estp CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
26/01/2026		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 5	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. **Calculs de développements limités.**
   (a) Donner le développement limité de $\sin x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*
   (b) Donner le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*
   (c) En déduire le développement limité de $f(x) = (\sin x)^2\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(1 pt)*
2. **Calcul de limite.** Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : *(1.5 pts)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$$

3. **Étude d'une fonction.** Soit $g(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.
   (a) À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. *(0.75 pt)*
   (b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de g en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente. *(0.75 pt)*

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(ye^{xy} + 2x)\,dx + (xe^{xy} + 3y^2)\,dy = 0$$

   (a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$ est une différentielle totale. *(0.75 pt)*
   (b) Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$. *(1 pt)*
   (c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. *(0.5 pt)*

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

   en utilisant un changement de variables linéaire. *(1.5 pts)*

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

   En cherchant des solutions sous la forme $f(x, y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. *(1.25 pts)*

Exercice 3 : Modélisation – Charge d'un condensateur (5 points)

Un condensateur de capacité $C = 20\ \mu$F, initialement déchargé, est connecté à l'instant $t = 0$ à un générateur de tension $E = 10$ V à travers une résistance $R = 50$ kΩ.

La tension $U(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$RC\frac{dU}{dt} + U = E$$

1. Calculer la valeur numérique de la constante de temps $\tau = RC$. *(0.5 pt)*
2. Réécrire l'équation différentielle sous la forme $\dfrac{dU}{dt} + \dfrac{U}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$. *(0.5 pt)*
3. Déterminer la tension d'équilibre U_{eq} (solution constante de l'équation). *(0.5 pt)*
4. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $U(0) = 0$. *(1.5 pts)*
5. Au bout de combien de temps la tension atteint-elle 8 V ? *(1 pt)*
   On donne $\ln(5) \approx 1{,}6$.
6. Vers quelle valeur tend $U(t)$ quand $t \to +\infty$? Interpréter physiquement. *(1 pt)*

Exercice 4 : Modélisation – Réaction chimique (5 points)

On étudie la concentration $[A](t)$ d'un réactif A au cours d'une réaction chimique.
Partie A – Réaction d'ordre 1
On suppose que la vitesse de disparition de A est proportionnelle à sa concentration :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

où $k = 0{,}1$ min^{-1} est la constante de vitesse et $[A]_0 = 2$ mol/L la concentration initiale.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $[A](0) = [A]_0$. *(1 pt)*
2. Calculer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ (temps pour que $[A](t_{1/2}) = \frac{[A]_0}{2}$). *(0.5 pt)*
   On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.

Partie B – Réaction d'ordre 2
On considère maintenant une réaction d'ordre 2 :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k'[A]^2$$

où $k' > 0$ est la nouvelle constante de vitesse.

3. On pose $u = \frac{1}{[A]}$. Montrer que u vérifie l'équation différentielle linéaire : *(1 pt)*

$$\frac{du}{dt} = k'$$

4. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de $[A](t)$ avec $[A](0) = [A]_0$. *(1.5 pts)*
5. Montrer que le temps de demi-réaction pour cette réaction d'ordre 2 vaut $t_{1/2} = \dfrac{1}{k'[A]_0}$. Que peut-on dire de sa dépendance vis-à-vis de la concentration initiale, contrairement à l'ordre 1 ? *(1 pt)*