Algèbre linéaire - Chapitre 3
Familles de vecteurs

1 Combinaisons linéaires

- Dans $\mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1,-2)$ et $e_2 = (2,3)$?
- Dans $\mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1,-2), e_2 = (2,3), e_3 = (-4,5)$?
- Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2,5,3)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1,3,2)$ et $e_2 = (1,-1,4)$?
- Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (3,1,m)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1,3,2)$ et $e_2 = (1,-1,4)$? (discuter suivant la valeur de m)

Si oui, donner toutes les combinaisons linéaires possibles.

2 Sous-espace engendré

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1,-1,2)$ et $u_2 = (1,1,-1)$.

- Les vecteurs $v_1 = (3,1,0)$ et $v_2 = (1,5,-1)$ sont-ils combinaison linéaire de u_1 et u_2 ?
- Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Démontrer que $v = (a,b,c)$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si $-a + 3b + 2c = 0$.
- En déduire un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de u_1 et de u_2.

Familles

3 Familles libres

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

- (u,v) avec $u = (1,2,3)$ et $v = (-1,4,6)$;
- (u,v,w) avec $u = (1,2,-1), v = (1,0,1)$ et $w = (0,0,1)$;
- (u,v,w) avec $u = (1,2,-1), v = (1,0,1)$ et $w = (-1,2,-3)$;

Sans calcul supplémentaire, dire si elles sont génératrices.

4 Dimension

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de $F, G, F \cap G$.

Dimension

5 Dimension

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants. La dimension d'un espace vectoriel correspond au nombre de paramètres scalaires nécessaires pour décrire un vecteur.

1. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des matrices 2×3 à coefficients réels.
3. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n qui s'annulent en 0.
6. L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont la somme des coordonnées est nulle.

6 Bases

Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices ?

- Dans $\mathbb{R}^2$:
  - La famille $\{(1,0),(0,1)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$
  - La famille $\{(1,2),(2,4)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$
  - La famille $\{(1,0)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$
- Dans $\mathbb{R}^3$:
  - La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$
  - La famille $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$
  - La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$
- Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 :
  - La famille $\{1, X, X^2\}$ dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2
  - La famille $\{1+X, X+X^2, 1+X^2\}$ dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2
  - La famille $\{1, X, X\}$ dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2