Chapitre 11

Équations aux dérivées partielles

11.1 Les équations exactes

11.1.1 Différentielle totale

Définition 11.1.1 *Si F est une fonction de deux variables, sa* **différentielle** *est :*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy$$

Proposition 11.1.1 *Une expression de la forme $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est la différentielle d'une fonction si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

Exemple

- $(2x+4)\,dx + 2\,dy$
- $(e^y - 1)\,dx + (xe^y + 4)\,dy$
- $(9x^2 + 2xy)\,dx + (2y + x^2 + 1)\,dy$

Exercice 11.1.1 *Déterminer dans les cas suivants si l'expression $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est une différentielle.*

(a) $2(x^2y - 3)\,dy + (2xy^2 + 4)\,dx$ (b) $y^2e^{xy}\,dy + (2xy^2 + 4)\,dx$

(c) $(3y^3e^{3xy} - 1)\,dx + (2ye^{3xy} + 3xy^2e^{3xy})\,dy$

Corrigé de l'énoncé 11.1.1

11.1.2 Équation exacte

Définition 11.1.2 *L'***équation**

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

est dite **exacte**, *lorsque l'expression $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ est celle d'une différentielle totale.*

Proposition 11.1.2 *Les solutions y de l'équation différentielle (E) :*

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

lorsque $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est la différentielle d'une fonction F sont définies par la relation fonctionnelle

$$F(x,y) = K$$

où K est une constante quelconque.
On dit que F est « une intégrale première de (E) ».

Démonstration
■ *L'équation (E) peut s'écrire $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$.*
Soit y une fonction dérivable,

$$dF(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy \iff \frac{d}{dx}(F(x,y(x))) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f(x,y) + g(x,y)y'$$

Donc y est solution de (E) si et seulement si $F(x,y(x))$ est constant.

Fin de la démonstration ■

Exercice 11.1.2 ***On cherche la solution de*** $(3x^2y^4 + y)\,dx + (4x^3y^3 + x + 1)\,dy = 0.$

Corrigé de l'énoncé 11.1.2 - *On peut commencer par vérifier que l'expression définit bien la différentielle d'une fonction :*

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3 + x + 1) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4 + y)$$

- Cherchons maintenant à déterminer cette fonction F, elle doit vérifier

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^4 + y$$

elle est donc de la forme

$$F(x,y) = x^3y^4 + xy + H(y)$$

ou H est une fonction quelconque. En dérivant par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x^3y^3 + x + K'(y)$$

or cette quantité doit être égale à $4x^3y^3 + x + 1$, on en déduit que $H'(y) = 1$, d'où

$$F(x,y) = x^3y^4 + xy + y + C$$

où C est un réel.
- Les fonctions $y(x)$ qui vérifient $x^3y^4+xy+y = K$, où K est un réel, sont solutions de l'équation différentielle.

Proposition 11.1.3 Théorème de Cauchy (admis)
L'équation différentielle (E) : $y' = f(x,y)$ où f est un fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un domaine $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ possède une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$ lorsque $(x_0,y_0) \in I \times J$, la fonction y est alors définie sur un intervalle contenant x_0 et inclus dans I.

11.2 Exercices

11.2.1 Énoncés

Exercice 11.2.1 *Vérifiez que les équations différentielles suivantes sont exactes et trouvez ensuite la solution.*

1. $2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$
2. $2xy^2 + 4 = 2(3 - x^2y)y'$
3. $\dfrac{2ty}{t^2+1} - 2t - (2 - \ln(t^2+1))y' = 0,\quad$ *si* $y(5) = 0$
4. $3y^3e^{3xy} - 1 + (2ye^{3xy} + 3xy^2e^{3xy})y' = 0,\quad$ *si* $y(0) = 1$

Corrigé de l'énoncé 11.2.1
1. $x^2y - 3x^3 + y^2 + y = c$
2. $x^2y^2 + 4x - 6y = c$
3. $y\ln(t^2+1) - t^2 - 2y = -25$ *puis on isole* y.
4. $y^2e^{3xy} - x = 1$

11.2.2 Le facteur intégrant

Si $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ **n'est pas la différentielle d'une fonction**, *mais que*

$$h(x,y)(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy)$$

l'est, alors on dit que h *est le* **facteur intégrant de l'équation différentielle**

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

Il peut permettre de la résoudre.

Exercice 11.2.2 ***On cherche la solution de*** $\;x\,dy - (y + 1 - x^2)\,dx = 0.$

Corrigé de l'énoncé 11.2.2 - *On vérifie que*

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}(-(y+1-x^2))$$

- *Son facteur intégrant est* $\frac{1}{x^2}$ *: en multipliant l'équation par ce facteur, on obtient une nouvelle équation*

$$\frac{1}{x}\,dy - \frac{y+1-x^2}{x^2}\,dx = 0$$

- *À présent l'expression est la différentielle d'une fonction* F*, puisque*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y+1-x^2}{x^2}\right)$$

- *En intégrant* $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y+1-x^2}{x^2}$ *par rapport à* x*, on obtient*

$$F(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x + H(y)$$

- *En dérivant par rapport à* y*, on obtient*

$$\frac{1}{x} + H'(y) = \frac{1}{x} \implies H(y) = C$$

où C *est un réel.*
- *Les fonctions* $y(x)$ *qui vérifient* $\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = K$*, où* K *est un réel, sont solutions de l'équation différentielle.*

11.3 Exercices

11.3.1 Énoncés

Exercice 11.3.1 *Vérifier si les équations différentielles suivantes sont exactes, sinon utiliser le facteur intégrant proposer, trouvez ensuite la solution.*

1. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$, *facteur intégrant* x.
2. $x\,dx + y\,dy + 4y^3(x^2 + y^2)\,dy = 0$, *facteur intégrant* $\frac{1}{x^2+y^2}$.

11.3.2 Corrigés

Corrigé de l'énoncé 11.3.1 1. $\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = c$

2. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + y^4 = c$

11.4 Rappels et mise en garde

1. *Soit* f *une fonction de deux variables, définie sur une partie* U *de* $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *représente la dérivée de la fonction* $x \longmapsto f(x, y_0)$ *au point* x_0. *Dans la pratique cela revient à calculer la dérivée de* f *par rapport à* x *en considérant* y *comme une constante.*

   Exemple | *Si* $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, *alors* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$.

2. *Si* $F(x, y), g(x, y)$ *et* $h(x, y)$ *sont des fonctions de deux variables alors*

$$\frac{\partial}{\partial x}F(g(x, y), h(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x}(g(x, y), h(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(x, y), h(x, y))\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$$

3. **Résoudre l'équation aux dérivées partielles (ou EDP)**

$$(E) \ : \ \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

   revient à déterminer toutes les fonctions dont la dérivée par rapport à x *est nulle. On voit que toutes les fonctions qui ne dépendent que de* y *sont solutions. On la résout ainsi : pour un* y_0 *fixé la fonction* $x \longmapsto f(x, y_0)$ *a une dérivée nulle, elle est donc constante, finalement* f *ne dépend que de* y_0 *et donc* f *est de la forme :*

$$f(x, y) = K(y)$$

   Réciproquement les fonctions de la forme $f(x, y) = K(y)$ *vérifient bien* (E).

4. *La fonction d'une variable définie par* $f(x) = 1$ *si* $x \in [-2; -1]$ *et 2 si* $x \in [1; 2]$ *est une fonction dérivable de dérivée nulle, et elle n'est pas constante. Ceci peut arriver lorsque l'on résout des équations aux dérivées partielles aussi simple que* (E). *Ceci n'est plus possible si l'on travaille sur une partie* **convexe** *de* R^2. *Dans la suite du cours nous ne nous préoccuperons plus de ce genre de problèmes qui peuvent exister.*

11.5 EDP linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Définition 11.5.1 *Ce sont les* **équations aux dérivées partielles de la forme**

$$(E) \ : \ \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y, f)$$

où α, β *sont des réels.*

11.5.1 Cas particulier n°1 :

$$(E) \ : \ \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les solutions sont les fonctions $f(x,y) = K(y)$ où K est une fonction quelconque d'une variable. Si l'on veut se limiter aux solutions de classe $\mathcal{C}^1$, il faut prendre K quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

11.5.2 Cas particulier n°2 :

$$(E) \ : \ \frac{\partial f}{\partial x} = h(x,y)$$

En intégrant par rapport à x on trouve que les solutions sont les fonctions de la forme

$$f(x,y) = \int^x h(x,y)\,dx + K(y)$$

où K est une fonction quelconque.

Exercice 11.5.1 ***On cherche la solution de*** $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3xy}$.

Corrigé de l'énoncé 11.5.1 *En intégrant par rapport à x, on trouve*

$$f(x,y) = \frac{1}{3y}e^{3xy} + K(y)$$

Exercice 11.5.2 ***On cherche la solution de*** $\frac{\partial f}{\partial x} = f(x,y)e^{3xy}$.

Corrigé de l'énoncé 11.5.2 *On peut écrire*

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = e^{3xy}$$

En intégrant par rapport à x, on trouve

$$\ln|f(x,y)| = \frac{1}{3y}e^{3xy} + K(y)$$

d'où

$$f(x,y) = H(y)e^{\frac{1}{3y}e^{3xy}}$$

11.5.3 Cas particulier n°3 :

$$(E) \ : \ \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On peut chercher des solutions (mais pas toutes) avec **la méthode de séparation de variables**, *en posant $f(x,y) = X(x)Y(y)$, si bien que*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = X'Y \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = XY' \end{cases}$$

L'équation (E) est donc équivalente à l'équation

$$\begin{aligned} & \alpha X'Y + \beta XY' = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \alpha X'Y = -\beta XY' \\ \Longrightarrow \quad & \alpha \frac{X'}{X} = -\beta \frac{Y'}{Y} \end{aligned}$$

Or la fonction $\alpha \frac{X'}{X}$ est de la variable x et $-\beta \frac{Y'}{Y}$ de la variable y. L'égalité implique quelle sont toutes deux égales à une constante k :

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{X'}{X} = k \\ \Longrightarrow \quad & \frac{X'}{X} = k/\alpha \\ \Longrightarrow \quad & X' = (k/\alpha)X \\ \Longrightarrow \quad & X(x) = C_1 e^{(k/\alpha)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\beta \frac{Y'}{Y} = k \\ \Longrightarrow \quad & \frac{Y'}{Y} = -k/\beta \\ \Longrightarrow \quad & Y' = -(k/\beta)Y \\ \Longrightarrow \quad & Y(y) = C_2 e^{-(k/\beta)y} \end{aligned}$$

Les solutions sont de la forme $f(x,y) = Ce^{(k/\alpha)x}e^{-(k/\beta)y}$.

11.5.4 Cas particulier n°4 :

$$(E) \ : \ \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = \gamma f$$

On peut chercher des solutions (mais pas toutes) avec **la méthode de séparation de variables***, en posant $f(x,y) = X(x)Y(y)$, si bien que*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = X'Y \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = XY' \end{cases}$$

L'équation (E) est donc équivalente à l'équation

$$\begin{aligned} & \alpha X'Y + \beta XY' = \gamma XY \\ \Longrightarrow \quad & (\alpha X' - \gamma X)Y = -\beta XY' \\ \Longrightarrow \quad & \frac{\alpha X' - \gamma X}{X} = -\beta \frac{Y'}{Y} \end{aligned}$$

Or la fonction $\frac{\alpha X' - \gamma X}{X}$ est de la variable x et $-\beta \frac{Y'}{Y}$ de la variable y. L'égalité implique quelle sont toutes deux égales à une constante k :

$$\begin{array}{ll|ll} & \dfrac{\alpha X' - \gamma X}{X} = k & & -\beta\dfrac{Y'}{Y} = k \\ \Longrightarrow & \alpha\dfrac{X'}{X} - \gamma = k & \Longrightarrow & \dfrac{Y'}{Y} = -k/\beta \\ \Longrightarrow & \dfrac{X'}{X} = \dfrac{k+\gamma}{\alpha} & \Longrightarrow & Y' = -(k/\beta)Y \\ \Longrightarrow & X' = \dfrac{k+\gamma}{\alpha}X & \Longrightarrow & Y(y) = C_2 e^{-(k/\beta)y} \\ \Longrightarrow & X(x) = C_1 e^{\frac{k+\gamma}{\alpha}x} & & \end{array}$$

Les solutions sont de la forme $f(x,y) = Ce^{\frac{k+\gamma}{\alpha}x}e^{-(k/\beta)y}$.

11.5.5 Cas général :

On se ramène par **un changement de variable linéaire** *au cas* $\frac{\partial f}{\partial x} = h(x,y,f)$, *en posant*

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases} \quad \text{et } f(x,y) = F(X,Y) = F(ax+by, cx+dy)$$

On a alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X}a + \frac{\partial F}{\partial Y}c \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X}b + \frac{\partial F}{\partial Y}d \end{cases}$$

L'équation (E) *est donc équivalente à l'équation*

$$\begin{array}{ll} & \alpha\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}a + \dfrac{\partial F}{\partial Y}c\right) + \beta\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}b + \dfrac{\partial F}{\partial Y}d\right) = h(x,y,f) \\ \Longleftrightarrow & (a\alpha + b\beta)\dfrac{\partial F}{\partial X} + (c\alpha + d\beta)\dfrac{\partial F}{\partial Y} = h(x,y,f) \end{array}$$

Il suffit de choisir a, b, c *et* d *tels que* $\begin{cases} a\alpha + b\beta = 1 \\ c\alpha + d\beta = 0 \end{cases}$ *pour résoudre*

$$\frac{\partial F}{\partial X} = H(X,Y,F)$$

Exercice 11.5.3 ***On cherche la solution de*** $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 3f$.

Corrigé de l'énoncé 11.5.3 *On pose* $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$ *et* $f(x,y) = F(X,Y) = F(ax+by, cx+dy)$ *; l'équation est équivalente à*

$$(2a+3b)\frac{\partial F}{\partial X} + (2c+3d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 3F$$

Posons $c = 3, d = -2, a = -1, b = 1$, *on a alors*

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 3F$$

Donc

$$F(X,Y) = K(Y)e^{3X}$$

où K est une fonction quelconque ; finalement en remplaçant X et Y on obtient

$$f(x,y) = K(3x-2y)e^{-x+y}$$

Par exemple les fonctions e^{y-x} et $(3x-2y)e^{3x-2y}e^{-x+y} = (3x-2y)e^{y}$ sont solutions de l'équation différentielle respectivement avec $K(u) = 1$ et $K(u) = ue^{u}$.

Remarque | *On retrouve les solutions des cas particuliers parmi les solutions du cas général.*

11.6 Exercices

11.6.1 Énoncés

Exercice 11.6.1 *Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes. CVL indique un changement de variables linéaire, MSV indique la méthode de séparation de variables.*

1) $\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *(CVL)* *2)* $5\frac{\partial f}{\partial x} - 6\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *(CVL)* *3)* $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 3y$ *(CVL)*
4) $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = xy$ *(CVL)* *5)* $\frac{\partial f}{\partial x} + 5\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y)$ *(CVL)*
6) $\frac{\partial f}{\partial y} = f$ *7)* $\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = f$ *(MSV)* *8)* $\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = yf$ *(MSV)*

Exercice 11.6.2 *Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0$$

avec $u = xy$ et $v = x+y$ et $x > y$.

11.6.2 Corrigés

Corrigé de l'énoncé 11.6.1 *1) On pose* $\begin{cases} X = ax+by \\ Y = cx+dy \end{cases}$*, puis dans $(a+3b)\frac{\partial F}{\partial X} + (c+3d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$ on choisit $a = 4,\ b = -1$ et $c = 3,\ d = -1$. On trouve $f(x,y) = K(3x-y)$ où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*

2) On pose $\begin{cases} X = ax+by \\ Y = cx+dy \end{cases}$*, puis dans $(5a-6b)\frac{\partial F}{\partial X} + (5c-6d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$ on choisit $a = -1,\ b = -1$ et $c = 6,\ d = 5$. On trouve $f(x,y) = K(6x+5y)$ où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*

3) On pose $\begin{cases} X = ax+by \\ Y = cx+dy \end{cases}$*, puis dans $(a+b)\frac{\partial F}{\partial X} + (c+d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 2x-3y$ on choisit $a = 2,\ b = -3$ et $c = 1,\ d = -1$. On obtient comme équation en F :*

$$F'_X = -X \implies F(X,Y) = -\frac{X^2}{2} + K(Y)$$

Finalement, on trouve $f(x,y) = -\frac{(2x-3y)^2}{2} + K(x-y)$ où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

4) On pose $\begin{cases} X = ax+by \\ Y = cx+dy \end{cases}$*, puis dans $(2a-b)\frac{\partial F}{\partial X} + (2c-d)\frac{\partial F}{\partial Y} = xy$ on choisit $a = 1,\ b = 1$ et $c = 1,\ d = 2$. On obtient comme équation en F :*

$$F'_X = \frac{-1}{25}X^2 + \frac{3}{25}XY + \frac{2}{25}Y^2 \implies F(X,Y) = \frac{-1}{75}X^3 + \frac{3}{50}X^2Y + \frac{2}{25}XY^2 + K(Y)$$

Finalement, on trouve $f(x,y) = \frac{-1}{75}(x+y)^3 + \frac{3}{50}(x+y)^2(x+2y) + \frac{2}{25}(x+y)(x+2y)^2 + K(Y)$ où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

5) *On pose* $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$ *, puis dans* $(a+5b)\frac{\partial F}{\partial X} + (c+5d)\frac{\partial F}{\partial Y} = \cos(x+y)$ *on choisit* $a = 6,\ b = -1$ *et* $c = 5,\ d = -1$. *On obtient comme équation en* F *:*

$$F'_X = \cos(6X - 2Y)$$

Finalement, on trouve $f(x,y) = \frac{1}{6}\sin(x+y) + K(5x - y)$ *où* K *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$.

6) $f(x,y) = C(x)e^y$

7) $f(x,y) = Ce^{(k+1)x}e^{-(k/3)y}$ *par la méthode de séparation de variables.*

8) $f(x,y) = Ce^{kx}e^{k(y-y^2)/2}$ *par la méthode de séparation de variables.*

Corrigé de l'énoncé 11.6.2 $f(x,y) = e^{3xy}K(x+y)$ *où* K *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$.

11.7 EDP linéaires d'ordre 1, à coefficients non constants

Définition 11.7.1 *Ce sont les équations aux dérivées partielles de la forme*

$$(E)\ :\ \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y,f)$$

où α, β *sont des* <u>*fonctions de* x, y *et* f</u>.

Il existe une méthode générale, qui dépasse le niveau de ce cours pour trouver de bons changements de variables lorsque les coefficients ne sont pas constants.

11.7.1 Cas particulier parmi d'autres :

On résout sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$

$$\boxed{(E)\ :\ x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

En posant $\begin{cases} x = ue^v \\ y = e^{-v} \end{cases}$ *soit (on l'admettra sans difficulté)* $\begin{cases} u = xy \\ v = -\ln y \end{cases}$ *, et* $F(u,v) = f(x,y)$ *on obtient le système*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}y + 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}x + \frac{\partial F}{\partial v}\left(-\frac{1}{y}\right) \end{cases}$$

Il suit que F *est solution de* $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$, *soit* $F(u,v) = K(u)$ *et finalement*

$$f(x,y) = K(xy)$$

où K *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$.

11.7.2 Cas particuliers :

Le changement de variable est proposé, sinon il faut employer la méthode des caractéristiques.

Exercice 11.7.1 ***On cherche la solution de*** $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = yf$.

Corrigé de l'énoncé 11.7.1 *On pose* $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ *et* $f(x,y) = F(r,\theta)$*. On a alors :*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

On déduit par la méthode de Cramer relative à la résolution de systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}$$

Autrement

On pose $\begin{cases} r = r\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \text{ et } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \text{ et } \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}$$

ce qui, en remplaçant dans l'équation initiale, donne :

$$\begin{aligned} \cos\theta\left(r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \sin\theta\left(r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) &= rF\sin\theta \\ \frac{\partial F}{\partial r} &= F\sin\theta \\ \frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{F} &= \sin\theta \end{aligned}$$

qui s'intègre par rapport à r *et donne*

$$\ln|F(r,\theta)| = r\sin\theta + K(\theta)$$

soit, avec $\theta = \arctan(y/x)$ *:*

$$f(x,y) = K(y/x)\,e^y$$

où K *est une fonction dérivable quelconque.*

11.7.3 L'équation de transport - méthode des caractéristiques

Si u_0 *est une fonction* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* β *une fonction* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$*, on considère le problème de Cauchy*

$$(E)\ :\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ f(0,y) = u_0(y) \end{cases}$$

Une **caractéristique du problème** *est une courbe paramétrique de* $\mathbb{R}^2$ *d'équation* $(x, y(x))$ *vérifiant le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \beta(x, y_{(x)}) \\ y(0) = \xi \end{cases}$$

Proposition 11.7.1 Théorème (admis)
Si le problème de Cauchy admet une courbe caractéristique, et si f de classe $\mathcal{C}^1$ est solution de l'équation de transport, alors la fonction $x \longmapsto f(x, y_{(x)})$ est constante et égale à $f(0, y(0)) = f(0, \xi) = u_0(\xi)$.

Exercice 11.7.2 ***On cherche la solution de*** $\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$

Remarque | *Cas d'une « vitesse constante ».*

Corrigé de l'énoncé 11.7.2 *Les courbes caractéristiques sont définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par $y(x) = cx + \xi$.*
La solution du problème de Cauchy sont

$$f(x, y) = u_0(y - cx)$$

Exercice 11.7.3 ***On cherche la solution de*** $\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{y}{1+x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Remarque | *Cas d'une « vitesse non constante ».*

Corrigé de l'énoncé 11.7.3 *Les courbes caractéristiques sont définies pour tout (x, y) par $y(x) = \xi e^{\arctan(x)}$.*
La solution du problème de Cauchy sont

$$f(x, y) = u_0(ye^{-\arctan(x)})$$

11.8 Exercices

11.8.1 Énoncés

Exercice 11.8.1 *Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes.*

1) $2y\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *poser $f(x, y) = X(x)Y(y)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par X et Y, puis par séparation des variables, déterminer X et Y, enfin $f(x, y)$.*
2) $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$ *poser* $u = x, \ v = xy$
3) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{x}$ *poser* $u = x, \ v = \frac{y}{x}$
4) $y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x$ *poser* $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$
5) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ *poser* $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$

Exercice 11.8.2 *Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes. MdC indique par la méthode des caractéristiques.*

1) $\frac{\partial f}{\partial x} + yx\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *avec* $f(0, y) = y^2$ *(MdC)* 2) $x\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ *(MdC, variante)*

11.8.2 Corrigés

Corrigé de l'énoncé 11.8.1 *1) L'équation différentielle vérifiée par X et Y est $\frac{X'}{X} = \frac{1}{2y}\frac{Y'}{Y}$. Or $\frac{X'}{X}$ est une fonction de x et $\frac{1}{y}\frac{Y'}{Y}$ une fonction de y, si bien que chacune est nécessairement égale à une constante $k \in \mathbb{R}$. On est ramené au système*

$$\begin{cases} \frac{X'}{X} = k \\ \\ \frac{1}{2y}\frac{Y'}{Y} = k \end{cases} \iff \begin{cases} X(x) = C_1 e^{kx} \\ \\ Y(y) = C_2 e^{ky^2} \end{cases}$$

Finalement, $f(x, y) = Ce^x k(x + y^2)$.

2) $f(x,y) = -xy^2 + K(xy)$ où K est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

3) $f(x,y) = \frac{y^2}{x} + K(y/x)$ où K est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

4) $f(x,y) = -y + K(\sqrt{x^2+y^2})$ où K est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

5) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + K\left(\frac{y}{x}\right)$ où K est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.

Corrigé de l'énoncé 11.8.2 *1) Dans notre cas $u_0(y) = y^2$. La caractéristique du problème vérifie*

$$\begin{cases} y'(x) = xy \\ y(0) = \xi \end{cases} \iff y = \xi e^{x^2/2}$$

Alors $f(x,y) = u_0(ye^{-x^2/2}) = y^2 e^{-x^2}$.

2) Écrivons $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\left(2f - x\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial f}{\partial x}\left(dx - \frac{x}{2}\,dy\right) + f dy$.

Quand $dx - \frac{x}{2}\,dy = 0 \iff \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2} \iff x = \xi e^{y/2}$, alors $df = f dy \implies f(x,y) = Ce^y$, donc finalement

$$f(x,y) = e^y C(xe^{-y/2})$$

où C est fonction quelconque.

11.9 EDP linéaires d'ordre 2

Définition 11.9.1 *Ce sont les* **équations aux dérivées partielles de la forme**

$$(E) \ : \ A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y,f)$$

où A, B, C, D, E sont des fonctions de x, y et f.

11.9.1 Exemples fondamentaux

11.9.1.1 Le cas $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h(x,y)$

En intégrant une première fois on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int^x h(x,y)\,dx + K(y)$$

.

Ce qui en intégrant une deuxième fois donne

$$f(x,y) = \int^x \int^x h(x,y)\,dxdx + K(y)x + L(y)$$

où K et L sont des fonctions quelconques. Réciproquement si l'on dérive deux fois la fonction définie par la formule précédente par rapport à x on obtient bien l'équation différentielle de départ.

Exercice 11.9.1 ***On cherche la solution de*** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy^2$.

Corrigé de l'énoncé 11.9.1 *En intégrant une première fois, on obtient*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y^2}{2} + C_1(y)$$

En intégrant une seconde fois, on obtient

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2}{6} + C_1(y)x + C_2(y)$$

11.9.1.2 Le cas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h(x,y)$

En intégrant une première fois par rapport à la variable x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int^x h(x,y)\,dx + K(y)$$

.

Ce qui en intégrant une deuxième fois par rappor à la variable y donne

$$f(x,y) = \int^y \int^x h(x,y)\,dxdy + \underbrace{L(y)}_{=\int^y K(y)\,dy} + R(x)$$

où L et R sont des fonctions quelconques. Réciproquement si l'on dérive deux fois la fonction définie par la formule précédente par rapport à y puis x on obtient bien l'équation différentielle de départ.

Exercice 11.9.2 ***On cherche la solution de*** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ye^x$.

Corrigé de l'énoncé 11.9.2 *En intégrant une première fois par rapport à x, on obtient*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ye^x + C_1(y)$$

En intégrant une seconde fois par rapport à y, on obtient

$$f(x,y) = \frac{y^2 e^x}{2} + \int^y C_1(y)\,dy + C_2(x)$$

11.9.2 Cas des coefficients constants, sans second membre

Notons D_x l'opérateur de dérivation par rapport à la variable x, et D_y l'opérateur de dérivation par rapport à la variable y. On remarque que ces deux opérateurs commutent, car pour une fonction f deux fois différentiables on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

11.9.2.1 Première méthode

On peut essayer d'écrire l'équation aux dérivées partielles à l'aide d'un opérateur différentiel et de factoriser cet opérateur pour se ramener à des EDP d'ordre 1.

Exercice 11.9.3 ***On cherche la solution de*** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy$.

Corrigé de l'énoncé 11.9.3 *Cette équation peut s'écrire*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = xy \iff (D_x^2 - D_y^2)f = xy$$

Or comme D_x et D_y commutent, $D_x^2 - D_y^2 = (D_x - D_y)(D_x + D_y)$, l'équation s'écrit

$$(D_x - D_y)(D_x + D_y)f = xy$$

Notons $g = (D_x + D_y)(f)$. Pour résoudre $(E) : (D_x - D_y)g = xy$, il suffit de faire un changement de variables, comme dans le paragraphe précédent. En posant

$$\begin{cases} X = x \\ Y = x + y \\ G(X,Y) = g(x,y) \end{cases}$$

Il suit que

$$\begin{aligned}(D_x - D_y)g = D_x g - D_y g = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial G}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} - \left(\frac{\partial G}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial G}{\partial X}1 + \frac{\partial G}{\partial Y}1 - \left(\frac{\partial G}{\partial X}0 + \frac{\partial G}{\partial Y}1\right)\\ &= \frac{\partial G}{\partial X}\end{aligned}$$

Alors, l'équation (E) *devient* $\dfrac{\partial G}{\partial X} = X(Y - X) = XY - X^2$ *ce qui en intégrant donne :*

$$G(X, Y) = \frac{1}{2}X^2Y - \frac{1}{3}X^3 + C(Y)$$

en revenant aux variables initiales on obtient $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2(x + y) - \frac{1}{3}x^3 + C(x + y)$ *; il nous reste à résoudre l'EDP*

$$(D_x + D_y)f = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + C(x + y)$$

On pose un second changement de variables $\begin{cases} U = x \\ V = x - y \end{cases}$ *et* $F(U, V) = f(x, y)$*, si bien que*

$$\begin{aligned}(D_x + D_y)f = D_x f + D_y f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial F}{\partial U}1 + \frac{\partial F}{\partial V}1 + \left(\frac{\partial F}{\partial U}0 + \frac{\partial F}{\partial V}(-1)\right)\\ &= \frac{\partial F}{\partial U}\end{aligned}$$

ce qui nous ramène à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial U} = -\frac{1}{6}U^3 + \frac{1}{2}U^2(U - V) + C(2U - V) = \frac{2}{3}U^3 - \frac{1}{2}U^2V + C(2U - V)$$

qui s'intègre en

$$F(U, V) = \frac{1}{6}U^4 - \frac{1}{6}U^3V + \int^U C(2U - V)\, dU + C_2(V)$$

ce qui donne en repassant aux variables initiales :

$$f(x, y) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3(x - y) + \int^x C(x + y)\, dx + C_2(x - y)$$

11.9.2.2 Deuxième méthode

11.9.2.3 Troisième méthode : série de Fourier

*Cette méthode s'utilise lorsque le polynôme caractéristique * ne possède pas de racine réelle, on se contentera d'un exemple : l'équation de la chaleur.*

Définition 11.9.2 Le polynôme caractéristique *associé à l'équation*

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = h(x, y, f)$$

est

$$AX^2 + BX + C = 0$$

Exercice 11.9.4 ***On cherche la solution de l'équation de la chaleur*** $(E)\ :\ \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

où $T(x,t)$ représente la température à 'instant t au point d'abscisse x dans une barre de longueur l. On se donne la condition initiale suivante :

$$(CI)\ :\ T(x,0) = \varphi(x)$$

on connaît la température de la barre en chacun de ses points à l'instant 0. Ainsi que des conditions aux limites :

$$(CL)\ :\ T(0,t) = T(l,t) = 0$$

la température de la barre à ses extrémités est nulle.

Corrigé de l'énoncé 11.9.4 *1. On cherche les solutions de (E) de la forme $T(x,t) = U(x)V(t)$.*

2. On ne conserve que les solutions, non nulles, bornées lorsque t croit vers l'infini.

3. On regarde ce que les conditions aux bords (CL) imposent comme conditions aux constantes d'intégrations.

4. On cherche une solution du problème sous forme de somme de solutions trouvées précédemment, en écrivant la condition initiale (CI) à l'aide d'une série de Fourier.

C'est-à-dire :

1. *(E) équivaut à $UV' = a^2U''V$ qui s'écrit*

$$\frac{V'}{V} = a^2\frac{U''}{U}$$

Le membre de gauche de l'égalité est une fonction de t et le membre de droite est une fonction de x, chacune des parties est donc une constante que l'on note K. On s'est ramené au système

$$\begin{cases} V' = KV \\ U'' = a^2KU \end{cases}$$

qui se résout facilement, suivant le signe de K en :

$$\begin{cases} V = Ce^{Kt} \\ U = C_1e^{\sqrt{K}ax} + C_2e^{-\sqrt{K}ax} \quad \text{ou} \quad U = C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-K}}{a}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-K}}{a}x\right) \end{cases}$$

2. *V doit être borné lorsque t tend vers l'infini, K est donc négatif, notons $K = -k^2$. Les solutions sont donc :*

$$\begin{cases} V = Ce^{-k^2t} \\ U = C_1\cos\left(\frac{kx}{a}\right) + C_2\sin\left(\frac{kx}{a}\right) \end{cases}$$

3. *$T(0,t) = U(0)V(t) = Ce^{-k^2t}C_1 = 0$, avec $C \neq 0$ par hypothèse 2., donc $C_1 = 0$*
$T(l,t) = U(l)V(t) = Ce^{-k^2t}C_2\sin\left(\frac{kl}{a}\right) = 0$, toujours avec $C \neq 0$ par hypothèse 2., et comme $C_1 = 0$, nécessairement $C_2 \neq 0$ toujours par hypothèse 2. ; si bien que nécessairement

$$\sin\left(\frac{kl}{a}\right) = 0 \iff k = \frac{n\pi a}{l}$$

avec n un entier. On a donc les solutions de la forme

$$T(x,t) = Ce^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

4. *On cherche une solution du problème sous forme de somme de solutions trouvées précédemment :*

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Les conditions aux bords (CL) sont clairement vérifiées. Écrivons la condition initiale (CI) pour la fonction ψ. *On obtient*

$$\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Comme on peut choisir les C_n, *il suffit de les choisir de telle sorte que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x)$.

Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ *la série de Fourier de la fonction* $2l$*-périodique, impaire, égale à* φ *sur* $[0,l]$ *et posons :*

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

On a donc $\displaystyle\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x)$ *d'après le théorème de Dirichlet.*

On devrait vérifier que la fonction ψ *aux variables* x,t *vérifie bien l'équation* (E)... *ADMIS !*

On a résolu dans un cas particulier l'équation de la chaleur.

11.10 Application

Énoncé 11.10.1

Solution

■

Fin des exercices d'application ■

11.11 Exercices

11.11.1 Énoncés

Exercice 11.11.1 Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes.

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

2) $5\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos x$

4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

5) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 3\frac{\partial f}{\partial x} + 5\frac{\partial f}{\partial y} - 6f = 12$