Analyse et Algèbre - TD4

Dérivées partielles et équations

Exercice 1 : Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = e^{3y^3}\cos(xy)$
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(x^2-y)$
3. $f(x,y) = \sqrt{2-x^2y^2}$

Exercice 2 : Dériver des composées

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f\left(2+2t, t^2\right)$. Calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f\left(uv, u^2+v^2\right)$. Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 3 : Méthode de séparation des variables

On rappelle l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

On cherche une solution u définie sur $[0,L] \times \mathbb{R}_+$ avec conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et conditions aux bords $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

1. Cette équation est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique ?
2. Essayons de trouver une solution sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. Que devient l'équation différentielle ?
3. Ecrivez cette équation sous la forme $f(t) = g(x)$.

   Comme x et t sont des variables indépendantes, on en déduit que $f(t) = g(x)$ est une constante λ.
4. Déterminer les deux équations différentielles vérifiées par X et T.
5. Si $\lambda < 0$, pouvez-vous trouver une solution pour X vérifiant les conditions aux bords ?
6. Et si $\lambda = 0$?
7. Il est donc nécéssaire que λ soit positif, en écrivant $\lambda = \mu^2$, quelles sont les solutions X possibles ?
8. Pour que les conditions aux bords soient vérifiées, il faut que $X(0) = X(L) = 0$. Quelle contrainte cela impose-t-il sur μ ?
9. En déduire les fonctions T possibles et en déduire les solutions u possibles qui s'écrivent $u(x,t) = X(x)T(t)$.
10. En utilisant le principe de superposition, donner toutes les solutions qu'on peut construire avec cette méthode.

Exercice 4 : Changements de variables

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = c$$

où c est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

   En utilisant le théorème de composition, montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{2}$.
2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 5 : Pour aller plus loin

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite harmonique si son laplacien est nul :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe C^3.Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x,y) = \varphi\left(x^2+y^2\right)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.