Méthode des éléments finis – TD3

Des éléments un peu plus complexes

Exercice 1 : Éléments de barre, ordre supérieur

On s'intéresse à l'équation de Laplace en 1D sur une barre de longueur L de section A et de module d'Young E. On considère une charge $f(x)$ appliquée à la barre.

$$-EA\,\Delta u = f(x)$$

avec $u(0) = 0$ et $u(L) = 1$.

1. Etablir la formulation variationnelle de l'équation différentielle pour l'écrire sous la forme

$$a(u, v) = \ell(v).$$

avec a une forme bilinéaire symétrique et ℓ une forme linéaire.

Solution.

Voir la méthode dans le TD2, on multiplie par une fonction test $v(x)$ nulle aux bordset on intégre sur le domaine $\Omega = [0, L]$:

$$\int_0^h -EA\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x)\,dx = \int_0^h f(x)v(x)\,dx$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^h EA\,u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^h f(x)v(x)\,dx$$

On pose donc :

$$a(u, v) = \int_0^h EA\,u'(x)v'(x)\,dx$$

et

$$\ell(v) = \int_0^h f(x)v(x)\,dx$$

La formulation variationnelle sur lepremier élément est donc $a(u, v) = \ell(v)$.
Pour les autres éléments, il suffira de changer l'intervalle d'intégration.

On découpe la barre en n éléments finis de longueur $h = \frac{L}{n}$:

$$x_0 = 0,\, x_1 = h,\, x_2 = 2h, \ldots, x_n = L$$

Eléments d'ordre 1 : La solution approchée sera cherchée sous la forme

$$u_h(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

où $\varphi_i(x)$ sont les fonctions d'interpolation et α_i sont les inconnues.

2. Rappelez l'expression de la matrice de rigidité élémentaire pour chaque élément fini.

Solution.

Voir dans le TD2, l'équation différentielle sur le premier élément donne par exemple

$$a(u_h, \varphi_0) = \ell(\varphi_0), a(u_h, \varphi_1) = \ell(\varphi_1)$$

En utilisant la linéarité de a, on obtient le système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_0, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_0) \\ \ell(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

Rappel : nous avions obtenu la matrice de rigidité élémentaire :

$$K_e = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour les autres éléments, on obtient la même matrice de rigidité élémentaire.

3. Pour obtenir toutes les matrices de rigidité, en admettant qu'elles soient différentes sur tous les éléments, combien d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer ?
   Comparez ce nombre avec le nombre de noeuds du maillage.

Solution.

Pour chaque élément fini, on a eu besoin de calculer 5 intégrales (par symétrie de a) : 3 pour la matrice de rigidité, 2 pour le second membre. Donc pour n éléments finis, on aura besoin de calculer $5n$ intégrales.

La solution approchée est construite sur $n + 1$ points. Il faut donc calculer environ 5 fois plus d'intégrales qu'il y a de noeuds dans le maillage.

4. Si on voulait doubler le nombre de points de discrétisation, en dédoublant le maillage, combien d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer ?

Solution.

Pour chaque élément fini, on a encore besoin de calculer 5 intégrales (par symétrie de a). Donc pour $2n$ éléments finis, on aura besoin de calculer $10n$ intégrales. Deux fois plus d'intégrales que précédemment.

Essayons maintenant d'améliorer la solution en calculant moins d'intégrales :

On rappelle la formule générale pour un polynôme de Lagrange tel que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$:

$$\varphi_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}\,.$$

Element d'ordre 2 : On ajoute maintenant un noeud intermédiaire à chaque élément.

$$x_0 = 0,\ x_{1/2} = h/2,\ x_1 = h,\ x_{3/2} = 3h/2,\ x_2 = 2h, \ldots,\ x_{n-1/2} = (n-1)h/2,\ x_n = L$$

5. Comment est formée la solution approchée à partir des φ_* ?

Solution.

La solution approchée est formée par les φ_i interpolés aux points du maillage :

$$u_h(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_{1/2}\varphi_{1/2}(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_{3/2}\varphi_{3/2}(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

6. Donner les expressions de φ_0, $\varphi_{1/2}$ et φ_1 entre 0 et h.

Solution.

Sur chaque élément, il y a maintenant 3 noeuds. Cela conduira à des polynômes interpolateurs de degré 2. Par exemple sur le premier élément, soit pour x entre 0 et h, on aura :

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_{1/2})(x - x_1)}{(x_0 - x_{1/2})(x_0 - x_1)}$$

donc :

$$\varphi_0(x) = 2\frac{(x - h/2)(x - h)}{h^2}$$

Ensuite,

$$\varphi_{1/2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_{1/2} - x_0)(x_{1/2} - x_1)}$$

donc :

$$\varphi_{1/2}(x) = -4\frac{x(x - h)}{h^2}$$

Enfin,

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_{1/2})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{1/2})}$$

donc :

$$\varphi_1(x) = 2\frac{x(x - h/2)}{h^2}$$

L'équation différentielle est toujours approchée par un système linéaire

$$K_e \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_{1/2} \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_0) \\ \ell(\varphi_{1/2}) \\ \ell(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

7. Donner la taille et l'expression de la matrice de rigidité élémentaire K_e.

Solution.

La matrice de rigidité élémentaire est de taille 3×3 :

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_0, \varphi_{1/2}) & a(\varphi_0, \varphi_1) \\ a(\varphi_{1/2}, \varphi_0) & a(\varphi_{1/2}, \varphi_{1/2}) & a(\varphi_{1/2}, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_1, \varphi_{1/2}) & a(\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

8. Combien de calculs d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer par élément ?

Solution.

Pour chaque élément fini, on a eu besoin de calculer 9 intégrales (par symétrie de a) : 6 pour la matrice de rigidité, 3 pour le second membre. Donc pour n éléments finis, on aura besoin de calculer $9n$ intégrales.

9. Calculer le coefficient première ligne, première colonne de la matrice de rigidité élémentaire K_e.

Solution.

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = EA \int_0^h \varphi_0'(x)\varphi_0'(x)\, dx$$

Sous forme développée, φ_0 s'écrit :

$$\varphi_0(x) = 2\frac{x^2}{h^2} - 3\frac{x}{h} + 1$$

donc :

$$\varphi_0'(x) = 4\frac{x}{h^2} - \frac{3}{h}$$

Ainsi :

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = EA\int_0^h \Big(4\frac{x}{h^2} - \frac{3}{h}\Big)^2 dx$$

Une primitive de $\Big(4\frac{x}{h^2} - \frac{3}{h}\Big)^2$ est :

$$\frac{h^2}{12}\Big(4\frac{x}{h^2} - \frac{3}{h}\Big)^3 = \frac{1}{12h}\Big(4\frac{x}{h} - 3\Big)^3$$

donc :

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = EA\frac{1}{12h}\Big(4-3\Big)^3 - \frac{1}{12h}\Big(-3\Big)^3 = EA\frac{1+27}{12h} = EA\frac{28}{12h} = \frac{7EA}{3h}$$

10. Comparer les deux méthodes de raffinement du maillage.

Solution.

Pour un même nombre de points du maillage, on calcule (un peu) moins d'intégrale avec la deuxième méthode. Les intégrales sont en revanche plus compliquées à calculer exactement mais l'ordinateur lui ne verra pas la différence.

11. On attribue une lettre pour chaque élément fini, a pour le premier, b pour le second, etc. Pour illustrer la construction de la matrice de rigidité globale, on utilise ces lettres pour les coefficients des matrices locales. Par exemple, pour 3 éléments d'ordre 1, la matrice de rigidité globale est assemblée comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & a+b & b & 0 \\ 0 & b & b+c & c \\ 0 & 0 & c & c \end{pmatrix}$$

(tous les coefficients notés a ne sont pas identiques mais on les note de la même façon pour simplifier l'écriture).

Montrer comment s'assemble la matrice de rigidité globale pour 3 éléments d'ordre 2.

Solution.

Cette fois, les matrices locales sont de taille 3×3 : La matrice de rigidité globale est assemblée comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a+b & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & b+c & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c \end{pmatrix}$$

Element d'ordre 3 : On ajoute maintenant deux noeuds intermédiaires aux éléments finis.

12. Décrire les noeuds du maillage.

Solution.

Les noeuds du maillage sont :

$$x_0 = 0,\, x_{1/3} = h/3,\, x_{2/3} = 2h/3,\, x_1 = h, \ldots, x_{n-1/3} = (n-1)h/3,\, x_n = L$$

13. Comment est formée la solution approchée $u_h(x)$ à partir des φ_* ?

Solution.

Toujours par la même expression :

$$u_h(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_{1/3}\varphi_{1/3}(x) + \alpha_{2/3}\varphi_{2/3}(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

14. Déterminer les expressions formelles des polynômes de Lagrange pour le premier élément fini.

Solution.

Les polynômes de Lagrange sont :

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_{1/3})(x - x_{2/3})(x - x_1)}{(x_0 - x_{1/3})(x_0 - x_{2/3})(x_0 - x_1)}$$

Ensuite,

$$\varphi_{1/3}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_{2/3})(x - x_1)}{(x_{1/3} - x_0)(x_{1/3} - x_{2/3})(x_{1/3} - x_1)}$$

$$\varphi_{2/3}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_{1/3})(x - x_1)}{(x_{2/3} - x_0)(x_{2/3} - x_{1/3})(x_{2/3} - x_1)}$$

et

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_{1/3})(x - x_{2/3})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{1/3})(x_1 - x_{2/3})}$$

15. Donner la taille et l'expression de la matrice de rigidité élémentaire K_e.

Solution.

La matrice de rigidité élémentaire est de taille 4×4 :

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_0, \varphi_{1/3}) & a(\varphi_0, \varphi_{2/3}) & a(\varphi_0, \varphi_1) \\ a(\varphi_{1/3}, \varphi_0) & a(\varphi_{1/3}, \varphi_{1/3}) & a(\varphi_{1/3}, \varphi_{2/3}) & a(\varphi_{1/3}, \varphi_1) \\ a(\varphi_{2/3}, \varphi_0) & a(\varphi_{2/3}, \varphi_{1/3}) & a(\varphi_{2/3}, \varphi_{2/3}) & a(\varphi_{2/3}, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_1, \varphi_{1/3}) & a(\varphi_1, \varphi_{2/3}) & a(\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

16. Combien d'intégrales au total avez-vous besoin de calculer par élément ?

Solution.

Pour chaque élément fini, on a eu besoin de calculer 14 intégrales (par symétrie de a). Donc pour n éléments finis, on aura besoin de calculer $14n$ intégrales.

17. Montrer comment s'assemble la matrice de rigidité globale pour 3 éléments d'ordre 3.

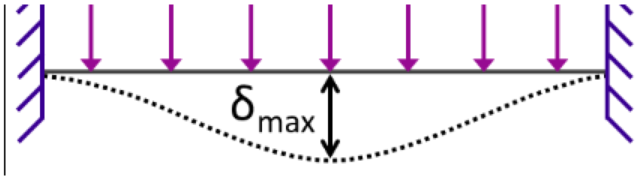
Solution.

Les matrices locales sont de taille 4×4 : La matrice de rigidité globale est assemblée comme suit :

$$\begin{pmatrix}
a & a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a & a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a & a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a & a & a & a+b & b & b & b & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & b & b & b & b & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & b & b & b & b & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & b & b & b & b+c & c & c & c\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c & c\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c & c\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c & c
\end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Éléments de poutre

On considère une poutre biencastrée soumise à une charge répartie uniformément.



Modélisation Mécanique : Une poutre en flexion subit des contraintes dues à une charge appliquée perpendiculairement à son axe longitudinal. Les principaux paramètres sont le module d'élasticité E, le moment d'inertie de la section I qu'on supposera constant, la longueur de la poutre L, et la distribution de la charge $q(x)$.

L'équation différentielle régissant le déplacement transversal $w(x)$ est :

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x),$$

où $w(x)$ est le déplacement transversal. Dans notre cas, la force q est répartie uniformément sur la poutre.

1. **Formulation Variationnelle** : Formulez le problème de flexion de la poutre en termes de formulation variationnelle.

Solution.

La formulation variationnelle est obtenue en multipliant l'équation différentielle par une fonction de test $v(x)$ et en intégrant sur le domaine $\Omega = [0, L]$. Après deux intégrations par parties pour obtenir le même degré de dérivation sur w et v, on obtient :

$$\int_0^L EI\frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2v(x)}{dx^2}\,dx = \int_0^L q(x)v(x)\,dx.$$

On posera donc

$$a(w,v) = \int_0^L EI\frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2v(x)}{dx^2}\,dx$$

et

$$\ell(v) = \int_0^L q(x)v(x)\,dx.$$

Il y a cette fois deux inconnues par noeud :

— le déplacement transversal $w(x)$

— l'angle $\theta(x)$ qui est la dérivée première du déplacement transversal.

Pour écrire une solution approchée du problème w_h, il y aura donc deux types de polynômes interpolateurs :

— $\varphi_i(x)$ pour le déplacement transversal

— $\psi_i(x)$ pour l'angle.

Sur le premier élément fini, on cherchera alors $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ tels que

$$w(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \beta_0\psi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \beta_1\psi_1(x).$$

2. Que doivent vérifier les polynômes $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ pour que α_i soient bien les coefficients du déplacement transversal et β_i les coefficients de l'angle ?

Solution.

il faut retrouver

$$w(0) = \alpha_0, w(x_1) = \alpha_1, \qquad \text{et} \qquad w'(0) = \beta_1, w'(x_1) = \beta_1$$

Les polynômes $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ doivent donc vérifier

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \varphi_i'(x_j) = 0 \quad \forall i, j \in \{0, 1\}.$$

$$\psi_i(x_j) = 0, \quad \psi_i'(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{0, 1\}.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Hermite et les expressions générales de ces polynômes sont les suivantes :

$$\varphi_i(X) = q_i(X)\left(1 - q_i'(x_i)(X - x_i)\right), \qquad \psi_i(X) = q_i(X)(X - x_i)$$

avec $q_i(X) = (L_i(X))^2$, où $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ est le polynôme de Lagrange associé à x_i.

Remarquez que $q_i' = 2L_i'L_i$, puis vérifiez que ces polynômes satisfont les bonnes conditions

Solution.

Pour φ_i :

$$\varphi_i(X) = q_i(X)(1 - q_i'(x_i)(X - x_i))$$

Calculons aux noeuds x_j :

— Si $j = i$, $q_i(x_i) = 1$, $X - x_i = x_i - x_i = 0$ donc $\varphi_i(x_i) = 1$.

— Sinon, $q_i(x_j) = 0$ et donc $\varphi(x_j)$ aussi.

Pour φ_i' : Commencons par calculer $\varphi_i'(X)$:

$$\varphi_i'(X) = q_i'(X)(1 - q_i'(x_i)(X - x_i)) - q_i(X)q_i'(x_i)$$

— $X = x_j$ avec $j = i$:

$$\varphi_i'(x_i) = q_i'(x_i) - q_i'(x_i) = 0$$

— $X = x_j$ avec $j \neq i$:

$$\varphi_i'(x_j) = q_i'(x_j) \cdot 0 - 0 \cdot q_i'(x_j) = 0$$

Pour $\psi_i(X)$:

$$\psi_i(X) = q_i(X)(X - x_i)$$

— Pour $X = x_j$; si $j = i$, $X - x_i = 0$, donc $\psi_i(x_i) = 0$;

— si $j \neq i$, $q_i(x_j) = 0$, donc $\psi_i(x_j) = 0$.

Pour ψ_i' : Commencons par calculer $\psi_i'(X)$:

$$\psi_i'(X) = q_i'(X)(X - x_i) + q_i(X)$$

— $X = x_j$ avec $j = i$:

$$\psi_i'(x_i) = q_i'(x_i) - q_i'(x_i) = 0$$

— $X = x_j$ avec $j \neq i$:

$$\psi_i'(x_j) = q_i'(x_j) - q_i'(x_j) = 0$$

Ainsi, ces polynômes satisfont bien :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad \varphi_i'(x_j) = 0$$

$$\psi_i(x_j) = 0, \qquad \psi_i'(x_j) = \delta_{ij}$$

pour tous les i, j.

3. Exprimer les polynômes de Hermite pour le premier élément du maillage.

Solution.

Les fonctions de forme cubiques d'Hermite pour un élément fini en dimension 1 sont définies comme suit :

$$\varphi_0(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3,$$

$$\psi_0(x) = x\left(1 - 2\frac{x}{h} + \left(\frac{x}{h}\right)^2\right),$$

$$\varphi_1(x) = 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3,$$

$$\psi_1(x) = x\left(-\frac{x}{h} + \left(\frac{x}{h}\right)^2\right).$$

4. Le vecteur des inconnus est formé par $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$. Exprimez la matrice de rigidité élémentaire K_e.

Solution.

La matrice de rigidité élémentaire K_e est une matrice 4×4 intégrant les produits des dérivées secondes des fonctions de forme : Pour l'élément fini cubique d'Hermite, la matrice élémentaire K_e est une matrice 4×4 intégrant les produits des dérivées secondes des fonctions de forme :

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_0, \psi_0) & a(\varphi_0, \varphi_1) & a(\varphi_0, \psi_1) \\ a(\psi_0, \varphi_0) & a(\psi_0, \psi_0) & a(\psi_0, \varphi_1) & a(\psi_0, \psi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_1, \psi_0) & a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \psi_1) \\ a(\psi_1, \varphi_0) & a(\psi_1, \psi_0) & a(\psi_1, \varphi_1) & a(\psi_1, \psi_1) \end{pmatrix}$$

5. Choisisser un coefficient dans la matrice et calculer l'intégrale. vous devriez trouver un coefficient en accord avec la forme suivante :

$$K_e = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix}$$

Solution.

En supposant EI constant sur l'élément, les intégrales peuvent être calculées : pour la première ligne par exemple :

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = EI \int_0^h \frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\,dx$$

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = EI \int_0^h \frac{36}{h^4}\left(\frac{2x}{h} - 1\right)^2 dx$$

$$= EI\frac{36}{h^4}\int_0^h \left(\frac{4x^2}{h^2} - \frac{4x}{h} + 1\right) dx$$

$$= EI\frac{36}{h^4}\left[\frac{4x^3}{3h^2} - \frac{4x^2}{2h} + x\right]_0^h$$

$$= EI\frac{12}{h^3}$$

On trouve alors :

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = EI\frac{12}{h^3}$$

Il faut ensuite calculer une intégrale mélangeant φ et ψ :

$$a(\varphi_0, \psi_0) = EI \int_0^h \frac{d^2\varphi_0}{dx^2}\frac{d^2\psi_0}{dx^2}\,dx$$

$$= EI \int_0^h \frac{6}{h^2}\left(\frac{2x}{h} - 1\right)\frac{2}{h}\left(\frac{3x}{h} - 2\right) dx$$

$$= EI\frac{12}{h^3}\int_0^h \left(\frac{6x^2}{h^2} - \frac{7x}{h} + 2\right) dx$$

$$= EI\frac{12}{h^3}\left[\frac{6x^3}{3h^2} - \frac{7x^2}{2h} + 2x\right]_0^h$$

$$= EI\frac{6}{h^3}$$

Pour pouvoir déduire tous les coefficients, il faut maintenant calculer les intégrales avec ψ :

$$a(\psi_0, \psi_0) = EI \int_0^h \frac{d^2\psi_0}{dx^2}\frac{d^2\psi_0}{dx^2}\,dx$$

$$= EI \int_0^h \frac{4}{h^2}\left(\frac{3x}{h} - 2\right)\left(\frac{3x}{h} - 2\right) dx$$

$$= EI\frac{4}{h^2}\int_0^h \left(\frac{9x^2}{h^2} - \frac{12x}{h} + 4\right) dx$$

$$= EI\frac{4}{h^2}\left[\frac{9x^3}{3h^2} - \frac{12x^2}{2h} + 4x\right]_0^h$$

$$= EI\frac{4}{h}$$

Pour $a(\psi_1, \psi_1)$, c'est presque la même chose :

$$\begin{aligned} a(\psi_1, \psi_1) &= EI\frac{4}{h^2}\left[\frac{9x^3}{3h^2} - \frac{6x^2}{2h} + 1x\right]_0^h \\ &= EI\frac{4}{h} \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$K_e = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix}$$

6. Ecrivez la matrice globale après assemblage en considérant trois éléments.

Solution.

La matrice globale après assemblage en considérant trois éléments est :

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6h & 24 & 0 & -12 & 6h & 0 & 0 \\ 6h & 2h^2 & 0 & 8h^2 & -6h & 2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6h & 24 & 0 & -12 & 6h \\ 0 & 0 & 6h & 2h^2 & 0 & 8h^2 & -6h & 2h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6h & 12 & -6h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix}$$