance.

Exercice 4 : Modélisation – Pharmacocinétique (5 points)

On étudie l'évolution de la concentration $C(t)$ d'un médicament dans le sang après une injection intraveineuse.

Partie A – Modèle à élimination simple

On suppose que le médicament est éliminé à un taux proportionnel à sa concentration :

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

où $k = 0{,}2$ h^{-1} est la constante d'élimination et $C_0 = 100$ mg/L la concentration initiale.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $C(0) = C_0$. *(1 pt)*

Solution :
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à variables séparables.
On sépare les variables : $\frac{dC}{C} = -k\,dt$
En intégrant : $\ln|C| = -kt + K$
Donc : $C(t) = Ae^{-kt}$ où $A = e^K$
Avec la condition initiale $C(0) = C_0$: $A = C_0$

$$\boxed{C(t) = C_0 e^{-kt} = 100\, e^{-0{,}2t} \text{ mg/L}}$$

2. Calculer la demi-vie $T_{1/2}$ du médicament (temps pour que $C(T_{1/2}) = \frac{C_0}{2}$). *(0.5 pt)*
On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.

Solution :
On résout $C(T_{1/2}) = \frac{C_0}{2}$:

$$C_0 e^{-kT_{1/2}} = \frac{C_0}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-kT_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -kT_{1/2} = -\ln(2)$$

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{0{,}7}{0{,}2} = 3{,}5 \text{ h}}$$

Partie B – Modèle avec perfusion continue

On administre maintenant le médicament par perfusion continue à un débit constant D (en mg/(L·h)). L'équation devient :

$$\frac{dC}{dt} = D - kC$$

3. Déterminer la concentration d'équilibre C_{eq} (solution constante de l'équation). *(0.5 pt)*

Solution :
À l'équilibre, $\frac{dC}{dt} = 0$, donc :

$$D - kC_{\text{eq}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{\text{eq}} = \frac{D}{k}}$$

4. On pose $\theta(t) = C(t) - C_{\text{eq}}$. Montrer que θ vérifie l'équation $\dfrac{d\theta}{dt} = -k\theta$. *(0.5 pt)*

Solution :
On a $C = \theta + C_{\text{eq}}$, donc $\frac{dC}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ (car C_{eq} est constante).
En substituant dans l'équation $\frac{dC}{dt} = D - kC$:

$$\frac{d\theta}{dt} = D - k(\theta + C_{\text{eq}}) = D - k\theta - kC_{\text{eq}}$$

Or $C_{\text{eq}} = \frac{D}{k}$, donc $kC_{\text{eq}} = D$, et :

$$\frac{d\theta}{dt} = D - k\theta - D = -k\theta$$

5. Résoudre et en déduire $C(t)$ avec $C(0) = 0$ (perfusion démarrant sans médicament dans le sang). *(1.5 pts)*

Solution :
L'équation $\frac{d\theta}{dt} = -k\theta$ a pour solution :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-kt}$$

Condition initiale : $C(0) = 0$ donc $\theta_0 = C(0) - C_{\text{eq}} = -C_{\text{eq}} = -\frac{D}{k}$
Donc : $\theta(t) = -\frac{D}{k} e^{-kt}$
En revenant à C :

$$C(t) = \theta(t) + C_{\text{eq}} = -\frac{D}{k} e^{-kt} + \frac{D}{k} = \frac{D}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$\boxed{C(t) = C_{\text{eq}}\left(1 - e^{-kt}\right) = \frac{D}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

6. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} C(t)$. Interpréter médicalement ce résultat. *(0.5 pt)*

Solution :
Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-kt} \to 0$ (car $k > 0$).
Donc :

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{D}{k}(1-0) = \boxed{C_{\text{eq}} = \frac{D}{k}}$$

Interprétation : La concentration tend vers un état stationnaire où l'apport par perfusion compense exactement l'élimination. Le médecin peut ajuster le débit D pour atteindre la concentration thérapeutique souhaitée.

7. Si la concentration thérapeutique souhaitée est $C_{\text{th}} = 50$ mg/L, quel débit de perfusion D doit-on utiliser ? *(0.5 pt)*

Solution :
On veut $C_{\text{eq}} = C_{\text{th}} = 50$ mg/L.
Or $C_{\text{eq}} = \frac{D}{k}$, donc :

$$D = k \times C_{\text{th}} = 0{,}2 \times 50 = \boxed{10 \text{ mg/(L·h)}}$$