

Analyse et Algèbre - TD3

Transformée de Laplace

Rappel : Pour une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, la **transformée de Laplace** de f est définie par :

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Cette intégrale converge pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$, où σ_0 dépend de f et est appelée l'**abscisse de convergence**.

Exercice 1 : Calcul direct de transformées

L'objectif est de calculer des transformées de Laplace directement à partir de la définition.

1. Calculer $\mathcal{L}\{1\}(s)$ pour $s > 0$ et déterminer l'abscisse de convergence.
2. Calculer $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et déterminer l'abscisse de convergence.
3. En utilisant les formules d'Euler, déduire $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$ et $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$.
4. Montrer par récurrence que $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

utiliser une intégration par parties.

Exercice 2 : Propriétés fondamentales

On souhaite démontrer les propriétés fondamentales de la transformée de Laplace.

1. **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Laplace, et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}$$

2. **Dérivation.** Soit f une fonction dérivable dont f et f' admettent des transformées de Laplace. Montrer que :

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

3. En déduire que pour f deux fois dérivable :

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

4. **Décalage en fréquence.** Montrer que si $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, alors :

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a)$$

5. **Application.** En utilisant les résultats précédents, calculer $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}$ et $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(5t)\}$.
6. **Dérivation de la transformée.** Montrer que :

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

7. **Application.** En utilisant la propriété précédente, calculer $\mathcal{L}\{t\sin(\omega t)\}$ et $\mathcal{L}\{t\cos(\omega t)\}$.

Exercice 3 : Abscisse de convergence

L'**abscisse de convergence** σ_0 d'une fonction f est le réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$.

- Déterminer l'abscisse de convergence des fonctions suivantes :

(a) $f(t) = 1$

(c) $f(t) = e^{t^2}$

(b) $f(t) = e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$

(d) $f(t) = \sin(t)$

- On considère la fonction $f(t) = e^{2t} + 3e^{-t} + \cos(t)$. Déterminer son abscisse de convergence.
- Soit f une fonction à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|f(t)| \leq Mt^n$ pour t assez grand. Montrer que f admet une transformée de Laplace et déterminer une majoration de son abscisse de convergence.

Exercice 4 : Équations différentielles d'ordre 1

- En appliquant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-t}$ avec $y(0) = 1$.
- Résoudre l'équation différentielle avec paramètre $y' + ay = be^{ct}$ avec $y(0) = y_0$, où $a, b, c, y_0 \in \mathbb{R}$ et $a \neq c$.

Exercice 5 : Équations différentielles d'ordre 2

- Résoudre $y'' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
- Résoudre $y'' + 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
- Oscillateur amorti avec second membre.** Résoudre l'équation :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t)$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, où $\lambda > 0$, $\omega_0 > 0$ et $\omega \neq \omega_0$.

On prendra $\lambda = 1$, $\omega_0 = 2$ et $\omega = 3$, $F_0 = 10$.

- Cas de résonance.** Résoudre $y'' + 4y = 2 \sin(2t)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6 : Équations différentielles avec paramètres

Système masse-ressort-amortisseur. Un système mécanique vérifie :

$$mx'' + cx' + kx = F_0 u(t)$$

où $u(t)$ est la fonction de Heaviside, m la masse, c le coefficient d'amortissement, k la raideur du ressort, et F_0 la force appliquée.

Avec $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, trouver $x(t)$ en fonction des paramètres dans le cas sur-amorti ($c^2 > 4mk$).

Exercice 7 : Fonction échelon et fonctions discontinues

La fonction échelon de Heaviside $u(t - a)$ est définie par :

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{L}\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ pour $a \geq 0$.
2. **Théorème du décalage temporel.** Montrer que si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$$

3. Calculer $\mathcal{L}\{(t - 2)^2 u(t - 2)\}$.
4. Soit $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ t & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$. Exprimer f à l'aide de fonctions échelon et calculer sa transformée de Laplace.
5. Résoudre l'équation $y' + y = u(t - 1)$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 8 : Produit de convolution

Le **produit de convolution** de deux fonctions f et g est défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

1. Montrer que $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$.
échanger les deux intégrales et faire un changement de variables.
2. En déduire $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$ par convolution.
3. Calculer $(t * \sin(t))$ de deux manières : par le calcul direct et par la transformée de Laplace.

Exercice 9 : Lien avec la transformée de Fourier

La **transformée de Fourier** d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par :

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction **causale** (nulle pour $t < 0$). Montrer que :

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \mathcal{L}\{f\}(i\omega)$$

c'est-à-dire que la transformée de Fourier s'obtient en évaluant la transformée de Laplace sur l'axe imaginaire $s = i\omega$.

2. Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-at}u(t)$ pour $a > 0$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $g(t) = e^{-a|t|}$ pour $a > 0$ (fonction non causale).

Indication : séparer l'intégrale en $t < 0$ et $t > 0$.

4. **Application : fonction de transfert.** Un système soumis à une entrée $x(t)$, répond avec une sortie $y(t)$. Il est décrit par $y'' + 2y' + 2y = x(t)$.

- (a) Déterminer la fonction de transfert $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ en Laplace.
- (b) En déduire la réponse en fréquence $H(i\omega)$ et calculer son module.
- (c) Pour quelles fréquences ω le système amplifie-t-il le signal d'entrée ?

Formulaire : Transformées de Laplace usuelles

Fonction $f(t)$	Transformée $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$	Domaine
1	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a $
$u(t-a)$ (Heaviside)	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\delta(t)$ (Dirac)	1	$\forall s$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$\forall s$

TABLE 1 – Transformées de Laplace élémentaires

Propriété	Formule
Dérivation temporelle	$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)$
Dérivation seconde	$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
Intégration temporelle	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
Décalage fréquentiel	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
Multiplication par t	$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s)$
Multiplication par t^n	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
Convolution	$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$

TABLE 2 – Propriétés de la transformée de Laplace