Algèbre linéaire - Chapitre 2
Espaces vectoriels

Résumé des idées

À retenir dans une semaine :

— Un espace vectoriel est un ensemble avec deux lois : une addition interne et une multiplication par un scalaire.

— Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel.

— Pour vérifier qu'un ensemble est un espace vectoriel :
- Possède-t-il un vecteur nul ?
- L'addition est-elle une loi interne ?
- La multiplication par un scalaire est-elle une loi externe ?
- Les règles de calcul de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont-elles vérifiées ?

Ce que je dois savoir

— Que signifie qu'une loi soit interne à un ensemble ?

— Quelles sont les règles de calculs pour les espaces vectoriels ?

— Qu'est-ce que le vecteur nul d'un espace vectoriel ?

2.1 Exercices

2.1.1 Les espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

1. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}$?

   Il y a seulement le singleton $\{0\}$ et l'ensemble $\mathbb{R}$ comme espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}$.

2. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}^2$?

   Il y a le singleton $\{0\}$, toutes les droites qui passent par l'origine et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ comme espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}^2$.

3. Quels sont les espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}^3$?

Il y a le singleton $\{0\}$, toutes les droites qui passent par l'origine, tous les plans qui passent par l'origine, et l'espace $\mathbb{R}^3$ comme espaces vectoriels inclus dans $\mathbb{R}^3$.

2.1.2 parties de $\mathbb{R}^2$

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$

A est un demi-plan de $\mathbb{R}^2$, ce n'est pas un espace vectoriel, si on prend un vecteur non nul et qu'on multiplie par un scalaire négatif, on obtient un vecteur qui n'est pas dans A.

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

B est une réunion de deux droites qui passent par l'origine. Si on prend un vecteur sur chaque droite et qu'on les additionne, on obtient un vecteur qui n'est pas dans B.

3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

C est une droite qui passe par l'origine. C'est un espace vectoriel.

4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

Le vecteur nul n'est pas dans D, donc D n'est pas un espace vectoriel.

2.1.3 Dans un espace de fonctions

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles.
Soit F l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes.
Dans quel cas F est-il un espace vectoriel inclus dans E ?

1. $f(0) + f(1) = 0$

C'est bien un espace vectoriel, pour le montrer on répond aux 3 questions :
- Le vecteur nul est dans F, c'est la fonction nulle.
- L'addition est une loi interne, pour tout $f, g \in F$, $f + g \in F$.
- La multiplication par un scalaire est une loi externe, pour tout $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in F$.

2. $f(0) = 0$

C'est bien un espace vectoriel, pour le montrer on répond aux 3 questions :
- Le vecteur nul est dans F, c'est la fonction nulle.
- L'addition est une loi interne, pour tout $f, g \in F$, $f + g \in F$.

— La multiplication par un scalaire est une loi externe, pour tout $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in F$.

3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Le vecteur nul n'est pas dans F, donc F n'est pas un espace vectoriel.

4. $\forall x \in [0,1], f(x) + f(1-x) = 0$

C'est bien un espace vectoriel, on le montre en détaillant les 3 questions :
— Le vecteur nul est dans F, c'est la fonction nulle.
— L'addition est une loi interne, pour tout $f, g \in F$, $f + g \in F$.
— La multiplication par un scalaire est une loi externe, pour tout $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in F$.

5. $\forall x \in [0,1], f(x) \geqslant 0$

F n'est pas un espace vectoriel, si on prend la fonction $f(x) = x$ et qu'on la multiplie par un scalaire négatif, on obtient une fonction qui n'est pas dans F.

6. $2f(0) = f(1) + 3$

F n'est pas un espace vectoriel, la fonction nulle n'est pas dans F.

2.1.4 Dans $\mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ des lois usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / \mathrm{x}_1 = 0\}$

F est bien un espace vectoriel.

2. $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / \mathrm{x}_1 = 1\}$.

F n'est pas un espace vectoriel, le vecteur nul n'est pas dans F.

3. $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_2\}$

F est bien un espace vectoriel.

4. $\mathrm{F} = \{(x_1, \ldots, x_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / x_1 + \ldots + x_\mathrm{n} = 0\}$

F est bien un espace vectoriel.

5. $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} / \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_2 = 0\}$

F n'est pas un espace vectoriel, on peut trouver deux vecteurs de F dont la somme n'est pas dans F.

2.1.5 Dans $\mathbb{R}[X]$

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. A_1 est l'ensemble des polynômes réels P vérifiant $\mathrm{P}(0) = 1$.

   A_1 ne contient pas le polynome nul, donc A_1 n'est pas un espace vectoriel.

2. A_2 est l'ensemble des polynômes réels ayant a comme racine. ($a \in \mathbb{R}$ fixé).

   A_2 est bien un espace vectoriel.

3. A_3 est l'ensemble des polynômes réels ayant au moins une racine réelle.

   A_3 n'est pas un espace vectoriel, on peut trouver deux polynômes de A_3 dont la somme n'est pas dans A_3.
   Par exemple, X^2 et $(X-1)^2$ sont dans A_3, mais $X^2 + (X-1)^2$ n'est pas dans A_3 car ce polynôme n'admet aucune racine.

4. A_4 est l'ensemble des polynômes réels de degré 3.

   Exemple du cours : A_4 n'est pas un espace vectoriel, l'addition n'est pas une loi interne.

2.1.6 Dans l'espace des suites réelles

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. A_1 est l'ensemble des suites réelles convergentes vers 1.

   La suite nulle ne converge pas vers 1, donc A_1 n'est pas un espace vectoriel.

2. A_2 est l'ensemble des suites réelles négligeables devant n^2

   A_2 est bien un espace vectoriel.

3. A_3 est l'ensemble des suites réelles équivalentes à n^2.

   A_3 n'est pas un espace vectoriel, la suite nulle n'est pas dans A_3.

4. A_4 est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 3$$

   La suite nulle ne vérifie pas la condition, donc A_4 n'est pas un espace vectoriel.

5. A_5 est l'ensemble des suites réelles arithmétiques.

   A_5 est bien un espace vectoriel.

6. A_6 est l'ensemble des suites réelles géométriques.

A_6 n'est pas un espace vectoriel, la somme de deux suites géométriques n'est pas une suite géométrique.

2.1.7 Mélange

Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$;

   E_1 est bien un espace vectoriel.

2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P'(0) = 2\}$;

   La polynome nul n'est pas dans E_2, donc E_2 n'est pas un espace vectoriel.

3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \mid P\}$;

   E_3 est bien un espace vectoriel.

4. D l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;

   E_4 est bien un espace vectoriel.

5. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathcal{D}$.

   E_4 est bien un espace vectoriel.

6. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathcal{D}$.

   La fonction nulle n'est pas dans E_5, donc E_5 n'est pas un espace vectoriel.

Bases

2.1.8 Dans $\mathbb{R}^2$

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
   Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 2)$ dans cette base (v_1, v_2).
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 2), v_2 = (3, 4)$forment une base de $\mathbb{R}^2$.
   Trouver les composantes des vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ dans cette base (v_1, v_2).
3. Dans $\mathbb{R}^2$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

2.1.9 Dans $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ et $w = (1, 2, -3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

2.1.10 avec un paramètre

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où

$$\begin{cases} Q_1 = X^2 + 1 \\ Q_2 = 3X^2 - X + 3 \\ Q_3 = X^2 - X - 1 \end{cases}$$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Sioui, déterminer les coordonnées de X.