

---

# Séries de fonctions - Chapitre 1

## Suites et séries numériques

---

### Résumé des idées

*Ce qu'il faut savoir :*

- Les formules pour calculer les sommes de séries arithmétiques et géométriques.
- Le critère de Riemann pour les séries à termes positifs.
- Les contre-exemples de suites de fonctions qui convergent simplement mais pas uniformément.

### Questions de cours

- Quelle est la définition d'une suite convergente ?
- Quels sont les outils pour montrer la convergence d'une série numérique ?
- Quels sont les deux modes de convergence d'une suite de fonctions ?

## Exercices - Suites Numériques

### 1 Des exemples

Donner deux exemples différents dans chacune des situations suivantes :

- ☐ une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0.

Par exemple,  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ , ou  $v_n = 4 + e^{-n}$ .

- ☐ une suite bornée non convergente.

Par exemple,  $u_n = (-1)^n$ , ou encore  $v_n = \sin n$ .

- ☐ une suite positive non bornée ne tendant pas vers  $+\infty$ .

Par exemple,  $u_n = \left((-2)^n\right)_+$ , (la partie positive de  $(-2)^n$ ) ou bien on peut la construire

par disjonction de cas :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ☐ une suite non monotone qui tend vers 0.

Par exemple,  $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ , ou bien  $v_n = e^{-n} \cos n$ .

- ☐ une suite positive qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

Par exemple,  $u_n = \left((-1/2)^n\right)_+$ , ou alors par disjonction de cas :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

## 2 Vrai ou Faux ?

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses avec une démonstration ou un contre-exemple.

- ☐ Toute suite non-majorée tend vers  $+\infty$ .

Faux, la suite  $u_n = n(-1)^n$  n'est pas majorée et ne tend pas vers l'infini.

- ☐ Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors,  $(u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang.

Faux, on forme par exemple la suite

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

qui converge vers 0 mais n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

- ☐ Si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 0$ , alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  est une suite géométrique de raison  $1/q$ .

Vrai, si  $u_n = u_0 q^n$ , alors  $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0} q^{-n} = \frac{1}{u_0} \left(\frac{1}{q}\right)^n$ .

- ☐ Soit  $(u_n)$  une suite croissante et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n_0 \geq N$  tel que  $u_{n_0} > \ell$ , alors  $(u_n)$  ne converge pas vers  $\ell$ .

Faux, la suite  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  converge vers  $\ell = 0$ , pourtant il existe une infinité de valeurs de  $(u_n)$  qui sont strictement supérieures à  $\ell$ .

- ☐ Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante et que  $(u_n)$  vérifie  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier  $n$ , alors  $(u_n)$  est croissante.

Faux, on peut prendre par exemple  $f(x) = x^2$  et  $u_0 \in ]0, 1[$ .

□ Si  $(u_n)$  est divergente, alors  $(u_n)$  est non bornée.

Faux, la suite  $u_n = (-1)^n$  est divergente mais bornée.

□ Si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $f$  continue, alors  $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$

Vrai, c'est la définition d'une fonction continue :  $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$ .

### 3 Étude de suites

Étudier la nature des suites suivantes :

a)  $u_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt{n}}$

Le numérateur est borné car  $|\sin(n)| \leq 1$  et  $|3 \cos(n^2)| \leq 3$ . Le dénominateur tend vers  $+\infty$ .  
Donc la suite tend vers 0.

b)  $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

On conserve les termes dominants :

$$2n + (-1)^n = 2n\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) = 2n(1 + o(1))$$

$u_n$  est équivalente à  $\frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}$ . donc la suite tend vers  $\frac{2}{5}$ .

c)  $u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$

On fait de même, on conserve les termes dominants :

$$n^3 + 5n = n^3\left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = n^3(1 + o(1))$$

Pour le dénominateur :

$$4n^2 + \sin(n) + \ln(n) = 4n^2\left(1 + \frac{\sin(n)}{4n^2} + \frac{\ln(n)}{4n^2}\right) = 4n^2(1 + o(1))$$

$u_n$  est équivalente à  $\frac{n^3}{4n^2} = \frac{n}{4}$ . donc la suite tend vers  $+\infty$ .

d)  $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

On multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée pour reconnaître une identité remarquable :

$$u_n = \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2n+1 - (2n-1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

Comme le dénominateur est équivalent à  $2\sqrt{2n}$ , on a  $u_n$  est équivalent à  $\frac{2}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ . Donc la suite tend vers 0.

e)  $u_n = 3^n e^{-3n}$ .

Par croissances comparées, l'exponentielle l'emporte sur les puissances donc la suite tend vers 0.

f)  $u_n = \frac{n}{2^n}$

Par croissances comparées, les exponentielles (ici  $2^n$ ) l'emportent sur les puissances donc la suite tend vers 0.

g)  $u_n = \frac{n!}{45^n}$

Par croissances comparées, les factorielles l'emportent sur les puissances donc la suite tend vers l'infini.

h)  $u_n = \frac{n!}{n^n}$

On peut étudier le rapport  $u_{n+1}/u_n$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Donc la suite est décroissante et tend vers 0.

i)  $u_n = \frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$

On factorise par les termes dominants :

$$u_n = \frac{2^n(1 + \frac{n^3}{2^n})}{3^n(1 + \frac{n^2}{3^n})} = \frac{2^n(1 + o(1))}{3^n(1 + o(1))}$$

La suite est donc équivalente à  $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Donc la suite tend vers 0.

#### 4 \*Plus difficile

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer un équivalent simple :

a)  $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1)$

On met en facteur le terme dominant dans chaque logarithme, de sorte que

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(2n^2\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) - \ln\left(3n\left(1 + \frac{1}{3n}\right)\right) \\ &= 2\ln n + \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \ln(n) - \ln(3) - \ln\left(1 + \frac{1}{3n}\right) \\ &= \ln n + \ln 2 - \ln 3 + v_n \end{aligned}$$

où la suite  $(v_n)$  tend vers 0. On en déduit que  $u_n$  tend vers  $+\infty$ .

b)  $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, de sorte que

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}}$$

On met encore en facteur, dans chaque racine carrée du dénominateur, le terme dominant (en  $n^2$ ), et on trouve

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

Or,  $\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$  tend vers 1 et  $\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$  tend également vers 1. On en déduit que  $(u_n)$  converge vers 1.

c)  $n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, a, b \in ]0, +\infty[$

Si  $a = b$ , alors  $u_n = 0$  pour tout  $n$ , et donc  $(u_n)$  converge vers 0. Si  $a > b$ , alors  $a^n$  est prépondérant sur  $b^n$  au sens que

$$\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \rightarrow 0$$

puisque  $|b/a| < 1$ . On factorise donc par  $a^n$  au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

On en déduit que dans ce cas,  $(u_n)$  converge vers 1. Si  $b > a$ , on factorise cette fois par  $b^n$  et c'est  $(a/b)^n$  qui converge vers 0. On trouve :

$$u_n = \frac{-1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$

$(u_n)$  converge donc vers -1 dans ce cas.

d)  $u_n = \frac{\ln(n+e^n)}{n}$

On factorise par  $e^n$  dans le logarithme. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(e^n(1 + ne^{-n}))}{n} \\ &= \frac{n + \ln(1 + ne^{-n})}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part,  $ne^{-n}$  tend vers 0 (par exemple, on peut écrire  $ne^{-n} = \frac{1}{\frac{e^n}{n}}$  et utiliser la comparaison des fonctions exponentielle et polynôme au voisinage de l'infini). Puisque la fonction  $\ln$  est continue en 1 et  $\ln(1) = 0$ , on en déduit que  $\ln(1 + ne^{-n})$  tend vers 0. Il vient  $\ln(1 + ne^{-n})/n$  tend vers 0, et donc la suite  $(u_n)$  converge vers 1.

e)  $u_n = \frac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}.$

On factorise par le terme dominant dans chaque logarithme. On en déduit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(\sqrt{n}) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln(n^2) + \ln(1 + n^{-2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2 \ln(n) + \ln(1 + n^{-2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln n}}{2 + \frac{\ln(1+n^{-2})}{\ln n}}. \end{aligned}$$

Puisque  $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ln(1 + n^{-2})$  tendent vers 0,  $(u_n)$  converge vers  $\frac{1}{4}$ .

## 5 Formule de Stirling

- a) Soit  $(x_n)$  une suite de réels et soit  $(y_n)$  définie par  $y_n = x_{n+1} - x_n$ .  
Démontrer que la série  $\sum_n y_n$  et la suite  $(x_n)$  sont de même nature.

On a  $y_n = x_{n+1} - x_n$ . Donc

$$\sum_{n=0}^N y_n = \sum_{n=0}^N (x_{n+1} - x_n) = x_{N+1} - x_0.$$

Donc la série  $\sum_n y_n$  et la suite  $(x_n)$  sont de même nature.

- b) On pose  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ .  
A l'aide d'un développement limité, déterminer la nature de la série de terme général  $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ .

2. Un petit calcul prouve que :

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

On effectue un développement limité de  $v_n$  - il faut pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 - et on a :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général  $v_n$  est donc convergente.

- c) En déduire l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C \sqrt{n} n^n e^{-n}$$

On écrit  $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ . Puisque la série  $\sum_n v_n$  converge, d'après la première question la suite  $(\ln(u_n))$  converge vers un réel  $l$ , et en passant à l'exponentielle, on trouve que la suite  $(u_n)$  converge vers le réel  $e^l$  qui est strictement positif. Revenant à la définition

de  $(u_n)$ , ceci donne le résultat avec  $C = e^{-l}$ .

## 6 Télescopiques

- a) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}$ .

On met tout au même dénominateur, et on procède par identification :

$$\frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1} = \frac{(a + b)k + (a - b)}{k^2 - 1}.$$

On cherche donc  $a$  et  $b$  de sorte que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

On en déduit  $a = 1/2$  et  $b = -1/2$ .

- b) En déduire la limite de la suite  $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ .

La somme est télescopique :

$$u_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

soit

$$u_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

On en déduit que  $(u_n)$  converge vers  $\frac{3}{4}$ .

- c) Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite  $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$

L'idée est de factoriser  $k^2 + 3k + 2 = (k + 1)(k + 2)$ . On cherche donc  $a$  et  $b$  tels que

$$\frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{a}{k + 1} + \frac{b}{k + 2}.$$

On trouve  $a = 1$  et  $b = -1$ . On en déduit que

$$v_n = 1 - \frac{1}{n + 2}$$

et donc  $(v_n)$  converge vers 1.

- d) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Multipliant la différence de deux racines par la quantité conjuguée, on trouve

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

- e) En déduire le comportement de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On somme alors ces inégalités, et les termes à gauche se télescopent :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) \leq u_n.$$

Par le théorème de comparaison, on en déduit que  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

## Séries numériques

### 7 Paramètres

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ .

- a) Pour quelle(s) valeur(s) de  $(a, b)$  la série  $\sum u_n$  est-elle convergente ?

Écrivons

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln n + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On obtient

$$u_n = (1 + a + b) \ln(n) + \frac{a + 2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, si  $1 + a + b \neq 0$ ,  $u_n \sim_{+\infty} (1 + a + b) \ln(n)$  et la série diverge grossièrement. Si  $1 + a + b = 0$  et  $a + 2b \neq 0$ ,  $u_n \sim_{+\infty} \frac{a+2b}{n}$  et la série diverge par comparaison à une série de Riemann divergente. Si  $1 + a + b = 0$  et  $a + 2b = 0$ , alors  $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et la série converge absolument. Finalement, on a prouvé que  $\sum u_n$  converge si et seulement si

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

- b) Dans le(s) cas où la série converge, déterminer  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

On traite donc le cas  $a = -2$  et  $b = 1$ . Notons  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . Alors



$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \ln(k) - 2 \sum_{k=1}^n \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(k+1).
\end{aligned}$$

On reconnaît deux couples de deux sommes télescopiques et on trouve

$$S_n = \ln(1) - \ln(2) + \ln(n+2) - \ln(n+1) \rightarrow -\ln(2).$$

## 8 Avec l'exponentielle

Sachant que  $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ , déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^2-2}{n!}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

1. La première somme ne pose pas de problèmes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} + e = 2e.$$

2. La deuxième somme est plus compliquée à cause du terme en  $n^2$ . Pour qu'il se simplifie bien avec le  $n!$ , le plus commode est de l'écrire

$$n^2 = n(n-1) + n$$

de sorte que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e + e - 2e = 0.$$

3. La méthode est similaire. Dit de façon algébrique, on va décomposer le polynôme  $X^3$  dans la base  $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ . En raisonnant d'abord avec le terme de plus haut degré, puis celui juste après, etc..., on trouve :

$$X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3 \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n \geq 2} \frac{3}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= 5e.
\end{aligned}$$

## 9 Convergence des séries

Etudier la convergence des séries  $\sum u_n$  suivantes :

$$1. u_n = \frac{n}{n^3+1}$$

$$5. u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$$

$$2. u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$$

$$6. u_n = \frac{1}{n!}$$

$$3. u_n = n \sin(1/n)$$

$$7. u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n}$$

$$4. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$8. u_n = \frac{n+1}{2^n+8}$$

$$9. u_n = \frac{1}{\ln(n^2+1)}$$

## Suites de fonctions

### 10 Suites de fonctions

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ . Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

- Si les  $f_n$  sont croissantes, alors  $f$  aussi.
- Si les  $f_n$  sont strictement croissantes, alors  $f$  aussi.
- Si les  $f_n$  sont périodiques de période  $T$ , alors  $f$  aussi.
- Si les  $f_n$  sont continues en  $a$ , alors  $f$  aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

### 11 Suites de fonctions

On pose, pour  $n \geq 1$  et  $x \in ]0, 1]$ ,  $f_n(x) = nx^n \ln(x)$  et  $f_n(0) = 0$ .

- Démontrer que  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera. On note ensuite  $g = f - f_n$ .
- Étudier les variations de  $g$ .
- En déduire que la convergence de  $(f_n)$  vers  $f$  n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ .
- Soit  $a \in [0, 1]$ . En remarquant qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $e^{-1/n} \geq a$  pour tout  $n \geq n_0$ , démontrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ .