Composition de MATHÉMATIQUES (3h) : 35 points

■ Exercice 1 : Équations (8 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou systèmes suivants :

1. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$
2. $\ln(4x^2) = 2$
3. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$
4. $\cos(7x) + \sin(7x) = 1$

Solution

1. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
   On pose $X = e^x$, avec $X > 0$. L'équation devient : $X^2 - 2X + 1 = 0 \iff (X-1)^2 = 0 \iff X = 1$
   Donc $e^x = 1 \iff x = \ln(1) = 0$
   Ensemble solution : $\boxed{\{0\}}$
2. $\ln(4x^2) = 2$ L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
   On utilise la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(e^2) = 2$:
   $$\ln(4x^2) = \ln 4 + \ln(x^2)$$
   $$\ln(x^2) = \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \iff |x| = \frac{e}{2}$$
   Ensemble solution : $\boxed{\left\{-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right\}}$
3. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$
   On utilise la formule $\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)$:
   $$\sin(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
   $$\iff x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$
   Ensemble solution :
   $$\boxed{x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}}$$
4. $\cos(7x) + \sin(7x) = 1$ L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

   On cherche à écrire cette somme sous la forme :
   $$\cos(7x) + \sin(7x) = R\cos(7x - \alpha)$$
   où $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $a = 1$, $b = 1$, donc :
   $$R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ et } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \alpha = \frac{\pi}{4}$$

On a donc :

$$\cos(7x) + \sin(7x) = \sqrt{2}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

L'équation devient alors :

$$\sqrt{2}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On résout :

$$7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 7x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Deux cas :
- $7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff 7x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}$
- $7x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff 7x = 2k\pi \iff x = \frac{2k\pi}{7}$

Solution :

$$\boxed{x = \frac{2k\pi}{7} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

■ Exercice 2 : Réponse d'un capteur à un changement de température (6 points)

Un capteur de température est initialement à l'équilibre thermique dans un environnement à 20°C. À l'instant $t = 0$, il est brusquement plongé dans un liquide maintenu à 80°C.

On modélise la température $T(t)$ indiquée par le capteur à l'instant t (en secondes) par la fonction :

$$T(t) = 80 - 60e^{-t/5}$$

où $T(t)$ est exprimée en degrés Celsius.

1. Quelle est la température initiale lue par le capteur ? Et la température à long terme ?

2. À quelle date le capteur affiche-t-il une température de 50°C ?

3. Déterminer la dérivée $T'(t)$, puis montrer que :

$$T'(t) = \frac{12}{e^{t/5}}$$

4. Interpréter le signe de $T'(t)$. Que peut-on dire de l'évolution de la température ?

5. Déterminer le temps mis par le capteur pour atteindre 95% de la température finale.

Solution

1. Température initiale :

$$T(0) = 80 - 60e^0 = 80 - 60 = 20°\text{C}$$

Température à long terme :

$$\lim_{t\to+\infty}(T(t)) = \lim_{t\to+\infty}(80 - 60e^{-t/5}) = 80$$

2. On résout : $T(t) = 50$

$$50 = 80 - 60e^{-t/5} \iff 60e^{-t/5} = 30 \iff e^{-t/5} = \frac{1}{2} \iff t = 5\ln(2)$$

3. Dérivée de T, fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad T'(t) = -60 \cdot \left(\frac{d}{dt}e^{-t/5}\right) = -60 \cdot \left(-\frac{1}{5}e^{-t/5}\right) = \frac{60}{5}e^{-t/5} = 12e^{-t/5}$$

Montrons :

$$\boxed{T'(t) = \frac{12}{e^{t/5}}} \quad \text{car} \quad e^{-t/5} = \frac{1}{e^{t/5}}$$

4. $T'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ car une exponentielle réelle est toujours positive.
   Donc T est strictement croissante : la température indiquée par le capteur augmente.
5. Température finale : $T_f = 80°\text{C}$. On cherche t tel que :

$$T(t) = 0{,}95 \times 80 = 76 \iff 76 = 80 - 60e^{-t/5} \iff 60e^{-t/5} = 4 \iff e^{-t/5} = \frac{1}{15} \iff t = -5\ln\left(\frac{1}{15}\right) = 5\ln(15)$$

■ Exercice 3 : Logique, sommes et produits (10 points)

1. Donner la table de vérité de la proposition logique :

$$(P \Rightarrow Q)$$

2. Donner la table de vérité de la proposition logique :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

3. En déduire une équivalence logique.

4. Démontrer par récurrence que :

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. Calculer les expressions suivantes :
   — $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
   — $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{k-1}$, on pourra utiliser la relation $(*)$.

Solution

1. Table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2. Table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	Conjonction
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

3. On en déduit :
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P) \quad \text{(contraposée)}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul
$$P_n : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
est vraie.

Initialisation : pour $n = 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2} = 1$$
: P_1 est vraie.
.
Hérédité : supposons la formule vraie au rang n, montrons-la au rang $n+1$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

5. **Calculs :**
— $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)]$$
$$= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$
— $$\prod_{k=1}^{n} e^{k-1} = e^{\sum_{k=1}^{n}(k-1)} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{\frac{(n-1)n}{2}} \quad \text{(formule (*) utilisée)}$$

■ Exercice 4 : Vecteurs et géométrie plane (11 points)

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé les points : $A(1,2,0)$, $B(0,4,6)$, $C(7,-1,2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer les longueurs AB et AC.

3. Calculer le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et le produit vectoriel vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4. En déduire le cosinus et le sinus de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

5. Donner une équation paramétrique de la droite (AB).

6. Déterminer la distance du point C à la droite (AB).

Solution

1. Calcul des vecteurs :
$$\overrightarrow{AB} : (0-1,\ 4-2,\ 6-0) = (-1,\ 2,\ 6)$$
$$\overrightarrow{AC} : (7-1,\ -1-2,\ 2-0) = (6,\ -3,\ 2)$$

2. Longueurs :
$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2+(6)^2} = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$$
$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(6)^2+(-3)^2+(2)^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

3. Produit scalaire :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1)(6) + 2(-3) + 6(2) = 0$$
   Produit vectoriel :
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2\cdot 2 - 6\cdot(-3))\vec{i} - (-1\cdot 2 - 6\cdot 6)\vec{j} + (-1\cdot(-3) - 2\cdot 6)\vec{k} = 22\vec{i} + 38\vec{j} - 9\vec{k}$$

4. Angle entre les vecteurs :
   Comme le produit scalaire est nul, on a :
$$\cos(\theta) = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{donc } \sin(\theta) = 1$$

5. Équation paramétrique de la droite (AB) :
   Un point : $A(1,2,0)$, un vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (-1,2,6)$
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

6. Distance du point C à la droite (AB) :
$$d(C,AB) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{22^2+38^2+(-9)^2}}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{484+1444+81}}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{2009}}{\sqrt{41}} = \sqrt{\frac{2009}{41}}$$