Séries de fonctions - Chapitre 1
Suites et séries numériques

Résumé des idées

Ce qu'il faut savoir :

- Les formules pour calculer les sommes de séries arithmétiques et géométriques.
- Le critère de Riemann pour les séries à termes positifs.
- Les contre-exemples de suites de fonctions qui convergent simplement mais pas uniformément.

Questions de cours

- Quelle est la définition d'une suite convergente ?
- Quels sont les outils pour montrer la convergence d'une série numérique ?
- Quels sont les deux modes de convergence d'une suite de fonctions ?

Exercices - Suites Numériques

1 Des exemples

Donner deux exemples différents dans chacune des situations suivantes :

- ☐ une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0.
- ☐ une suite bornée non convergente.
- ☐ une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$.
- ☐ une suite non monotone qui tend vers 0.
- ☐ une suite positive qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

2 Vrai ou Faux ?

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses avec une démonstration ou un contre-exemple.

- ☐ Toute suite non-majorée tend vers $+\infty$.
- ☐ Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors, (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- ☐ Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $1/q$.
- ☐ Soit (u_n) une suite croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. Si pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \geq N$ tel que $u_{n_0} > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ.
- ☐ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et que (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n, alors (u_n) est croissante.
- ☐ Si (u_n) est divergente, alors (u_n) est non bornée.
- ☐ Si $u_n \to \ell$ et f continue, alors $f(u_n) \to f(\ell)$

3 Étude de suites

Étudier la nature des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$

b) $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

c) $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$

d) $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

e) $u_n = 3^n e^{-3n}$.

f) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

g) $u_n = \dfrac{n!}{45^n}$

h) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

i) $u_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$.

4 *Plus difficile

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer un équivalent simple :

a) $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1)$

b) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

c) $_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, a, b \in]0, +\infty[$

d) $u_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n}$

e) $u_n = \frac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

5 Formule de Stirling

a) Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$.
Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.

b) On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
A l'aide d'un développement limité, déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}$$

6 Télescopiques

a) Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1}$.

b) En déduire la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

c) Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

e) En déduire le comportement de la suite $(\ u_n\ )$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Séries numériques

7 Paramètres

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de (a, b) la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

b) Dans le(s) cas où la série converge, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

8 Avec l'exponentielle

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

9 Convergence des séries

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$
2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $u_n = n\sin(1/n)$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
6. $u_n = \frac{1}{n!}$
7. $u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$
8. $u_n = \frac{n+1}{2^n+8}$
9. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+1)}$

Suites de fonctions

10 Suites de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

a) Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
b) Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
c) Si les f_n sont périodiques de période T, alors f aussi.
d) Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

11 Suites de fonctions

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

a) Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
b) Étudier les variations de g.
c) En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
d) Soit $a \in [0,1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.