Algèbre linéaire - Chapitre 4
Applications linéaires

4.6 Matrice de passage d'une base à une autre

Idée générale :
Lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel, on peut choisir différentes bases pour exprimer les vecteurs. La **matrice de passage** permet de traduire les coordonnées d'un vecteur d'une base à une autre.

C'est comme un "dictionnaire" qui convertit les coordonnées : si on connaît les coordonnées d'un vecteur dans une base $\mathcal{B}$, la matrice de passage nous donne ses coordonnées dans une autre base $\mathcal{B}'$.

Méthode

Comment construire la matrice de passage ?
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E.
La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, se construit ainsi :

1. **Exprimer chaque vecteur de la nouvelle base** $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:
   - Quelles sont les coordonnées de e'_1 dans $\mathcal{B}$?
   - Quelles sont les coordonnées de e'_2 dans $\mathcal{B}$?
   - etc.

2. **Remplir les colonnes** de la matrice :
   - La 1ère colonne contient les coordonnées de e'_1 dans $\mathcal{B}$.
   - La 2ème colonne contient les coordonnées de e'_2 dans $\mathcal{B}$.
   - etc.

Attention à l'ordre ! Les colonnes contiennent les vecteurs de la **nouvelle** base exprimés dans l'**ancienne** base.

4.7 Exercices d'application

Exercice 1 : Cas simple dans $\mathbb{R}^2$

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, et une nouvelle base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Indication : Il faut exprimer v_1 et v_2 comme combinaisons linéaires de e_1 et e_2.

Exercice 2 : Matrice de passage inverse

Avec les mêmes bases que l'exercice 1, déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

Indication : Cette fois, il faut exprimer e_1 et e_2 comme combinaisons linéaires de v_1 et v_2.

Méthode

Comment changer les coordonnées d'un vecteur ?
Soit v un vecteur de E, et soient X ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et X' ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors :

$$\boxed{X = P \cdot X'}$$

Autrement dit : pour obtenir les coordonnées dans l'ancienne base, on multiplie les nouvelles coordonnées par la matrice de passage.
Propriétés importantes :

- La matrice de passage est **toujours inversible**.
- $(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$
- Pour obtenir les nouvelles coordonnées : $X' = P^{-1} \cdot X$

Exercice 3 : Changement de coordonnées

On reprend les bases de l'exercice 1. Soit $v = (3, 1)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$).

Quelles sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$?

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ avec :

$$f_1 = (1, 0, 1), \quad f_2 = (0, 1, 1), \quad f_3 = (1, 1, 0)$$

Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Méthode

Formule de changement de base pour une matrice
Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, alors :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
Interprétation : Pour exprimer f dans une nouvelle base :

1. On traduit de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ (multiplication par P, car $X = P \cdot X'$)
2. On applique f dans $\mathcal{B}$ (multiplication par A)
3. On traduit de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ (multiplication par P^{-1})

Exercice 5 : Changement de base d'une matrice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Indication : Utiliser la formule $A' = P^{-1}AP$ avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Exercice 6 : Application géométrique

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$. Sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

1. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
2. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R' de r dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Interpréter géométriquement le résultat.