Méthode des éléments finis – TD1

Librement inspiré de M. Jocelin Poulain

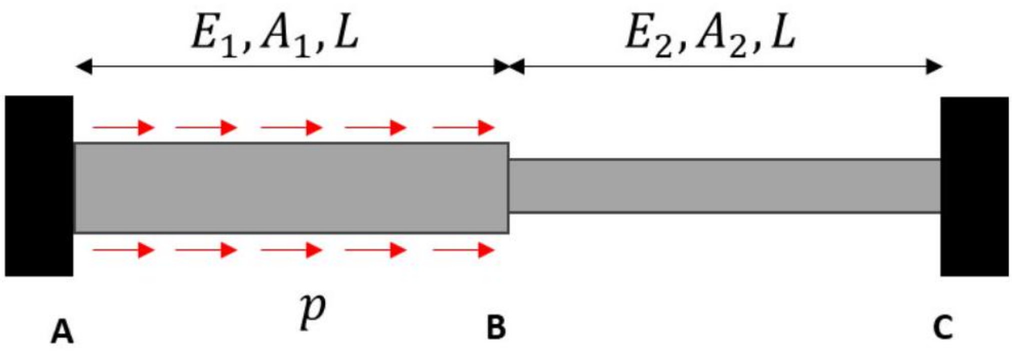
Problème

On considère une barre de longueur $2L$, constituée de deux barres de longueur égale :

— Barre AB (acier) : $L = 6$ m, $E_1 = 210000$MPa, $A_1 = 0.001$ m^2
— Barre BC (aluminium) : $L = 6$ m, $E_2 = 70000$MPa, $A_2 = 0.003$ m^2

(Remarquez que $E_1A_1 = E_2A_2$)

La barre 1 est soumise à un chargement constant $p = 100$kN/m.



On cherche à déterminer les contraintes et déformations dans la barre en résolvant d'une part le problème de manière exacte par les lois de l'élasticité et d'autre part par la méthode des éléments finis.

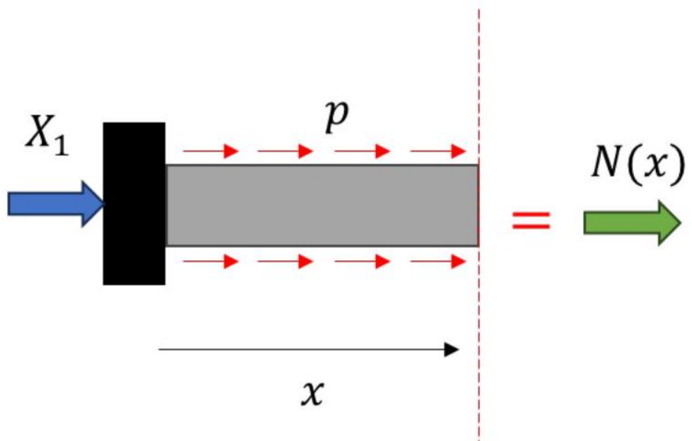
Partie 1 : Résolution par les lois de l'élasticité.

La convention adoptée ici pour la loi de Hooke est : $\sigma = -E\varepsilon$ (convention Génie civil) On note X_1 la réaction à gauche et X_5 la réaction à droite.

1. Déterminer l'expression de l'effort normal dans la barre en fonction de X_1, p et de l'abscisse x.

En procédant à une coupure à gauche d'une section Σ(x), il vient :

— Pour $x < L$: $N(x) = X_1 + px$



— Pour $x > L$: $N(x) = X_1 + pL$

2. Déterminer l'allongement de la barre noté $u(x)$. Quelles sont les conditions aux limites ? En exploitant ces conditions aux limites, déterminer les réactions X_1 et X_5

D'après la loi de Hooke :

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{\sigma(x)}{E(x)} = -\frac{N(x)}{E(x)A(x)}$$

On en déduit alors la translation horizontale des sections à une abscisse x donnée :

— Pour $x < L$: on est dans la $1^{\text{ère}}$ barre en acier :

$$u(x) = u_A - \int_0^x \frac{N(\xi)}{E_1A_1}d\xi = u_A - \int_0^x \frac{X_1 + p\xi}{E_1A_1}d\xi = u_A - \frac{1}{E_1A_1}\left(X_1x + \frac{px^2}{2}\right)$$

On pourra noter que le déplacement en x = L vaut alors :

$$u(L) = u_B = u_A - \frac{1}{E_1A_1}\left(X_1L + \frac{pL^2}{2}\right)$$

— Pour x > L, on est dans la 2^{nde} barre en aluminium et l'effort normal est constant :

En se mettant dans le repère local de la seconde barre ($x = 0$ au début de la 2^{nde} barre), il vient :

$$\begin{aligned}
u'(x) &= u_B - \int_0^x \frac{N(\xi)}{E_2A_2}d\xi \\
&= u_B - \int_0^x \frac{X_1 + pL}{E_2A_2}d\xi \\
&= u_A - \frac{1}{E_1A_1}\left(X_1L + \frac{pL^2}{2}\right) - \frac{1}{E_2A_2}\left(X_1x + pLx\right)
\end{aligned}$$

Le déplacement de l'extrémité de la seconde barre vaut alors :

$$u'(L) = u_C = u_A - \frac{1}{E_1A_1}\left(X_1L + \frac{pL^2}{2}\right) - \frac{1}{E_2A_2}\left(X_1L + pL^2\right)$$

Or, d'après les conditions aux limites : $u_A = u_C = 0$
On en déduit alors l'expression de la réaction X_1 :
Soit :

$$X_1L\left(\frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2}\right) + pL^2\left(\frac{\frac{1}{2}}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2}\right) = 0$$

On note que $E_1A_1 = E_2A_2 = EA = 210MN$. On en déduit alors :

$$2\frac{X_1}{EA} + \frac{3}{2}\frac{pL}{EA} = 0$$

Soit

$$X_1 = -\frac{3}{4}pL = -0.75 * 100 * 6 = -450\text{kN}$$

On déduit également :

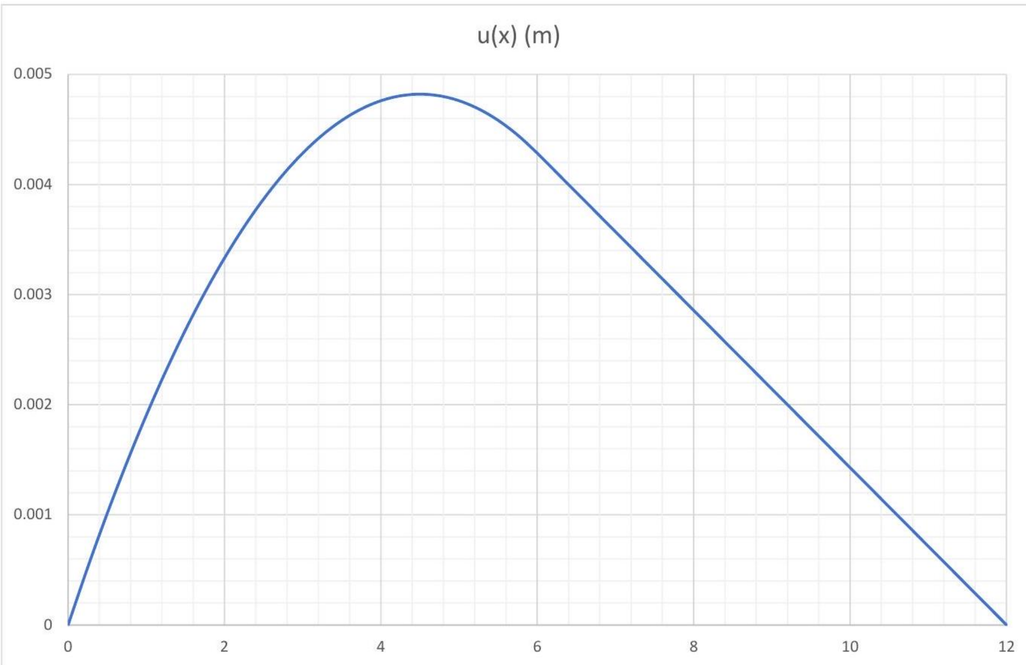
$$X_5 = -(pL + X_1) = -\frac{pL}{4} = -150\text{kN}$$

Le champ de déplacement se déduit des équations de Bresse.

Sur la page suivante est tracée l'allure du champ de déformation.

Il est parabolique sur la première partie de la barre et une linéaire sur la seconde partie.

On note que le déplacement maximal est obtenu en $x = 4{,}5\,\text{m}$, correspondant au point où $N(x) = 0$ (séparation traction/compression).



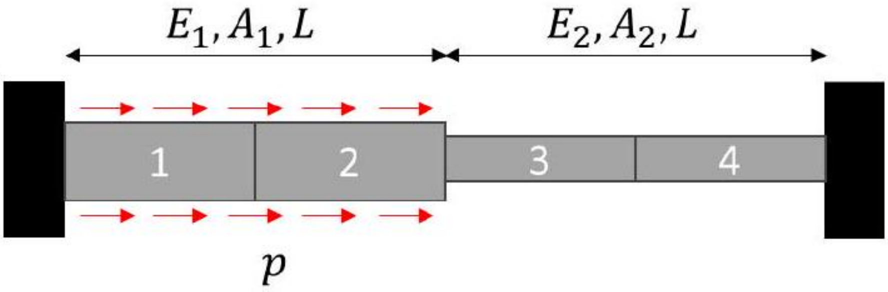
Partie 2 : Résolution par la MEF

On utilise la méthode des éléments finis pour résoudre le problème (de manière approchée). On veut limiter la discrétisation à 4 éléments finis judicieusement choisis.

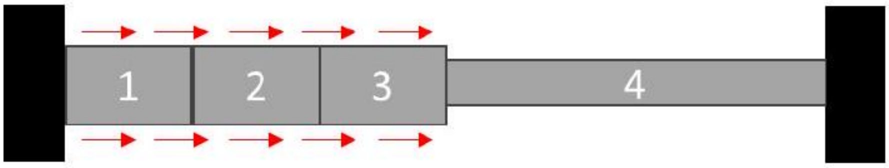
Comme vous le verrez, on retrouvera la solution exacte sur les nœuds du maillage, et on estimera la solution sur les autres points par interpolation.

6. Compte tenu des résultats précédents, préciser quel vous semble le meilleur maillage parmi les 3 présentés ci-dessous en justifiant votre choix :

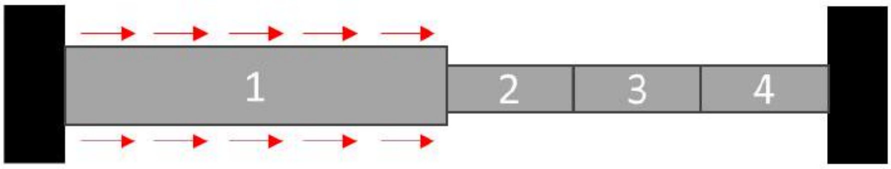
Maillage 1 :



Maillage 2 :



Maillage 3 :



Il n'y a pas de chargement dans la seconde moitié de la barre : cette seconde moitié ne sera soumis qu'à des efforts à ses extrémités, à savoir la réaction d'appui de droite (X_5) et l'effort provenant de la partie au niveau de la jonction entre les 2 moitiés (X_B).

Les questions précédentes ont mis en évidence que la contrainte dans cette partie sont constantes. Il n'est donc pas nécessaire de discrétiser cette seconde moitié.

En conséquence, le maillage 2 est le plus approprié car il permet une discrétisation de la première moitié de la poutre en 3 éléments et augmente donc ainsi la précision par rapport au maillage 1 ou au maillage 3.

7. La formule générale pour la matrice de rigidité d'un élément de barre est :

$$K_e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

où E est le module de Young, A la section de l'élément, et L sa longueur.

Pour le maillage choisi, déterminer les matrices de rigidités élémentaires.

On discrétise le 1^{er} tronçon en 3 éléments de 2 m et le second en un élément de 6 m .
Les matrices de rigidité élémentaire de chacun des tronçons 1,2 et 3 valent ainsi :

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{EA_1}{L_1/3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3EA_1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 105000\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{(kN/m)}$$

La matrice de rigidité élémentaire du tronçon 4 vaut ainsi :

$$K_4 = \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 35000\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{(kN/m)}$$

Pour écrire la matrice globale du système, il faut assembler les matrices de rigidité élémentaires de chaque barre en tenant compte de la connectivité des nœuds. On procède ainsi :

- Numéroter tous les nœuds du système.
- Partir d'une matrice carrée de dimension égale au nombre total de nœuds, remplie de zéros. La première ligne correspond au nœud 1, la deuxième au nœud 2, etc. de même pour les colonnes.
- Pour chaque petit élément du maillage, identifier les nœuds à ses extrémités et le coefficient de la matrice élémentaire associé à ces nœuds.
- Dans la matrice globale, on additionne les contributions de chaque nœud à la position correspondante dans la matrice globale.

Mathématiquement, cela revient à superposer les matrices élémentaires dans la matrice globale en respectant la topologie du maillage.

Par exemple, si un élément relie les noeuds 1 et 3, et que sa matrice élémentaire est :

$$K_e = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Alors, dans la matrice globale, cet élément contribuera aux positions (1,1), (1,3), (3,1) et (3,3) :

$$K = \begin{bmatrix} a & . & b & \cdots \\ . & . & . & \cdots \\ c & . & d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

8. Exprimer la matrice de raideur globale de la structure.

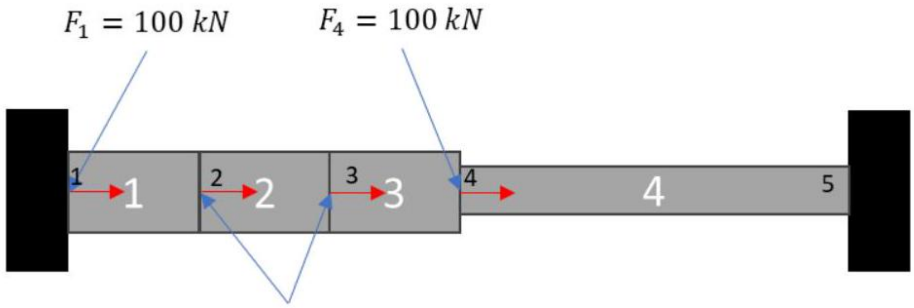
La matrice de raideur est obtenue en procédant à l'assemblage des matrices élémentaires :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour écrire la relation $F = K\mathbf{u}$ et résoudre le système, il faut encore exprimer les forces qui s'appliquent sur les noeuds du maillage.
Dans le cours de RdM, vous avez montré que le chargement réparti peut être remplacé par un chargement nodal équivalent $F_e = \frac{pL_e}{2}$.

9. Déterminer les forces équivalentes qui s'appliquent sur les noeuds du maillage.

Le chargement réel peut être remplacé par le chargement nodal équivalent :



$$F_2 = F_3 = 200\text{kN}$$

On vérifie que la résultante du chargement réel est bien identique à celle des forces nodales équivalentes, soit 600kN.

Il reste une dernière étape avant d'écrire le système linéaire, il faut tenir compte des conditions aux limites. Pour cela, on supprime dans la matrice de rigidité globale les lignes et colonnes correspondant aux déplacements connus.

10. Etablir la relation $F = K\mathbf{u}$ pour l'ensemble de la structure.

On a supprimé les premières et dernières lignes et colonnes de la matrice de rigidité globale. Les conditions aux limites imposent $u_1 = u_5 = 0$.

La relation force-déplacement de la structure est ainsi exprimée sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

11. Ecrire puis résoudre le système linéaire pour obtenir les déplacements aux noeuds du maillage.

On résout le système linéaire pour obtenir les déplacements.

$$\begin{cases} 6u_2 - 3u_3 &= 200L/EA \\ -3u_2 + 6u_3 - 3u_4 &= 200L/EA \\ -3u_3 + 4u_4 &= 100L/EA \end{cases}$$

Après l'opération $R_2 \leftarrow 2R_2 + R_1$, on obtient :

$$\begin{cases} 6u_2 - 3u_3 &= 200L/EA \\ 9u_3 - 6u_4 &= 600L/EA \\ -3u_3 + 4u_4 &= 100L/EA \end{cases}$$

Ensuite, $R_3 \leftarrow 3R_3 + R_2$, ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} 6u_2 - 3u_3 &= 200L/EA \\ 9u_3 - 6u_4 &= 600L/EA \\ 6u_4 &= 900L/EA \end{cases}$$

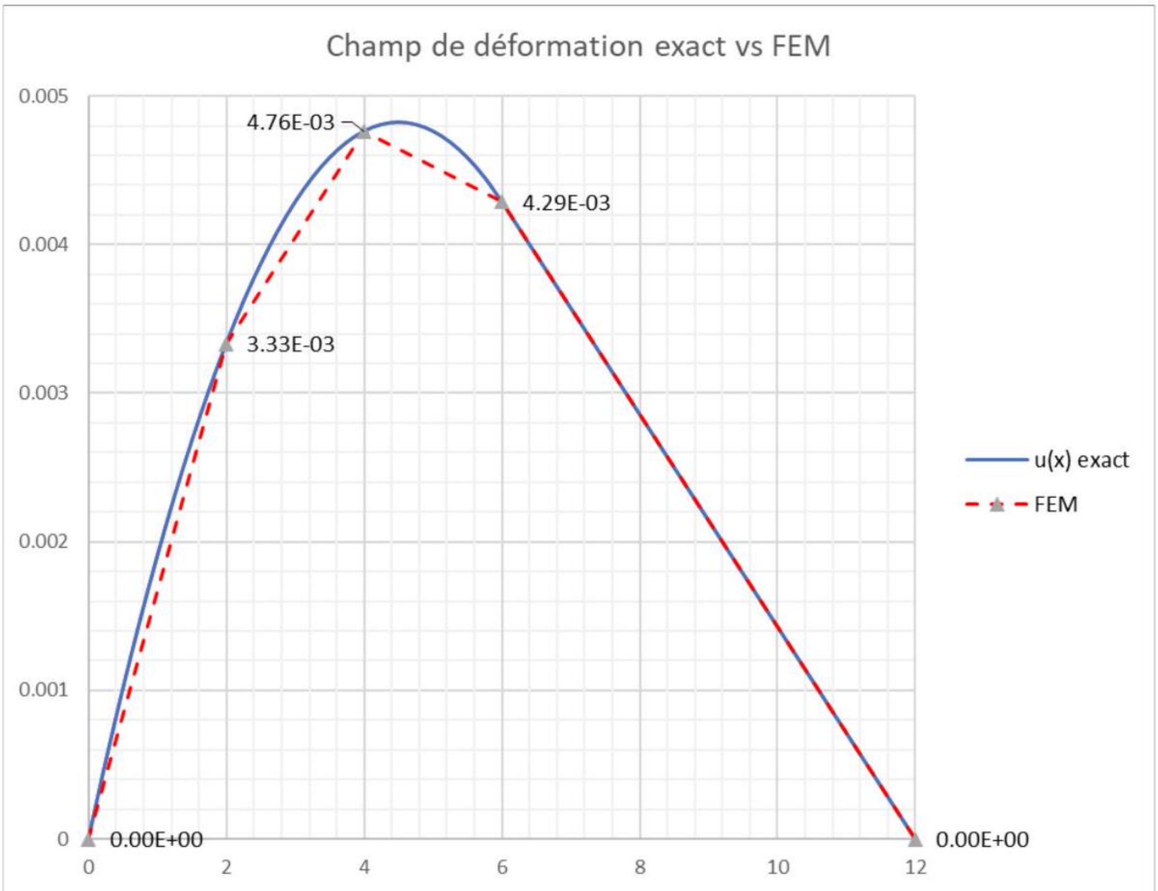
On obtient finalement :

$$\begin{cases} u_2 & = & 350L/3EA \\ u_3 & = & 500L/3EA \\ u_4 & = & 150L/EA \end{cases}$$

12. Tracer ainsi le champ de déplacements obtenu par la FEM sur le schéma donné ci-dessus et comparer au champ exact.

Les déplacements FEM et exacts sont identiques aux niveaux des nœuds du maillage, à savoir en $x = 0, 2, 4, 6$ et $12\,\mathrm{m}$.

Le champ FEM est identique au champ exact dans la partie de barre non chargée.



Il y a bien sûr un léger écart dans la partie de barre chargée.

Cet exemple montre aussi qu'un maillage « grossier » peut aboutir à une sous-estimation des contraintes.