

---

# Séries de fonctions - Chapitre 3

## Révisions sur les complexes

---

### Rappels sur les nombres complexes

#### Définitions et formes usuelles

Un nombre complexe  $z$  s'écrit sous la forme :

$$z = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$$

où  $a$  est la partie réelle  $\Re(z)$  et  $b$  la partie imaginaire  $\Im(z)$ .

Forme algébrique :  $z = a + ib$

Forme trigonométrique :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  est le **module** de  $z$ , et  $\theta = \arg(z)$  est un **argument** de  $z$  (défini à  $2\pi$  près).

Forme exponentielle (formule d'Euler) :

$$z = re^{i\theta}$$

avec  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

#### Module, argument et conjugué

- Module :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument :  $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$  (attention au quadrant)
- Conjugué :  $\bar{z} = a - ib$

#### Formule de Moivre

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

ou, sous forme exponentielle :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

#### Racines $n$ -ièmes de l'unité

Les solutions de  $z^n = 1$  sont :

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

## 1 Module et argument

Écrire sous la forme  $a + ib$ , puis sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument  $\pi/3$ .
2. Nombre de module 3 et d'argument  $-\pi/8$ .
3. Nombre de module 1 et d'argument  $\pi/4$ .
4. Nombre de module 2 et d'argument  $-\pi/6$ .
5. Nombre de module 7 et d'argument  $-\pi/2$ .

## 2 Forme exponentielle $\rightarrow$ forme algébrique

Écrire sous la forme  $a + ib$  les nombres complexes suivants, donnés sous forme exponentielle :

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{6}}$  | 4. $z_4 = 7e^{i\pi}$            |
| 2. $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ | 5. $z_5 = 4e^{i0}$              |
| 3. $z_3 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ | 6. $z_6 = 6e^{-i\frac{\pi}{2}}$ |

## 3 Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

- |                              |                  |  |
|------------------------------|------------------|--|
| 1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ,   | 5. $z_5 = -2i$ , | 9. $z_9 = 0$                                   |
| 2. $z_2 = 1 + i$ ,           | 6. $z_6 = -3$ ,  | 10. $z_{10} = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$          |
| 3. $z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$ , | 7. $z_7 = 1$     | 11. $z_{11} = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$ |
| 4. $z_4 = i$ ,               | 8. $z_8 = 9i$    | 12. $z_{12} = \sin x + i \cos x$ .             |

## 4 Exponentielle

Résoudre l'équation  $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$ .

## 5 Trigonométrie

En utilisant les nombres complexes, calculer  $\cos 5\theta$  et  $\sin 5\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

## 6 Pour préparer les séries de fourier

Calculer les intégrales suivantes, pour toute valeur de  $n$  et  $m$  dans les entiers relatifs :

1.

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{imx} dx$$

2.

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx$$

3.

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx$$

4.

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx$$

## 7 Exponentielle

On pose

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_3 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1 z_2}{z_2}$$

## 8 Racines carrées

Calculer de deux façons les racines carrées de  $1 + i$  et en déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .