BACHELOR Semestre 3

Rémi Blanquet, Karine Serier, Maxime Berger

ESTP Dijon

Table des matières

Chapitre 1

Calcul Matriciel, révisions

1.1 Opérations de base

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer quand c'est possible :

1. $A + B$
2. $A + D$
3. AB
4. BC
5. CB
6. AD
7. DA
8. $(A + D)^2$
9. $A^2 + 2AD + D^2$

1.2 Inversion à partir d'une égalité

Exercice 1.1 Inversion 1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A^2 = 2Id - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 1.2 Inversion 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

■ Exercice 1.3 Inversion 3

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 - 3A + 2Id$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

1.3 Déterminant et inversion

■ Exercice 1.4 Déterminants

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de ces matrices et trouver leur inverse quand c'est possible.

■ Exercice 1.5 Déterminants 2

On considère la matrice :

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Avec a et b réels. Soit c un réel, calculer le produit matriciel :

$$A(ac, -bc)\, A(a,b)$$

Pour quels couples (a, b) la matrice A est-elle inversible ? Donner son inverse quand c'est possible.

■ Exercice 1.6 Inversion avec un paramètre

Pour quelles valeurs de m, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admet-elle un inverse ?

1.4 Commutant d'une matrice fixée

Exercice 1.7 Commutant

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices de taille 2×2 qui commutent avec A.

Exercice 1.8 Commutant 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices de taille 2×2 qui commutent avec A.

Chapitre 2

Développements limités

2.1 Développements limités en a

Théorème 2.1.1 ***Complément utile sur les relations de négligeabilité***

Soient f et g deux fonctions définies sur I ne s'annulant pas sur un voisinage de a où $a \in I$ ou a est une borne de I.
On note

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$$

si et seulement s'il existe une fonction ε, définie sur un voisinage du point a, telle que

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

2.1.1 Introduction et définition

Motivation :

Prenons l'exemple de la fonction exponentielle. Une idée du comportement de la fonction $f : x \mapsto e^x$ autour du point $x = 0$ est donnée par sa tangente, dont l'équation est

$$y = x + 1.$$

Nous avons approché le graphe par une droite. Si l'on souhaite faire mieux, quelle parabole d'équation $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ approche le mieux le graphe de f autour de $x = 0$?
Il s'agit de la parabole d'équation

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Cette équation a la propriété remarquable que si on note $g : x \mapsto e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ alors

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0 \quad \text{et} \quad g''(0) = 0.$$

Trouver l'équation de cette parabole c'est faire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction exponentielle. Bien sûr, si l'on veut être plus précis on peut chercher une courbe du troisième degré. Pour la fonction exponentielle, on trouve

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

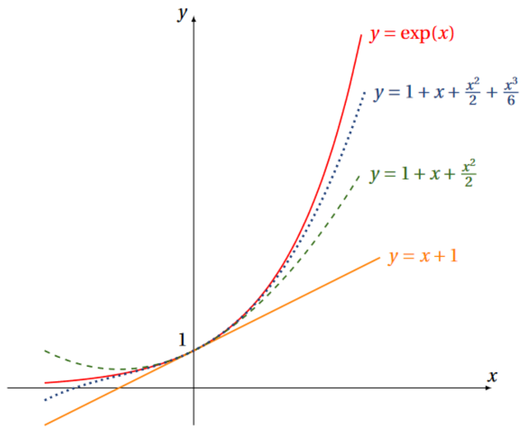


FIGURE 2.1 – Illustration des approximations successives de e^x

Illustration :

Définition 2.1.2 ***Développement limité***

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a (un DL$_n(a)$ en abrégé) si f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et s'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que :

$$f(x) = P_n(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

qu'on peut écrire aussi

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

où $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

2.1.2 Développement limité en 0 et en $a \neq 0$

Définition 2.1.3 ***Développement limité en*** 0
On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 si f est définie au voisinage de 0 et s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Méthode *Pour déterminer le DL$_n(a)$ d'une fonction f (s'il existe) on procède comme suit :*

1. *Faire le changement de variable $x = h + a$.*
2. *On est alors ramené à étudier le DL$_n(0)$ de la fonction $\tilde{f} : h \mapsto f(a+h)$ plutôt que le DL$_n(a)$ de la fonction f.*

$$\tilde{f}(h) = f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

3. *Comme*

$$x = a + h \iff h = x - a$$

et d'après la proposition ci-dessus, on en déduit que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Exemple

Déterminons le DL$_3(1)$ de la fonction $f : x \mapsto 2x^5 - x^3 + x^2 + 1$.
On fait pour cela le changement de variable $x = 1 + h$.

On est donc ramené à déterminer le DL$_3(0)$ de la fonction

$$\tilde{f} : h \mapsto 2(1+h)^5 - (1+h)^3 + (1+h)^2 + 1.$$

Or,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(h) &= 2(1+5h+10h^2+10h^3+5h^4+h^5) - (1+3h+3h^2+h^3) + (1+2h+h^2) + 1\\ &= (2-1+1+1) + (10-3+2)h + (20-3+1)h^2 + (20-1)h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3)\\ &= 3 + 9h + 18h^2 + 19h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3).\end{aligned}$$

Finalement,

$$f(x) = 3 + 9(x-1) + 18(x-1)^2 + 19(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\big((x-1)^3\big).$$

Exercice 2.1 Fonction exponentielle

On admet pour le moment qu'au voisinage de 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Déterminer un développement limité de la fonction $\exp$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

Exercice 2.2 Au voisinage de a

Soit $f : x \mapsto 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$.
Déterminer les développements limités de f à tous les ordres en $a = 2$.

2.1.3 Premières propriétés

Proposition 2.1.4 ***Unicité du développement***
Si $f(x) = P_1(x) + o((x-a)^n)$ et $f(x) = P_2(x) + o((x-a)^n)$ sont deux développements limités à l'ordre n de f au voisinage de a, alors $P_1 = P_2$.

Proposition 2.1.5 ***Développement limité et parité***
Soit f une fonction admettant un développement limité en 0. Si f est paire (resp. impaire), la partie régulière du développement limité en 0 ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Exemple

La fonction sinus admet un développement limité en 0 :

$$\sin(x) \quad = \quad x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

Remarque *Cependant, la parité ou l'imparité de la partie régulière d'un DL$_n(0)$ ne donne aucune indication quant à une éventuelle parité/imparité de la fonction. Par exemple, on peut montrer que :*

$$f(x) = (x^3 - 1)\cos(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2).$$

La partie régulière de ce DL$_2(0)$ est $x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2}$. C'est une fonction paire, mais pourtant f ne l'est absolument pas.

2.1.4 Petits ordres

Théorème 2.1.6 ***Les cas $n = 0$ ET $n = 1$***
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. *Soit f définie au voisinage de a. La fonction f possède un DL à l'ordre 0 en a si et seulement si f a une limite finie ℓ en a. Dans ce cas le DL est :*

$$f(x) = \ell + \underset{x \to a}{o}(1)$$

Si la fonction f est définie en a, elle est donc continue en a. Dans le cas contraire, si a est une borne de I, f est prolongeable par continuité en a.

2. *Soit f définie au voisinage de a et en a. f possède un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas le DL est :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

Si f n'est pas définie en a, c'est-à-dire si a est une borne de I, on aura le même résultat avec le prolongement par continuité de f en a.

Exemple

$$\arctan(x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

Exercice 2.3 **Fonction arccos**

Donner un développement limité de la fonction $\arccos$ à l'ordre 1 en 0.
Attention !
On pourrait croire que ce résultat se généralise et que $\forall k \geq 2$, une fonction admettant un développement limité d'ordre k au voisinage de a est k fois dérivable en a. Ce n'est pas vrai. Voici un contre-exemple.

Exercice 2.4 **Contre-exemple**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais qu'elle n'est pas 2 fois dérivable.

2.1.5 Premiers développements limités

Exemple

Premiers exemples non triviaux de développements limités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Remarque
Pour obtenir le deuxième développement limité, il suffit de remplacer x par $-x$ dans le premier développement limité.

2.2 Recherche de développements limités

2.2.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 2.2.1 ***Formule de Taylor-Young***

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f de classe C^n sur un intervalle I et $a \in I$. Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

1. Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

2. Cette formule permet d'obtenir le développement limité de quelques fonctions classiques dont le calcul des dérivées successives ne pose pas de problème comme $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$.

Exercice 2.5 Exponentielle et sinus

1. Déterminer les développements limités à l'ordre 5, puis à tout ordre, des fonctions $\exp$ et $\sin$ en 0.
2. Calculer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $\tan$ en 0.

2.2.2 Intégration terme à terme d'un développement limité

Théorème 2.2.2 ***Développement limité d'une primitive***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une primitive F sur I. Soit $a \in I$. On suppose que f admet un développement limité (DL) d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Alors F admet un DL d'ordre $n+1$ en a :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &= F(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

1. Rappeler le développement limité de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ à l'ordre n en 0.
   En déduire un développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0.
2. Déduire de la première question un développement limité de $\dfrac{1}{1+x^2}$ en 0.
3. En déduire un développement limité de Arctan(x) en 0.

2.2.3 Opérations sur les développements limités

Théorème 2.2.3 *Soient f et g deux fonctions admettant un DL$_n(0)$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

Alors

1. ***Troncature :*** *Pour tout entier $p \leq n$, f admet un DL$_p(0)$ et*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$$

2. ***Combinaisons linéaires :*** *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un DL$_n(0)$ et*

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k + o(x^n)$$

3. ***Produit :*** *$f \cdot g$ admet un DL$_n(0)$ et*

$$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)}_{\text{à développer et tronquer à l'ordre } n} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$$

4. ***Produit par un monôme :*** *pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^p f(x)$ admet un DL$_{n+p}(0)$ et*

$$x^p f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+p} + o(x^{n+p})$$

5. ***Composition :*** *si $b_0 = 0$ alors $f \circ g$ admet un DL$_n(0)$ et*

$$(f \circ g)(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)^k}_{\text{à développer et tronquer à l'ordre } n} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$$

Remarque *Les propriétés ci-dessus fonctionnent si l'on considère des développements limités au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.*

Exemple

Pour chaque fonction f donnée ci-après dont on donne un $DL_4(0)$, former son $DL_3(0)$:

1. $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$$\text{Troncature à l'ordre 3 :} \quad f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3)$$

2. $f(x) = -2 + 3x - x^2 + x^4 + o(x^4)$

$$\text{Troncature à l'ordre 3 :} \quad f(x) = -2 + 3x - x^2 + o(x^3)$$

Exercice 2.6 **Entraînement**

1. Donner le $DL_5(0)$ de la fonction $g : x \mapsto x\sin(x)$.
2. Donner le $DL_3(0)$ de la fonction $h : x \mapsto \frac{1+x^2}{1+x}$.
3. Donner le $DL_4(0)$ de la fonction $j : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1-x}$.

Exercice 2.7 **Entraînement bis**

1. Donner le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto e^x + x^2$.
2. Donner le $DL_6(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2 + x^3)$.
3. Donner le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$.

Calcul du DL d'un inverse

On suppose que f admet un $DL_n(a)$ et on souhaite calculer le $DL_n(a)$ de $g = 1/f$.

1. Quitte à faire le changement de variable $x = a + h$, on peut supposer que $a = 0$.
2. On écrit le $DL_n(0)$ de f :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n).$$

On en déduit le $DL_n(0)$ de $g = 1/f$.

3. La fonction $g = 1/f$ admet un $DL_n(0)$ seulement lorsque $a_0 \neq 0$. On se place donc dans ce cas-là.
   On écrit
$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)} \\ &= \frac{1}{a_0}\left[\frac{1}{1 + \left(\frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o_{x\to 0}(x^n)\right)}\right]\end{aligned}$$
   Comme
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o_{x\to 0}(x^n)\right) = 0$$
   on peut utiliser le DL_n
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots + (-1)^n u^n + o_{u\to 0}(u^n)$$
   pour trouver le $DL_n(0)$ de g.

Exercice 2.8 Premières gammes

Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ puis le $DL_3(2)$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exercice 2.9 Montée en gammes

1. Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
2. Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
3. Calculer le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.
4. Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$.

Exercice 2.10 Limites

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{e^x - 1}$.

2.3 Utilisation des développements limités

2.3.1 Calculs d'équivalents et de limites

Méthode ***Trouver un équivalent d'une fonction en a***

On détermine le premier terme non nul d'un développement limité au voisinage de a de la fonction.

Exercice 2.11 **Équivalent**

Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2) \cdot \sin^2(x)$.

Méthode ***Trouver la limite d'une fonction en a***

On détermine un équivalent de la fonction en a et on applique la propriété affirmant que deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont la même limite en a .

Exercice 2.12 **Limites**

En utilisant vos connaissances sur les équivalents et les développements limités, déterminer les limites suivantes :

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{(\tan(x))^5}, \qquad 2.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$$

$$3.\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}, \qquad 4.\ \lim_{x\to -1} x\left(\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x} - \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)$$

2.3.2 Détermination d'asymptotes

Méthode ***Étudier le comportement asymptotique d'une fonction f***

- *On cherche une relation du type : $\frac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{=} \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)$ grâce au changement de variable $u = \frac{1}{x}$. On obtient ce que l'on appelle un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$.*
- *On multiplie par x et on tronque à l'ordre 1, pour obtenir $f(x) \underset{+\infty}{\sim} a_0x + a_1$. Cela prouve alors que la droite d'équation $y = a_0x + a_1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.*
- *On peut enfin déterminer la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$, en cherchant le signe du premier terme non nul dans le développement de $f(x) - (a_0x + a_1)$.*

Exercice 2.13 Comportement asymptotique

Étudier le comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie sur $]-\infty, -1[\cup[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

2.3.3 Étude locale d'une fonction

Méthode ***Comment étudier une fonction f au voisinage de a***

1. *On détermine le développement limité de f au voisinage de a d'ordre p, où p est le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $a_p \neq 0$. Autrement dit, on se ramène à*

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

   où $a_p \neq 0$.

2. *On peut alors affirmer que f est prolongeable par continuité ($f(a) = a_0$) et dérivable en a ($f'(a) = a_1$).*
3. *On peut aussi donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a :*

$$T \text{ a pour équation } y = a_0 + a_1(x-a).$$

4. *On peut enfin déterminer la position locale de T par rapport à $\mathcal{C}_f$ en cherchant le signe de $a_p(x-a)^p$. En effet,*

$$f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Remarque 1. *Si p est pair et si $a_p \geq 0$: - Alors $a_p(x-a)^p \geq 0$ au voisinage de a. - Donc, $f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \geq 0$ au voisinage de a. - Donc, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T au voisinage de a.*

2. *Si p est impair et si $a_p \geq 0$: - Alors*

$$\begin{cases} a_p(x-a)^p \geq 0 \text{ au voisinage de } a^+ \\ a_p(x-a)^p \leq 0 \text{ au voisinage de } a^- \end{cases}$$

- Donc,

$$\begin{cases} f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \geq 0 \text{ au voisinage de } a^+ \\ f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \leq 0 \text{ au voisinage de } a^- \end{cases}$$

- Donc,

$$\begin{cases} \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } a^+ \\ \mathcal{C}_f \text{ est en-dessous de } a^- \end{cases}$$

3. *Si p est pair et si $a_p \leq 0$: - Alors $a_p(x-a)^p \leq 0$ au voisinage de a. - Donc, $f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \leq 0$ au voisinage de a. - Donc, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de T au voisinage de a.*

4. *Si p est impair et si $a_p \leq 0$: - Alors*

$$\begin{cases} a_p(x-a)^p \leq 0 \text{ au voisinage de } a^+ \\ a_p(x-a)^p \geq 0 \text{ au voisinage de } a^- \end{cases}$$

- Donc,

$$\begin{cases} f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \leq 0 \text{ au voisinage de } a^+ \\ f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \geq 0 \text{ au voisinage de } a^- \end{cases}$$

- Donc,

$$\begin{cases} \mathcal{C}_f \text{ est en-dessous de } a^+ \\ \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } a^- \end{cases}$$

Exemple

Étudier localement en 0 la fonction définie pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

2.3.4 Étude des points critiques

<u>**Méthode**</u> ***Déterminer la nature d'un point critique*** a

Soient I un intervalle et $a \in I$, a n'étant pas une extrémité de I et f une fonction dérivable sur I. On appelle " ***point critique*** *" toute valeur a telle que $f'(a) = 0$. On rappelle qu'avoir $f'(a) = 0$ est une condition nécessaire mais non suffisante pour avoir un extremum local en a.*

On suppose que a est un point critique de f.

1. *On forme le développement limité de f au voisinage de a à un ordre suffisant de manière à obtenir :*

$$f(x) - f(a) \approx a_p(x-a)^p \text{ où } a_p \neq 0.$$

Comme a est un point critique, nécessairement on a $p \geq 2$ (car $f'(a) = a_1 = 0$).

2. *On discute selon la parité de p et le signe de a_p :*

   (a) *Si p est impair, alors $a_p(x-a)^p$ change de signe au voisinage de a, donc il n'y a pas d'extremum local en a, mais un* ***point d'inflexion****.*

$$\begin{cases} a_p \geq 0 \\ a_p \leq 0 \end{cases}$$

   (b) i. *Si p est pair et si $a_p \geq 0$, alors $a_p(x-a)^p \geq 0$ au voisinage de a, autrement dit $f(x) \geq f(a)$ au voisinage de a, donc il y a un minimum local en a.*

$$a_p \geq 0$$

   ii. *Si p est pair et si $a_p \leq 0$, alors $a_p(x-a)^p \leq 0$ au voisinage de a, autrement dit $f(x) \leq f(a)$ au voisinage de a, donc il y a un maximum local en a.*

$$a_p \leq 0$$

Exemple

Soit $f : x \mapsto \frac{e^x-1}{x^2+1}$. f admet-elle des extrema locaux ?

Exemple

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(e^x - \sin(x))$ admet un minimum local en 0.

Exercice 2.14 **Tangentes et asymptotes**

Étudier et représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. On cherchera en particulier les tangentes et asymptotes remarquables ainsi que la position relative de la courbe par rapport à ces tangentes et asymptotes.

2.4 Formulaire et points méthodes

2.4.1 Principaux développements limités en 0

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Suites géométriques :

1. $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

2. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Taylor-Young :

3.
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

4.
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

5.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

6.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

7.
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Intégration terme à terme :

8.
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o_{x\to 0}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o_{x\to 0}(x^n) \quad (n \geq 1)$$

9.
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o_{x\to 0}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{x^k}{k} + o_{x\to 0}(x^n) \quad (n \geq 1)$$

10.
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x\to 0}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

Attention ! Pour pouvoir utiliser le développement limité de $(1+x)^\alpha$, il faut que le nombre α soit une constante indépendante de x.

2.4.2 Application des développements limités

Définition 2.4.1 ***Développement asymptotique***
Un développement asymptotique est similaire à un développement limité, mais x peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, et il peut y avoir des termes non polynomiaux comme $\frac{1}{x^p}$. En pratique, on procède comme pour les DL.

Exercice 2.15 **Précision**

1. Développement asymptotique à la précision de $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
2. Développement asymptotique de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en $+\infty$ à la précision de $o(x^{-3})$.

Exercice 2.16 **Limite de suite**

Soit $x \in \mathbb{R}$, trouvons la limite de (u_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Méthode ***Comment trouver un équivalent ?***
La fonction f est équivalente à son premier terme non nul dans son DL. Si $f(x) = a\sum_{k=p}^{n} a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim a_p(x-a)^p$.

Méthode ***Comment trouver une limite ?***
La fonction f est équivalente à son premier terme non nul dans son DL. La fonction f a la même limite en a qu'un équivalent trouvé grâce à la méthode précédente.

Exercice 2.17 **Nouvelle limite**

Quelle est la limite de $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ en 0 ?

Méthode ***Comment étudier la courbe d'une fonction grâce à un DL***
Si f a un DL(p) en a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$ avec $a_p \neq 0$ et $p \geq 2$.

Au voisinage de a, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ est du même signe que $a_p(x-a)^p$. On connaît donc la position de la fonction par rapport à sa tangente en a.

Si jamais $f'(a) = 0$, on a un point critique, et suivant la parité de p et du signe de a_p, on peut avoir un maximum local, un minimum local, ou un point d'inflexion.

Exercice 2.18 **Allure**

Posons $f : x \mapsto 1 + 2x - 5\sqrt{1+x^3+x^4}$. Tracer l'allure de f au voisinage de 0.

Définition 2.4.2 ***Asymptote***
On dit que $x \mapsto ax + b$ est une asymptote de f en $+\infty$ si $f(x) - (ax + b) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ (idem en $-\infty$).

Comment trouver l'asymptote de f en $+\infty$?

1. Trouver un développement asymptotique de f de la forme $f(x) = \alpha x + \beta + \gamma x^{-p} + o(x^{-p})$ avec $p > 0$.
2. Alors $x \mapsto \alpha x + \beta$ est une asymptote de f en $+\infty$.
3. Si $\gamma \neq 0$, le signe de γ permet de connaître la position de f par rapport à son asymptote.

Si $f(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to a$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $x = a$ est une asymptote verticale de f.

Exercice 2.19 Asymptote et position relative

Montrer que $f : x \mapsto \frac{x^c}{x+1}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote.

Méthode ***Comment déterminer le développement limité d'une fonction réciproque ?***
Soit $f : I \to J$ bijective.

1. *Justifier avec la formule de Taylor-Young que f^{-1} admet un DLn en a : $f^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$.*
2. *Si $a = 0$ et f est impaire, alors f^{-1} est aussi impaire et donc $a_{2k} = 0$ pour tout k.*
3. *Écrire le développement limité de f.*
4. *Par composition, écrire le développement limité de $f \circ f^{-1} = Id$. Conclure par unicité des coefficients.*

Exercice 2.20 Bijection

Montrer que $\sinh$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et trouver le DL$3(0)$ de $\sinh^{-1}$.
Calculer $(\sinh^{-1})^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Méthode ***Comment déterminer un développement asymptotique d'une suite définie par récurrence ou implicitement ?***
On effectue un développement asymptotique (DA) à un très petit ordre (avec une limite, un équivalent, un encadrement), puis on réinjecte ce DA de façon à en obtenir un plus précis, puis on recommence.

■ Exercice 2.21 Suites

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$, montrer que $u_n \in [n-1; n]$, puis trouver un DA à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

■ Exercice 2.22 Suite et valeur approchée

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis que $x_n \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

2.5 Exercices

■ Exercice 2.23 Somme et produit de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 **2.** $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0 **4.** $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 **6.** $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

■ Exercice 2.24 Quotient de DLs

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0

3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

■ Exercice 2.25 Composition de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0

3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0 **4.** $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 2.26 Intégration de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2.** $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 2.27 DLs pas en 0 !

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2 **2.** $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2
3. e^x à l'ordre 3 en 1 **4.** $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$
5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2

Exercice 2.28 Ordre le plus grand possible

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de valuation la plus grande possible.

Exercice 2.29 DL en l'infini

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$ **2.** $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

Exercice 2.30 Astucieux !

Calculer, à l'ordre 100, le développement limité en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 2.31 Un DL par équation différentielle et unicité

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer la fonction $a :]-1,1[\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)+a(x)f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de a.
3. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.

Exercice 2.32 Limites de fonctions

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ en 0;   **2.** $\dfrac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$ en 0;

3. $\dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$ en 0;   **4.** $\dfrac{\exp(x^2)\cos(2x)-1}{\sin(x^2)-x^2}$ en 0;

5. $\dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0.

Exercice 2.33 Limites de fonctions

1. $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0;   **2.** $\dfrac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\sin x-\tan x}$ en 0;

3. $\dfrac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$ en 0^+.

Exercice 2.34 Limites à paramètres

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto \frac{e^x+e^{ax}-2}{x^2}$ admette une limite finie en 0. Déterminer alors la limite.

Exercice 2.35 Étude locale d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Exercice 2.36 Position relative d'une courbe et de sa tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

■ Exercice 2.37 Branches infinies

A l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

■ Exercice 2.38 Asymptotes

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$

2. $g(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

3. $h(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$

4. $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

■ Exercice 2.39 Comparaison de fonctions

On pose $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$. Préciser les positions relatives au voisinage de 0 des courbes représentatives C_f, C_g, C_h, C_k.

■ Exercice 2.40 Dérivée n-ième en 0

Soit $f : x \mapsto \frac{x^4}{1+x^6}$. Déterminer $f^{(n)}(0)$.

Chapitre 3
Courbes du plan

3.1 Courbes paramétrées

3.1.1 Terminologie des courbes paramétrées en dimension 3

Définition 3.1.1 ***Courbe paramétrée***
Une courbe paramétrée est une fonction vectorielle (de classe C^1)

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \big(x(t), y(t), z(t)\big) \end{array}$$

Le ***support*** *de la courbe paramétrée est le lieu des points*

$$C = \Big\{\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big),\, t \in [a,b]\Big\}.$$

Remarque *On étend la définition des courbes paramétrées aux courbes de classe C^1 par morceaux : on dit que γ est de classe C^1 par morceaux si γ est continue sur $I = [a, b]$ et on peut subdiviser l'intervalle I en un nombre fini de sous-intervalles $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tel que la restriction de γ à $[a_i, a_{i+1}]$ soit de classe C^1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$.*

- *Le point $\gamma(a)$ (resp. $\gamma(b)$) est appelé l'origine (resp. l'extrémité) du chemin γ.*
- *On dit qu'un chemin γ est contenu dans un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^3$, si son support $C \subset D$.*
- *Une courbe paramétrée est naturellement orientée par le sens croissant du paramètre t. On note dans ce cas le support par C^+ et on dit qu'il est orienté dans le sens direct (ou positif).*
- *Le support de γ parcouru dans le sens inverse (ou négatif) est noté C^-, il est par exemple paramétré par $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$.*
- *On dit que la courbe γ est fermée quand $I = [a, b]$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$.*
- *On dit qu'une courbe γ est simple si $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$, pour tout $t, t_0 \in]a, b[$ tels que $t \neq t_0$, i.e. γ sur $]]a, b[$ est injective.*

Définition 3.1.2 ***Vecteur vitesse***
On appelle vecteur vitesse la dérivée première de γ :

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \Big(x'(t), y'(t), z'(t)\Big)$$

Définition 3.1.3 ***Régularité***
Une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est dite régulière si pour tout $t \in I$, $\|\gamma'(t)\| \neq 0$, autrement dit, si son vecteur vitesse ne s'annule jamais. La droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t)$ est appelée la droite tangente en t à γ.

Définition 3.1.4 ***Longueur***
La longueur de la courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ entre t_0 et t_1 ($a \leq t_0 \leq t_1 \leq b$) est donnée par

$$L_{t_1}^{t_0}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Exemple

Soit $\gamma(t) = (t, t, t)$ avec $t \in [0, 1]$.
On a $\gamma'(t) = (1, 1, 1)$ d'où $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \neq 0$.
Ainsi γ est régulière.

Exemple

Soit $\gamma(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.
On a $x(t)/3 = \cos t$, $y(t) = 0$ et $z(t)/2 = \sin t$,
ainsi le support de la courbe est l'ellipse contenue dans le plan $\{y = 0\}$, d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.
Puisque $\gamma(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$, on a $\gamma'(t) = (-3\sin t, 0, 2\cos t)$
d'où $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} \neq 0$.
Ainsi γ est régulière.

Exemple

Soit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 6\pi]$.

On a $x^2(t) + y^2(t) = 1$,
le support de la courbe est contenu dans un cylindre de base un cercle unité.
La hauteur $z(t)$ est le paramètre angulaire. Le support de la courbe est donc une hélice.
Puisque $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, on a $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ par suite $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$,
ainsi la courbe γ est régulière.
La longueur de γ entre 0 et 2π vaut

$$L_{2\pi}^{0}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

3.1.2 Terminologie des courbes paramétrées en dimension 2

Définition 3.1.5 ***Courbe paramétrée***
On appelle ***courbe paramétrée (ou arc paramétré)*** *la donnée d'une application $\varphi : A \to P$ où A est une partie de $\mathbb{R}$ et P le plan des points.*
On appelle support ou trajectoire de la courbe l'ensemble des points atteints par le mouvement :

$$C = \{M \in P | \exists t \in A, M = \varphi(t)\} = \hat{\varphi}(A).$$

Remarque — *Si le plan est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, ceci revient à donner deux fonctions $x : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall t \in A, \varphi(t) = (x(t), y(t))_{\mathcal{R}}.$$

Cela revient aussi à donner une fonction vectorielle $\vec{f} : A \longrightarrow P$ telle que : $\forall t \in A, \vec{f}(t) = O\vec{\varphi}(t)$.
On note $M_t = \varphi(t)$; $\vec{f}(t) = O\vec{M}_t$.

— *Une courbe paramétrée n'est pas qu'une courbe du plan, il y a aussi une idée de mouvement, donc de vitesse, de sens de parcours, d'accélération : c'est de la dynamique.*

— *On peut définir une même courbe en cartésiennes, en polaires, par une fonction numérique.*

Exemple

Le demi-cercle de centre O et de rayon 1 privé des points $(1,0)_{\mathcal{R}}$ et $(-1,0)_{\mathcal{R}}$
(en supposant $\mathcal{R}$ orthonormé direct) peut être donné par
$x(\theta) = \cos(\theta)$ et $y(\theta) = \sin(\theta)$ (en cartésiennes)

mais aussi par $\rho(\theta) = 1$ (en polaires) pour $\theta \in]0, \pi[$ ou par $x_1(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y_1(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (en cartésiennes) pour $t \in]0, +\infty[$

et même par $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ (fonction) pour$x \in]-1, 1[$.

3.1.3 Limite et dérivée d'une fonction vectorielle de la variable réelle

Définition 3.1.6 ***Limite d'une fonction vectorielle***

Soit $\vec{f} : A \to P$ une fonction vectorielle de la variable réelle.
Si $a \in A$ et $\vec{v} \in P$, on dira que $\vec{f}$ admet pour limite $\vec{v}$ en a qu'on écrira

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{v} \text{ si } \lim_{t \to a} ||\vec{f}(t) - \vec{v}|| = 0.$$

Remarque — *Avec ces notations, si on note* $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_B$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_B$ *les coordonnées dans une base orthonormée* B*, alors*
$\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \vec{v} \iff (\lim_{t\to a} x(t) = v_1$ *et* $\lim_{t\to a} y(t) = v_2)$.

— *On peut aussi définir la dérivée d'une fonction vectorielle et on a un résultat similaire qui dit que* $\vec{f}$ *est dérivable en* a *ssi les fonctions coordonnées* x *et* y *le sont et qu'on a alors :* $\vec{f}'(a) = \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}_B$.

Proposition 3.1.7 ***Dérivées de fonctions vectorielles***
Soit $\vec{f}$ *et* $\vec{g}$ *deux fonctions vectorielles dérivables sur* A*, alors* $\vec{f}\cdot\vec{g}$*,* $||\vec{f}||$ *(si* $\vec{f}$ *ne s'annule pas sur* A*) le sont aussi sur* A*.*

$$(\vec{f}\cdot\vec{g})' = \vec{f}'\cdot\vec{g} + \vec{f}\cdot\vec{g}',$$
$$||\vec{f}||' = \frac{\vec{f}\cdot\vec{f}'}{||\vec{f}||},$$

3.1.4 Point stationnaire, point régulier, tangentes

On note $M_t = \varphi(t)$ un point de la courbe et $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM_t}$ le vecteur entre l'origine du repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ et le point M_t de la courbe.

Définition 3.1.8 ***Point stationnaire, point régulier, tangentes***
On suppose dans les définitions suivantes que la courbe est "assez" dérivable :

— *On dit que* M_{t_0} $(t_0 \in A)$ *est un **point régulier** si* $\overrightarrow{f}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
— *On dit que* M_{t_0} *est un point **stationnaire** s'il n'est pas régulier.*
— *On dit que la courbe est régulière si tout point de la courbe est régulier.*
— *On dit que le point* M_{t_0} *est un point **birégulier** si* $\overrightarrow{f}'(t_0)$ *et* $\overrightarrow{f}''(t_0)$ *ne sont pas colinéaires.*
— *On dit que la courbe est birégulière si tout point de la courbe est birégulier.*

Remarque *En un point régulier M_{t_0}, si $t \in A$ et $t \neq t_0$ et $M_t \neq M_{t_0}$ alors le vecteur $\overrightarrow{M_{t_0}M_t}/(t-t_0)$ est un vecteur directeur de la droite $(M_tM_{t_0})$. Ce vecteur a pour vecteur limite la dérivée $\overrightarrow{f}'(t_0)$ qui oriente donc la tangente à la courbe en M_{t_0}.*

Proposition 3.1.9 ***Tangente***

La tangente à la courbe en un point régulier M_{t_0} a pour équation cartésienne :

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} - \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = 0.$$

Remarque

- *En un point stationnaire M_{t_0}, on pourra tout de même avoir une équation de la tangente en calculant $\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$: cela donnera la pente de la tangente en M_{t_0} à la courbe.*
- *Le mouvement est dit **rectiligne** s'il existe une droite D telle que : $\forall t \in A, M_t \in D$.*
- *Le mouvement est dit à **accélération centrale** si : $\exists C \in P, \forall t \in A, \overrightarrow{f}''(t)$ et $\overrightarrow{CM_t}$ sont colinéaires.*

Remarque *On se place au voisinage d'un point* M_{t_0}*, on suppose la fonction* $\overrightarrow{f}$ *suffisamment dérivable pour pouvoir définir* $p > 1$ *le plus petit entier tel que la dérivée* $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ *et* $q > p$ *le plus petit entier tel que* $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)$ *et* $\overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)$ *ne sont pas colinéaires.*
En appelant (X, Y) *les coordonnées de* M_{t_0+h} *dans le repère* $(M_{t_0}, \overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0))$*, on a :*

$$\begin{cases} X \underset{0}{=} \alpha h^p(1 + \cdots) + \beta h^q + o(h^q) \\ Y \underset{0}{=} \gamma h^q + o(h^q) \end{cases}$$

Ainsi, on a 4 cas à considérer pour l'allure locale de la courbe au voisinage de M_{t_0} *:*

- *Si* p *est impair et* q *est pair,* M_{t_0} *est un point à* ***allure normale*** *(la courbe traverse localement toutes les droites passant par* M_{t_0} *sauf la tangente).*
- *Si* p *est impair et* q *est impair,* M_{t_0} *est un* ***point d'inflexion*** *(la courbe traverse localement toutes les droites passant par* M_{t_0}*).*
- *Si* p *est pair et* q *est impair,* M_{t_0} *est un* ***point de rebroussement de première espèce*** *(la courbe ne traverse localement aucune droite passant par* M_{t_0} *sauf la tangente).*
- *Si* p *est pair et* q *est pair,* M_{t_0} *est un* ***point de rebroussement de seconde espèce*** *(la courbe ne traverse localement aucune droite passant par* M_{t_0}*).*

Remarque *Pour une courbe donnée en coordonnées cartésiennes par* $M_t = \big(x(t), y(t)\big)_R$*, les expressions des dérivées première et seconde sont :*

$$\vec{f}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)_B$$

et

$$\vec{f}''(t) = \big(x''(t), y''(t)\big)_B .$$

Pour une courbe donnée en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$*, c'est-à-dire par* $\vec{f}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$*, on a :*

$$\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}_B \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}_B$$

Sachant que $\vec{u}_\theta' = \vec{v}_\theta$ *et* $\vec{v}_\theta' = -\vec{u}_\theta$*, on peut écrire les expressions des dérivées première et seconde de* $\vec{f}(\theta)$ *:*

$$\vec{f}'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta$$

et

$$\vec{f}''(\theta) = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\,\vec{u}_\theta + 2\rho'(\theta)\vec{v}_\theta.$$

3.2 Courbes en cartésiennes

On se donne donc dans cette partie une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes (il est sous-entendu que le repère considéré est le repère canonique donc orthonormé direct) par :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

3.2.1 Domaine d'étude et tableau de variations

Méthode

1. *On détermine d'abord le domaine de définition D_f de la courbe paramétrée qui est donc l'intersection des domaines de définition des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.*

2. *On détermine ensuite le domaine d'étude :*
   c'est-à-dire un domaine inclus dans le domaine de définition et qui permet, si on étudie correctement la courbe sur cette partie-là, de retrouver toute la courbe par des considérations de symétrie, de rotation, de translation, ...

3. *On calcule les limites de x et y aux bornes de leurs domaines de définition. Si les fonctions x et y sont dérivables, on calcule ces dérivées là où elles existent et on fait l'étude du signe de ces dérivées pour connaître les variations de x et de y. On dispose enfin toutes ces informations dans un tableau de variations qui se présente comme ceci :*

$$\begin{cases} \text{1ère ligne} & \text{valeurs permises de } t \\ \text{2ème ligne} & \text{signe de } x'(t) \\ \text{3ème ligne} & \text{valeurs, variations, limites de } x(t) \\ \text{4ème ligne} & \text{valeurs, variations, limites de } y(t) \\ \text{5ème ligne} & \text{signe de } y'(t) \end{cases}$$

Exemple

Si on se donne une courbe paramétrée par $x(t) = \ln(t)$ et $y(t) = \sqrt{1-t^2}$
alors le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^* \cap [-1;1] =]0;1]$.

Remarque — *Si x et y sont T-périodiques alors on peut étudier la courbe sur $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ou $Df \cap [0;T]$ et on repassera une infinité de fois par chacun des points de la courbe.*

— *Si x et y sont paires on peut étudier la courbe sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et on repassera deux fois par chacun des points de la courbe.*

— *Si x est paire et y impaire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Ox).*

— *Si x est impaire et y paire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Oy).*

— *Si x et y sont impaires alors on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie centrale autour de O.*

Exemple

Si on veut étudier la cycloïde $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$ (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$),
on voit que l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$, on a
$x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi a$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$ donc
on en déduit que la courbe est stable par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(2\pi a, 0)$ et
on peut n'étudier que $[-\pi; \pi]$.
De plus x est impaire et y est paire et
on peut étudier sur $[0; \pi]$ et retrouver toute la courbe
en faisant une symétrie orthogonale par rapport à la droite (Oy).

3.2.2 Branches infinies et point multiples

Définition 3.2.1 ***Branches infinies***
On dit que la courbe paramétrée $f : I \to P$ présente une ***branche infinie*** *lorsque t tend vers t_0 si*

$$\lim_{t \to t_0} \|\overrightarrow{OM_t}\| = +\infty \quad (t_0^+, t_0^-, t_0 = +\infty \text{ et } t_0 = -\infty \text{ sont possibles}).$$

On dit qu'une droite D est asymptote à la courbe lorsque t tend vers t_0 si

$$\lim_{t \to t_0} d(M_t, D) = 0.$$

Remarque — *Si* $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$ *alors la droite* $y = y_0$ *est asymptote à la courbe.*
De même, si $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ *alors* $x = x_0$ *est asymptote.*

— *Dans les autres cas, quand* x *et* y *tendent toutes les deux vers* $\pm\infty$ *quand* t *tend vers* t_0*, on essaie d'estimer la quantité* $\frac{y(t)}{x(t)}$ *quand* t *tend vers* t_0*. On a alors plusieurs cas :*

  — $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ *: la courbe admet une branche parabolique de direction* (Oy) *en* t_0*.*

  — $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ *: la courbe admet une branche parabolique de direction* (Ox) *en* t_0*.*

  — $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{t\to t_0}(y(t) - ax(t)) = \pm\infty$ *: la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique* $y = ax$ *en* t_0*.*

  — $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{t\to t_0}(y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$ *: la courbe admet la droite d'équation* $y = ax + b$ *pour asymptote quand* t *tend vers* t_0*.*
  On pourra dans ce dernier cas s'intéresser à la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote, c'est-à-dire au signe de $y(t) - ax(t) - b$ *au voisinage de* t_0*.*

Définition 3.2.2 ***Point multiple***

On dit qu'un point M *de la courbe est* ***point multiple*** *(au moins double) s'il existe un couple de paramètres*

$$(t_1, t_2) \in D_f^2 \text{ tel que } t_1 \neq t_2 \text{ et } M = M_{t_1} = M_{t_2}$$

(bien sûr il ne faut pas que cette égalité provienne de manière évidente d'une périodicité, d'une parité, ...).

Méthode ***Pour étudier une courbe paramétrée en cartésiennes*** $x = x(t)$ ***et*** $y = y(t)$

— *On détermine d'abord le domaine de définition de la courbe.*

— *On cherche aussi le plus petit domaine d'étude possible grâce aux propriétés de* x *et y et on écrit les transformations géométriques qui permettent de retrouver ensuite toute la courbe.*

— *On calcule les dérivées de x et y et on dresse le tableau de variations global.*

— *On étudie les branches infinies : asymptotes et position locale par rapport à celles-ci.*

— *On trace la courbe en indiquant le sens de parcours et en positionnant les points à dérivées horizontales, verticales, les croisements avec les axes, ...*

— *Si on voit apparaître des points multiples, on essaie de les calculer.*

3.3 Courbes en polaire

3.3.1 Formules utiles

En supposant que $\vec{f}$ (donc ρ) est dérivable, pour un point M_θ (de coordonnées polaires (ρ, θ)) régulier de la courbe, on définit les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$, $\varphi = \angle(\vec{i}, \vec{f}'(\theta))$ et $V = \angle(\vec{u}_\theta, \vec{f}'(\theta))$ (qui dépendent de θ sans qu'on le mentionne dans le nom de ces angles).

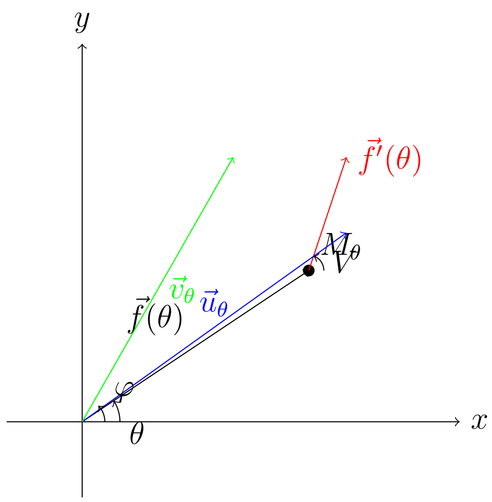
On se rappelle que :

$$\vec{f}'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta$$

et

$$\vec{f}''(\theta) = \left(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\right)\vec{u}_\theta + 2\rho'(\theta)\vec{v}_\theta.$$

Avec un dessin, on découvre que $V = \frac{\pi}{2}$ si $\rho'(\theta) = 0$ et que $\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$ sinon ; on a aussi $\varphi = \theta + V$.



On calcule les limites de ρ aux bornes de son domaine de définition. Si ρ est dérivable, on calcule sa dérivée et on étudie son signe là où elle existe pour connaître les variations de ρ . On dispose enfin ces informations dans un tableau de variations :

3.3.2 Domaine d'étude et tableau de variations

Comme pour une courbe en coordonnées cartésiennes, on détermine d'abord l'ensemble des θ possibles, c'est-à-dire le domaine de définition de la fonction ρ.

Ensuite on essaie de réduire ce domaine à un domaine d'étude plus petit mais qui contient les informations relatives à la courbe entière.

— Si ρ est 2π-périodique alors on peut étudier la courbe sur $D_f \cap [0; 2\pi]$ ou $D_f \cap [-\pi; \pi]$ et on repassera une infinité de fois par chacun des points de la courbe.

— Si ρ est π-périodique on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap [0; \pi]$ ou $D_f \cap \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie de centre O.

— Si ρ est T-périodique en général, on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap [0; T]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une infinité de rotations d'angle T.

— Si ρ est paire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe ar une symétrie d'axe (Ox).

— Si ρ est impaire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Oy).

— Si $\forall \theta \in D_f, \rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$ alors on peut étudier et tracer la courbe sur $Df \cap \left[-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Oy).

— Si $\forall \theta \in D_f, \rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$ alors on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap \left[-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Ox).

— Si $\forall \theta \in D_f, \rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho(\theta)$ alors on peut étudier et tracer la courbe sur $D_f \cap \left[-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Ox).

3.3.3 Branches infinies et point multiples

On a la même définition d'une branche infinie quand θ tend vers θ_0 qu'en cartésiennes, il faut que $\lim_{\theta \to \theta_0} |\rho(\theta)| = +\infty$, si c'est le cas on se place dans le nouveau repère $(O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ dans lequel le point M_θ admet pour coordonnées cartésiennes (X, Y) avec :

$$X = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \quad \text{et} \quad Y = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0).$$

On a bien sûr $X \to \pm\infty$ lorsque $\theta \to \theta_0$. Par contre :

— si Y n'a pas de limite en θ_0 et on dit juste que la courbe admet pour direction asymptotique $\theta = \theta_0$.

— si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} Y = +\infty$ on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction $\theta = \theta_0$.

— si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} Y = Y_0$ la courbe admet une droite asymptote d'équation $Y = Y_0$ dans ce nouveau repère.

Définition 3.3.1 ***Point multiple***
Un point de la courbe est dit multiple s'il est associé à deux paramètres différents (mais pas issu de la périodicité) sachant que, pour un point M on a :

$$M = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} \iff \Big((\theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi] \text{ et } \rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) \Big)$$

$$\text{ou } \Big(\theta_1 \equiv \theta_2 + \pi [2\pi] \text{ et } \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2) \Big))$$

<u>**Méthode**</u> ***Pour étudier une courbe donnée en polaires par*** $\rho = \rho(\theta)$

— *On détermine d'abord le domaine de définition de la courbe.*
— *On cherche aussi le plus petit domaine d'étude possible grâce aux propriétés de ρ et on écrit les transformations géométriques qui permettent de retrouver ensuite toute la courbe.*
— *On calcule la dérivée de ρ et on dresse le tableau de variations global.*
— *On étudie les branches infinies : asymptotes et position locale par rapport à celles-ci.*
— *On trace la courbe en indiquant le sens de parcours et en positionnant les points à tangentes orthoradiales, les passages au pôle, les croisements avec les axes, ...*
— *Si on voit apparaître des points multiples, on essaie de les calculer.*

3.4 Exercices

Exercice 3.1 Du tableau de variations à la courbe

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^1, dont le tableau de variations des fonctions coordonnées est :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Que peut-on dire, à la lecture de ce tableau, des points stationnaires ? des tangentes parallèles aux axes ? des branches infinies ?
Tracer une courbe paramétrée qui peut correspondre à ce tableau de variations.

■ Exercice 3.2 Branches infinies

Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-9}, \frac{t(t-2)}{t-3}\right)$.

■ Exercice 3.3 Recherche de point double

Démontrer que la courbe paramétrée $t \mapsto \left(2t - \dfrac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$ possède un point double dont on donnera les coordonnées.

■ Exercice 3.4 Équation cartésienne

Déterminer une équation cartésienne de l'arc paramétré $t \mapsto \left(\frac{t}{1-t^4}, \frac{t^3}{1-t^4}\right)$.

■ Exercice 3.5 Tangente en un point stationnaire

Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, on note $f(t) = \frac{t^2}{1-t^2}$ et $g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}$. Dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $M(t)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ et $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée $\{M(t);\ t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}\}$.

1. Rappeler sans justification le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\frac{1}{1-u}$.
2. Déterminer les développements limités des fonctions f et g à l'ordre 3 en 0.
3. En déduire la valeur de $f''(0)$ et celle de $g''(0)$.
4. Donner les coordonnées d'un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en $(0, 0) = (f(0), g(0))$.

■ Exercice 3.6 Astroïde

Tracer la courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

■ Exercice 3.7 Lemniscate de Bernoulli

On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe.

■ Exercice 3.8 Branches infinies et point singulier

Étudier la courbe paramétrée suivante : $t \mapsto \left(t+\frac{1}{t}, t+\frac{1}{2t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$. On étudiera en particulier la position par rapport aux asymptotes, et la tangente aux points stationnaires.

■ Exercice 3.9 La rosace à huit feuilles

Construire la rosace d'équation polaire $\rho(\theta) = \sin(4\theta)$. On fera notamment attention à se restreindre à l'intervalle d'étude le plus petit possible.

■ Exercice 3.10 Une boucle

On considère la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}$.

1. Démontrer qu'on peut limiter l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2[$.
2. Étudier la branche infinie de la courbe sur l'intervalle $[0, \pi/2[$.
3. Tracer la courbe, on précisera en particulier la tangente à la courbe aux points correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

■ Exercice 3.11 Détaillée

On considère la courbe paramétrée Γ d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \tan\theta$.

1. Étudier les symétries de Γ et restreindre l'intervalle d'étude.
2. Étudier les variations de ρ.
3. Déterminer les asymptotes de Γ (on en donnera une équation dans le répère initial).
4. Déterminer la (les) tangente(s) de la courbe en O.
5. Tracer (le support de) Γ.

■ Exercice 3.12 Deux branches infinies

Étudier et tracer la courbe paramétrée d'équation $\rho(\theta) = 1 + \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\theta-\pi}{3}}$.

■ Exercice 3.13 Longueur d'un arche de cycloïde

Calculer la longueur d'une arche de cycloïde :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

■ Exercice 3.14 Longueur d'une spire d'hélice

Calculer la longueur d'une spire d'hélice circulaire :

$$\begin{cases} x(t) & = & a\cos t \\ y(t) & = & a\sin t \\ z(t) & = & ht \end{cases}$$

avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Chapitre 4

Séries numériques

4.1 Vocabulaire et notations

4.1.1 Série numérique

Définition 4.1.1 ***Série numérique***
Une série numérique est une somme abstraite infinie de scalaires (réels ou complexes), notée :

$$\sum_{n>0} u_n \quad \text{ou parfois} \quad \sum u_n.$$

Parfois, les termes de cette somme ne sont pris en compte qu'à partir d'un certain indice n_0, auquel cas la série est notée :

$$\sum_{n>n_0} u_n.$$

Définition 4.1.2 ***Somme partielle***

Pour tout entier N, la somme partielle de rang N de la série $\sum u_n$ est le nombre :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Dans le cas plus général d'une série numérique de la forme $\sum_{n>n_0} u_n$, c'est pour tout entier $N > n_0$ que l'on définit la somme partielle de rang N par la formule :

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Définition 4.1.3 ***Convergence***

Dire que la série $\sum_{n>n_0} u_n$ *converge signifie que la suite des sommes partielles :*

$$\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N>n_0}$$

converge.
La notion de divergence se transmet également.

Remarque *Soient* n_1 *et* n_2 *deux entiers avec* $n_1 > n_2$.
On remarque que les suites de sommes partielles :

$$\left(\sum_{n=n_1}^{N} u_n\right)_{N>n_1} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=n_2}^{N} u_n\right)_{N>n_2}$$

diffèrent d'une constante (à savoir $\sum_{n=n_2}^{n_1-1} u_n$*).*

Par conséquent, les séries $\sum_{n>n_1} u_n$ *et* $\sum_{n>n_2} u_n$ *ont la même nature.*
On dit aussi que les premiers termes de la série n'ont pas d'influence sur la nature de la série en question.

4.1.2 Somme d'une série convergente

Définition 4.1.4 ***Somme d'une série numérique***
En cas de convergence, la limite de la suite des sommes partielles est appelée ***la somme de la série****. On note :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Proposition 4.1.5 ***Décalage***
Soit $\sum_{n>n_0} u_n$ une série convergente. Alors, pour tout entier $n_1 > n_0$, la série $\sum_{n>n_1} u_n$ converge aussi, et leurs sommes sont reliées par la formule :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

4.1.3 Reste d'une série convergente

Définition 4.1.6 ***Reste d'une série convergente***
Soit $\sum_{n>n_0} u_n$ une série convergente.
Pour tout entier $N > n_0$, on appelle ***reste d'ordre*** *N de cette série ce qui reste de la somme quand on lui a retiré la somme partielle de rang N :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

La suite des restes d'une série convergente est une suite de limite nulle.

Exemple

- La **série nulle** $\sum_{n>0} 0$ est convergente.
  Sa somme est nulle, de même que toutes ses sommes partielles et ses restes.
- Pour toute constante $\alpha \neq 0$, la série $\sum_{n>0} \alpha$ est **divergente**.
- La série $\sum_{n>0} (-1)^n$ est divergente.
  En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang N s'exprime ainsi :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \frac{1+(-1)^N}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } N \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases}$$

  Les suites extraites $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de limites distinctes, donc la suite $(S_N)_{N>0}$ est divergente.

4.1.4 Opérations sur les séries

Proposition 4.1.7 ***Somme de deux séries***
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

— *La somme des séries est la série de terme général $u_n + v_n$.*
— *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \sum u_n = \sum \lambda u_n$*

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors :

$$\sum(u_n + v_n) \text{ converge et } \sum u_n + \sum v_n = \sum(u_n + v_n)$$

Remarque *- La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.*
- Pour la somme de deux séries divergentes : pas de règle générale.

4.1.5 Divergence grossière

Proposition 4.1.8 ***Divergence grossière***
Si la suite $(u_n)_{n>n_0}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
On dit dans ce cas que cette série ***diverge grossièrement****.*

Remarque ***Attention :*** *la réciproque est complètement fausse : il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0, comme on le voit avec certaines séries de Riemann ou avec l'exemple du paragraphe précédent.*

4.1.6 QCM

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

Q1. Une série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est :

a) une suite de réels u_n indexée par n.
b) la limite de la suite u_n quand $n \to \infty$.
c) une somme infinie des termes u_n.
d) le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Q2. La somme partielle de rang N de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est :

a) $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.
b) $S_N = \lim_{n\to N} u_n$.
c) $S_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots$.
d) $S_N = \int_0^N u_n \, dn$.

Q3. Le **reste** d'ordre N de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est défini par :

a) $R_N = S_N - u_N$.
b) $R_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.
c) $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.
d) $R_N = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=N+1}^{M} u_n$.

Q4. Supposons que $\sum u_n$ converge. Que peut-on dire du reste R_N quand $N \to \infty$?

a) Il converge vers la somme totale de la série.
b) Il diverge vers $+\infty$.
c) Il converge vers 0.
d) Il oscille entre deux bornes.

Q5. Si la série $\sum u_n$ converge, alors :

a) u_n converge vers la somme de la série.
b) $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
c) $\sum |u_n|$ converge aussi.
d) u_n devient constant à partir d'un certain rang.

Q6. Deux séries $\sum_{n>n_0} u_n$ et $\sum_{n>n_1} u_n$ ayant des indices de départ différents :

a) peuvent être de natures différentes (convergente/divergente).
b) sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.
c) convergentes si et seulement si $n_0 = n_1$.

Q7. On supprime un nombre fini de termes au début d'une série. Cela modifie :

a) sa nature (convergence ou divergence).
b) sa somme, mais pas sa nature.
c) ni sa nature ni sa somme.
d) son reste de manière significative.

4.2 Séries à connaître et à reconnaître

4.2.1 Série alternée

Définition 4.2.1 ***Série alternée***
Les séries de la forme $\sum(-1)^n a_n$, *avec* $a_n \geq 0$, *sont appelées alternées.*

Théorème 4.2.2 (Leibniz) ***Critère spécial des séries alternées***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle décroissante qui converge vers 0.*
Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ *est convergente.*

De plus, pour tout entier N, *le reste*

$$\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n u_n$$

a le même signe que $(-1)^N u_N$.
Enfin, pour tout entier N, *on a la majoration :*

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n u_n\right| \leq u_N.$$

Remarque

1. *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0 en croissant, alors les inégalités sur les sommes partielles sont renversées, mais les autres propriétés subsistent. En particulier, le signe du reste est toujours déterminé par le premier terme de la somme qui définit ce reste.*

2. *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *mais n'est décroissante qu'à partir d'un rang* n_0, *alors la série* $\sum(-1)^n u_n$ *converge aussi. La propriété sur le signe du reste n'est valable a priori que si* $N \geq n_0$ *; il en va de même pour les inégalités sur les sommes partielles.*

3. *Pour des séries absolument convergentes comme* $\sum(-1)^n/n^2$ *ou* $\sum(-1)^n/n!$, *la première partie de ce théorème est inutile ; cependant, les propriétés sur le signe du reste et l'encadrement de la somme peuvent être intéressantes.*

■ **Exercice 4.1** **Premier exemple**

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est-elle convergente ?

■ **Exercice 4.2** **Estimation du reste**

Calculer une estimation du reste pour la somme partielle à l'ordre N :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

■ **Exercice 4.3** **Converge ou diverge ?**

Montrer que la série alternée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

converge ou diverge.

■ **Exercice 4.4** **Converge ou diverge ? bis**

Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

4.2.2 Série télescopique

Proposition 4.2.3 ***Série télescopique***
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique.
Soit un entier $n \geqslant n_0 + 1$. Un télescopage donne :

$$u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Ainsi, la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ équivaut à celle de la ***série des différences***

$$\sum_{k \geqslant n_0} (u_{k+1} - u_k).$$

Exemple

La suite $(\ln(n))_{n \geqslant 2}$ est divergente, donc sa série des différences est divergente.
Cette série s'écrit :

$$\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Exemple

Prenons un nombre complexe z tel que $|z| < 1$.
On sait que la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers 0).
On en déduit que la série $\sum(z^n - z^{n+1})$ est convergente.
En simplifiant par la constante non nulle $1 - z$, on en déduit que la série $\sum z^n$ est convergente.

Exercice 4.5 **Série télescopique**

Étudier la convergence et calculer la somme de la série télescopique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

4.2.3 Série de référence : série géométrique, série de Riemann, et série exponentielle

Série géométrique

Définition 4.2.4 ***Les séries géométriques***

Soit $z \in \mathbb{C}$. On étudie la série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Proposition 4.2.5 ***Convergence d'une série géométrique***

- *Si $|z| \geq 1$, alors la série $\sum z^n$ diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0).*
- *Si $|z| < 1$, alors la série converge et sa somme vaut :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Plus généralement, dès que la raison r a un module strictement inférieur à 1, on a :

$$\text{somme} = (\text{premier terme}) \times \frac{1}{1-r}.$$

Exemple

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{2^{2n+1}} = \frac{3}{32} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}.$

Exercice 4.6 **Application**

Calculer la somme de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Série de Riemann

Définition 4.2.6 ***Les séries de Riemann***
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle série de Riemann de paramètre α la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Proposition 4.2.7 ***Convergence des séries de Riemann***

— *Si $\alpha \leq 1$, la série diverge.*
— *Si $\alpha > 1$, la série converge.*

Exercice 4.7 Pont aux ânes

Donner la nature des séries suivantes :

a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/4}},$$

b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

e) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

f) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},$$

Exercice 4.8 Convergence ou absolue convergence

Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

est absolument convergente et calculer une majoration du reste après N termes.

Exercice 4.9 Série de Riemann

Étudier la convergence de la série de Riemann

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

en fonction du paramètre réel $\alpha > 0$.

■ **Exercice 4.10** **Convergence d'une série de Riemann**

Déterminer la nature (convergence/divergence) de la série suivante pour $\beta > 0$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$$

Série exponentielle

Définition 4.2.8 ***La série exponentielle***
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Remarque *Il ne faut pas oublier que la somme commence à l'indice $n = 0$. Si on commence à $n = 1$, la formule est fausse pour $z = 0$.*

Démonstration (par Taylor avec reste intégral)
Soit $z \in \mathbb{C}$, et définissons $f(t) = e^{tz}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt.$$

Comme $f^{(k)}(t) = z^k e^{tz}$, on obtient pour $x = 1$:

$$e^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + \frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 e^{tz} (1-t)^n dt.$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{n!} \int_0^1 |e^{tz}| (1-t)^n dt.$$

Or, $|e^{tz}| = e^{t\Re(z)} \leq e^{|\Re(z)|}$ pour $t \in [0, 1]$.
Ainsi :

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1} e^{|\Re(z)|}}{(n+1)!}.$$

Ce majorant tend vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui prouve la convergence de la série exponentielle.

Exercice 4.11 **Série exponentielle**

Montrer que la série exponentielle
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$
converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que sa somme est égale à e^z.

4.2.4 QCM

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

Q1. Une série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si :

a) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

b) La suite des sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite finie

c) Tous les termes u_n sont positifs

d) u_n est décroissante

Q2. La somme partielle d'ordre n d'une série $\sum u_k$ est :

a) $S_n = u_n$

b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

c) $S_n = \lim_{k\to n} u_k$

d) $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

Q3. Le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum u_k$ est :

a) $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

b) $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

c) $R_n = u_n$

d) $R_n = S_n - S_{n-1}$

Q4. La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge si :

a) $|z| < 1$

b) $|z| = 1$

c) $|z| > 1$

d) z est réel négatif

Q5. Pour $|z| < 1$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n =$

a) $\dfrac{1}{1-z}$

b) $-\ln(1-z)$

c) e^z

d) $1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$

Q6. La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si :

a) $\alpha = 1$

b) $\alpha < 1$

c) $\alpha > 1$

d) $\alpha \leq 0$

Q7. La série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge si :

a) u_n est croissante et tend vers 0

b) u_n décroît vers 0

c) u_n est constant

d) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ sans condition

Q8. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est une série alternée vérifiant les conditions du théorème de Leibniz, alors pour tout N :

a) Le reste R_N est nul

b) Le signe du reste est celui de $(-1)^N u_N$

c) $|R_N| \leq u_0$

d) $R_N > u_N$.

Q9. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$:

a) Diverge car son terme général ne tend pas vers 0

b) Converge absolument

c) Converge mais pas absolument

d) Est télescopique

Q10. Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$, avec $u_n > 0$, décroissante et tendant vers 0. Alors :

a) La série diverge

b) Le reste R_N vérifie $|R_N| \leq u_N$

c) Le reste est nul

d) La série est absolument convergente

Q11. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$:

a) Diverge

b) Converge conditionnellement

c) Converge absolument

d) Est télescopique

Q12. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$:

a) Converge et sa somme vaut 1

b) Diverge
c) Est alternée
d) Converge et sa somme vaut $\ln 2$

Q13. On pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors la série $\sum u_n$:

a) Est une série alternée
b) Est télescopique et converge vers 1
c) Diverge
d) Converge mais sans expression explicite

Q14. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n+1) - \ln(n))$:

a) Est alternée
b) Converge vers $\ln 2$
c) Est télescopique et diverge
d) Est absolument convergente

4.3 Séries à terme positif

4.3.1 Comparaison série-intégrale (méthode des rectangles)

Proposition 4.3.1 ***Comparaison série-intégrale***

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, décroissante et positive. Alors la série

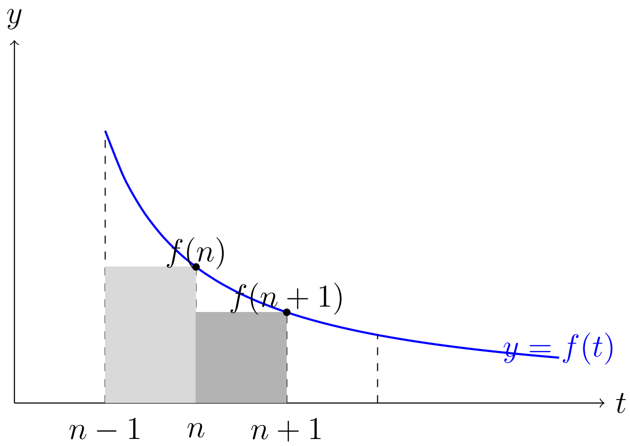
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

converge si et seulement si la suite

$$\left(\int_{n_0}^{n} f(x)\, dx \right)_{n \geq n_0}$$

converge.

Soit une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et à valeurs dans les réels positifs. On suppose f décroissante [1].



Méthode des rectangles pour f décroissante

1. Ou croissante. Cela ne fait que renverser le sens des inégalités.

Inégalités fondamentales
Si f est décroissante et $n > a+1$, alors :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt.$$

Justification formelle. Soit $n > a+1$. La décroissance de f implique que :

$$\forall t \in [n-1, n], \quad f(n) \leq f(t).$$

Donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{n-1}^{n} f(n)\,dt \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt.$$

Or, l'intégrale de la fonction constante $f(n)$ sur $[n-1, n]$ vaut $f(n) \times 1 = f(n)$, donc :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt.$$

De même, l'encadrement supérieur s'obtient via :

$$f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt.$$

Application aux fonctions puissances

Prenons $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$, sur $[1, +\infty[$. On a alors :

$$\int_{1}^{n} f_\alpha(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f_\alpha(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f_\alpha(k),$$

et aussi :

$$\int_{1}^{n} f_\alpha(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f_\alpha(t)\,dt \geq \sum_{k=2}^{n} f_\alpha(k).$$

D'où l'encadrement :

$$f_\alpha(n) + \int_{1}^{n} f_\alpha(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_\alpha(k) \leq f_\alpha(1) + \int_{1}^{n} f_\alpha(t)\,dt.$$

Cet encadrement donne une approximation précise de la somme partielle par l'intégrale, très utile dans l'étude des séries de Riemann.

4.3.2 Critère de Cauchy

Proposition 4.3.2 ***Critère de Cauchy***

Soit la série $(\sum u_n)$ une série à termes positifs ou nuls. Soit l tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = l$$

- *Si $l < 1$, la série converge.*
- *Si $l > 1$, la série diverge.*
- *Si $l = 1$, pas de conclusion.*

Exercice 4.12 **Application**

La série $\sum \frac{x^n}{n^n}$ est-elle convergente ?

4.3.3 Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

Proposition 4.3.3 ***Proposition fondamentale***

Si la suite $(u_n)_{n>n_0}$ est à termes réels positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante à partir du rang n_0, donc elle admet une limite.

Si la suite des sommes partielles est majorée, on peut en déduire qu'elle converge ; la série $\sum u_n$ converge.

Dans le cas contraire, cette série diverge et la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$.

Proposition 4.3.4 ***Critères de comparaison***
On considère deux suites réelles $(u_n)_{n>n_0}$ *et* $(v_n)_{n>n_1}$.
On suppose qu'il existe un indice entier $n_2 > \max(n_0, n_1)$ *vérifiant l'encadrement :*

$$\forall n > n_2, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Si la série $\sum v_n$ *converge, alors la série* $\sum u_n$ *converge aussi. Dans ce cas, on peut également écrire :*

$$\sum_{n=n_2}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_2}^{+\infty} v_n.$$

Par contraposition, si la série $\sum u_n$ *diverge, alors la série* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

Démonstration. On suppose que la série $\sum v_n$ converge. Pour tout entier $N > n_2$, on a :

$$\sum_{n=n_2}^{N} u_n \leq \sum_{n=n_2}^{N} v_n \leq \sum_{n=n_2}^{+\infty} v_n.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n>n_2} u_n$ est donc majorée. Comme elle est aussi croissante, elle converge. La série $\sum u_n$ est donc convergente. ♡

Proposition 4.3.5 ***Critère de négligeabilité***

On reprend les notations précédentes. On suppose que les deux suites ont leurs termes positifs à partir d'un certain rang. On fait de plus l'hypothèse suivante :

$$u_n = o_{n\to+\infty}(v_n).$$

Si la série $\sum v_n$ *converge, alors la série* $\sum u_n$ *converge aussi.*
Par contraposition, si la série $\sum u_n$ *diverge, alors la série* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

Démonstration. L'hypothèse de négligeabilité implique qu'il existe un rang n_3 tel que pour tout $n > n_3$, on ait :

$$u_n \leq v_n.$$

On peut alors appliquer le critère de domination. ♡

Proposition 4.3.6 ***Critère des équivalents***
On suppose que les deux suites ont leurs termes positifs à partir d'un certain rang, et que $u_n \sim v_n$ *quand* $n \to +\infty$.
Alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont la même nature.*

Démonstration. Le fait que $u_n \sim v_n$ signifie qu'il existe un rang n_3 tel que pour tout $n > n_3$, on ait :

$$u_n \leq 2v_n \quad \text{et} \quad v_n \leq 2u_n.$$

Le critère de domination permet d'en déduire que si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ converge, alors l'autre aussi.

Les deux séries ont donc la même nature. ♡

4.4 Convergence absolue

Définition 4.4.1 ***Convergence absolue***

Étant donnée une suite complexe $(z_n)_{n>n_0}$, dire que la série $\sum z_n$ ***converge absolument*** *signifie que la série $\sum |z_n|$ converge.*

Théorème 4.4.2 *La convergence absolue implique la convergence.*

Remarque *Autrement dit, la convergence de la série $\sum |z_n|$ implique celle de la série $\sum z_n$.*
De plus, dans ce cas, on a l'inégalité triangulaire infinie :

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |z_n|.$$

Exemple

Les séries suivantes convergent car elles convergent absolument :

$$\sum_{n>1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n>1} \frac{e^{i\ln(n)}}{2^n}.$$

Remarque ***Attention.*** *Il n'y a pas de notion de divergence absolue. Si la série $\sum |z_n|$ est divergente, on ne peut rien en conclure quant à la nature de la série $\sum z_n$.*

Démonstration du théorème

Premier cas : suites à valeurs réelles. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et on suppose que la série $\sum |u_n|$ converge.

On remarque alors l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n| - u_n \leq 2|u_n|.$$

Par comparaison à termes positifs, la série $\sum(|u_n| - u_n)$ est convergente.

L'identité $u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$ permet d'en déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Cas général : suites à valeurs complexes. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série $\sum |z_n|$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on connaît les majorations :

$$|\Re(z_n)| \leq |z_n|, \quad |\Im(z_n)| \leq |z_n|.$$

On en déduit que les séries $\sum |\Re(z_n)|$ et $\sum |\Im(z_n)|$ convergent.

En utilisant le cas réel, on en déduit que les séries $\sum \Re(z_n)$ et $\sum \Im(z_n)$ convergent.

Enfin, la relation $z_n = \Re(z_n) + i\Im(z_n)$ permet de conclure que la série $\sum z_n$ est convergente. ♡

4.4.1 Critère de d'Alembert

Proposition 4.4.3 ***Critère de d'Alembert***

☆

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On examine :

$$\ell = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

- Si $\ell < 1$ alors la série converge.
- Si $\ell > 1$ elle diverge.
- Si $\ell = 1$: indéterminé.

■ **Exercice 4.13** **Première application**

La série $(\sum \frac{n^2}{x^n})$ est-elle convergente ?

4.4.2 Suite du critère de d'Alembert

En exploitant le fait que les u_k sont strictement positifs et en itérant cette inégalité, on obtient :

$$\forall n > n_0, \quad u_n \leq r^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Les inégalités $0 \leq r < 1$ donnent la convergence de la série $\sum r^n$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Deuxième cas. On se place dans le cadre de l'hypothèse $\ell > 1$. La définition de la limite donne cette fois l'existence d'un indice n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

On en déduit alors la minoration :

$$\forall n > n_0, \quad u_n \geq u_{n_0},$$

et cette minoration empêche la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tendre vers 0. La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente.

Troisième cas. Toutes les séries de Riemann donnent la valeur $\ell = 1$. Certaines d'entre elles convergent, d'autres divergent. Voilà pourquoi le cas $\ell = 1$ n'est pas conclusif. ♡

4.4.3 Adaptation des critères de comparaison

Critère de domination

Soit $(z_n)_{n>n_0}$ une suite complexe. Soit $(u_n)_{n>n_1}$ une suite réelle positive.
On suppose que $z_n = O(u_n)$ et que la série $\sum u_n$ converge.
Alors la série $\sum z_n$ converge absolument, donc elle converge.

Critère de négligeabilité

Soit $(z_n)_{n>n_0}$ une suite complexe. Soit $(u_n)_{n>n_1}$ une suite réelle positive.
On suppose que $z_n = o(u_n)$ et que la série $\sum u_n$ converge.
Alors la série $\sum z_n$ converge absolument, donc elle converge.

Critère des équivalents

Soit $(z_n)_{n>n_0}$ une suite complexe. Soit $(u_n)_{n>n_1}$ une suite réelle positive.
On suppose que $|z_n| \sim u_n$ et que la série $\sum u_n$ converge.
Alors la série $\sum z_n$ converge absolument, donc elle converge.

Règle de d'Alembert (adaptée)

Soit $(z_n)_{n>n_0}$ une suite complexe, dont les termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang. On suppose que le quotient

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$$

admet une limite ℓ quand $n \to +\infty$.

— Si $\ell < 1$, alors la série $\sum |z_n|$ converge, donc la série $\sum z_n$ converge.
— Si $\ell > 1$, alors la suite $(|z_n|)_{n>n_0}$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum z_n$ diverge grossièrement.
— Si $\ell = 1$, aucune conclusion n'est possible. ♡

4.4.4 QCM

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

Q1. La méthode des rectangles pour une fonction décroissante positive f sur $[a, +\infty[$ permet de comparer la série $\sum_{n=a}^{+\infty} f(n)$ avec :

a) L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

b) La série $\displaystyle\sum_{n=a}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

c) La somme partielle $\sum_{k=a}^{n} f(k)$ uniquement

d) L'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$

Q2. Selon la méthode des rectangles, si f est décroissante positive, alors pour tout entier $n > a$ on a l'encadrement :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

Cette propriété permet de conclure que :

a) La convergence de la série $\sum f(n)$ équivaut à celle de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

b) La série $\sum f(n)$ diverge toujours

c) La série $\sum f(n)$ converge uniquement si f est bornée

d) La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$

Q3. Le critère de d'Alembert appliqué à une série $\sum u_n$ à termes positifs repose sur l'étude de la limite de :

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$

Q4. Selon le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ à termes positifs converge si :

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$

Q5. Le critère de négligeabilité pour une série $\sum u_n$ à termes positifs permet de conclure que :

a) Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi

b) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ diverge

c) Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ converge

d) Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ converge

Q6. Le critère de comparaison s'applique lorsque l'on sait comparer u_n avec une suite v_n positive telle que :

a) $u_n \leq v_n$ pour tout n assez grand et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

b) $u_n \geq v_n$ pour tout n et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ diverge

c) $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ converge

d) $u_n \leq v_n$ pour tout n et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ converge

Q7. Parmi les séries suivantes, lesquelles convergent ? (plusieurs réponses possibles)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

4.5 Exercices

Exercice 4.14 Séries à critère de d'Alembert

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum \frac{n!}{a^n}, \qquad \sum \frac{n(n+1)}{a^n}, \qquad \sum \frac{n^n}{4^n n!}$$

Exercice 4.15 Séries à critère de Cauchy

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Étudier :

$$\sum \left(\frac{na^2}{2n+1}\right)^n, \qquad \sum (1+x^n)^{n^2}, \qquad \sum \frac{n \ln n}{(\ln n)^n}$$

Exercice 4.16 Séries à critère de Riemann

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n^a}, \qquad \sum (1-\cos\frac{1}{n}), \qquad \sum \ln(\cos\frac{1}{n})$$

Exercice 4.17 Séries alternées

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^3}, \qquad \sum \frac{(-1)^n(n^2+3n-1)}{2n+1}$$

Exercice 4.18 Étude de convergence

Étudier la convergence des séries dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $u_n = \frac{n+1}{n^3-5}$
2. $u_n = \frac{2n-1}{n^2-1}$
3. $u_n = \frac{3n+1}{2n-5}$
4. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
5. $u_n = \ln(1 + e^{-n})$
6. $u_n = \frac{n+1}{n^2-5}$

Exercice 4.19 Calcul de sommes

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^4+n^2+1}{n}$
3. $\sum_{n\geq 1} n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
4. $\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}$
6. $\sum_{n\geq 0}((n+1)^3 - n^3)$.

Exercice 4.20 Majorations et équivalents - 1

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ **2.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ **3.** $u_n = n\sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5.** $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ **6.** $u_n = \dfrac{1}{n!}$

7. $u_n = \dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$ **8.** $u_n = \dfrac{n+1}{2^n+8}$ **9.** $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+1)}$

Exercice 4.21 Équivalents et majorations - 2

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R}_+$ **3.** $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$. **5.** $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ **6.** $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

7. $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$.

■ Exercice 4.22 Règle de d'Alembert

Étudier les séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$ **2.** $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ **3.** $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ Exercice 4.23 Équivalents à partir de développements limités

Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$ **2.** $u_n = \exp\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)\right)$ **3.** $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

■ Exercice 4.24 Avec des paramètres - 1

Discuter, suivant la valeur des paramètres, la convergence des séries suivantes :

1. $e^{\frac{1}{n}} - a - \dfrac{b}{n}$, $a, b \in \mathbb{R}$ **2.** $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - a - \dfrac{b}{n}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3. $\dfrac{1}{an+b} - \dfrac{c}{n}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$

■ Exercice 4.25 Avec des paramètres - 3

Déterminer en fonction des paramètres la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$, $\alpha \geq 0$ **2.** $\dfrac{1}{n^\alpha}\left((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.26 Inclassables

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1/n$ si n est un carré, et 0 sinon.
2. $u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$, avec $a > 0$.

Exercice 4.27 Cas limite de la règle de d'Alembert

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Exercice 4.28 Un cran au-dessus

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$ **2.** $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$

3. $u_1 \in \mathbb{R},\ \ u_{n+1} = e^{-u_n}/n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.29 Série harmonique

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$
2. En déduire un équivalent de H_n.
3. On pose pour $n \geq 1$, $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Vérifier que, pour $n \geq 2$, $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
4. Étudier la monotonie de (v_n). En déduire que (v_n) est convergente. On note γ sa limite et on pose pour $n \geq 1$, $w_n = H_n - \ln(n+1) - \gamma$.
5. (a) Vérifier que, pour tout $x \geq 0$,
$$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2} dt.$$
   (b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$,
$$|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}.$$

6. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$|w_n - w_{n-1}| \leq \frac{1}{2n^2}.$$
7. Soit $M > N \geq 1$. Démontrer que
$$\sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{N}.$$
8. En déduire, sous les mêmes hypothèses, que
$$|w_M - w_N| \leq \frac{1}{2N}$$
puis que
$$|v_N - \gamma| \leq \frac{1}{2N}.$$
9. Écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

■ Exercice 4.30 Sans le critère des séries alternées

On considère la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$, et on note, pour $n \geq 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}, \qquad u_n = S_{2n}, \qquad v_n = S_{2n+1}.$$

1. La série est-elle absolument convergente ?
2. Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Conclure que la série est convergente.

■ Exercice 4.31 Pour commencer !

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \frac{\sin n^2}{n^2} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$
$$\mathbf{3}.\ u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}$$

■ Exercice 4.32 Une erreur classique...

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

■ Exercice 4.33 Décomposition

Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ **2.** $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$, $\alpha > 0$

3. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

■ Exercice 4.34 En deux étapes

Discuter la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n},$$

où a et b sont deux nombres complexes, $a \neq 0$.

■ Exercice 4.35 Discussion suivant un paramètre

Suivant la position du point de coordonnées (x, y) dans le plan, étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{x^n}{y^n+n}.$$

■ Exercice 4.36 Reste d'une série alternée

On fixe $\alpha > 0$ et on pose $u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^\alpha}$. Le but de l'exercice est démontrer que la série de terme général u_n converge.

1. Soit $n \geq 1$ fixé. On pose
$$v_p = \frac{1}{(p+n)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha}.$$
Démontrer que la suite (v_p) décroît vers 0. En déduire la convergence de $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p v_p$. Quel est le signe de sa somme ?
2. En appliquant le critère des séries alternées, démontrer que la série de terme général (u_n) converge.

Exercice 4.37 Terme général donné par un produit

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \prod_{q=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right).$$

Exercice 4.38 Somme partielle des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 4.39 Reste d'une série de Riemann

Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Soit $a > 0$. Déterminer
$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Exercice 4.40 Où sont les séries ?

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Exercice 4.41 Suivant un paramètre

Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Exercice 4.42 Séries de Bertrand

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 4.43 Somme de logarithmes

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k)$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 4.44 Série télescopique...

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 4.45 À partir d'une série géométrique

Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$.

Exercice 4.46 Avec des exponentielles

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} \qquad \mathbf{2.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} \qquad \mathbf{3.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

Exercice 4.47 Série harmonique alternée

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.
2. Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Exercice 4.48 **Somme de la série des inverses des carrés**

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$
2. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$
3. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$
où on a posé $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
4. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4.49 **Très vite !**

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24}u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Exercice 4.50 **Série alternée**

Écrire un algorithme sous Python donnant un encadrement à 10^{-5} près de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

Exercice 4.51 **Développement asymptotique de la série harmonique**

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k\geq n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4.52 Somme et développement asymptotique de la série des inverses des carrés

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$
3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)}.$$
4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
   Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que
$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 4.53 Reste d'une série alternée

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent du reste de certaines séries alternées. On considère $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0, et on considère la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ dont on rappelle qu'elle est convergente. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ son reste. On suppose de plus que la suite (u_n) vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$.
2. Démontrer que la suite $(|R_n|)$ est décroissante.
3. En déduire que $R_n \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}u_n}{2}$.

Exercice 4.54 Équivalent d'une suite récurrente grâce aux séries

On considère une suite (u_n) donnée par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}u_n$ pour $n \geq 1$.

1. Démontrer que (u_n) converge.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = \ln\left(n^{1/3}u_n\right)$.
   (a) Démontrer que $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ converge.
   (c) En déduire que la suite (v_n) converge. On notera λ sa limite.
3. Donner un équivalent simple de (u_n). La série de terme général u_n est-elle convergente ?
4. La série de terme général $(-1)^n u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 4.55 Formule de Stirling

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.
2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :
$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Exercice 4.56 Relation suite/série

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On fixe $\beta \in \mathbb{R}$ et on pose

$$v_n = \ln\left((n+1)^\beta u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta u_n\right).$$

1. Pour quel(s) $\beta \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série de terme général v_n ?
2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^\star$ pour lequel $u_n \sim_{+\infty} An^\alpha$.

Exercice 4.57 Estimation asymptotique d'un produit

Soit $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_n \sim_{+\infty} \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4.58 Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, pour $n \geq 0$.

1. Etudier la convergence de (u_n).
2. Montrer que u_{n+1}/u_n tend vers 1. Calculer la limite de $\frac{u_n + u_{n+1}}{u_n}$.
3. Montrer que $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ tend vers $1/6$.
4. En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers $1/3$.
5. Montrer que l'on a $\lim(\sqrt{n}u_n) = \sqrt{3}$.

Chapitre 5

Calculs de champs de vecteurs

5.1 Notions de calcul différentiel

5.1.1 Parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$

Définition 5.1.1 ***Partie ouverte de*** $\mathbb{R}^2$
Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$, on dit U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, ou que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si, tout point de U est le centre d'un disque de rayon $r > 0$ entièrement inclus dans U $(x_0, y_0) \in U$, id est il existe $r > 0$ tel que $B\Big((x_0, y_0), r\Big) \subset U$.

Dans la suite U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Intuitivement, un ouvert est un ensemble où tous les points ont "de la place" autour d'eux. En pratique, on peut les 'approcher" dans toutes les directions.

Remarque
- *Les boules ouvertes sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.*
- *Les produits de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.*
  $]a, b[\times]c, d[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, $(a, b, c, d) \in \overline{\mathbb{R}}^4$.

5.1.2 Dérivées partielles premières

Définition 5.1.2 ***Ouvert***

Soit $a \in U$, $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ *et* h *un vecteur de* $\mathbb{R}^2$. *Comme* U *est un ouvert, il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour tout* $t \in]-\delta, \delta[$, $a + th \in U$. *Dans ce cas, on peut définir*

$$\varphi_h : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\delta, \delta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a+th) \end{array} \right.$$

Si la fonction $\varphi_h : t \mapsto f(a+th)$ *est dérivable en* 0, *on dit que* f *admet une dérivée au point* a *selon le vecteur* h, *et on note*

$$D_h f(a) = \varphi_h'(0)$$

Définition 5.1.3 ***Dérivée partielle première***

Soit $a \in U$, $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

- *On dit que* f *admet une dérivée partielle par rapport à* x *en* a *si* f *est dérivable en* a *suivant* $\vec{i}$. *On note ce nombre dérivé* $D_1 f(a)$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$. *Il est appelé première dérivée partielle de* f *ou dérivée partielle de* f *par rapport à* x.
- *On dit que* f *admet une dérivée partielle par rapport à* y *en* a *si* f *est dérivable en* a *suivant* $\vec{j}$. *On note ce nombre dérivé* $D_2 f(a)$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$. *Il est appelé seconde dérivée partielle de* f *ou dérivée partielle de* f *par rapport à* y.

Remarque *La notation* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est ambiguë. Cela ne veut pas dire que l'on dérive par rapport à* x *mais par rapport à la première variable (elle peut être notée* y *ou* z*). En fait, on note plus souvent* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$.

Exemple

Montrer que $f : (x, y) \mapsto e^{xy}/(x-y)$ est continue sur son domaine et admet des dérivées partielles premières continues.

5.1.3 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 5.1.4 ***Fonction de classe $\mathcal{C}^1$***
Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet des dérivées partielles première continues sur U.

$\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$: ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

Exemple

Montrer que la fonction définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $\theta(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5.1 **Classe $\mathcal{C}^1$**

Montrer que la fonction définie par $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 5.1.5 ***Théorème fondamental (admis)***
Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors f admet en tout point de a de U un développement limité à l'ordre 1, ainsi qu'une dérivée suivant tous les vecteurs h de $\mathbb{R}^2$ et, si $h = (h_1, h_2)$

$$D_h f(a) = h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

Et, au voisinage de a, $f(a+h) = f(a) + h_1\ D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a) + o(\|h\|)$

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}_{D_h f(a)} + o(\|h\|)$$

L'application notée

$$\begin{array}{rccc} df : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & h & \mapsto & D_h f(a). \end{array}$$

est appelée différentielle de f en a.

Remarque *Avec la notation df, le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de a s'écrit*

$$f(a+h) = f(a) + df(h) + o(\|h\|_2)$$

Remarque *Par convenance, l'usage est de confondre une fonction et sa valeur en un point. on confond $f(x)$ et f. On écrit*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Remarque *En mathématiques, dx désigne l'application qui a $h = (h_1, h_2) \longmapsto h_1$.*

Proposition 5.1.6 ***Continuité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$***
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, alors f est continue sur U.

Proposition 5.1.7 *Si f et g sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur U alors $f+g$, fg et f/g (si g ne s'annule pas sur U) sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur U.*

Exemple

On obtient par exemple $\dfrac{\partial (fg)}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} g + f \dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{1}{f^2}\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Proposition 5.1.8 ***Dérivée d'une composée*** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

— *Si* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$
— *et* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Alors l'application $F = f \circ \varphi$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et*

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x(t), y(t)\Big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x(t), y(t)\Big)y'(t)$$

Exercice 5.2 Premier calcul

Soit $g : t \mapsto f(2t, 1 + t^2)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partiellement dérivable.
Calculer g'.

Exercice 5.3 Entraînement

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x, y, t \in \mathbb{R}, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y)$.
Montrer que

$$\underset{.}{f}x(x, y) + \underset{.}{f}y(x, y) = 0$$

5.2 Gradient, divergence, rotationnel

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 5.2.1 ***Champ de vecteurs***

*On appelle **champ de vecteurs** sur* U*, toute application de* U *dans* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\begin{array}{rccc} \vec{V} : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & M & \mapsto & \vec{V}(M). \end{array}$$

5.2.1 Différentielle, matrice jacobienne

Définition 5.2.2 ***Forme différentielle***

Une forme différentielle (de degré 1) sur un domaine D est une expression de la forme :

— *(en dimension $n = 2$) : $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ où P et Q sont des fonctions de classe C^1 de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

— *(en dimension $n = 3$) : $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ où P, Q et R sont des fonctions de classe C^1 de $D \subset \mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

On associe à la forme différentielle ω le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini par :

— *(en dimension $n = 2$) : $\vec{V}(x, y) = P(x, y)\vec{\imath} + Q(x, y)\vec{\jmath}$*

— *(en dimension $n = 3$) : $\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$*

Définition 5.2.3 ***Forme différentielle exacte ou totale***

1. *La forme différentielle ω est dite exacte (ou totale) s'il existe une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ telle que $\omega = df$, c'est-à-dire $\omega = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz$ (c'est la différentielle d'une fonction).*
2. *Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un champ de gradient (ou dérive d'un potentiel) s'il existe une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \nabla f$, c'est-à-dire $\vec{V} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\vec{k}$*

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Ses fonctions composantes $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et vérifient, pour $M \in U$ et $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ tel que $M + \vec{h} \in U$:

$$V_i(M + h) = V_i(M) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(M)h_j + \|\vec{h}\|\varepsilon_i(\vec{h})$$

avec $\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \varepsilon_i(\vec{h}) = 0$.

Définition 5.2.4 ***Différentielle et Jacobienne***

Pour tout point $M \in U$, il existe une application linéaire notée $d\vec{V}_M$ telle que :

$$V_i(M+h) = V_i(M) + d\vec{V}_M(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h})$$

avec $\lim_{\|\vec{h}\|\to 0} \varepsilon(\vec{h}) = 0$.

Cette application linéaire, appelée ***différentielle*** *de $\vec{V}$ en M, a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:*

$$J = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

appelée ***matrice*** *jacobienne de $\vec{V}$ en M.*

Exercice 5.4 **Différentielle**

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$.
2. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
3. $f(x,y) = (y\sin x, \cos x)$.

Exercice 5.5 **Matrices jacobiennes**

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $f(x,y) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1+x^2)\right)$.

5.2.2 Gradient

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout point M et $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ tel que $M + \vec{h} \in U$:

$$f(M+h) = f(M) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) h_j + \|\vec{h}\| \varepsilon(\vec{h})$$

avec $\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \varepsilon(\vec{h}) = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{grad}_M f$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M)\right)_{1 \leq i \leq n}$ est appelé gradient de f en M. Il est tel que :

$$f(M+h) = f(M) + \vec{h} \cdot \overrightarrow{grad}_M f + \|\vec{h}\| \varepsilon(\vec{h})$$

avec $\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \varepsilon(\vec{h}) = 0$.

On note $\overrightarrow{grad} f$ l'application $M \mapsto \overrightarrow{grad}_M f$.

Définition 5.2.5 ***Gradient d'une fonction***

Le gradient d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ en un point a de U ouvert de $\mathbb{R}^2$, est le vecteur de $\mathbb{R}^2$, noté $\overrightarrow{grad} f(a)$ ou parfois $\overrightarrow{grad}_a f$ ou $\vec{\nabla}_a f$, défini par la relation

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \quad D_h f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) \cdot h = (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) \mid h).$$

Remarque *Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$ dans la base usuelle sont*

$$\Big(D_1 f(a), D_2 f(a)\Big) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big)$$

Remarque *On dit que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$ est le représentant de la forme linéaire $df_a : v \mapsto D_h f(a)$.*

Exemple

Soit $f(M) = \|\overrightarrow{AM}\|$, alors $\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$

Proposition 5.2.6 ***Linéarité du gradient et formule pour le produit***
Si f et g admettent des dérivées partielles en a alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda f + g)(a) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f(a) + \overrightarrow{\text{grad}} g(a)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg)(a) = g(a)\overrightarrow{\text{grad}} f(a) + f(a)\overrightarrow{\text{grad}} g(a)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(1/f)(a) = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} f(a)}{f^2(a)}$$

5.2.3 Divergence

Définition 5.2.7 ***Divergence***

*On appelle **divergence** d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U la fonction définie sur U par :*

$$\text{div}_M \vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(M)$$

On note div$\vec{V}$ l'appplication $M \mapsto \text{div}_M \vec{V}$.

Proposition 5.2.8 ***Linéarité de la divergence et formule pour le produit***
Pour tout $\vec{U}$ et $\vec{V}$ champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. alors

$$\text{div}\,(\lambda\vec{V} + \vec{U}) = \lambda \text{div}\vec{V} + \text{div}\vec{U}$$

et pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $\mathbb{R}$

$$\text{div}(f\vec{V}) = \overrightarrow{grad} f \cdot \vec{V} + f\,\text{div}\vec{V}$$

5.2.4 Laplacien

Définition 5.2.9 ***Laplacien***
Si f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, on appelle ***Laplacien*** *de f en $M \in U$, le réel :*

$$\Delta_M f = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \operatorname{div}_M \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ f\right).$$

On a donc :

$$\operatorname{div}_M f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$$

On note Δf l'appplication $M \mapsto \Delta_M f$.

Proposition 5.2.10 ***Linéarité du Laplacien et formule pour le produit***

$$\Delta\left(\lambda f + g\right) = \lambda \Delta f \vec{V} + \Delta g$$

et pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de U sur $\mathbb{R}$ et g de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $\mathbb{R}$

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2(\operatorname{grad} f) \cdot (\operatorname{grad} g)$$

5.2.5 Rotationnel

On suppose ici que $n = 3$. Soient $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et J sa matrice jacobienne.
La matrice $J - J^t$ est une matrice antisymétrique, donc est de la forme :

$$J - J^t = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de l'endormorphisme $\vec{u} \mapsto \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ où $\vec{\omega}$ a pour composantes (p, q, r).

Définition 5.2.11 ***Rotationnel***
*Ce vecteur $\vec{w}$ est appelé **rotationnel** de $\vec{V}$ en M et se note $\overrightarrow{rot}_M\vec{V}$.*
On :

$$\overrightarrow{rot}_M\vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)$$

Proposition 5.2.12 ***Linéarité du rotationnel et formule pour le produit***
Pour tout $\vec{U}$ et $\vec{V}$ champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. alors

$$\overrightarrow{rot}\,(\lambda\vec{V} + \vec{U}) = \lambda\overrightarrow{rot}\,\vec{V} + \overrightarrow{rot}\,\vec{U}$$

et pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $\mathbb{R}$

$$\overrightarrow{rot}(f\vec{V}) = f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{V} + \overrightarrow{grad}f \wedge \vec{V}$$

5.2.6 Potentiel scalaire

On suppose que U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Définition 5.2.13 ***Potentiel scalaire***

Un champ de vecteurs $\vec{V}$ sur U dérive d'un potentiel s'il existe $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{grad}f$.
*Une telle fonction f est alors appelée **potentiel scalaire** de $\vec{V}$.*

Remarque *Pas unicité du potentiel vecteur... d'où l'étude des différences de potentiels en physique.*

Proposition 5.2.14 ***Caractérisation des champs de vecteurs à potentiel scalaire (Admis)***

Un champ de vecteur $\vec{V} = (V_1, V_2)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert étoilé dérive d'un potentiel si et seulement si $\dfrac{\partial V_1}{\partial y} = \dfrac{\partial V_2}{\partial x}$.

Remarque *En dimension 3, particulièrement en physique, la condition est équivalent à $\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$.*

5.3 Intégrale curviligne

5.3.1 Circulation d'un champ de vecteurs

— Soit U un ouvert du plan.

— Soit $\Gamma = ([a, b], t \mapsto M(t))$ un arc paramétré orienté régulier, contenu dans U.

— Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs continu sur U.

Proposition 5.3.1 ***Intégrale curviligne***
Alors, l'intégrale

$$\int_a^b \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{M}'(t)dt = \int_a^b (\vec{V} \circ M)(t) \cdot \vec{M}'(t)dt$$

*ne dépend pas du paramétrage admissible de γ. On l'appelle **intégrale curviligne** ou circulation de $\vec{V}$ sur Γ.*

On note l'intégrale $\oint_\Gamma \vec{V}(M)d\vec{M}$.

Remarque — *Si* $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$*, on note aussi*

$$\oint_\Gamma \vec{V}(M) d\vec{M} = \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

— *On parle pour aussi pour* Γ *de chemin régulier.*

— *En pratique, si* $\gamma : t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$*,*

$$\oint_\Gamma \vec{V}(M) d\vec{M} = \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Exercice 5.6 Circulation sur le cercle unité

Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité, calculer la circulation sur $\mathcal{C}$ de $\vec{V}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Proposition 5.3.2 *Si* $\vec{V} = \vec{grad} f$ *et si* Γ *a pour origine* A *et extrémité* B*, alors*

$$\oint_\Gamma \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = f(B) - f(A).$$

Remarque *La circulation correspond en physique au travail d'une force. Ainsi, si la force dérive d'un potentiel, le travail ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée.*

Définition 5.3.3 ***Intégrale curviligne d'une forme différentielle***

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle de classe C^1,

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

le long de la courbe γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} , \quad t \in [a,b],$$

est le nombre réel :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right) dt$$

La version en dimension 2 s'obtient en ôtant la variable z et la composante R, c'est-à-dire :

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \left(P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right) = \int_a^b \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right) dt$$

où γ est de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \quad t \in [a,b]$$

Exemple

L'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega(x,y,z) = z\,dx - y\,dy + x\,dz$ le long de l'arc d'hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ est égale à :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left(t\frac{d(\cos t)}{dt} - \sin t \frac{d(\sin t)}{dt} + \cos t \frac{d(t)}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-t\sin t - \sin t \cos t + \cos t)\, dt \\ &= [t\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t\, dt - \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt \\ &= 2\pi - \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

On peut aussi retrouver ce résultat, en remarquant que la forme différentielle ω est exacte. En effet,
$\omega = df$ où $f(x,y,z) = xz - \frac{y^2}{2}$.
Par suite, le théorème précédent nous donne :

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = 2\pi.$$

Exercice 5.7 **Intégrale curviligne**

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$$

où C^+ est le cercle unité orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Exercice 5.8 **Intégrale curviligne à nouveau**

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy.$$

■ Exercice 5.9 Intégrale curviligne suivant différents chemins

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\,dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\,dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dz$$

lorsque :

1. γ est le segment de droite d'origine $A = (1, 1, 1)$ et d'extrémité $B = (2, 2, 2)$.
2. γ est l'hélice définie par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$, t variant de 0 à 2π.

5.3.2 Formule de Green-Riemann

Théorème 5.3.4 ***Formule de Green-Riemann***

Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, on suppose que le bord ∂D de D est une réunion de courbe de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on oriente de manière que le vecteur normal se dirige vers l'intérieur de D.
Si $\vec{V} = (P, Q)$ est un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ un ouvert U contenant D, alors

$$\int_{\partial D} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

■ Exercice 5.10 Formule de Green-Riemann

Soit D le domaine limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru dans le sens direct. Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann

$$\int_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Exercice 5.11 Formule de Green-Riemann à nouveau

Calculer l'intégrale curviligne I le long de la courbe fermée γ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$,
orientée dans le sens direct où

$$I = \int_\gamma (2xy - x^2)\, dx + (x + y^2)\, dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

5.4 Exercices

Exercice 5.12 Calculs effectifs

1. Déterminer les coordonnées de $\operatorname{grad} f$ où f est le champ scalaire suivant :
   (a) $f(x, y, z) = xy^2 - yz^2$.
   (b) $f(x, y, z) = xyz \sin(xy)$.
2. Déterminer div$f$ où f est le champ de vecteurs suivant :
   (a) $f(x, y, z) = (2x^2y, 2xy^2, xy)$.
   (b) $f(x, y, z) = (\sin(xy), 0, \cos(xz))$.
   (c) $f(x, y, z) = (x(2y + z), -y(x + z), z(x - 2y))$.

Exercice 5.13 Passage en coordonnées polaires

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ en coordonnées polaires.

■ Exercice 5.14 Laplacien en coordonnées polaires

On rappelle que si F est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, son laplacien est défini par :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

On fait le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Donner la nouvelle expression du laplacien par rapport aux variables r et θ (c'est-à-dire poser $f(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et exprimer ΔF en fonction de f, r, θ et des dérivées partielles de f).

■ Exercice 5.15 Potentiel scalaire

On rappelle qu'on dit qu'un champ de vecteurs F dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire f tel que $F = \overrightarrow{grad}(f)$. Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont ils dérivent.

1. $F(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$, défini sur $\mathbb{R}^3$.
2. $F(x,y) = \left(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$, défini sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$.

■ Exercice 5.16 Intégration le long d'une cardioïde

Soit $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$. Calculer l'intégrale curviligne de ω le long de la demi-cardioïde d'équation en polaire $r = 1 + \cos\theta$, θ allant de 0 à π.

■ Exercice 5.17 Intégrales curvilignes

Calculer les intégrales curvilignes $\int_C \omega$ dans les exemples suivants :

1. $\omega = xydx + (x+y)dy$, et C est l'arc de parabole $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$, parcouru dans le sens direct.
2. $\omega = y\sin x dx + x\cos y dy$, et C est le segment de droite OA de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$.

Exercice 5.18 Même origine, même extrémité, mais chemins différents

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = x^2 dx - xy dy$ le long des contours suivants :

— le segment de droite $[OB]$ de $O(0,0)$ vers $B(1,1)$.

— l'arc de parabole $x = y^2$, $0 \leq y \leq 1$, orienté dans le sens des x croissants.

Que peut-on en déduire pour la forme différentielle ω ? Retrouver cela par une autre méthode.

Exercice 5.19 Autour d'une hélice

On considère l'arc Γ, arc d'hélice paramétré et orienté par :

$$x = R\cos t, \;\; y = R\sin t, \;\; z = ht,$$

pour t variant de 0 à 2π. Calculer :

$$I = \int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz.$$

Exercice 5.20 Autour d'un carré

Calculer l'intégrale curviligne de

$$\omega = \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

le long du carré $ABCD$, avec $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$, parcouru dans le sens direct.

Exercice 5.21 Champ de vecteurs

Soit

$$V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

un champ de vecteurs. Calculer sa circulation le long du cercle de centre O et de rayon R. En déduire que ce champ de vecteurs ne dérive pas d'un potentiel.

■ Exercice 5.22 Dans l'espace !

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé, et $\vec{F}$ le champ de vecteurs :

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - 3xy\vec{j} + x^2\vec{k}.$$

Calculer la circulation de ce champ de vecteurs entre les points $O(0,0,0)$ et $P(1,2,-1)$ le long des chemins suivants :

1. $\Gamma_1 : (x = t^2, y = 2t, z = -t)$.
2. Le segment de droite $[O,P]$.

Que peut-on remarquer ? Pourquoi ?

■ Exercice 5.23 Formule de Green-Riemann

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer

$$\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy,$$

où γ est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équation $y = x^2$ et $x = y^2$.

■ Exercice 5.24 Aire d'une arche de cycloïde

Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe (Oy) et l'arc paramétré $x = a(t - \sin t)$ et $y = a(1 - \cos t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$.