estp CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE	**Contrôle de connaissances et de compétences**	**FO-002-VLA-XX-001**
26/01/2026		**Page 1/2**

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 5	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Antoine Perney
Promotion	BMC3 - S5
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	— Calculatrice **NON** autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

1. **Calculs de développements limités.**
   (a) Donner le développement limité de $\sin x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

   (b) Donner le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(0.5 pt)*

Solution :
On utilise $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

   (c) En déduire le développement limité de $f(x) = (\sin x)^2\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. *(1 pt)*

Solution :
On multiplie les DL en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 3 :

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \sqrt{1+x} &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right) + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o(x^3)\end{aligned}$$

2. **Calcul de limite.** Calculer la limite suivante à l'aide d'un développement limité : *(1.5 pts)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$$

Solution :
On utilise le DL de $\arctan x$ à l'ordre 3 :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Donc :

$$\arctan x - x = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Et :

$$\frac{\arctan x - x}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{3}}$$

3. **Étude d'une fonction.** Soit $g(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

   (a) À l'aide d'un développement limité, montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer sa valeur. *(0.75 pt)*

Solution :
On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc :

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$g(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

On peut prolonger g par continuité en posant $g(0) = \frac{1}{2}$.

   (b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de g en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente. *(0.75 pt)*

Solution :

Le DL de g en 0 est :

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

La tangente en 0 a pour équation $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{6}$.

On a $g(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\right) = \frac{x^2}{24} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{24} > 0$ pour $x \neq 0$ petit.

Donc la courbe est **au-dessus** de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 2 : Équations aux dérivées partielles (5 points)

1. **Équation exacte.** On considère l'équation différentielle :

$$(ye^{xy} + 2x)\,dx + (xe^{xy} + 3y^2)\,dy = 0$$

(a) Vérifier que cette équation est exacte, c'est-à-dire que l'expression $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ est une différentielle totale. *(0.75 pt)*

Solution :
On pose $f(x,y) = ye^{xy} + 2x$ et $g(x,y) = xe^{xy} + 3y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy)$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, l'équation est exacte.

(b) Trouver une fonction $F(x,y)$ telle que $dF = f\,dx + g\,dy$. *(1 pt)*

Solution :
On cherche F telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = ye^{xy} + 2x$.
En intégrant par rapport à x : $F(x,y) = e^{xy} + x^2 + H(y)$
On vérifie avec $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^{xy} + H'(y) = xe^{xy} + 3y^2$.
Donc $H'(y) = 3y^2$, soit $H(y) = y^3 + C$.
Conclusion : $F(x,y) = e^{xy} + x^2 + y^3$

(c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle. *(0.5 pt)*

Solution :
Les solutions sont données par $F(x,y) = K$ où K est une constante :

$$\boxed{e^{xy} + x^2 + y^3 = K}$$

2. **EDP linéaire d'ordre 1.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant un changement de variables linéaire. *(1.5 pts)*

Solution :
On pose $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$ et $F(X, Y) = f(x, y)$.
L'équation devient $(2a + 3b)\frac{\partial F}{\partial X} + (2c + 3d)\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$.
On choisit $a = 3$, $b = -2$ (donc $2a + 3b = 0$) et $c = 1$, $d = 0$ (donc $2c + 3d = 2$).
L'équation devient $2\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$, soit $\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$.
Les solutions sont $F(X, Y) = K(X)$, où K est une fonction $\mathcal{C}^1$ quelconque.
En revenant aux variables initiales avec $X = 3x - 2y$:

$$\boxed{f(x, y) = K(3x - 2y)}$$

où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque.

3. **Méthode de séparation de variables.** On considère l'équation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

En cherchant des solutions sous la forme $f(x, y) = X(x)Y(y)$, déterminer les solutions de cette équation. *(1.25 pts)*

Solution :
En posant $f(x, y) = X(x)Y(y)$, on obtient :

$$xX'Y + yXY' = 2XY$$

En divisant par XY :

$$x\frac{X'}{X} + y\frac{Y'}{Y} = 2 \quad \Rightarrow \quad x\frac{X'}{X} = 2 - y\frac{Y'}{Y}$$

Le membre de gauche ne dépend que de x, le membre de droite que de y. Ils sont donc tous deux égaux à une constante k.
Pour X **:** $x\frac{X'}{X} = k \Rightarrow \frac{X'}{X} = \frac{k}{x} \Rightarrow X(x) = C_1|x|^k$
Pour Y **:** $y\frac{Y'}{Y} = 2 - k \Rightarrow \frac{Y'}{Y} = \frac{2-k}{y} \Rightarrow Y(y) = C_2|y|^{2-k}$
Solutions : $\boxed{f(x, y) = C\,|x|^k|y|^{2-k}}$ pour $k \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.
(Sur les domaines où $x > 0$ et $y > 0$: $f(x, y) = C\,x^k y^{2-k}$)

Exercice 3 : Modélisation – Charge d'un condensateur (5 points)

Un condensateur de capacité $C = 20$ μF, initialement déchargé, est connecté à l'instant $t = 0$ à un générateur de tension $E = 10$ V à travers une résistance $R = 50$ kΩ.

La tension $U(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$RC\frac{dU}{dt} + U = E$$

1. Calculer la valeur numérique de la constante de temps $\tau = RC$. *(0.5 pt)*

Solution :

$$\tau = RC = 50 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-6} = 1 \text{ s}$$

2. Réécrire l'équation différentielle sous la forme $\dfrac{dU}{dt} + \dfrac{U}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$. *(0.5 pt)*

Solution :
On part de $RC\frac{dU}{dt} + U = E$, et on divise par $RC = \tau$:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{U}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

3. Déterminer la tension d'équilibre U_{eq} (solution constante de l'équation). *(0.5 pt)*

Solution :
À l'équilibre, $\frac{dU}{dt} = 0$, donc :

$$\frac{U_{\text{eq}}}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{eq}} = E = 10 \text{ V}}$$

4. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $U(0) = 0$. *(1.5 pts)*

Solution :
On pose $\theta(t) = U(t) - E$. Alors $\frac{d\theta}{dt} = \frac{dU}{dt}$ et l'équation devient :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta + E}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta}{\tau}$$

Cette équation a pour solution $\theta(t) = Ae^{-t/\tau}$.
Condition initiale : $\theta(0) = U(0) - E = 0 - 10 = -10$, donc $A = -10$.
Ainsi $\theta(t) = -10e^{-t/\tau}$, et :

$$\boxed{U(t) = E + \theta(t) = 10\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 10\left(1 - e^{-t}\right) \text{ V}}$$

5. Au bout de combien de temps la tension atteint-elle 8 V ? *(1 pt)*
On donne $\ln(5) \approx 1{,}6$.

Solution :
On résout $U(t) = 8$:

$$10\left(1 - e^{-t}\right) = 8 \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-t} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad e^{-t} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$$

$$-t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5) \quad \Rightarrow \quad t = \ln(5) \approx \boxed{1{,}6 \text{ s}}$$

6. Vers quelle valeur tend $U(t)$ quand $t \to +\infty$? Interpréter physiquement. *(1 pt)*

Solution :

$$\lim_{t\to+\infty} U(t) = \lim_{t\to+\infty} 10\left(1 - e^{-t}\right) = 10 \times 1 = 10 \text{ V}$$

Interprétation : Le condensateur se charge progressivement et atteint asymptotiquement la tension du générateur $E = 10$ V. À l'équilibre, aucun courant ne circule plus dans le circuit car $U = E$.

Exercice 4 : Modélisation – Réaction chimique (5 points)

On étudie la concentration $[A](t)$ d'un réactif A au cours d'une réaction chimique.
Partie A – Réaction d'ordre 1
On suppose que la vitesse de disparition de A est proportionnelle à sa concentration :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

où $k = 0{,}1$ min^{-1} est la constante de vitesse et $[A]_0 = 2$ mol/L la concentration initiale.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $[A](0) = [A]_0$. *(1 pt)*

Solution :
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à variables séparables.
On sépare les variables : $\frac{d[A]}{[A]} = -k\,dt$
En intégrant : $\ln|[A]| = -kt + C$
Donc : $[A](t) = Be^{-kt}$ où $B = e^C$
Avec la condition initiale $[A](0) = [A]_0$: $B = [A]_0$

$$\boxed{[A](t) = [A]_0 e^{-kt} = 2e^{-0{,}1t} \text{ mol/L}}$$

2. Calculer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ (temps pour que $[A](t_{1/2}) = \frac{[A]_0}{2}$). *(0.5 pt)*
On donne $\ln(2) \approx 0{,}7$.

Solution :
On résout $[A](t_{1/2}) = \frac{[A]_0}{2}$:

$$[A]_0 e^{-kt_{1/2}} = \frac{[A]_0}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -kt_{1/2} = -\ln(2)$$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{0,7}{0,1} = 7 \text{ min}}$$

Partie B – Réaction d'ordre 2
On considère maintenant une réaction d'ordre 2 :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k'[A]^2$$

où $k' > 0$ est la nouvelle constante de vitesse.

3. On pose $u = \frac{1}{[A]}$. Montrer que u vérifie l'équation différentielle linéaire : *(1 pt)*

$$\frac{du}{dt} = k'$$

Solution :
On a $u = \frac{1}{[A]}$, donc $[A] = \frac{1}{u}$.
En dérivant par rapport à t : $\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$
On substitue dans l'équation $\frac{d[A]}{dt} = -k'[A]^2$:

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -k' \cdot \frac{1}{u^2}$$

En multipliant par $-u^2$:

$$\frac{du}{dt} = k'$$

4. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de $[A](t)$ avec $[A](0) = [A]_0$. *(1.5 pts)*

Solution :
L'équation $\frac{du}{dt} = k'$ est immédiate à intégrer :

$$u(t) = k't + C$$

Condition initiale : $u(0) = \frac{1}{[A]_0}$, donc $C = \frac{1}{[A]_0}$.
Ainsi : $u(t) = k't + \frac{1}{[A]_0}$
En revenant à $[A] = \frac{1}{u}$:

$$\boxed{[A](t) = \frac{1}{k't + \frac{1}{[A]_0}} = \frac{[A]_0}{1 + k'[A]_0 t}}$$

5. Montrer que le temps de demi-réaction pour cette réaction d'ordre 2 vaut $t_{1/2} = \dfrac{1}{k'[A]_0}$. Que peut-on dire de sa dépendance vis-à-vis de la concentration initiale, contrairement à l'ordre 1 ? *(1 pt)*

Solution :
On résout $[A](t_{1/2}) = \frac{[A]_0}{2}$:

$$\frac{[A]_0}{1 + k'[A]_0 t_{1/2}} = \frac{[A]_0}{2}$$

$$1 + k'[A]_0 t_{1/2} = 2 \quad \Rightarrow \quad k'[A]_0 t_{1/2} = 1$$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{1}{k'[A]_0}}$$

Interprétation : Contrairement à une réaction d'ordre 1 où $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$ est indépendant de la concentration initiale, le temps de demi-réaction d'une réaction d'ordre 2 **dépend de** $[A]_0$: plus la concentration initiale est élevée, plus la demi-réaction est rapide.