Méthode des éléments finis – TD4

Des éléments 2D

En dimension 2, les éléments finis de Lagrange sont des triangles et les fonctions de forme sont des polynômes à deux variables. Pour des éléments d'ordre 1 (les seuls points du maillage sont les sommets du triangle), il faut 3 polynômes par éléments.

La première section vise à obtenir des formules pour calculer les expressions des polynômes sur chaque élément.

Préliminaires : élément de réference

Dans un repère (O, r, s), prenons un triangle rectangle isocèle de côté 1 et de sommets $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, c'est notre élément de référence.

1. Pour ce triangle, rappelez ou retrouvez les polynômes $\varphi_A(r, s)$, $\varphi_B(r, s)$, $\varphi_C(r, s)$ tels que

$$\varphi_A(r_A, s_A) = 1, \quad \varphi_A(r_B, s_B) = 0, \quad \varphi_A(r_C, s_C) = 0.$$

$$\varphi_B(r_A, s_A) = 0, \quad \varphi_B(r_B, s_B) = 1, \quad \varphi_B(r_C, s_C) = 0.$$

$$\varphi_C(r_A, s_A) = 0, \quad \varphi_C(r_B, s_B) = 0, \quad \varphi_C(r_C, s_C) = 1.$$

   Plaçons-nous maintenant dans un autre repère orthonormé (O, x, y) et considérons un triangle T quelconque, de sommets $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$.

2. Faites un dessin. Nous allons définir un nouveau repère (A, r, s) lié au triangle T de la façon suivante :
   - A est l'origine,
   - r est le vecteur $\overrightarrow{AB}$,
   - s est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Donner les coordonnées de A, B et C dans ce repère. et déduisez-en les expressions des polynômes $\varphi_A(r, s)$, $\varphi_B(r, s)$, $\varphi_C(r, s)$ dans ce repère.

   Notre but est maintenant de déterminer les polynômes $\varphi_A(x, y)$, $\varphi_B(x, y)$, $\varphi_C(x, y)$ dans le repère (O, x, y). Pour cela, nous cherchons le changement de base sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} s.$$

   où (a_1, b_1), (a_2, b_2) et (a_3, b_3) sont des constantes que nous allons déterminer.
4. Déterminez les constantes (a_1, b_1), (a_2, b_2) et (a_3, b_3) en fonction des coordonnées de A, B et C dans les deux repères.
5. Déterminez les expressions des polynômes $\varphi_A(x, y)$, $\varphi_B(x, y)$, $\varphi_C(x, y)$ dans le cas où $A = (1, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 1)$.
6. Faites de même dans le cas où $A = (2, 2)$, $B = (1, 2)$, $C = (2, 1)$.

Une équation différentielle

Considérons l'équation différentielle suivante sur le domaine carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$:

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega,$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Exercice 1 : des triangles rectangle isocèle

1. **Formulation Variationnelle** : Donnez la formulation variationnelle du problème. On pourra utiliser la formule de Green, généralisation de l'intégration par parties en dimension 2 :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = -\int_\Omega v \Delta u \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS,$$

où $\partial\Omega$ est la frontière du domaine Ω.

2. **Maillage en triangles rectangle isocèle** :
   a. Découpez le domaines en 4 carrés, puis en 8 triangles rectangle isocèles. Nommez les noeuds et les éléments correspondant.
   b. Etablissez le tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.
3. **Calcul des Coefficients du Système Linéaire** :
   a. Placez-vous dans l'élément de votre choix, et déterminer les 3 polynômes pour cet élément. *On utilisera la première partie*
   b. Exprimez puis calculer la matrice de rigidité K_e pour cet élément.
   c. Choisissez un triangle qui n'est pas dans le même sens que votre premier choix, exprimez la matrice de rigidité pour ce triangle.
   d. Ecrivez le système linéaire associé à votre maillage.

Exercice 2 : des carrés

a. **Préliminaires : élément de référence** :

Dans un repère (O, r, s), prenons un carré de côté 2 et de sommets $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$, $D = (-1, 1)$, c'est notre élément de référence.

1. Pour ce carré, rappelez ou retrouvez les polynômes $\varphi_A(r, s)$, $\varphi_B(r, s)$, $\varphi_C(r, s)$, $\varphi_D(r, s)$.

Plaçons-nous maintenant dans un autre repère orthonormé (O, x, y) et considérons un quadrilatère Q quelconque, de sommets $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$.

2. Faites un dessin. Nous allons définir un nouveau repère (M, r, s) lié au quadrilatère Q de la façon suivante :
   — M est l'origine, le centre du quadrilatère,
   — r parallèle à (AB),
   — s parallèle à (AC).
3. Donner les coordonnées de A, B, C, D dans ce repère et déduisez-en les expressions des polynômes $\varphi_A(r, s)$, $\varphi_B(r, s)$, $\varphi_C(r, s)$, $\varphi_D(r, s)$ dans ce repère.

   Notre but est maintenant de déterminer les polynômes $\varphi_A(x, y)$, $\varphi_B(x, y)$, $\varphi_C(x, y)$, $\varphi_D(x, y)$ dans le repère (O, x, y). Pour cela, nous cherchons le changement de base sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} rs.$$

   où (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) et (a_4, b_4) sont des constantes que nous allons déterminer.
4. Déterminez les constantes (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) et (a_4, b_4) en fonction des coordonnées de A, B, C et D dans les deux repères.
5. Déterminez les expressions des polynômes $\varphi_A(x, y)$, $\varphi_B(x, y)$, $\varphi_C(x, y)$, $\varphi_D(x, y)$ dans le cas où $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$.
6. Faites de même dans le cas où $A = (1, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 2)$, $D = (1, 2)$.

b. **définir le maillage** :

   1. Découpez le domaine Ω en 4 carrés. Nommez les noeuds et les éléments correspondant.
   2. Etablissez le nouveau tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.

c. **Obtention des fonctions de forme** :

   1. Choisissez un élément fini, et exprimez les fonctions de forme pour cet élément.
   2. Décrivez puis calculez la matrice élémentaire K_e pour cet élément.
   3. Comparez les résultats de cette méthode avec ceux obtenus dans l'Exercice 1. Les noeuds sont identiques, le système linéaire est-il le même ?

d. **maillage avec des triangles équilatéraux** :

   1. Modifiez le domaine initial Ω en adaptant un maillage composé de 6 triangles équilatéraux. *Vous ne pourrez pas paver le carré, il restera des trous.*
   2. Numérotez les noeuds et les éléments correspondants.
   3. Établissez le tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.
   4. Exprimez les fonctions de forme pour cet élément.

e. Quelle méthode préférez-vous ? Pourquoi ?