

# Analyse et Algèbre - TD4

## Dérivées partielles et équations

### Exercice 1 : Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = e^{3y^3} \cos(xy)$

**Solution.**

**Dérivées partielles d'ordre 1 :**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3y^3} \cdot (-y \sin(xy)) = -ye^{3y^3} \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2 e^{3y^3} \cos(xy) + e^{3y^3} \cdot (-x \sin(xy)) = e^{3y^3} (9y^2 \cos(xy) - x \sin(xy))$$

**Dérivées partielles d'ordre 2 :**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -ye^{3y^3} \cdot y \cos(xy) = -y^2 e^{3y^3} \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{3y^3} \left[ (18y + 81y^4) \cos(xy) - (9y^2 \cdot x + 9y^2 \cdot x) \sin(xy) - x^2 \cos(xy) \right]$$

$$= e^{3y^3} \left[ (18y + 81y^4 - x^2) \cos(xy) - 18xy^2 \sin(xy) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{3y^3} \sin(xy) - y \cdot 9y^2 e^{3y^3} \sin(xy) - ye^{3y^3} \cdot x \cos(xy)$$

$$= -e^{3y^3} \left[ (1 + 9y^3) \sin(xy) + xy \cos(xy) \right]$$

2.  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(x^2 - y)$

**Solution.**

**Dérivées partielles d'ordre 1 :**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 - y) + (x^2 + y^2)(-2x \sin(x^2 - y)) = 2x \cos(x^2 - y) - 2x(x^2 + y^2) \sin(x^2 - y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 - y) + (x^2 + y^2) \sin(x^2 - y)$$

**Dérivées partielles d'ordre 2 :**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cos(x^2 - y) - 4x^2 \sin(x^2 - y) - 2(3x^2 + y^2) \sin(x^2 - y) - 4x^2(x^2 + y^2) \cos(x^2 - y)$$

$$= (2 - 4x^2(x^2 + y^2)) \cos(x^2 - y) - (4x^2 + 6x^2 + 2y^2) \sin(x^2 - y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cos(x^2 - y) + 2y \sin(x^2 - y) + 2y \sin(x^2 - y) - (x^2 + y^2) \cos(x^2 - y)$$

$$= (2 - x^2 - y^2) \cos(x^2 - y) + 4y \sin(x^2 - y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x \sin(x^2 - y) - 4xy \sin(x^2 - y) + 2x(x^2 + y^2) \cos(x^2 - y) \\ &= 2x(1 - 2y) \sin(x^2 - y) + 2x(x^2 + y^2) \cos(x^2 - y)\end{aligned}$$

3.  $f(x, y) = \sqrt{2 - x^2 y^2}$

**Solution.**

On écrit  $f(x, y) = (2 - x^2 y^2)^{1/2}$ .

**Dérivées partielles d'ordre 1 :**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(2 - x^2 y^2)^{-1/2} \cdot (-2xy^2) = \frac{-xy^2}{\sqrt{2 - x^2 y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(2 - x^2 y^2)^{-1/2} \cdot (-2x^2 y) = \frac{-x^2 y}{\sqrt{2 - x^2 y^2}}$$

**Dérivées partielles d'ordre 2 :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-y^2 \sqrt{2 - x^2 y^2} - (-xy^2) \cdot \frac{-xy^2}{\sqrt{2 - x^2 y^2}}}{2 - x^2 y^2} \\ &= \frac{-y^2(2 - x^2 y^2) - x^2 y^4}{(2 - x^2 y^2)^{3/2}} = \frac{-2y^2 + x^2 y^4 - x^2 y^4}{(2 - x^2 y^2)^{3/2}} = \frac{-2y^2}{(2 - x^2 y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Par symétrie :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2x^2}{(2 - x^2 y^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-2xy \sqrt{2 - x^2 y^2} - (-xy^2) \cdot \frac{-x^2 y}{\sqrt{2 - x^2 y^2}}}{2 - x^2 y^2} \\ &= \frac{-2xy(2 - x^2 y^2) - x^3 y^3}{(2 - x^2 y^2)^{3/2}} = \frac{-4xy + 2x^3 y^3 - x^3 y^3}{(2 - x^2 y^2)^{3/2}} = \frac{-4xy + x^3 y^3}{(2 - x^2 y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

## Exercice 2 : Dériver des composées

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$

- On définit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$ . Calculer  $g'(t)$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

**Solution.**

On pose  $x(t) = 2 + 2t$  et  $y(t) = t^2$ . Alors  $g(t) = f(x(t), y(t))$ .

Par la règle de la chaîne :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

On a  $x'(t) = 2$  et  $y'(t) = 2t$ , donc :

$$g'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2)$$

2. On définit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$ . Exprimer les dérivées partielles  $\frac{\partial h}{\partial u}$  et  $\frac{\partial h}{\partial v}$  en fonction des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

**Solution.**

On pose  $x(u, v) = uv$  et  $y(u, v) = u^2 + v^2$ . Alors  $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ .

Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

On a  $\frac{\partial x}{\partial u} = v$  et  $\frac{\partial y}{\partial u} = 2u$ , donc :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = v \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

De même :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

On a  $\frac{\partial x}{\partial v} = u$  et  $\frac{\partial y}{\partial v} = 2v$ , donc :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

### Exercice 3 : Méthode de séparation des variables

On rappelle l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

On cherche une solution  $u$  définie sur  $[0, L] \times \mathbb{R}_+$  avec conditions initiales  $u(x, 0) = f(x)$  et conditions aux bords  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ .

1. Cette équation est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique ?

**Solution.**

L'équation de la chaleur s'écrit sous la forme générale  $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + \dots = 0$  avec  $A = -1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ .

Le discriminant est  $\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4(-1)(0) = 0$ .

Comme  $\Delta = 0$ , l'équation est **parabolique**.

*Remarque : Les équations paraboliques décrivent des phénomènes de diffusion, où l'information se propage instantanément mais avec atténuation.*

2. Essayons de trouver une solution sous la forme  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Que devient l'équation différentielle ?

**Solution.**

On substitue  $u(x, t) = X(x)T(t)$  dans l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

L'équation devient :

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

3. Ecrivez cette équation sous la forme  $f(t) = g(x)$ .

Comme  $x$  et  $t$  sont des variables indépendantes, on en déduit que  $f(t) = g(x)$  est une constante  $-\lambda$ .

**Solution.**

En divisant par  $X(x)T(t)$  (supposés non nuls) :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de  $t$ , le membre de droite ne dépend que de  $x$ . Pour que l'égalité soit vraie pour tout  $(x, t)$ , les deux membres doivent être égaux à une même constante. On pose cette constante égale à  $-\lambda$  (convention classique) :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \quad \text{et} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

4. Déterminer les deux équations différentielles vérifiées par  $X$  et  $T$ .

**Solution.**

D'après la question précédente :

- Pour  $T$  :  $T'(t) = -\lambda T(t)$ , soit  $T' + \lambda T = 0$
- Pour  $X$  :  $X''(x) = -\lambda X(x)$ , soit  $X'' + \lambda X = 0$

5. Si  $\lambda < 0$ , pouvez-vous trouver une solution pour  $X$  vérifiant les conditions aux bords ?

**Solution.**

Si  $\lambda < 0$ , posons  $\lambda = -\omega^2$  avec  $\omega > 0$ . L'équation  $X'' + \lambda X = 0$  devient  $X'' - \omega^2 X = 0$ , qui a pour solution générale :

$$X(x) = Ae^{-\omega x} + Be^{\omega x}$$

Avec les conditions aux bords :

- $X(0) = 0$  :  $Ae^{-\omega \cdot 0} + Be^{\omega \cdot 0} = A + B = 0$
- $X(L) = 0$  :  $Ae^{-\omega L} + Be^{\omega L} = 0$

C'est un système de deux équations à deux inconnues. Les deux équations ne sont pas linéairement indépendantes, donc le système admet une unique solution.

Comme la solution nulle est solution, c'est la seule.

Donc  $X = 0$  : **pas de solution non triviale** pour  $\lambda < 0$ .

6. Et si  $\lambda = 0$  ?

**Solution.**

Si  $\lambda = 0$ , l'équation  $X'' = 0$  a pour solution générale :

$$X(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux bords :

- $X(0) = 0 : B = 0$
- $X(L) = 0 : AL = 0$ , donc  $A = 0$

Donc  $X \equiv 0$  : **pas de solution non triviale** pour  $\lambda = 0$ .

7. Il est donc nécessaire que  $\lambda$  soit positif, en écrivant  $\lambda = \mu^2$ , quelles sont les solutions  $X$  possibles ?

**Solution.**

Si  $\lambda = \mu^2 > 0$ , l'équation  $X'' + \lambda X = 0$  devient  $X'' + \mu^2 X = 0$ .

La solution générale est :

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

8. Pour que les conditions aux bords soient vérifiées, il faut que  $X(0) = X(L) = 0$ . Quelle contrainte cela impose-t-il sur  $\mu$  ?

**Solution.**

Avec  $X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$  :

- $X(0) = 0 : A \cos(0) + B \sin(0) = A = 0$
- $X(L) = 0 : B \sin(\mu L) = 0$

Pour avoir  $B \neq 0$  (solution non triviale), il faut  $\sin(\mu L) = 0$ , c'est-à-dire :

$$\mu L = n\pi \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Donc :

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les fonctions propres sont  $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

9. En déduire les fonctions  $T$  possibles et en déduire les solutions  $u$  possibles qui s'écrivent  $u(x, t) = X(x)T(t)$ .

**Solution.**

Pour chaque  $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$ , on a  $\lambda_n = \mu_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ .

L'équation  $T' + \lambda_n T = 0$  donne :

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Les solutions élémentaires sont donc :

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

où  $B_n$  est une constante arbitraire.

10. En utilisant le principe de superposition, donner toutes les solutions qu'on peut construire avec cette méthode.

**Solution.**

L'équation de la chaleur étant linéaire, toute combinaison linéaire de solutions est encore solution.

La solution générale est donc :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Les coefficients  $B_n$  sont déterminés par la condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$  :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

C'est le développement en série de Fourier (en sinus) de  $f$ . Les coefficients sont :

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

*Remarque : Le facteur  $e^{-n^2\pi^2 t/L^2}$  montre que les hautes fréquences ( $n$  grand) s'atténuent rapidement : c'est la diffusion thermique.*

**Exercice 4 : Changements de variables**

On cherche toutes les fonctions  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = c$$

où  $c$  est un réel.

1. On pose  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

En utilisant le théorème de composition, montrer que  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}$ .

**Solution.**

On pose  $x(u, v) = \frac{u+v}{2}$  et  $y(u, v) = \frac{v-u}{2}$ . Alors  $f(u, v) = g(x(u, v), y(u, v))$ .

Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

On calcule :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

Or, par hypothèse,  $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = c$ , donc :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}$$

2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de  $f$ .

**Solution.**

L'équation  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}$  signifie que la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $u$  est constante.

En intégrant par rapport à  $u$  :

$$f(u, v) = \frac{c}{2}u + \varphi(v)$$

où  $\varphi$  est une fonction arbitraire de  $v$  (la constante d'intégration peut dépendre de  $v$ ).

3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

**Solution.**

On a  $f(u, v) = \frac{c}{2}u + \varphi(v)$  avec  $f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$ .

Pour revenir aux variables  $(x, y)$ , on inverse le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

Donc :

$$g(x, y) = f(x - y, x + y) = \frac{c}{2}(x - y) + \varphi(x + y)$$

En posant  $h = \varphi$  une fonction arbitraire de classe  $C^1$ , la solution générale est :

$$g(x, y) = \frac{c}{2}(x - y) + h(x + y)$$

où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^1$  quelconque.

**Vérification :**  $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{c}{2} + h'(x + y)$  et  $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{c}{2} + h'(x + y)$ .

Donc  $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{c}{2} + h' + \frac{c}{2} - h' = c$ .

## Exercice 5 : Pour aller plus loin

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , est dite harmonique si son laplacien est nul :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Dans toute la suite, on fixe  $f$  une fonction harmonique.

1. On suppose que  $f$  est de classe  $C^3$ . Démontrer que  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$  sont harmoniques.

**Solution.**

**Pour  $\frac{\partial f}{\partial x}$  :**

Posons  $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ . Alors :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

Or  $f$  est harmonique, donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . En dérivant par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0$$

Donc  $\Delta g = 0$  :  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est harmonique.

**Pour  $\frac{\partial f}{\partial y}$  :** Par un raisonnement analogue (dériver l'équation  $\Delta f = 0$  par rapport à  $y$ ),  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est harmonique.

**Pour  $h = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$  :**

Calculons  $\frac{\partial h}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Puis  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Donc :

$$\Delta h = 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + x \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) + y \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right)$$

Le premier terme est  $2\Delta f = 0$ . Les deux autres termes sont  $x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) = 0$  et  $y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\Delta f) = 0$ .

Donc  $\Delta h = 0$  :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$  est harmonique.

2. On suppose désormais que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  est radiale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ . Démontrer que  $\varphi'$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

**Solution.**

On pose  $r^2 = x^2 + y^2$ , donc  $f(x, y) = \varphi(r^2)$ .

**Calcul des dérivées partielles :**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(r^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varphi''(r^2) \cdot 4x^2 + \varphi'(r^2) \cdot 2 = 4x^2 \varphi''(r^2) + 2\varphi'(r^2)$$

Par symétrie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2 \varphi''(r^2) + 2\varphi'(r^2)$$

**Condition d'harmonicité :**

$$\Delta f = 4(x^2 + y^2)\varphi''(r^2) + 4\varphi'(r^2) = 0$$

$$4r^2\varphi''(r^2) + 4\varphi'(r^2) = 0$$

En posant  $s = r^2$  et  $\psi(s) = \varphi'(s)$  :

$$s\psi'(s) + \psi(s) = 0$$

C'est bien une **équation différentielle linéaire du premier ordre** en  $\psi = \varphi'$  :

$$s\varphi''(s) + \varphi'(s) = 0$$

Ou sous forme plus standard :  $(s\varphi')' = 0$ .

3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

**Solution.**

L'équation  $s\varphi'(s) + \varphi'(s) = 0$  peut s'écrire  $(s\varphi')' = 0$ , donc :

$$s\varphi'(s) = C_1$$

où  $C_1$  est une constante. Ainsi :

$$\varphi'(s) = \frac{C_1}{s}$$

En intégrant :

$$\varphi(s) = C_1 \ln(s) + C_2$$

où  $C_2$  est une autre constante.

En revenant aux variables  $(x, y)$  avec  $s = x^2 + y^2 = r^2$  :

$$f(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2 = 2C_1 \ln(r) + C_2$$

En posant  $A = 2C_1$  et  $B = C_2$  :

$$f(x, y) = A \ln \sqrt{x^2 + y^2} + B = A \ln(r) + B$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $A, B \in \mathbb{R}$ .

*Remarque : La fonction  $\ln(r)$  est, à une constante multiplicative près, le potentiel créé par une charge ponctuelle en dimension 2 (ou une ligne de charge en dimension 3).*