

	Contrôle de connaissances et de compétences	FO-002-VLA-XX-001
26/01/2026		Page 1/3

ANNÉE SCOLAIRE 2025-2026 – Semestre 1	
Nom de l'enseignant	Maxime Berger & Karine Serier
Promotion	BMC2 - S3
Matière	Mathématiques
Durée de l'examen	3h00
Consignes	<ul style="list-style-type: none"> — Calculatrice NON autorisée — Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : Séries numériques (6 points)

1. **Série géométrique.** On considère la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(a) Rappeler le critère de convergence d'une série géométrique $\sum q^n$. (0.5 pt)

Solution :

La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$.

(b) En déduire que la série converge et calculer sa somme. (1 pt)

Solution :

Ici $q = \frac{2}{3}$ et $|q| = \frac{2}{3} < 1$, donc la série converge.

Sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

2. **Critère de D'Alembert.** Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$ à l'aide du critère de D'Alembert. (1.5 pts)

Solution :

On pose $u_n = \frac{n!}{3^n}$ et on calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{3 \cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1$$

Par le critère de D'Alembert, la série **diverge**.

3. **Série télescopique.** Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. (1.5 pts)

Indication : décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples.

Solution :

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La somme partielle s'écrit :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right)$$

C'est une somme télescopique : $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$.

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = 1$$

4. **Équivalent.** On considère la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{n^2+3n}{n^4+2}$.

(a) Trouver un équivalent simple de u_n quand $n \rightarrow +\infty$. (0.75 pt)

Solution :

Quand $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n = \frac{n^2 + 3n}{n^4 + 2} = \frac{n^2(1 + \frac{3}{n})}{n^4(1 + \frac{2}{n^4})} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

(b) En déduire la nature de la série. (0.75 pt)

Solution :

On a $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ avec $u_n > 0$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$).

Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ **converge**.

Exercice 2 : Calcul différentiel vectoriel (4 points)

1. Soit le champ scalaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^3 - 2xz$$

- (a) Rappeler la définition du gradient d'un champ scalaire. (0.5 pt)

Solution :

Le gradient d'un champ scalaire f est le vecteur des dérivées partielles :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Il pointe dans la direction de plus grande croissance de f .

- (b) Calculer $\nabla f(x, y, z)$. (1 pt)

Solution :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3yz^2 - 2x$$

Donc :

$$\nabla f = (2xy - 2z, x^2 + z^3, 3yz^2 - 2x)$$

- (c) Évaluer ∇f au point $P = (1, 2, -1)$. (0.5 pt)

Solution :

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2, -1) &= (2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1), 1^2 + (-1)^3, 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= (4 + 2, 1 - 1, 6 - 2) = (6, 0, 4) \end{aligned}$$

2. Soit le champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy + z^2, yz - x)$$

- (a) Rappeler la définition de la divergence d'un champ de vecteurs. (0.5 pt)

Solution :

La divergence d'un champ de vecteurs $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ est le scalaire :

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Elle mesure le taux d'expansion (ou de contraction) local du champ.

(b) Calculer $\operatorname{div}(\vec{F})$. (1 pt)

Solution :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) = 2xz$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy + z^2) = x$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(yz - x) = y$$

Donc :

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 2xz + x + y$$

(c) Évaluer la divergence au point $Q = (2, -1, 3)$. (0.5 pt)

Solution :

$$\operatorname{div}(\vec{F})(2, -1, 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 + (-1) = 12 + 2 - 1 = 13$$

Exercice 3 : Algèbre linéaire (6 points)

1. **Système linéaire.** Résoudre le système suivant : (1.5 pts)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Solution :

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De $L_2 : -3y + 3z = -2 \Rightarrow y = z + \frac{2}{3}$.

En posant $z = t$ (paramètre libre), on a $y = t + \frac{2}{3}$.

De $L_1 : x = 3 - 2y + z = 3 - 2(t + \frac{2}{3}) + t = 3 - 2t - \frac{4}{3} + t = \frac{5}{3} - t$.

Solution : $(x, y, z) = (\frac{5}{3} - t, t + \frac{2}{3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. **Espace vectoriel.** On considère l'ensemble :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . (1.5 pts)

Solution :

On vérifie les trois conditions :

1. Non vide : $(0, 0, 0) \in E$ car $0 + 2 \cdot 0 - 0 = 0$. ✓

2. Stabilité par addition : Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E$.

On a $x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.

Alors $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2) = 0$.

Donc $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in E$. ✓

3. Stabilité par multiplication : Soit $(x, y, z) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $x + 2y - z = 0$.

Alors $\lambda x + 2(\lambda y) - \lambda z = \lambda(x + 2y - z) = 0$.

Donc $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E$. ✓

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

3. **Application linéaire.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi(x, y) = (2x - y, x + 3y, x - y)$$

(a) Montrer que φ est une application linéaire. (1 pt)

Solution :

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) &= \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= (2(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2), \lambda x_1 + \mu x_2 + 3(\lambda y_1 + \mu y_2), \lambda x_1 + \mu x_2 - (\lambda y_1 + \mu y_2)) \\ &= (2\lambda x_1 - \lambda y_1 + 2\mu x_2 - \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + 3\lambda y_1 + 3\mu y_2, \lambda x_1 - \lambda y_1 + \mu x_2 - \mu y_2) \\ &= \lambda(2x_1 - y_1, x_1 + 3y_1, x_1 - y_1) + \mu(2x_2 - y_2, x_2 + 3y_2, x_2 - y_2) \\ &= \lambda\varphi(x_1, y_1) + \mu\varphi(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

(b) Écrire la matrice A de φ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . (0.5 pt)

Solution :

On calcule $\varphi(1, 0) = (2, 1, 1)$ et $\varphi(0, 1) = (-1, 3, -1)$.

La matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer $\ker(\varphi)$. (0.75 pt)

Solution :

On résout $\varphi(x, y) = (0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

De la 1ère équation : $y = 2x$. De la 3ème : $y = x$.

Donc $2x = x \Rightarrow x = 0$, puis $y = 0$.

Conclusion : $\ker(\varphi) = \{(0, 0)\}$.

(d) Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi)$ et sa dimension. (0.75 pt)

Solution :

Puisque $\ker(\varphi) = \{0\}$, on a $\dim(\ker(\varphi)) = 0$.

Par le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\ker(\varphi)) = 2 - 0 = 2$.

Une base de $\text{Im}(\varphi)$ est formée des images des vecteurs de la base canonique :

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\{(2, 1, 1), (-1, 3, -1)\}$$

Problème : Étude d'une famille de séries et application (4 points)

On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série :

$$S(\alpha) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$$

Partie A : Étude de la convergence

1. Cas $\alpha > 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. (0.25 pt)

Solution :

Pour $n \geq 2$, on a $\ln(n) \geq \ln(2) > 0$.

Donc $n^\alpha \ln(n) \geq n^\alpha$, ce qui donne $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$.

(b) En déduire que la série $S(\alpha)$ converge pour $\alpha > 1$. (0.25 pt)

Solution :

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Par comparaison, puisque $0 < \frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, la série $S(\alpha)$ **converge**.

2. Cas $\alpha < 1$.

(a) Trouver un équivalent de $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ quand $n \rightarrow +\infty$ et le comparer à $\frac{1}{n^\beta}$ pour un β bien choisi. (0.5 pt)

Solution :

Pour $\alpha < 1$, prenons $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$ (on a alors $\alpha < \beta < 1$).

On a :

$$\frac{1/n^\alpha \ln(n)}{1/n^\beta} = \frac{n^\beta}{n^\alpha \ln(n)} = \frac{n^{\beta-\alpha}}{\ln(n)}$$

Comme $\beta - \alpha > 0$, on a $n^{\beta-\alpha} \rightarrow +\infty$ et $\frac{n^{\beta-\alpha}}{\ln(n)} \rightarrow +\infty$.

Donc $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \gg \frac{1}{n^\beta}$ pour n grand.

(b) En déduire que la série $S(\alpha)$ diverge pour $\alpha < 1$. (0.5 pt)

Solution :

Puisque $\beta < 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\beta}$ diverge.

Comme $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \geq \frac{1}{n^\beta}$ pour n assez grand (puisque le rapport tend vers $+\infty$), la série $S(\alpha)$ **diverge** par comparaison.

3. **Cas critique** $\alpha = 1$. On étudie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$.

(a) En utilisant le critère de D'Alembert, peut-on conclure ? Justifier. (0.5 pt)

Solution :

On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n \ln(n)}{(n+1) \ln(n+1)} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \rightarrow 1 \times 1 = 1$$

Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure (limite = 1).

(b) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que la série diverge. (0.5 pt)

Indication : on rappelle que si f est positive décroissante, $\sum f(n)$ et $\int f(x) dx$ ont même nature.

Solution :

La fonction $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

On calcule :

$$\int_2^N \frac{dx}{x \ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_2^N = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

L'intégrale diverge, donc la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ **diverge**.

Partie B : Application à l'algèbre linéaire

On considère l'espace vectoriel E des suites réelles $(u_n)_{n \geq 2}$ et l'application $T : E \rightarrow E$ définie par :

$$T((u_n)) = \left(\frac{u_n}{n \ln(n)} \right)_{n \geq 2}$$

4. Montrer que T est une application linéaire. (0.5 pt)

Solution :

Soient $(u_n), (v_n) \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) &= T((\lambda u_n + \mu v_n)) = \left(\frac{\lambda u_n + \mu v_n}{n \ln(n)} \right) \\ &= \lambda \left(\frac{u_n}{n \ln(n)} \right) + \mu \left(\frac{v_n}{n \ln(n)} \right) = \lambda T((u_n)) + \mu T((v_n)) \end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

5. Déterminer $\ker(T)$. (0.5 pt)

Solution :

$(u_n) \in \ker(T)$ si et seulement si $\frac{u_n}{n \ln(n)} = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Comme $n \ln(n) \neq 0$ pour $n \geq 2$, cela équivaut à $u_n = 0$ pour tout n .

Donc $\ker(T) = \{(0, 0, 0, \dots)\}$: la suite nulle.

6. T est-elle injective ? Justifier. (0.5 pt)

Solution :

Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Comme $\ker(T) = \{0\}$, T est **injective**.

Rappels et formulaire

Séries de Riemann : La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Critère de D'Alembert : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, la série converge.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$ (ou $+\infty$), la série diverge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Série géométrique : Pour $|q| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes :

- Gradient : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
- Divergence : $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

Théorème du rang : Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire avec $\dim(E) < +\infty$, alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$