Chapitre 6

Equations différentielles : Ordre 2

6.1 Équations d'ordre 2 - Cas particuliers

6.1.1 Équations où y et y' sont absents

Définition 6.1.1 *Une équation différentielle où y et y' sont absents est de la forme :*

$$y'' = f(x)$$

<u>**Méthode**</u> *Pour résoudre : on **intègre deux fois** successivement.*

Exemple

Résoudre $y'' = 6x$.

Solution :

$$\begin{aligned} y'' &= 6x \\ y' &= 3x^2 + C_1 \\ y &= x^3 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Remarque *On obtient **deux constantes d'intégration** C_1 et C_2. C'est caractéristique des équations d'ordre 2 : il y a deux intégrations à effectuer.*

6.1.2 Équations où x et y' sont absents

Définition 6.1.2 *Une équation différentielle où x et y' sont absents est de la forme :*

$$y'' = f(y)$$

Méthode (Changement de variable) *On pose $z = y' = \dfrac{dy}{dx}$, donc $z' = y'' = \dfrac{dz}{dx}$.*

L'équation devient $\dfrac{dz}{dx} = f(y)$.
On utilise la relation :

$$z\,dz = f(y)\,dy$$

puis on intègre de chaque côté pour obtenir z. Une fois z connu, on résout une équation du premier ordre en y.

Exemple

Résoudre $y'' = \dfrac{1}{y^3}$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
Solution :
On pose $z = y'$. L'équation devient :

$$z\,dz = \frac{1}{y^3}\,dy$$

En intégrant :

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1$$

Avec $z = y' = 0$ et $y = 1$ pour $x = 0$: $C_1 = \dfrac{1}{2}$

$$z^2 = 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - 1}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}$$

En séparant les variables et en intégrant :

$$\sqrt{y^2 - 1} = \pm x + C_2$$

Avec $y = 1$ pour $x = 0$: $C_2 = 0$

$$y^2 - 1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 1$$

C'est l'équation d'une **hyperbole**.

6.1.3 Équations où y est absent

Définition 6.1.3 *Une équation différentielle où y est absent est de la forme :*

$$y'' = f(x, y')$$

Méthode *On pose $z = y'$. L'équation devient $\dfrac{dz}{dx} = f(x, z)$, une équation du **premier ordre en** z.*

On résout pour obtenir z, puis on intègre pour trouver y.

Exemple

Résoudre $xy'' + 2y' = 12x^2$.

Solution :
On pose $z = y'$. L'équation devient :

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = 12x$$

En multipliant par x^2 (facteur intégrant) :

$$x^2\frac{dz}{dx} + 2xz = 12x^3$$

$$d(x^2 z) = 12x^3\,dx$$

En intégrant :

$$x^2 z = 3x^4 + C_1 \quad \Rightarrow \quad z = 3x^2 + \frac{C_1}{x^2}$$

Donc $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + \dfrac{C_1}{x^2}$
En intégrant :

$$y = x^3 - \frac{C_1}{x} + C_2$$

6.1.4 Équations où x est absent

Définition 6.1.4 *Une équation différentielle où x est absent est de la forme :*

$$y'' = f(y, y')$$

Méthode *On pose $z = y'$. On utilise :*

$$z\,dz = f(y,z)\,dy$$

C'est une équation du premier ordre en z (variable y). On résout pour z, puis on intègre pour trouver y.

Exemple

Résoudre $y'' + e^y (y')^3 = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Solution :
On pose $z = y'$. L'équation devient :

$$z\,dz = -e^y z^3\,dy \quad \Rightarrow \quad -\frac{dz}{z^2} = e^y\,dy$$

En intégrant :

$$\frac{1}{z} = e^y + C_1$$

Avec $z = 1$ et $y = 0$ pour $x = 0$: $C_1 = 0$

$$\frac{1}{z} = e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$dx = e^y\,dy \quad \Rightarrow \quad x = e^y + C_2$$

Avec $y = 0$ pour $x = 0$: $C_2 = -1$

$$x = e^y - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \ln(x+1)}$$

6.2 Équations linéaires à coefficients constants

Définition 6.2.1 (Équation linéaire à coefficients constants) *Une équation linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme :*

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = Q(x)$$

où a, b, c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

- *Si $Q(x) = 0$: équation **homogène** (ou sans second membre)*
- *Si $Q(x) \neq 0$: équation **complète** (ou avec second membre)*

Théorème 6.2.2 (Structure des solutions) *La solution générale y de l'équation complète $ay'' + by' + cy = Q(x)$ est :*

$$y = y_0 + y_p$$

où :

- y_0 *est la* ***solution générale de l'équation homogène*** $ay'' + by' + cy = 0$
- y_p *est une* ***solution particulière*** *de l'équation complète*

6.2.1 Équation caractéristique

Définition 6.2.3 (Équation caractéristique) *L'****équation caractéristique*** *de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = Q(x)$ est l'équation du second degré :*

$$ar^2 + br + c = 0$$

Remarque *L'idée est de chercher des solutions de la forme $y = e^{rx}$. En substituant :*

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Comme $e^{rx} \neq 0$, on obtient l'équation caractéristique.

6.2.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 6.2.4 (Solution de l'équation homogène) *Les solutions de l'équation homogène* $ay'' + by' + cy = 0$ *dépendent du discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$ *:*

1. ***Si*** $\Delta > 0$ *: deux racines réelles distinctes* r_1 *et* r_2

$$y_0 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2. ***Si*** $\Delta < 0$ *: deux racines complexes conjuguées* $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

3. ***Si*** $\Delta = 0$ *: une racine double réelle* $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$

$$y_0 = (C_1 x + C_2)e^{r_0 x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Exemple

Résoudre les équations homogènes suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = 0$

   Équation caractéristique : $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r+2) = 0$
   Racines : $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$ (réelles distinctes)

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}}$$

2. $y'' + 4y' + 13y = 0$

   Équation caractéristique : $r^2 + 4r + 13 = 0$
   $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$, donc $r = -2 \pm 3i$

$$\boxed{y_0 = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)}$$

3. $y'' - 2y' + y = 0$

   Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0$
   Racine double : $r_0 = 1$

$$\boxed{y_0 = (C_1 x + C_2)e^{x}}$$

6.2.3 Solution particulière - Second membre polynomial

Proposition 6.2.5 ***Second membre*** $Q(x) = P(x)$ ***polynomial de degré*** n**.** *On cherche* y_p *sous la forme d'un polynôme* $K(x)$ *dont le degré dépend de la situation :*

- *Si* $c \neq 0$ *(0 n'est pas racine de l'éq. car.) :* $\deg(K) = n$
- *Si* $c = 0$ *et* $b \neq 0$ *(0 est racine simple) :* $\deg(K) = n + 1$
- *Si* $c = 0$ *et* $b = 0$ *(0 est racine double) :* $\deg(K) = n + 2$

Exemple

Résoudre $y'' + 4y' - 5y = x^2 - 1$.

Équation homogène : $r^2 + 4r - 5 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -5$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$$

Solution particulière : Comme $c = -5 \neq 0$, on cherche $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$$y_p' = 2\alpha x + \beta, \quad y_p'' = 2\alpha$$

En substituant dans l'équation :

$$2\alpha + 4(2\alpha x + \beta) - 5(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 - 1$$

$$-5\alpha x^2 + (8\alpha - 5\beta)x + (2\alpha + 4\beta - 5\gamma) = x^2 - 1$$

Par identification :

$$\begin{cases} -5\alpha = 1 \\ 8\alpha - 5\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta - 5\gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{5} \\ \beta = -\frac{8}{25} \\ \gamma = -\frac{17}{125} \end{cases}$$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{25}x - \frac{17}{125}}$$

6.2.4 Solution particulière - Second membre exponentiel

Proposition 6.2.6 ***Second membre*** $Q(x) = P(x)e^{mx}$***.*** *Où $P(x)$ est un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{C}$.*
On cherche $y_p = e^{mx}K(x)$ avec K polynôme :

- *Si m n'est* ***pas racine*** *de l'éq. car. : $\deg(K) = n$*
- *Si m est* ***racine simple*** *de l'éq. car. : $\deg(K) = n + 1$*
- *Si m est* ***racine double*** *de l'éq. car. : $\deg(K) = n + 2$*

Exemple

Résoudre $y'' - 2y' + 2y = \sin x - \cos x$.

Équation homogène : $r^2 - 2r + 2 = 0$, $\Delta = -4$, $r = 1 \pm i$

$$y_0 = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Solution particulière : On cherche $y_p = \alpha \sin x + \beta \cos x$

$$y_p' = \alpha \cos x - \beta \sin x, \quad y_p'' = -\alpha \sin x - \beta \cos x$$

En substituant :

$$(\alpha + 2\beta)\sin x + (-2\alpha + \beta)\cos x = \sin x - \cos x$$

Par identification :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{5} \\ \beta = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x}$$

6.2.5 Principe de superposition

Proposition 6.2.7 ***Superposition.*** *Pour l'équation $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$:*
Si y_1 est solution de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et y_2 est solution de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$, alors :

$$y_p = y_1 + y_2$$

est solution de l'équation complète.

Exemple

Chercher une solution particulière de $y'' + 2y' - 3y = x + e^{2x}$.

Équation caractéristique : $r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -3$

1. Pour $y'' + 2y' - 3y = x$: on cherche $y_1 = \alpha x + \beta$

$$2\alpha - 3(\alpha x + \beta) = x \Rightarrow -3\alpha = 1, \quad 2\alpha - 3\beta = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = -\frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9}$$

2. Pour $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$: comme 2 n'est pas racine, on cherche $y_2 = \gamma e^{2x}$

$$4\gamma + 4\gamma - 3\gamma = 1 \Rightarrow 5\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{1}{5}e^{2x}$$

$$\boxed{y_p = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{5}e^{2x}}$$

6.2.6 Méthode de résolution complète

Méthode (Résolution de $ay'' + by' + cy = Q(x)$)

1. ***Résoudre l'équation homogène*** *$ay'' + by' + cy = 0$:*
   - *Calculer le discriminant Δ de l'équation caractéristique*
   - *Déterminer y_0 selon le signe de Δ*
2. ***Chercher une solution particulière*** *y_p :*
   - *Identifier la forme du second membre $Q(x)$*
   - *Choisir la forme de y_p en fonction des racines de l'éq. car.*
   - *Identifier les coefficients*
3. ***Conclure*** *: $y = y_0 + y_p$*

6.3 Exercices

Exercice 6.1 Premiers pas

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' = 12 \quad (y, y'$ absents)
2. $y'' = 24x^2 + 12x + 6 \quad (y, y'$ absents)
3. $y'' = e^{2y}$ avec $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0 \quad (x, y'$ absents)
4. $xy'' - y' = 1 \quad (y$ absent)
5. $y'' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) y' = x \quad (y$ absent)
6. $y'' - yy' = 0$ avec $y'(1) = -1$ et $y(1) = 1 \quad (x$ absent)
7. $yy'' - (y')^2 = -1$ avec $y'(2) = 0$ et $y(2) = 2 \quad (x$ absent)
8. $yy'' = 2(y')^2$ avec $y'(1) = 8$ et $y(1) = 2 \quad (x$ absent)

Exercice 6.2 Équations homogènes

Résoudre les équations homogènes suivantes :

1. $y'' - y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 4y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
4. $y'' - y' = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
5. $y'' + 4y' - 5y = 0$
6. $y'' + 2y' + y = 0$
7. $y'' + 9y = 0$

Exercice 6.3 Recherche de solutions particulières

Déterminer la solution particulière y_p à partir de la forme proposée :

1. $y'' + 4y = 8x^2 + 1$ avec $y_p = Ax^2 + Bx + C$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^x$ avec $y_p = (Ax + B)e^x$
3. $y'' + y' - 2y = e^{-x} + \cos(2x)$ avec $y_p = Ae^{-x} + B\cos(2x) + C\sin(2x)$
4. $y'' + 2y' + y = x^2e^x$ avec $y_p = (ax^2 + bx + c)e^x$

Exercice 6.4 Entraînement

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = -x - x^2$ avec $y_p = Ax^2 + Bx + C$
2. $y'' - y = e^x$ avec $y_p = Axe^x$
3. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$ avec $y_p = Ae^{2x}$
4. $y'' - y' - 2y = 10\cos(2x)$ avec $y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$
5. $y'' - 2y' + 2y = 3e^x(x + 3)$ avec $y_p = (Ax + B)e^x$
6. $y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4$ avec $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

Exercice 6.5 Équations sans second membre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$
2. $y'' - 2y' + y = 0$
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$

Exercice 6.6 Second membre polynomial

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 1$
2. $y'' - 2y' + y = x$, avec $y(0) = y'(0) = 0$
3. $y'' + 9y = x + 1$, avec $y(0) = 0$

Exercice 6.7 Second membre exponentiel ou trigonométrique

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$
3. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{x} + e^{3x}$
4. $y'' - y = e^{2x} - e^{x}$
5. $y'' + y' + y = \cos(x)$
6. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$

Exercice 6.8 Problème inverse

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions :

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 6.9 Système différentiel

Déterminer les fonctions $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant le système :

$$\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$$

Exercice 6.10 Avec condition initiale

Déterminer l'unique fonction solution :

1. $y'' + 2y' + 4y = xe^{x}$, avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$
2. $y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos(mx)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
   (discuter selon que $m = 0$ ou $m \neq 0$)

Exercice 6.11 Changement de variables

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

1. Cette équation est-elle linéaire ?
2. Pour y solution, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation à coefficients constants.
   (c) Résoudre cette équation et en déduire y.
3. Vérifier les solutions trouvées.

Exercice 6.12 Changement de fonction inconnue

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z = xy$

Exercice 6.13 Changement de variable

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ en posant $t = e^x$
2. $y'' + y'\tan(x) - y\cos^2(x) = 0$ en posant $t = \sin x$
3. $x^2y'' + y = 0$ en posant $t = \ln x$
4. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ sur $]-1, 1[$

Exercice 6.14 Variation de la constante

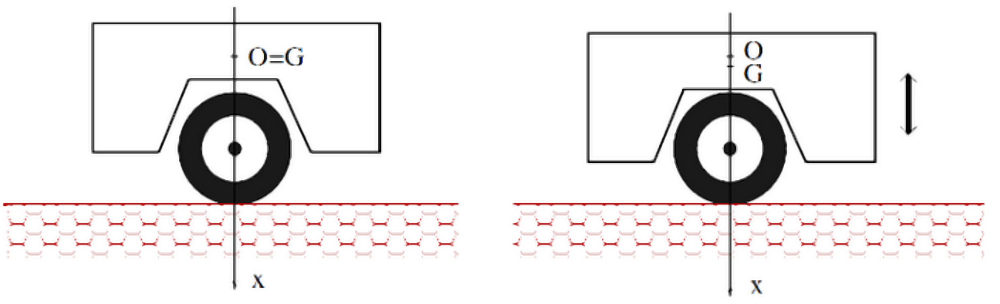
Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = \tan t$.

Exercice 6.15 La remorque

On étudie la suspension d'une remorque. Le centre d'inertie G se déplace sur un axe vertical (Ox) dirigé vers le bas. Son abscisse $x(t)$ vérifie :

$$M\,x''(t) + k\,x(t) = 0$$

où $M = 250$ kg et $k = 6250$ N.m^{-1}.



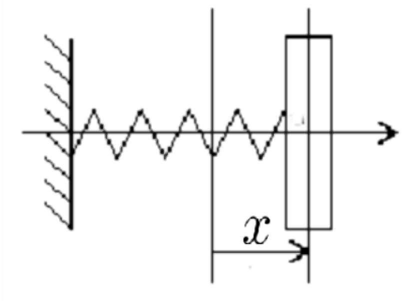
1. Déterminer la solution avec $x(0) = 0$ m et $x'(0) = -0,1$ m.s^{-1}.
2. Préciser la période de cette solution.

■ Exercice 6.16 Ressort amorti

Un objet de masse m est fixé à un ressort horizontal immergé dans un fluide. La position $x(t)$ vérifie :

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

avec $m = 2$, $c = 2$ et $k = 5$.



1. Déterminer l'ensemble des solutions.
2. On suppose $x(0) = 2$ et $x'(0) = 3\sqrt{3} - 1$. Déterminer $x(t)$.
3. Quelle est la limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$?
4. Déterminer le plus petit temps $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = 0$.

■ Exercice 6.17 Équation d'ordre 3

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes. On pose $g = f + f' + f''$. Montrer que g vérifie une équation du premier ordre (E_2).
2. Résoudre (E_2).
3. Résoudre (E_1).