Séries de fonctions - Chapitre 4

Des produits scalaires aux coefficients de Fourier

Les fonctions périodiques

1 Les fonctions complexes périodiques

Les fonctions réelles suivantes sont-elles périodiques et si oui, quelle est leur période ?

1. $\cos(x)$
2. $\sin(2\pi x)$
3. $\cos(x/2)$
4. $\sin(2x) + \cos(3x)$
5. $\sin(nx)$, n est un entier naturel non nul
6. $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
7. $x - \lfloor x \rfloor$

Les fonctions complexes suivantes sont-elles périodiques et si oui, quelle est leur période ?

1. e^{ix}
2. e^{2ix}
3. $e^{ix/2\pi}$
4. $e^{2i\pi x/T}$, T est un réel strictement positif
5. $e^{inx} + e^{ipx}$

Produit scalaire réel

2 Définition

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

telle que :

* symétrie : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
* linéarité à gauche : $\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
* positivité : $\langle u, u \rangle \geq 0$
* définie positivité : $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

3 Dans $\mathbb{R}^3$

On se place dans $\mathbb{R}^3$, qu'on munit de la base

$$e_1 = (1, 2, 1), \qquad e_2 = (2, 1, -4), \qquad e_3 = (-3, 2, -1)$$

1. La famille est-elle orthogonale ?
2. Est-elle orthonormée ? Si non, définissez une base (f_1, f_2, f_3) orthonormée à partir de la famille (e_1, e_2, e_3).

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on note u_i ses coordonnées dans la base orthonormée (f_1, f_2, f_3). Cela signifie que

$$u = u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3$$

Déterminer les coordonnées de $u = (1, 0, 1)$ dans la base (f_1, f_2, f_3).

4 Dans $\mathbb{R}[X]$

— Quelle est la dimension de $\mathbb{R}[X]$?

La famille $(1, X, X^2, X^3, \cdots)$ est appelée base hilbertienne de $\mathbb{R}[X]$: tout élément de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie de vecteurs de cette famille.

On munit cet espace du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

— Montrer que c'est bien un produit scalaire en vérifiant les propriétés ci-dessus.
— La famille $(1, X, X^2, X^3, \cdots)$ est-elle orthogonale ? Est-elle orthonormée ?
— Comment trouver a, b, c tels que la famille $(1, X - a, X^2 - bX - c)$ soit orthogonale ?
— Quelles sont les coordonnées de $P = 1 + 2X + 3X^2$ dans la base $(1, X, X^2, \cdots)$?
— Peut-on retrouver ces coordonnées avec le produit scalaire comme dans l'exercice précédent ?

Produit scalaire complexe

5 Définition

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

telle que :

* symétrie conjuguée : $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
* linéarité à gauche : $\langle \lambda u + v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
* positivité : $\langle u, u\rangle \geq 0$
* définie positivité : $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$

6 Dans l'espace des fonctions complexes 2π-périodiques

On définit le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

Montrer que la famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

Les coefficients de Fourier d'une fonction f sont les coordonnées de f dans la base $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Déterminer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes :

1. $\cos(x)$
2. $\sin(2\pi x)$
3. $\cos(x/2)$
4. $\sin(2x) + \cos(3x)$
5. $\exp^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

Séries de fonctions - Chapitre 5
Produit scalaire - exercices intermédiaires

Produit scalaire

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

vérifiant :

- symétrie : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- linéarité à gauche : $\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- positivité : $\langle u, u \rangle \geq 0$
- définie positivité : $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

1 Dans $\mathbb{R}^n$

1. Montrer que le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ défini par, si $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$,

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

2. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Que penser de l'application avec des coefficients devant les produits ? Est-ce encore un produit scalaire ?

$$\langle u, v \rangle = 2u_1 v_1 + 6u_2 v_2 + \cdots + 3u_n v_n$$

4. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire ?
5. Peut-on choisir des coefficients réels comme on veut devant les produits ?
6. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

2 Dans $m_{2,2}(\mathbb{R})$

Dans l'espace des matrices 2×2, on définit l'application

$$\langle A, B \rangle = Tr(A^t B)$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. La base canonique est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

3 Dans l'espace des polynômes

Reprendre l'exercice 6

4 Dans l'espace des fonctions réelles 2π-périodiques

On définit l'application

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire
2. Montrer que la famille $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cdots)$ est orthonormée.
3. Déterminer les coordonnées de $f(x) = |x|$ définie sur $[0, 2\pi]$ sur cette base.