

	<b>Contrôle de connaissances et de compétences</b>	<b>FO-002-VLA-XX-001</b>
<b>16/01/2026</b>		<b>Page 1/3</b>

<b>ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1</b>	
<b>Nom de l'enseignant</b>	Maxime Berger
<b>Matière</b>	Mathématiques - Analyse et Algèbre
<b>Durée de l'examen</b>	2h00
<b>Consignes</b>	— Calculatrice <b>NON</b> autorisée — Aucun document n'est autorisé

## Exercice 1 : Calcul tensoriel (4 points)

On se place dans  $\mathbb{R}^3$  muni d'une base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  qui n'est pas orthonormée. On donne les produits scalaires entre les vecteurs de la base :

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 3, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = 1$$

1. Former la matrice  $(g_{ij})$  avec  $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ . (1 pt)

### **Solution :**

Comme le produit scalaire est symétrique, la matrice  $(g_{ij})$  est :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit le vecteur  $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$  exprimé dans la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Quelles sont les composantes contravariantes de  $\mathbf{v}$  ? (0.5 pt)

### **Solution :**

Les composantes contravariantes sont directement les coordonnées données dans la base :

$$v^1 = 1, \quad v^2 = -1, \quad v^3 = 2$$

3. Calculer les composantes covariantes  $v_1, v_2, v_3$  de ce vecteur. (1 pt)

**Solution :**

Les composantes covariantes se calculent avec le tenseur métrique :  $v_i = g_{ij}v^j$ .

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2 + g_{13}v^3 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$v_2 = g_{21}v^1 + g_{22}v^2 + g_{23}v^3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 1 - 3 - 2 = -4$$

$$v_3 = g_{31}v^1 + g_{32}v^2 + g_{33}v^3 = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3$$

4. Calculer la norme du vecteur  $\mathbf{v}$ . (1 pt)

**Solution :**

$$\|\mathbf{v}\|^2 = v^1v_1 + v^2v_2 + v^3v_3 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 3 = 1 + 4 + 6 = 11$$

Donc  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{11}$ .

5. Rappelez la définition d'un tenseur, puis donner un exemple de quantité qui est un tenseur et une quantité qui n'est pas un tenseur. (0.5 pt)

## Exercice 2 : Espaces $L^p$ (4 points)

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = e^{ix-2x}, \quad h(x) = \sin(3x^2)$$

1. Déterminer si  $f$  appartient à  $L^1([1, +\infty[)$ . Si oui, calculer sa norme. (1.5 pts)

**Solution :**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

L'intégrale converge, donc  $f \in L^1([1, +\infty[)$  et  $\|f\|_1 = 1$ .

2. Déterminer si  $g$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}_+^*)$ . Si oui, calculer sa norme. (1.5 pts)

**Solution :**

$$\int_0^{+\infty} |e^{ix-2x}|^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx = \left[ -\frac{e^{-4x}}{4} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

L'intégrale converge, donc  $g \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$  et  $\|g\|_2 = \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$ .

3. Déterminer si  $h$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Si oui, donner sa norme. (1 pt)

**Solution :**

$|\sin(x)| \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et cette borne est atteinte (par exemple en  $x = \pi/2$ ).

Donc  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $\|h\|_\infty = 1$ .

## Exercice 3 : Transformée de Laplace (4 points)

On note  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  la transformée de Laplace de  $f$ .

1. Calculer  $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)$  directement à partir de la définition et préciser le domaine de convergence. (1 pt)

**Solution :**

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-3t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+3)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(s+3)t}}{s+3} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s+3}$$

Cette intégrale converge pour  $\text{Re}(s) > -3$ .

2. En utilisant la propriété de décalage en fréquence  $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ , calculer  $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\}$ . (1 pt)  
On rappelle que  $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ .

**Solution :**

On utilise le décalage avec  $f(t) = t^2$  et  $a = -3$ .

On a  $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$ .

Par décalage en fréquence :

$$\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\} = \frac{2}{(s+3)^3}$$

3. Résoudre l'équation différentielle  $y' + 2y = e^{-t}$  avec  $y(0) = 0$  en utilisant la transformée de Laplace. (2 pts)

**Solution :**

**Étape 1 : Transformation.** En appliquant  $\mathcal{L}$  à l'équation :

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Avec  $y(0) = 0$  :

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

**Étape 2 : Résolution algébrique.**

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

—  $s = -1$  :  $1 = A(1)$ , donc  $A = 1$

—  $s = -2$  :  $1 = B(-1)$ , donc  $B = -1$

Donc  $Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$ .

**Étape 3 : Transformation inverse.**

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

## Exercice 4 : Équations aux dérivées partielles (4 points)

1. Soit  $f(x, y) = e^{2x} \sin(3y)$ . Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . (1 pt)

**Solution :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2e^{2x} \sin(3y), & \frac{\partial f}{\partial y} &= 3e^{2x} \cos(3y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4e^{2x} \sin(3y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -9e^{2x} \sin(3y)\end{aligned}$$

2. Vérifier que  $f$  est solution de l'équation  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -5f$ . (0.5 pt)

**Solution :**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{2x} \sin(3y) - 9e^{2x} \sin(3y) = -5e^{2x} \sin(3y) = -5f$$

L'équation est bien vérifiée.

3. On considère l'équation des ondes  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  sur  $[0, L] \times \mathbb{R}_+$  avec conditions aux bords  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ .

On cherche une solution sous la forme  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Montrer que l'équation devient :

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

où  $\lambda$  est une constante. (1 pt)

**Solution :**

En substituant  $u(x, t) = X(x)T(t)$  :

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

En divisant par  $c^2 X(x)T(t)$  :

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de  $t$ , le membre de droite ne dépend que de  $x$ . Pour que l'égalité soit vraie pour tout  $(x, t)$ , les deux membres doivent être égaux à une constante  $-\lambda$ .

4. En déduire les deux équations différentielles vérifiées par  $X$  et  $T$ . (0.5 pt)

**Solution :**

- Pour  $T$  :  $T'' + \lambda c^2 T = 0$
- Pour  $X$  :  $X'' + \lambda X = 0$

5. En prenant  $\lambda = \mu^2 > 0$ , montrer que les conditions aux bords imposent  $\mu = \frac{n\pi}{L}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , puis donner la forme générale de  $T(t)$ . (1 pt)

**Solution :**

Pour  $\lambda = \mu^2 > 0$ , la solution générale de  $X'' + \mu^2 X = 0$  est :

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

Avec les conditions aux bords :

—  $X(0) = 0 : A = 0$

—  $X(L) = 0 : B \sin(\mu L) = 0$

Pour avoir  $B \neq 0$  (solution non triviale), il faut  $\sin(\mu L) = 0$ , soit  $\mu L = n\pi$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Donc  $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$ .

Pour  $T$ , l'équation  $T'' + \mu_n^2 c^2 T = 0$  a pour solution générale :

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

## Exercice 5 : Distributions (4 points)

On rappelle que la distribution de Dirac  $\delta_a$  est définie par  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$  pour toute fonction test  $\varphi$ .  
On note  $H$  la fonction de Heaviside :  $H(x) = 1$  si  $x \geq 0$ ,  $H(x) = 0$  si  $x < 0$ .

1. Soit  $f(x) = H(x) - H(x - 3)$  (« fonction porte » sur  $[0, 3]$ ). Calculer la dérivée de  $f$  au sens des distributions. (1 pt)

### Solution :

- La fonction  $f$  vaut 1 sur  $[0, 3[$  et 0 ailleurs.
- La dérivée classique est nulle partout où  $f$  est continue.
  - Saut en  $x = 0$  :  $\sigma_0 = 1 - 0 = 1$
  - Saut en  $x = 3$  :  $\sigma_3 = 0 - 1 = -1$
- Donc  $f' = \delta_0 - \delta_3$ .

2. Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer la dérivée de  $g$  au sens des distributions en utilisant la formule des sauts. (1 pt)

### Solution :

- On calcule d'abord le saut en  $x = 1$  :
- Limite à gauche :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$
  - Limite à droite :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3$
  - Saut :  $\sigma_1 = 3 - 1 = 2$
- La dérivée classique (partie régulière) est :

$$\{g'\}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Par la formule des sauts :  $g' = \{g'\} + \sigma_1 \delta_1$

**Donc :**  $g'(x) = \{g'\}(x) + 2\delta_1$

3. Soit  $h$  la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculer la dérivée de  $h$  au sens des distributions et écrivez  $\langle h', \varphi \rangle$  pour une fonction test  $\varphi$ . (2 pts)

**Solution :**

On identifie les points de discontinuité et on calcule les sauts :

**En  $x = 0$  :**

- Limite à gauche :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = e^0 = 1$
- Limite à droite :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 + 1 = 1$
- Saut :  $\sigma_0 = 1 - 1 = 0$  (pas de discontinuité)

**En  $x = 2$  :**

- Limite à gauche :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 2 + 1 = 3$
- Limite à droite :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 5$
- Saut :  $\sigma_2 = 5 - 3 = 2$

La dérivée classique est :

$$\{h'\}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Donc :**  $h'(x) = \{h'\}(x) + 2\delta_2$

Donc

$$\langle h', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \{h'\}(x) \varphi(x) dx + 2\varphi(2) = \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx + \int_0^2 \varphi(x) dx + 2\varphi(2)$$

## Transformées de Laplace usuelles

Fonction $f(t)$	Transformée $\mathcal{L}\{f\}(s)$	Domaine
1	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	$\text{Re}(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$u(t - a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$