

Contrôle sur les séries de Fourier - 2eme version

Exercice 1 - Nombres complexes (6 points)

1. Montrer que $z\bar{z} = |z|^2$ pour tout nombre complexe z .
2. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i, \quad z_2 = \frac{2(\sqrt{3} + i)}{1 - i}, \quad z_3 = \frac{(1 + i)^5}{(1 - \sqrt{3}i)^2}$$

3. Ecrire sous forme algébrique les conjugués de ces nombres complexes.

Exercice 2 - Intégration (8 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx, \quad J = \int_1^e x^2 \ln(\sqrt{x}) dx$$

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(2x), \quad g(x) = \sin(x) \cos^3(x)$$

Exercice 3 - Fonctions périodiques (5 points)

Les fonctions suivantes sont-elles périodiques ? Si oui, déterminer leur période :

1. $f_1(x) = \sin(7x)$
2. $f_2(x) = \tan(2x)$
3. $f_3(x) = \cos^2(3x)$
4. $f_4(x) = \cos(2x) + \sin(\pi x)$
5. $f_5(x) = e^{i3x} + e^{-ix/2}$

Exercice 4 - Signal de température et analyse spectrale (5 points)

Un capteur de température dans un bâtiment enregistre les variations de température.

Le signal de température est modélisé par :

$$T(t) = 19 + 4 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

où t est en heures et T en degrés Celsius.

1. Déterminer (par le calcul) la période de ce signal.
2. Identifier la composante sinusoïdale dominante et esquisser cette sinusoïde (sur une période).
3. Calculer les coefficients de Fourier complexes de ce signal. On pourra réutiliser le résultat vu en cours

$$\langle e^{i2\pi nt/T}, e^{i2\pi mt/T} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

pour un produit scalaire bien choisi.