Méthode des éléments finis – TD3

Des éléments un peu plus complexes

Exercice 1 : Éléments de barre, ordre supérieur

On s'intéresse à l'équation de Laplace en 1D :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)$$

avec $u(0) = 0$ et $u(L) = 1$. Etablir la formulation variationnelle de l'équation différentielle.

On considère un unique élément fini barre de longueur L, de section A et de module d'Young E.

On rappelle la formule générale pour un polynôme de Lagrange tel que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$:

$$\varphi_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Element d'ordre 1 : Rappeler les polynômes de Lagrange d'ordre 1 et les calculs nécessaires pour retrouver la matrice de rigidité élémentaire :

$$K = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

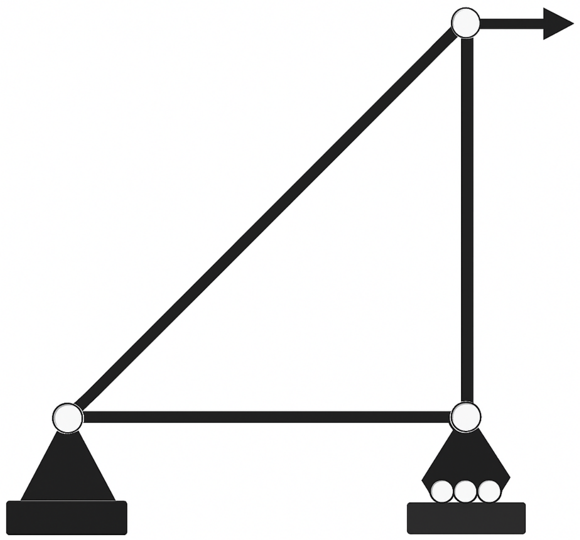
Element d'ordre 2 : On ajoute maintenant un nud intermédiaire à l'élément. Donner les polynômes de Lagrange nécessaires pour interpoler les 3 inconnues du problème. Donner la taille de la matrice de rigidité élémentaire. Donner la matrice de rigidité élémentaire.

Element d'ordre 3 : On ajoute maintenant deux nuds intermédiaires à l'élément fini. Donner les polynômes de Lagrange nécessaires pour interpoler les 4 inconnues du problème. Donner la taille de la matrice de rigidité élémentaire. Donner la matrice de rigidité élémentaire.

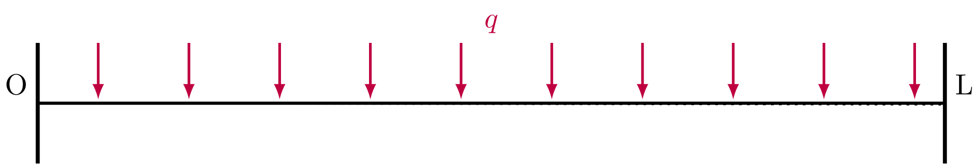
assemblage : Imaginons que le domaine d'étude soit composé de 3 éléments finis de barre, l'un à la suite de l'autre. En utilisant des symboles, montrer comment s'assemble la matrice de rigidité globale pour des éléments d'ordre 1, 2 et 3.

Exercice 3 : Une matrice de rigidité en 2D

Dans un plan en 2D, on considère le déplacement horizontal et le déplacement vertical d'un point. On a donc 2 inconnues par nud. Quelle taille font les matrices de rigidité élémentaires pour les éléments finis d'ordre 1 ? En utilisant des symboles, montrer comment s'assemble la matrice de rigidité globale pour des éléments d'ordre 1.



Exercice 2 : Éléments de poutre



a. **Modélisation Mécanique** : Une poutre en flexion subit des contraintes de flexion dues à une charge appliquée perpendiculairement à son axe longitudinal. Les principaux paramètres sont le module d'élasticité E, le moment d'inertie de la section I qu'on supposera constant, la longueur de la poutre L, et la distribution de la charge $q(x)$.

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x),$$

où $w(x)$ est le déplacement transversal. Dans notre cas, la force q est répartie uniformément sur la poutre.

b. **Formulation Variationnelle** : Formulez le problème de flexion de la poutre en termes de formulation variationnelle.

c. **Utilisation de l'Élément Fini Cubique d'Hermite** : Expliquez pourquoi l'élément fini cubique d'Hermite est approprié pour l'analyse de flexion. Définissez pour un élément fini, les 4 fonctions de forme correspondantes. On pourra soit chercher une expression générale dans le cours ou alors écrire le polynômes avec des coefficients inconnus puis les déterminer pour respecter les contraintes.

On rappelle que ces polynômes doivent vérifier :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \frac{d\varphi_i}{dx}(x_j) = 0 \quad \forall i,j \in \{1,2,3,4\}.$$

$$\psi_i(x_j) = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dx}(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i,j \in \{1,2,3,4\}.$$

On donne la formule générale pour les construire :

$$\varphi_i = q_i(X)\left(1 - q_i'(x_i)(X - x_i)\right), \qquad \psi_i = q_i(X)(X - x_i)$$

avec $q_i(X) = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)^2$,

Vérifiez que ces polynômes vérifient les bonnes conditions

d. **Calcul de la Matrice Élémentaire** : Calculez la matrice élémentaire K_e pour l'élément fini cubique d'Hermite utilisé dans la flexion.

e. **Assemblage et Résolution** : Décrivez le processus d'assemblage du système global et résolvez numériquement le déplacement pour une poutre encastrée soumise à une charge répartie uniformément.

f. **Application Numérique** : Considérez une poutre encastrée de longueur $L = 10\,\mathrm{m}$, avec un module d'élasticité $E = 210\,\mathrm{GPa}$ et un moment d'inertie $I = 8.333 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4$. Supposons une charge répartie uniformément $q = 1000\,\mathrm{N/m}$.