Algèbre linéaire - Chapitre 1 Les vecteurs de \mathbb{R}^n

Résumé des idées

À retenir dans une semaine :

- Nous interprèterons les vecteurs plutôt comme des points, et pas comme des flèches.
- Pour résoudre un système linéaire, on le rend **échelonné** avec le pivot de Gauss.
- On peut interpréter un système linéaire de 3 façons différentes :
 - Comme une intersection d'éléments géométriques (droites, plans, etc.).
 - Comme une combinaison linéaire de vecteurs.
 - Comme une équation matricielle.

C Ce que je dois savoir

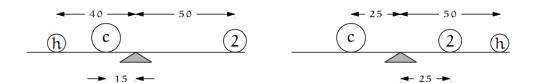
- Que signifie qu'un système soit échelonné?
- Quelles sont les manipulations autorisées pour le pivot de Gauss ?
- Comment interpréter un système linéaire comme une combinaison de vecteurs?

1.1 Exercices

1.1.1 Équations de réactions chimiques

Les équations de réactions chimiques peuvent être interprétées comme des systèmes linéaires. Y a-t-il toujours une infinité de façon d'équilibrer l'équation?

Transformer le problème suivant en système linéaire. Sans le résoudre, combien a-t-il de solutions?



1.1.2 Combien de solutions?

Ces systèmes admettent-ils zéro, une ou une infinité de solutions?

a)

$$\begin{cases} -3x + 2y &= 0\\ -2y &= 0 \end{cases}$$

Le système est bien échelonné avec autant d'équations que d'inconnues, il admet une solution unique.

b)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Le système est déjà échelonné, mais il a plus d'inconnues que d'équations, il admet une infinité de solutions. Ces solutions sont arrangées selon une droite : on peut fixer le paramètre z et exprimer x et y en fonction de z.

c)

$$\begin{cases} x+y = 4 \\ y-z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation n'apporte aucune information, c'est le même que le système précédent.

d)

$$\begin{cases} x + y &= 4 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

La dernière équation est incompatible, le système n'admet pas de solution.

e)

$$\begin{cases} 3x + 6y + z &= -0.5 \\ -z &= 2.5 \end{cases}$$

Le système est échelonné. 2 équations pour 3 inconnues, on peut donc en choisir une comme paramètre : y, et exprimer x et z en fonction de y. Il admet donc une droite de solutions.

f)

$$\begin{cases} x - 3y &= 2\\ 0 &= 0 \end{cases}$$

La dernière équation n'apporte aucune information, On se ramène donc à une équation, deux inconnues. Il y a donc toute une droite de solution.

g)

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 4\\ y &= 1\\ 0 &= 4 \end{cases}$$

La dernière équation est incompatible, le système n'admet pas de solution.

h)

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \end{cases}$$

C'est l'équation d'une droite. Tous les points de cette droite sont solutions.

i)

$$\begin{cases} x - y &= -1\\ 0 &= 0\\ 0 &= 4 \end{cases}$$

La dernière équation est incompatible, le système n'admet pas de solution.

j)

$$\begin{cases} x+y-3z &= -1\\ y-z &= 2\\ z &= 0\\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné, 3 équations pour 3 inconnues, il admet une solution unique.

1.1.3 Systèmes d'équations linéaires

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5\\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ pour échelonner puis résoudre le système. Il admet une unique solution.

$$\begin{cases} -x + y = 1\\ x + y = 2 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ pour échelonner puis résoudre le système. Il admet une unique solution.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1\\ x + y + 2z = 14 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour échelonner puis résoudre le système. Il admet toute une droite de solutions. On pourra choisir z comme paramètre et exprimer x et y en fonction de z.

Auteur : M. Berger

$$\begin{cases} -x - y = 1\\ -3x - 3y = 2 \end{cases}$$

On peut effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$, cela conduit à l'équation 0 = 5, qui est incompatible. Le système n'admet pas de solution.

$$\begin{cases} 4y + z = 20 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$$

Pour échelonner le système, il faut commencer par échanger les équations pour avoir un x dans la première équation. On échange par exemple L_1 et L_3 . On obtient

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ 4y + z = 20 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$$

Ensuite, on élimine les x des autres équations à l'aide de la première équation : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} x+z=5\\ 4y+z=20\\ -2y-z=-10\\ y-2z=5 \end{cases}$$

Ensuite, on utilise L_2 pour éliminer les $y: L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2$. On obtient :

$$\begin{cases} x+z=5\\ 4y+z=20\\ -z=0\\ -9z=0 \end{cases}$$

Les 2 dernières équations apportent la même information, on peut en garder seulement une des deux. On obtient un système échelonné avec une unique solution.

$$\begin{cases} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ 3x - z - w = 0 \\ 4x + y + 2z + w = 9 \end{cases}$$

Pour échelonner le système, on peut garder les deux premières équations. On élimine ensuite les x des autres équations à l'aide de la première équation. On fait donc : $L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$. On obtient :

Auteur: M. Berger p. 4

$$\begin{cases} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ -5z - 5w = -15 \\ y - w = -1 \end{cases}$$

Ensuite, on utilise L_2 pour éliminer les $y: L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. On obtient :

$$\begin{cases} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ -5z - 5w = -15 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné, 3 équations pour 4 inconnues, il admet une droite de solutions. On peut choisir w comme paramètre et exprimer x, y et z en fonction de w.

1.1.4 Approfondissement

Résoudre

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3\\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 10\\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{cases}$$

On peut se ramener à un système linéaire en posant $x=\sin\alpha,\,y=\cos\beta,\,z=\tan\gamma.$ On obtient :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3\\ 4x + 2y - 2z = 10\\ 6x - 3y + z = 9 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on applique $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3\\ 0 + 4y - 8z = 4\\ 0 + 0 - 8z = 0 \end{cases}$$

On obtient une unique solution : x = 1/2, y = 1, z = 0.

On en déduit les solutions de système initial :

$$\alpha=\pi/6 \mod 2\pi$$
 ou $\alpha=5\pi/6 \mod 2\pi,$
$$\beta=0 \mod 2\pi,$$

$$\gamma=0 \mod \pi.$$

1.1.5 Manipulation

La méthode de Gauss consiste à combiner les équations d'un système pour en former de nouvelles.

Auteur : M. Berger

a) Peut-on obtenir l'équation 3x - 2y = 5 par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système?

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

Soit on voit tout de suite que $L_2 - L_1$ donne 3x - 2y = 5.

Sinon, il faut chercher a et b tels que $aL_1 + bL_2$ donne 3x - 2y = 5. On obtient le système de 3 équations à 2 inconnues :

 $\begin{cases} \text{coefficients devant x}: & a+4b=3\\ \text{coefficients devant y}: & a-b=-2\\ \text{coefficients du second membre}: a+6b=5 \end{cases}$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} a+4b=3\\ a-b=-2\\ a+6b=5 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on applique $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} a + 4b = 3 \\ 0 - 5b = -5 \\ 0 + 2b = 2 \end{cases}$$

On obtient donc a = 1 et b = 2, c'est la seule solution.

b) Peut-on obtenir l'équation 5x-3y=2 par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système?

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5\\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

On procède de même, on cherche a et b tels que $aL_1 + bL_2$ donne 5x - 3y = 2. On obtient le système de 3 équations à 2 inconnues :

 $\begin{cases} \text{coefficients devant x}: & 2a+3b=5\\ \text{coefficients devant y}: & 2a+b=-3\\ \text{coefficients du second membre}: 5a+4b=2 \end{cases}$

ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5\\ 2a + b = -3\\ 5a + 4b = 2 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_1$. On obtient :

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 0 - 2b = -8 \\ 0 - 7b = -21 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont incompatibles, le système n'admet pas de solution.

c) Peut-on obtenir 6x - 9y + 5z = -2 par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système?

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 6x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

On procède de même, on cherche a et b tels que $aL_1 + bL_2$ donne 6x - 9y + 5z = -2. On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \text{coefficients devant x}: & 2a+6b=6\\ \text{coefficients devant y}: & a-3b=-9\\ \text{coefficients devant z}: & -a+b=5\\ \text{coefficients du second membre}: 4a+5b=-2 \end{cases}$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} 2a + 6b = 6\\ a - 3b = -9\\ -a + b = 5\\ 4a + 5b = -2 \end{cases}$$

On applique alors le pivot de Gauss, on fait $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$. On obtient:

$$\begin{cases} 2a + 6b = 6 \\ -12b = -24 \\ 8b = 16 \\ -7b = -14 \end{cases}$$

Les trois dernières équations sont les mêmes, on obtient un système parfaitement échelonné avec une unique solution : b = 2 et a = -3.

1.1.6 Interprétation

Choisir 3 systèmes linéaire dans un exercice précédent et l'écrire des 2 manières différentes :

- 1. Comme une combinaison linéaires de vecteurs.
- 2. Comme une équation matricielle.

Par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs :

$$x\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$$

ou comme une équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1.1.7 Pour ceux qui s'ennuient

Une boîte contenant des pennies, des nickels et des dimes renferme treize pièces d'une valeur totale de 83 cents. Combien y a-t-il de pièces de chaque type dans la boîte? (Ce sont des pièces américaines : un penny vaut 1 cent, un nickel 5 cents et un dime 10 cents.)

Auteur : M. Berger p. 8