Algèbre linéaire - Chapitre 4
Applications linéaires

4.1 Rappels : Familles de vecteurs et Systèmes linéaires

Pour étudier une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ de $\mathbb{R}^n$, on se ramène souvent à l'étude d'un système linéaire.

Ce que je dois savoir

Liens entre familles et systèmes linéaires ($AX = Y$)

- **Famille Libre :** La famille $\mathcal{F}$ est dite **libre** si le système linéaire homogène $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$ admet **une unique solution** (la solution nulle $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$).
- **Famille Génératrice :** La famille $\mathcal{F}$ est dite **génératrice** si pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, le système $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = y$ admet **au moins une solution**.
- **Base :** C'est une famille à la fois libre et génératrice. Pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, le système $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = y$ admet **une unique solution**.

4.2 Applications Linéaires

Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si elle conserve les combinaisons linéaires.

Pour le démontrer en pratique, on vérifie séparément la conservation de la somme et du produit par un scalaire.

Méthode

Méthode : Montrer qu'une application est linéaire
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pour prouver que f est linéaire, on procède en deux étapes :

1. **Conservation de l'addition :**
   Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.
   - D'un côté, on calcule l'image de la somme : $\boldsymbol{f(u+v)}$.
   - De l'autre, on calcule la somme des images : $\boldsymbol{f(u) + f(v)}$.
   - On constate que les deux résultats sont égaux.

2. **Conservation de la multiplication scalaire :**
   Soient $u \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - D'un côté, on calcule l'image du vecteur multiplié : $\boldsymbol{f(\lambda u)}$.
   - De l'autre, on multiplie l'image par le scalaire : $\boldsymbol{\lambda f(u)}$.
   - On constate que les deux résultats sont égaux.

Méthode

Méthode alternative : Une seule vérification
f est linéaire si et seulement si pour tous $u, v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

Cela permet de vérifier les deux propriétés (additivité et homogénéité) d'un seul coup !

4.3 Exercices d'application

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x$. Cette application est-elle linéaire ?

Solution.

On vérifie les deux propriétés.

Additivité : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y).$$

Homogénéité : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x) = 3(\lambda x) = \lambda(3x) = \lambda f(x).$$

Donc f est **linéaire**.

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x$. Cette application est-elle linéaire ?

Indication : Tester $g((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$ et $g(\lambda(x, y))$.

Solution.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Additivité :

$$g((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = g(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2).$$

Homogénéité :

$$g(\lambda(x, y)) = g(\lambda x,\ \lambda y) = \lambda x = \lambda g(x, y).$$

Donc g est **linéaire**.

Exercice 3

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (0, 0)$. Cette application est-elle linéaire ?

Solution.

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $h(u) = (0, 0)$ et $h(v) = (0, 0)$.

Additivité : $h(u + v) = (0, 0) = h(u) + h(v)$.

Homogénéité : $h(\lambda u) = (0, 0) = \lambda h(u)$.

Donc h est **linéaire** (c'est l'application nulle).

Exercice 4

L'application $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $k(x, y) = (2x + y, x - 3y)$ est-elle linéaire ?

Indication : Appliquer la méthode ci-dessus avec $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$.

Solution.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Additivité :

$$k(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) = \big(2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2),\, (x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2)\big)$$

$$= \big((2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2),\, (x_1 - 3y_1) + (x_2 - 3y_2)\big) = k(x_1, y_1) + k(x_2, y_2).$$

Homogénéité :

$$k(\lambda x,\, \lambda y) = (2\lambda x + \lambda y,\, \lambda x - 3\lambda y) = \lambda(2x + y,\, x - 3y) = \lambda k(x, y).$$

Donc k est **linéaire**. On peut aussi écrire :

$$k(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

L'application $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $l(x) = x^2$ est-elle linéaire ?

Indication : Calculer $l(1 + 1)$ et comparer avec $l(1) + l(1)$.

Solution.

Non.

Par exemple, si $x = y = 1$:

$$l(1 + 1) = l(2) = 2^2 = 4 \qquad \text{alors que} \qquad l(1) + l(1) = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Donc $l(x + y) \neq l(x) + l(y)$ en général, et l n'est **pas** linéaire.

Exercice 6

L'application $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $m(x, y, z) = x + y + z + 1$ est-elle linéaire ?

Indication : Vérifier si $m(0_{\mathbb{R}^3}) = 0$. Si ce n'est pas le cas, l'application ne peut pas être linéaire.

Solution.

Si m était linéaire, on devrait avoir $m(0_{\mathbb{R}^3}) = 0$. Il faudrait en effet que $m(0_{\mathbb{R}^3} + 0_{\mathbb{R}^3}) = m(0_{\mathbb{R}}) + m(0_{\mathbb{R}^3})$. C'est à dire $m(0) = 2m(0)$

Or $m(0,0,0) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \neq 0$.

Donc m n'est **pas** linéaire.