# Chapitre 4
# Fonctions trigonométriques

Ce chapitre reprend les propriétés fondamentales des fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente) et introduit leurs fonctions réciproques (arcsinus, arccosinus, arctangente). Ces fonctions sont essentielles en analyse, en géométrie et dans de nombreuses applications scientifiques.

*N'hésitez pas à vous replonger dans la section fonctions circulaires du chapitre trigonométrie du premier semestre !*

## 4.1 Fonctions circulaires

### 4.1.1 Fonction sinus

**Définition 4.1.1** ***Fonction sinus.***
*La fonction $f(x) = \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.*
***Propriétés :***

- ***Parité :*** *impaire :* $\sin(-x) = -\sin(x)$
- ***Périodicité :*** $2\pi$*-périodique*
- ***Dérivée :*** $(\sin x)' = \cos x$

**Proposition 4.1.2** ***Dérivées successives.***
*La fonction sinus est indéfiniment dérivable. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :*

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

**Proposition 4.1.3** ***Dérivée de la composée.***
*Si $u$ est une fonction dérivable, alors :*

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

**Théorème 4.1.4** ***Limite fondamentale.***

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Exemple**

Calculons $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.
En posant $u = 3x$, on a $x = \frac{u}{3}$ et quand $x \to 0$, $u \to 0$ :

$$\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin u}{u/3} = 3 \cdot \frac{\sin u}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 3 \times 1 = 3$$

### 4.1.2 Fonction cosinus

**Définition 4.1.5** ***Fonction cosinus.***
*La fonction $f(x) = \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.*
***Propriétés :***

- ***Parité :*** *paire :* $\cos(-x) = \cos(x)$
- ***Périodicité :*** $2\pi$*-périodique*
- ***Dérivée :*** $(\cos x)' = -\sin x$

**Proposition 4.1.6** ***Dérivées successives.***
*La fonction cosinus est indéfiniment dérivable. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :*

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

**Proposition 4.1.7** ***Dérivée de la composée.***
*Si $u$ est une fonction dérivable, alors :*

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

**Théorème 4.1.8** ***Limites fondamentales.***

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1$$

*Cette dernière limite peut aussi s'écrire :* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

### 4.1.3 Fonction tangente

**Définition 4.1.9** ***Fonction tangente.***
*La fonction $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est définie pour tout réel $x$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*
***Propriétés :***

- ***Ensemble de définition :*** $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- ***Ensemble image :*** $\mathbb{R}$
- ***Parité :*** *impaire* $(\tan(-x) = -\tan(x))$
- ***Périodicité :*** $\pi$*-périodique*

**Proposition 4.1.10** ***Dérivée de la tangente.***

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**Exemple**

Calculons la dérivée de $f(x) = \tan(x^2)$.
On utilise la formule de dérivation de la composée avec $u(x) = x^2$ :

$$f'(x) = u'(x) \cdot (1 + \tan^2(u)) = 2x(1 + \tan^2(x^2)) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

### 4.1.4 Tableau récapitulatif

| Fonction | Domaine | Parité | Période | Dérivée |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | impaire | $2\pi$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | paire | $2\pi$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ | impaire | $\pi$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |

## 4.2 Fonctions circulaires réciproques

### 4.2.1 Fonction arcsinus

**Définition 4.2.1** ***Fonction arcsinus.***
*La fonction $f(x) = \arcsin x$ est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.*
*C'est la **fonction réciproque** de la restriction de sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.*

**Proposition 4.2.2** ***Propriétés de l'arcsinus.***

— *Pour tout $x \in [-1, 1]$ : $\sin(\arcsin x) = x$*

— *Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ : $\arcsin(\sin x) = x$*

— ***Parité :** impaire*

— ***Monotonie :** strictement croissante*

— ***Dérivée :** $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$*

**Proposition 4.2.3** ***Dérivée de la composée.***
*Si $u$ est une fonction dérivable avec $|u| < 1$, alors :*

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

### 4.2.2 Fonction arccosinus

**Définition 4.2.4** ***Fonction arccosinus.***
*La fonction* $f(x) = \arccos x$ *est définie sur* $[-1, 1]$ *à valeurs dans* $[0, \pi]$.
*C'est la* ***fonction réciproque*** *de la restriction de cosinus à* $[0, \pi]$.

**Proposition 4.2.5** ***Propriétés de l'arccosinus.***

- *Pour tout* $x \in [-1, 1]$ *:* $\cos(\arccos x) = x$
- *Pour tout* $x \in [0, \pi]$ *:* $\arccos(\cos x) = x$
- ***Parité :*** *ni paire ni impaire*
- ***Monotonie :*** *strictement décroissante*
- ***Dérivée :*** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *sur* $]-1, 1[$

**Proposition 4.2.6** ***Dérivée de la composée.***
*Si* $u$ *est une fonction dérivable avec* $|u| < 1$*, alors :*

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

**Théorème 4.2.7** ***Relations fondamentales.***
*Pour tout* $x \in [-1, 1]$ *:*

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

### 4.2.3 Fonction arctangente

**Définition 4.2.8** ***Fonction arctangente.***
*La fonction* $f(x) = \arctan x$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
*C'est la* ***fonction réciproque*** *de la restriction de tangente à* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

**Proposition 4.2.9** ***Propriétés de l'arctangente.***

— *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ : $\tan(\arctan x) = x$

— *Pour tout* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ : $\arctan(\tan x) = x$

— ***Parité :*** *impaire*

— ***Monotonie :*** *strictement croissante*

— ***Dérivée :*** $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

— ***Limites :*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

**Proposition 4.2.10** ***Dérivée de la composée.***
*Si* $u$ *est une fonction dérivable, alors :*

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

**Théorème 4.2.11** ***Relations avec l'inverse.***
*Pour tout* $x > 0$ : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$
*Pour tout* $x < 0$ : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

### 4.2.4 Tableau récapitulatif des réciproques

| **Fonction** | **Domaine** | **Image** | **Dérivée** |
|---|---|---|---|
| $\arcsin x$ | $[-1, 1]$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ | $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |

**Remarque** ***Attention à la dérivée de l'arctangente !***

*Dans le fichier original, il y avait une erreur : la dérivée de* $\arctan x$ *est* $\dfrac{1}{1+x^2}$ *et non* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

## 4.3 Exercices

### Exercice 4.1 Étude de fonction trigonométrique

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x)\cos^3 x$.

1. Exprimer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle $I$ peut-on se contenter d'étudier $f$ ?
2. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$ et en déduire le sens de variation de $f$ sur $I$.

---

### Exercice 4.2 Fonction quotient trigonométrique

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$$

1. Quel est le domaine de définition de $f$ ? Vérifier qu'elle est $2\pi$-périodique.
2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire ?
3. Étudier les variations de $f$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

---

### Exercice 4.3 Simplification d'arcsinus

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de $f$.

---

### Exercice 4.4 Relation fondamentale

Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ :

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

*Indication : On pourra dériver la fonction* $g(x) = \arccos x + \arcsin x$.

---

### Exercice 4.5 Étude complète d'une fonction arcsinus

Soit $f$ la fonction qui à $x$ associe $\arcsin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
Donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et étudier ses variations.

## Exercice 4.6 Simplification d'arccosinus

Soit $f$ la fonction qui à $x$ associe $\arccos(1-2x^2)$.
Donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et étudier ses variations.

## Exercice 4.7 Fonction mixte

Soit $f$ la fonction qui à $x$ associe $\arcsin x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et étudier ses variations.

## Exercice 4.8 Calculs de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arctan(x^2+1)$
2. $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$
3. $h(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
4. $k(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

## Exercice 4.9 Primitives trigonométriques

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ *(Indication : poser $u = x^2$)*
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *(Indication : factoriser par 4)*

## Exercice 4.10 Identité remarquable

Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$ dépend des signes de $a$, $b$ et $1-ab$.
En déduire la valeur de $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$.