Méthode des éléments finis – TD2

Avec des équations différentielles partielles

Contexte

La méthode des éléments finis est une technique numérique puissante utilisée pour résoudre des équations différentielles partielles. Nous allons étudier un problème aux limites elliptique en dimension 1 : le problème de Dirichlet. Voici les étapes de la méthode :

1. Découper le domaine en éléments simples
2. Établir la formulation variationnelle de l'EDP
3. Ecrire la matrice élémentaire sur chaque élément
4. Assembler ces matrices pour obtenir la matrice de rigidité globale
5. Résoudre le système linéaire

Considérons l'équation différentielle suivante en dimension 1 :

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,1)$$

où $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, et $f(x)$ est une fonction donnée.

Conditions aux limites de Dirichlet : la valeur de l'inconnue est fixée au bord

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

Exemple concret d'application : Isolation thermique d'un mur

Exemple

Contexte : Imaginons un mur de bâtiment de 1 mètre d'épaisseur, composé de plusieurs matériaux (béton, isolant, plâtre). On souhaite déterminer la distribution de température $u(x)$ à travers le mur en régime stationnaire.

Interprétation physique de l'équation :

- $u(x)$: température (en degré C) à la position x dans le mur
- $p(x)$: conductivité thermique du matériau (en $W/(m \cdot K)$)
  - Béton : $p \approx 1.5\ W/(m \cdot K)$
  - Isolant (laine de verre) : $p \approx 0.04\ W/(m \cdot K)$
  - Plâtre : $p \approx 0.5\ W/(m \cdot K)$
- $q(x)u$: pertes thermiques volumiques (convection interne par exemple) (en $W/(m^3 \cdot K)$)
- $f(x)$: sources de chaleur internes (par exemple, câbles électriques chauffants intégrés)

Conditions aux limites :

- $u(0) = \alpha = 20$ degré C (température intérieure imposée par le chauffage)
- $u(1) = \beta = 5$ degré C (température extérieure en hiver)

Cas simple : Si p et q sont constants et $f = 0$ (pas de source interne), on retrouve l'équation classique de diffusion :

$$-pu'' + qu = 0$$

Résultat attendu : La méthode des éléments finis permet de calculer la température en tout point du mur, et on pourra par exemple en déduire le flux thermique total : $\Phi = -p\frac{du}{dx}$ pour dimensionner le chauffage.

Autres exemples d'applications

L'équation $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x)$ peut modéliser d'autres phénomènes physiques :

Mécanique : Déformation d'une barre élastique
- u : déplacement
- p : module d'Young
- f : force appliquée

Électrostatique : Potentiel électrique
- u : potentiel
- p : permittivité
- f : densité de charge

Hydraulique : Écoulement en milieu poreux
- u : pression
- p : perméabilité
- f : source/puits

Chimie : Diffusion d'un polluant
- u : concentration
- p : coefficient de diffusion
- q : taux de dégradation

La formulation variationnelle

Ce que je dois savoir

La formulation variationnelle (ou formulation faible) est une reformulation d'une équation différentielle qui permet de :
- Affaiblir les hypothèses de régularité (on passe de dérivées classiques à des dérivées au sens faible)
- Obtenir une forme adaptée à l'approximation numérique
- Garantir l'existence et l'unicité de la solution (théorème de Lax-Milgram)

(Cette partie servira pour la question 2.)

Considérons une équation différentielle sous la forme :

$$\mathcal{L}(u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

avec des conditions aux limites appropriées, où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel.

Étape 1 : Multiplier par une fonction test

On multiplie l'équation par une fonction test v (appelée aussi fonction poids) et on intègre sur le domaine :

$$\int_\Omega \mathcal{L}(u)\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx$$

Étape 2 : Intégration par parties

On utilise l'intégration par parties pour réduire l'ordre de dérivation. Cela permet de :
- Répartir les dérivées entre u et v (formulation symétrique)
- Faire apparaître les conditions aux limites naturellement
- Réduire les exigences de régularité sur u

Étape 3 : Formulation finale

On obtient une formulation du type :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V_0$$

où :
- $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire (linéaire en chaque argument)
- $L(\cdot)$ est une forme linéaire
- V_0 est l'espace des fonctions test (qui satisfont les conditions aux limites homogènes)

Exemple avec notre problème

Pour l'équation sur un segment $[0, h]$:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x)$$

Étape 1 : Multipliez par v et intégrez sur $[0, h]$:

Solution.

$$\int_0^h \left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right] v\,dx = \int_0^h fv\,dx$$

Étape 2 : Intégrez par parties sur le terme qui contient la dérivée seconde de u, on choisira la fonction test v pour être nulle au bord : $v(0) = v(h) = 0$:

Solution.

$$\int_0^h \left(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)\right) v\,dx = \left[-p\frac{du}{dx}v\right]_0^h + \int_0^h p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$$

Si $v(0) = v(h) = 0$ (conditions homogènes), le terme de bord s'annule :

$$\int_0^h p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + \int_0^h quv\,dx = \int_0^h fv\,dx$$

Étape 3 : Formulation variationnelle finale :

Solution.

L'équation différentielle devient :

$$a(u, v) = L(v)$$

avec $a(u, v) = \int_0^h p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + \int_0^h quv\,dx$ et $L(v) = \int_0^h fv\,dx$.

Résoudre l'équation différentielle revient à trouver une fonction u telle que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{Pour toute fonction test} v.$$

avec $a(u, v)$ une fonction bilinéaire symétrique et $L(v)$ une fonction linéaire.

C'est cette équation qui donnera le système linéaire $Ku = F$ à résoudre pour trouver u. (question 4.)

Pourquoi cette formulation ?

- **Régularité** : On n'a besoin que de u' et v' (pas de u'')
- **Symétrie** : $a(u, v)$ est symétrique : $a(u, v) = a(v, u)$
- **Coercivité** : Sous certaines conditions, $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ garantit l'existence et l'unicité (Théorème de Lax-Milgram)

Questions

1. **Maillage**

(a) Définissez un maillage avec 4 éléments ($0 = x_0$, x_1, x_2, x_3, $x_4 = 1$), chacun de longueur h.

Solution.

Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en 4 éléments égaux. La longueur de chaque élément est $h = \frac{1}{4}$.

Les noeuds sont :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h, \quad x_4 = 4h = 1$$

2. **Formulation Variationnelle**

(a) Sur le premier élément $[0, h]$, suivez les 3 étapes ci-dessus et formulez le problème de Dirichlet sous sa forme variationnelle. On pourra choisir $V_0 = \{v \in H^1(0, h) \mid v(0) = v(h) = 0\}$ comme espace de fonctions test.

Solution.

En suivant les 3 étapes décrites ci-dessus, on obtient :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V_0$$

avec

$$a(u, v) = \int_0^h p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \int_0^h quv$$

$$L(v) = \int_0^h fv$$

(b) Sur le second élément du maillage, comment la formulation variationnelle est-elle modifiée ?

Solution.

Il faut changer les bornes d'intégration, ce sont les mêmes intégrales, mais on intègre sur $[h, 2h]$.

3. **Approximation dans un Espace de Dimension Finie**

(a) La méthode des éléments finis nous donnera une solution seulement sur les noeuds du maillage. Nous relierons ensuite ces points par des segments de droite.

Déterminez les expressions des fonctions φ_i, affines par morceaux et telles que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ces fonctions sont construites sur chaque intervalle séparément, on pourra séparer les différentes expressions en fonction de l'intervalle dans lequel se trouve x.

Solution.

i. Les fonctions φ_i sont les fonctions affines par morceaux définies comme suit :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4$$

Chaque φ_i est égale à 1 au noeud x_i et à 0 aux autres noeuds.

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{h} & \text{si } 0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{h} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 1 - \dfrac{x - x_1}{h} & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{h} & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 1 - \dfrac{x - x_2}{h} & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_2}{h} & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3, \\ 1 - \dfrac{x - x_3}{h} & \text{si } x_3 \leq x \leq x_4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_3}{h} & \text{si } x_3 \leq x \leq x_4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour obtenir une solution approchée de notre équation différentielle, nous chercherons alors une fonction u_h telle que

$$u_h = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \varphi_i$$

où les α_i sont des coefficients inconnus que nous devons déterminer, ce sont les valeurs de la solution de l'équation différentielle sur les noeuds du maillage.
La fonction u_h devra vérifier les conditions au bord.

4. **Obtention du Système Linéaire** La matrice de rigidité élémentaire K_e associée au problème de Dirichlet sur l'élément $[x_i, x_{i+1}]$ est

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_i, \varphi_i) & a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) & a(\varphi_{i+1}, \varphi_{i+1}) \end{pmatrix}$$

On supposera que $p(x) = p_0$ et $q(x) = q_0$ sont constants sur cet élément.

(a) Montrer que si $u = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \varphi_i$, alors $a(u, v) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i a(\varphi_i, v)$.
En déduire que

$$u \text{ vérifie } a(u, v) = L(v) sur [x_i, x_{i+1}] \text{pour } v = \varphi_i \text{ et } v = \varphi_{i+1} \Leftrightarrow K_e \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_i) \\ L(\varphi_{i+1}) \end{pmatrix}$$

Solution.

L'équation se déduit par linéarité de a et L, en effectuant la multiplication matricielle et en prenant pour fonction v les fonctions φ_i et φ_{i+1}.

(b) Ecrivez la matrice de rigidité du premier élément $[0, h]$.

Solution.

La matrice de rigidité locale K_e sur le premier élément est définie par :

$$K = \begin{pmatrix} a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_0, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

Il faut donc calculer ces 4 termes. En fait seulement 3 puisque $a(\varphi_0, \varphi_1) = a(\varphi_1, \varphi_0)$, a est symétrique.

On peut commencer par calculer les dérivées des fonctions de base : sur l'intervalle $[0, h]$,

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = -\frac{1}{h}, \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{1}{h}$$

et les autres dérivées sont nulles.

$$K_{11} = a(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^h p_0 \frac{d\varphi_0}{dx}\frac{d\varphi_0}{dx}\, dx + \int_0^h q_0 \varphi_0 \varphi_0 \, dx$$

En remplaçant les fonctions de base par leur expression, on obtient :

$$K_{11} = \int_0^h p_0 \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_0^h q_0 \varphi_0^2 dx$$

C'est à dire :

$$K_{11} = \frac{p_0}{h} + q_0 \int_0^h \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)^2 dx$$

Or

$$\int_0^h \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)^2 dx = \Big[\frac{-h}{3}\Big(1 - \frac{x}{h}\Big)^3\Big]_0^h = \frac{h}{3}.$$

Finalement :

$$K_{11} = \frac{p_0}{h} + q_0 \frac{h}{3}$$

Pour le second terme, on a :

$$K_{12} = K_{21} = \int_0^h p_0 \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx + q_0 \int_0^h \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)\Big(\frac{x}{h}\Big) dx$$

Ainsi,

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{p_0}{h} + q_0 \int_0^h \frac{x}{h}\Big(1 - \frac{x}{h}\Big) dx$$

Or

$$\int_0^h \frac{x}{h}\Big(1 - \frac{x}{h}\Big) dx = \frac{1}{h}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3h}\Big]_0^h = \frac{h}{6}.$$

Finalement :

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{p_0}{h} + q_0 \frac{h}{6}$$

Pour le dernier coefficient de la matrice, on a :

$$K_{22} = \int_0^h p_0 \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + q_0 \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{p_0}{h} + q_0 \frac{h}{3}.$$

En rassemblant les résultats, la matrice de rigidité sur le premier élément est :

$$K = \frac{p_0}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + q_0\frac{h}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Sans vous lancer dans de longs calculs, explicitez la matrice de rigidité sur chacun des autres éléments. Nous continuerons à supposer que les fonctions p et q sont constantes.

Solution.

Les autres matrices de rigidité sont identiques aux constantes p_0 et q_0 près. Cela découle de la symétrie des fonctions φ_i, par exemple un changement de variable sur les intégrales $u = x + h$ conduit à :

$$\int_0^h \left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2 dx = \int_h^{2h} \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 dx$$

On le voit bien aussi en traçant les graphes des fonctions φ_i.

(d) Etablissez la matrice de rigidité globale K et décrivez ses propriétés (par exemple : forme particulière, symétrie, définie positive).

Solution.

En assemblant les matrices locales, on construit le système global $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Ce processus implique de placer chaque matrice locale dans la matrice globale K en fonction de la connectivité des nuds de chaque élément. Une fois tous les éléments assemblés, la matrice K sera de taille 5×5 (pour 5 nuds).

Si les fonctions p et q étaient constantes sur tout le domaine égales à $p(x) = p_0$ et $q(x) = q_0$, on aurait

$$K = \frac{p_0}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + q_0\frac{h}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice K est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

(e) En supposant maintenant que f est constante sur chaque élément, explicitez le second membre du système linéaire.

Solution.

Pour le second membre du système linéaire il faut également calculer les intégrales des φ_i : Pour le premier élément

$$\int_0^h f(x)\varphi_0(x)dx = f_0\int_0^h \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)dx = f_0\Big[\frac{-h}{2}\Big(1 - \frac{x}{h}\Big)^2\Big]_0^h = \frac{f_0 h}{2}$$

Par symétrie, on a de même

$$\int_0^h f(x)\varphi_1(x)dx = \frac{f_0 h}{2}$$

On peut alors assembler un second membre global pour le système linéaire.

$$\mathbf{f} = \frac{f_0 h}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

5. **Résolution Manuelle dans un Cas Simple**
   (a) Considérez le cas où $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $f(x) = 1$ et dites à quelle équation différentielle du second ordre ces conditions correspondent.

Solution.

Avec $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $f(x) = 1$, l'équation devient :

$$-u'' = 1$$

C'est l'équation de Laplace.

   (b) Les équations du système linéaire trouvées précédemment ne prennent pas du tout en compte les conditions aux limites. Ecrivez les 3 équations sur α_1, α_2, α_3 puis explicitez la solution approchée u_h.

Solution.

Comme $\alpha_0 = u(0)$ et $\alpha_4 = u(1)$ sont connus, on doit retirer les équations correspondantes du système, cela correspond à la première ligne et la dernière ligne de la matrice K.

On résout le système linéaire $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$ pour obtenir les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \frac{p_0}{h}\Big(-\alpha & +2\alpha_1 & -\alpha_2 & & \Big) & = f_0 h \\ \quad\frac{p_0}{h}\Big(& -\alpha_1 & +2\alpha_2 & -\alpha_3 & \Big) & = f_0 h \\ \quad\frac{p_0}{h}\Big(& & -\alpha_2 & +2\alpha_3 & -\beta\Big) & = f_0 h \end{array}\right.$$

La quantité $f_0 h^2/p_O$ apparaîtra souvent, nous la notons λ dans la suite. Le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{llllll} -\alpha & +2\alpha_1 & -\alpha_2 & & & = \lambda \\ & -\alpha_1 & +2\alpha_2 & -\alpha_3 & & = \lambda \\ & & -\alpha_2 & +2\alpha_3 & -\beta & = \lambda \end{array}\right.$$

Pour obtenir α_3, nous effectuons $L_1 + 2L_2 + 3L_3$ et nous avons

$$4\alpha_3 = 6\lambda + \alpha + 3\beta\,.$$

Ainsi,

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\lambda + \frac{\alpha + 3\beta}{4}\,.$$

Il suffit alors de réinjecter dans L_3 pour obtenir α_2

$$\alpha_2 = 2\lambda + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

et de même pour α_1

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}\lambda + \frac{3\alpha + \beta}{4}\,.$$

(c) Calculez la solution exacte de l'équation différentielle avec conditions aux limites.

Solution.

Solution Exacte :

L'équation est réduite à

$$u'' = -f_0$$

Intégrant deux fois, la solution exacte s'écrit sous la forme :

$$u(x) = -\frac{f_0}{2}x^2 + Cx + D$$

En appliquant les conditions aux limites $u(0) = \alpha$ donc $D = \alpha$ et $u(1) = \beta$, donc $C = \beta - \alpha + \frac{f_0}{2}$. Finalement,

$$u(x) = -\frac{f_0}{2}x^2 + \left(\beta - \alpha + \frac{f_0}{2}\right)x + \alpha$$

(d) Comparez votre solution approchée avec la solution exacte et discutez de la précision de l'approximation à la fois aux noeuds du maillage et entre les noeuds.

Solution.

Comparaison :

Regardons sur les noeuds du maillage, au point $x = h$ par exemple. D'un côté la solution approchée donne

$$u_h(h) = \alpha_1 = \frac{3}{2}f_0h^2 + \frac{\alpha + 3\beta}{4}$$

et de l'autre, pour la solution exacte :

$$u(h) = -\frac{f_0}{2}h^2 + \left(\beta - \alpha + \frac{f_0}{2}\right)h + \alpha = \frac{3}{2}f_0h^2 + \frac{\alpha + 3\beta}{4}$$

ainsi, les deux fonctions coïncident. On aurait de même sur $x = 2h$ et $x = 3h$. En revanche, entre les noeuds, la différence est significative. Notre fonction approchée relie les valeurs aux noeud par des segments de droite. La solution réelle est beaucoup plus lisse.

(e) Quelles méthodes proposez-vous pour améliorer l'approximation ?

Solution.

Amélioration de l'Approximation :

— Affiner le maillage en augmentant le nombre d'éléments.
— Utiliser des fonctions de base de degré supérieur.

D'autres fonctions p, q, et f

Reprenez le problème avec $p(x) = e^x$, $q(x) = \sin(x)$, et $f(x) = x^2$.