

 <small>CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE</small>	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-002
26/01/2026		Page 1/3

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 5	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	<ul style="list-style-type: none"> — Calculatrice NON autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. Calculs de développements limités.

- Donner le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. (0,5 pt)
- Donner le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. (0,5 pt)
- En déduire le développement limité de $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. (1 pt)
- Calculer les deux premiers termes du développement limité de la fonction tangente au voisinage de 0. (1 pt) *On pourra utiliser le DL de $\sin x$ et $\cos x$ et celui de $\frac{1}{1-u}$, avec u bien choisi.*

2. Calcul de limite. Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : (1 pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

3. Étude d'une fonction. Soit $g(x) = \frac{\tan x - x}{x^3}$ pour $x \neq 0$.

- À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. (0,5 pt)
- En déduire la position de la courbe de g par rapport à sa tangente horizontale en 0. (0,5 pt)

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles

(5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(3x^2 + 2y) dx + (2x + 4y^3) dy = 0$$

- (a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x, y) dx + g(x, y) dy$ est une différentielle totale. (0,5 pt)
- (b) Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que $dF = f dx + g dy$. (1 pt)
- (c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. (0,5 pt)

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 6x$$

en utilisant un changement de variables linéaire. (1,5 pts)

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = -f$$

En cherchant des solutions sous la forme $f(x, y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. (1,5 pts)

Exercice 3 : Modélisation – Circuit RC

(5 points)

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ est initialement chargé à la tension $U_0 = 12 \text{ V}$. À l'instant $t = 0$, on le décharge à travers une résistance $R = 100 \text{ k}\Omega$.

La tension $U(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$RC \frac{dU}{dt} + U = 0$$

1. Calculer la valeur numérique de la constante de temps $\tau = RC$. (0,5 pt)
2. Réécrire l'équation différentielle sous la forme $\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{\tau}$. (0,5 pt)
3. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $U(0) = U_0$. (1,5 pts)
4. L'énergie stockée dans le condensateur est $E = \frac{1}{2}CU^2$. Exprimer $E(t)$ en fonction du temps. (1 pt)
5. Au bout de combien de temps l'énergie a-t-elle diminué de moitié ? (1 pt)
On donne $\ln(2) \approx 0,7$.
6. Vers quelle valeur tend $U(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$? Interpréter physiquement. (0,5 pt)

Exercice 4 : Modélisation – Pharmacocinétique (5 points)

On étudie l'évolution de la concentration $C(t)$ d'un médicament dans le sang après une injection intraveineuse.

Partie A – Modèle à élimination simple

On suppose que le médicament est éliminé à un taux proportionnel à sa concentration :

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

où $k = 0,2 \text{ h}^{-1}$ est la constante d'élimination et $C_0 = 100 \text{ mg/L}$ la concentration initiale.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $C(0) = C_0$. (1 pt)
2. Calculer la demi-vie $T_{1/2}$ du médicament (temps pour que $C(T_{1/2}) = \frac{C_0}{2}$). (0,5 pt)

On donne $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie B – Modèle avec perfusion continue

On administre maintenant le médicament par perfusion continue à un débit constant D (en $\text{mg}/(\text{L}\cdot\text{h})$). L'équation devient :

$$\frac{dC}{dt} = D - kC$$

3. Déterminer la concentration d'équilibre C_{eq} (solution constante de l'équation). (0,5 pt)
4. On pose $\theta(t) = C(t) - C_{\text{eq}}$. Montrer que θ vérifie l'équation $\frac{d\theta}{dt} = -k\theta$. (0,5 pt)
5. Résoudre et en déduire $C(t)$ avec $C(0) = 0$ (perfusion démarrant sans médicament dans le sang). (1,5 pts)
6. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$. Interpréter médicalement ce résultat. (0,5 pt)
7. Si la concentration thérapeutique souhaitée est $C_{\text{th}} = 50 \text{ mg/L}$, quel débit de perfusion D doit-on utiliser ? (0,5 pt)