Analyse et Algèbre - TD4

Introduction aux distributions

Rappels de cours

Motivation : pourquoi les distributions ?

En physique et en ingénierie, on rencontre souvent des phénomènes que les fonctions classiques ne peuvent pas modéliser : une force ponctuelle, une impulsion ou un choc Les **distributions** généralisent la notion de fonction pour traiter ces cas.

Fonctions test et espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Définition : Fonction test

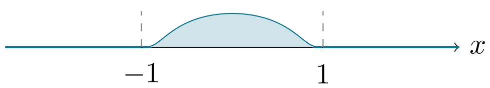
Une **fonction test** est une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est :

1. **Infiniment dérivable** (C^∞)
2. **À support compact** : il existe $[a, b]$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour $x \notin [a, b]$

L'ensemble des fonctions test est noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exemple fondamental : La fonction bosse (bump function)

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$



Définition d'une distribution

Définition : Distribution

Une **distribution** T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. **Linéarité :** $\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle T, \varphi \rangle + \beta\langle T, \psi \rangle$
2. **Continuité :** Si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}$, alors $\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$

Interprétation : Une distribution attribue un nombre réel à chaque fonction test. C'est une façon de ń sonder ż un objet mathématique avec des fonctions lisses localisées.

Distributions régulières

Toute fonction f localement intégrable définit une distribution T_f par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$$

Exemples :

- $f(x) = 1$: $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$
- Fonction de Heaviside $H(x)$: $\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$

Distribution de Dirac

Définition : Distribution de Dirac

La **distribution de Dirac** δ est définie par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Plus généralement, le Dirac en a est : $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$

Propriété fondamentale : δ n'est **pas** une fonction ! Aucune fonction f ne vérifie $\int f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ pour toute φ.

Dérivation des distributions

Définition : Dérivée d'une distribution

La dérivée d'une distribution T est la distribution T' définie par :

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

Résultat fondamental : $H' = \delta$ (la dérivée de Heaviside est le Dirac).

Exercice 1 : Fonctions test

1. Pour chacune des fonctions suivantes, tracer son graphe et dire si c'est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   (a) $\varphi(x) = e^{-x^2}$

   (b) $\varphi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^3 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

   (c) $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

   (d) $\varphi(x) = \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)$

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\psi(x) = \varphi(x-a)$ (translatée) est aussi une fonction test. Quel est son support ?
3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. On pose $\psi(x) = \varphi(\lambda x)$ (dilatée). Montrer que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et déterminer son support.

Exercice 2 : Distributions régulières

1. Soit $f(x) = |x|$. Calculer $\langle T_f, \varphi \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. Soit H la fonction de Heaviside. Calculer explicitement $\langle T_H, \varphi \rangle$ pour les fonctions test suivantes (on suppose $\text{supp}(\varphi) \subset [-2, 2]$) :

   (a) $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

   (b) $\varphi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

3. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définit-elle une distribution régulière sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 3 : Distribution de Dirac

1. Calculer les quantités suivantes :

(a) $\langle \delta, x^2 + 3x + 5 \rangle$
(b) $\langle \delta_2, e^{-x} \rangle$
(c) $\langle \delta_{-1}, \cos(\pi x) \rangle$
(d) $\langle \delta_\pi, \sin(x) \rangle$

2. **Propriété de filtrage.** Soit f une fonction continue. Montrer que :

$$\langle f \cdot \delta_a, \varphi \rangle = f(a)\langle \delta_a, \varphi \rangle = f(a)\varphi(a)$$

On note cette propriété $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$.

3. En utilisant la propriété précédente, simplifier :

(a) $x^2\delta_3$
(b) $(x-1)\delta_1$
(c) $e^x\delta_0$
(d) $\sin(x)\delta_{\pi/2}$

4. **Suite régularisante.** On considère la suite de fonctions :

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

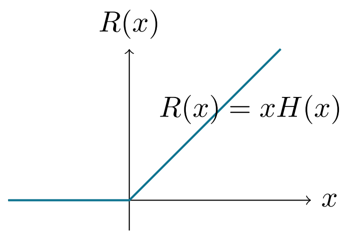
(a) Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)dx = 1$ pour tout n.
(b) Montrer que pour toute fonction test φ : $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

On pourra utiliser le fait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 : Dérivation des distributions

Rappel : La dérivée d'une distribution T est définie par $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$.

1. **Dérivée de Heaviside.** Montrer que $H' = \delta$ au sens des distributions.
2. Calculer la dérivée (au sens des distributions) de $H_a(x) = H(x-a)$ (Heaviside décalé).
3. **Dérivée du Dirac.** Calculer $\langle \delta', \varphi \rangle$.
4. Soit la fonction ń rampe ż $R(x) = x \cdot H(x) = \max(0, x)$.



(a) Calculer R' au sens des distributions.
(b) Calculer R'' au sens des distributions.

5. Soit $f(x) = |x|$.

(a) Exprimer f en fonction de la fonction rampe R.
(b) En déduire f' et f'' au sens des distributions.

Exercice 5 : Calculs de dérivées distributionnelles

1. Calculer la dérivée au sens des distributions de :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

   Indication : écrire f comme somme de fonctions plus simples.

2. Soit $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer f' et f'' au sens des distributions.
3. **Application : EDP avec source ponctuelle.** On considère l'équation :

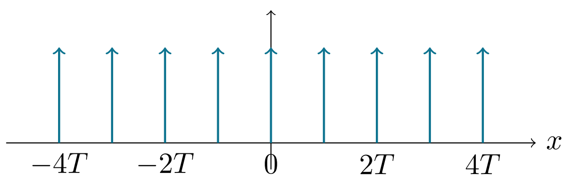
$$-u''(x) = \delta_0$$

   Trouver une solution u continue sur $\mathbb{R}$, en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 6 : Peigne de Dirac

Le **peigne de Dirac** de période T est la distribution :

$${}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}$$



1. Calculer $\langle {}_T, \varphi \rangle$ pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que ${}_T$ est T-périodique : ${}_T(x - T) = {}_T(x)$.
3. Calculer la dérivée ${}'_T$.
4. **Application : échantillonnage.** Soit f une fonction continue. On définit la fonction échantillonnée $f_e = f \cdot {}_T$. Exprimer $\langle f_e, \varphi \rangle$.

Exercice 7 : Transformée de Fourier des distributions

Rappel : La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est :

$$\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \, dx$$

Pour les distributions, on définit : $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$.

1. **Transformée de Fourier du Dirac.** Calculer $\hat{\delta}$.
2. En déduire la transformée de Fourier de la fonction constante $f(x) = 1$.

   Indication : utiliser que $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x) = f(-x)$ pour les distributions.
3. Calculer la transformée de Fourier de δ_a (Dirac en a).
4. Calculer la transformée de Fourier de $e^{2\pi i \nu_0 x}$ (exponentielle complexe de fréquence ν_0).
5. En déduire la transformée de Fourier de $\cos(2\pi\nu_0 x)$ et $\sin(2\pi\nu_0 x)$.
6. **Transformée de la dérivée.** Montrer que $\mathcal{F}\{T'\} = 2\pi i \xi \cdot \hat{T}$.

   En déduire $\mathcal{F}\{\delta'\}$.
7. **Formule de Poisson.** Admettre que la transformée de Fourier du peigne de Dirac ${}_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}$ est :

   $$\hat{}_T = \frac{1}{T}{}_{1/T} = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k/T}$$

   En déduire la **formule de Poisson** : pour une fonction f suffisamment régulière,

   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right)$$

Formulaire : Distributions

Distribution	**Définition**
δ (Dirac en 0)	$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$
δ_a (Dirac en a)	$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$
δ' (doublet)	$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$
$\delta^{(n)}$	$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$
T_f (dist. régulière)	$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) \, dx$

TABLE 1 – Distributions fondamentales

Fonction	**Dérivée au sens des distributions**
$H(x)$ (Heaviside)	$H' = \delta$
$H(x-a)$	$(H(x-a))' = \delta_a$
$\|x\|$	$\|x\|' = \mathrm{sgn}(x), \quad \|x\|'' = 2\delta$
$xH(x)$ (rampe)	$(xH)' = H, \quad (xH)'' = \delta$
$e^{-\|x\|}$	$(e^{-\|x\|})'' = e^{-\|x\|} - 2\delta$

Table 2 – Dérivées distributionnelles usuelles

Distribution	**Transformée de Fourier**
δ	$\hat{\delta} = 1$
1	$\hat{1} = \delta$
δ_a	$\hat{\delta_a}(\xi) = e^{-2\pi i a\xi}$
$e^{2\pi i\nu_0 x}$	δ_{ν_0}
$\cos(2\pi\nu_0 x)$	$\frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0})$
$\sin(2\pi\nu_0 x)$	$\frac{1}{2i}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0})$
δ'	$2\pi i\xi$
${}_T$ (peigne)	$\frac{1}{T}{}_{1/T}$

Table 3 – Transformées de Fourier de distributions