Algèbre linéaire - Chapitre 1

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Résumé des idées

À retenir dans une semaine :

— Nous interprèterons les vecteurs plutôt comme des points, et pas comme des flèches.

— Pour résoudre un système linéaire, on le rend **échelonné** avec le pivot de Gauss.

— On peut interpréter un système linéaire de 3 façons différentes :

- Comme une intersection d'éléments géométriques (droites, plans, etc.).
- Comme une combinaison linéaire de vecteurs.
- Comme une équation matricielle.

Ce que je dois savoir

— Que signifie qu'un système soit échelonné ?

— Quelles sont les manipulations autorisées pour le pivot de Gauss ?

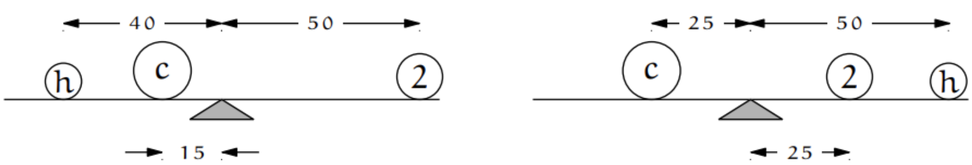
— Comment interpréter un système linéaire comme une combinaison de vecteurs ?

1.1 Exercices

1.1.1 Équations de réactions chimiques

Les équations de réactions chimiques peuvent être interprétées comme des systèmes linéaires.
Y a-t-il toujours une infinité de façon d'équilibrer l'équation ?

Transformer le problème suivant en système linéaire. Sans le résoudre, combien a-t-il de solutions ?



1.1.2 Combien de solutions ?

Ces systèmes admettent-ils zéro, une ou une infinité de solutions ?

a)

$$\begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ -2y & = 0 \end{cases}$$

Le système est bien échelonné avec autant d'équations que d'inconnues, il admet une solution unique.

b)

$$\begin{cases} x + y & = 4 \\ y - z & = 0 \end{cases}$$

Le système est déjà échelonné, mais il a plus d'inconnues que d'équations, il admet une infinité de solutions. Ces solutions sont arrangées selon une droite : on peut fixer le paramètre z et exprimer x et y en fonction de z.

c)

$$\begin{cases} x + y & = 4 \\ y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

La dernière équation n'apporte aucune information, c'est le même que le système précédent.

d)

$$\begin{cases} x + y & = 4 \\ 0 & = 4 \end{cases}$$

La dernière équation est incompatible, le système n'admet pas de solution.

e)

$$\begin{cases} 3x + 6y + z & = -0.5 \\ -z & = 2.5 \end{cases}$$

Le système est échelonné. 2 équations pour 3 inconnues, on peut donc en choisir une comme paramètre : y,et exprimer x et z en fonction de y. Il admet donc une droite de solutions.

f)

$$\begin{cases} x - 3y & = 2 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

La dernière équation n'apporte aucune information, On se ramène donc à une équation, deux inconnues. Il y a donc toute une droite de solution.

g)

$$\begin{cases} 2x + 2y & = 4 \\ y & = 1 \\ 0 & = 4 \end{cases}$$

La dernière équation est incompatible, le système n'admet pas de solution.

h)

$$\begin{cases} 2x + y &= 0 \end{cases}$$

C'est l'équation d'une droite. Tous les points de cette droite sont solutions.

i)

$$\begin{cases} x - y &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

La dernière équation est incompatible, le système n'admet pas de solution.

j)

$$\begin{cases} x + y - 3z &= -1 \\ y - z &= 2 \\ z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné, 3 équations pour 3 inconnues, il admet une solution unique.

1.1.3 Systèmes d'équations linéaires

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ pour échelonner puis résoudre le système. Il admet une unique solution.

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ pour échelonner puis résoudre le système. Il admet une unique solution.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 14 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour échelonner puis résoudre le système. Il admet toute une droite de solutions. On pourra choisir z comme paramètre et exprimer x et y en fonction de z.

$$\begin{cases} -x-y=1 \\ -3x-3y=2 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$, cela conduit à l'équation $0 = 5$, qui est incompatible. Le système n'admet pas de solution.

$$\begin{cases} 4y+z=20 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+z=5 \\ x+y-z=10 \end{cases}$$

Pour échelonner le système, il faut commencer par échanger les équations pour avoir un x dans la première équation. On échange par exemple L_1 et L_3. On obtient

$$\begin{cases} x+z=5 \\ 4y+z=20 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+y-z=10 \end{cases}$$

Ensuite, on élimine les x des autres équations à l'aide de la première équation : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} x+z=5 \\ 4y+z=20 \\ -2y-z=-10 \\ y-2z=5 \end{cases}$$

Ensuite, on utilise L_2 pour éliminer les y : $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2$. On obtient :

$$\begin{cases} x+z=5 \\ 4y+z=20 \\ -z=0 \\ -9z=0 \end{cases}$$

Les 2 dernières équations apportent la même information, on peut en garder seulement une des deux. On obtient un système échelonné avec une unique solution.

$$\begin{cases} 2x+z+w=5 \\ y-w=-1 \\ 3x-z-w=0 \\ 4x+y+2z+w=9 \end{cases}$$

Pour échelonner le système, on peut garder les deux premières équations. On élimine ensuite les x des autres équations à l'aide de la première équation. On fait donc : $L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ -5z - 5w = -15 \\ y - w = -1 \end{cases}$$

Ensuite, on utilise L_2 pour éliminer les y : $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. On obtient :

$$\begin{cases} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ -5z - 5w = -15 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné, 3 équations pour 4 inconnues, il admet une droite de solutions. On peut choisir w comme paramètre et exprimer x, y et z en fonction de w.

1.1.4 Approfondissement

Résoudre

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma & = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma & = 10 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma & = 9 \end{cases}$$

On peut se ramener à un système linéaire en posant $x = \sin\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \tan\gamma$. On obtient :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 10 \\ 6x - 3y + z = 9 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on applique $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 0 + 4y - 8z = 4 \\ 0 + 0 - 8z = 0 \end{cases}$$

On obtient une unique solution : $x = 1/2$, $y = 1$, $z = 0$.

On en déduit les solutions de système initial :

$$\alpha = \pi/6 \mod 2\pi \text{ ou } \alpha = 5\pi/6 \mod 2\pi,$$

$$\beta = 0 \mod 2\pi,$$

$$\gamma = 0 \mod \pi.$$

1.1.5 Manipulation

La méthode de Gauss consiste à combiner les équations d'un système pour en former de nouvelles.

a) Peut-on obtenir l'équation $3x-2y=5$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 4x-y=6 \end{cases}$$

Soit on voit tout de suite que L_2-L_1 donne $3x-2y=5$.

Sinon, il faut chercher a et b tels que aL_1+bL_2 donne $3x-2y=5$. On obtient le système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} \text{coefficients devant x :} \quad a+4b=3 \\ \text{coefficients devant y :} \quad a-b=-2 \\ \text{coefficients du second membre :}\ a+6b=5 \end{cases}$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} a+4b=3 \\ a-b=-2 \\ a+6b=5 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on applique $L_2 \leftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} a+4b=3 \\ 0-5b=-5 \\ 0+2b=2 \end{cases}$$

On obtient donc $a=1$ et $b=2$, c'est la seule solution.

b) Peut-on obtenir l'équation $5x-3y=2$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?

$$\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 3x+y=4 \end{cases}$$

On procède de même, on cherche a et b tels que aL_1+bL_2 donne $5x-3y=2$. On obtient le système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} \text{coefficients devant x :} \quad 2a+3b=5 \\ \text{coefficients devant y :} \quad 2a+b=-3 \\ \text{coefficients du second membre :}\ 5a+4b=2 \end{cases}$$

ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} 2a+3b=5 \\ 2a+b=-3 \\ 5a+4b=2 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 0 - 2b = -8 \\ 0 - 7b = -21 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont incompatibles, le système n'admet pas de solution.

c) Peut-on obtenir $6x - 9y + 5z = -2$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 6x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

On procède de même, on cherche a et b tels que $aL_1 + bL_2$ donne $6x - 9y + 5z = -2$. On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \text{coefficients devant x :} \quad 2a + 6b = 6 \\ \text{coefficients devant y :} \quad a - 3b = -9 \\ \text{coefficients devant z :} \quad -a + b = 5 \\ \text{coefficients du second membre :} \ 4a + 5b = -2 \end{cases}$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} 2a + 6b = 6 \\ a - 3b = -9 \\ -a + b = 5 \\ 4a + 5b = -2 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on fait $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} 2a + 6b = 6 \\ -12b = -24 \\ 8b = 16 \\ -7b = -14 \end{cases}$$

Les trois dernières équations sont les mêmes, on obtient un système parfaitement échelonné avec une unique solution : $b = 2$ et $a = -3$.

1.1.6 Interprétation

Choisir 3 systèmes linéaire dans un exercice précédent et l'écrire des 2 manières différentes :

1. Comme une combinaison linéaires de vecteurs.
2. Comme une équation matricielle.

Par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ou comme une équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1.1.7 Pour ceux qui s'ennuient

Une boîte contenant des pennies, des nickels et des dimes renferme treize pièces d'une valeur totale de 83 cents. Combien y a-t-il de pièces de chaque type dans la boîte ? (Ce sont des pièces américaines : un penny vaut 1 cent, un nickel 5 cents et un dime 10 cents.)