

On recommence le découpage :

- Si le milieu  $m$  de l'intervalle  $[a_1, b_1]$  est tel que  $f(m) \geq k$  alors : on pose  $a_2 = a_1$  et  $b_2 = m$
- Sinon, on pose  $a_2 = m$  et  $b_2 = b_1$ .

On a ainsi :  $a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b$  et  $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$

En réitérant ce procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de  $[a_n, b_n]$  est  $\frac{b-a}{2^n}$

Les segments  $[a_n, b_n]$  ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc adjacentes.

Notons  $c$  leur limite commune (ce réel  $c$  est dans l'intervalle  $[a, b]$ )

**Montrons que  $f(c) = k$**

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$

Par passage à la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$

Or,  $f$  est continue en  $c$ , donc :  $f(c) \leq k \leq f(c)$

Donc :  $f(c) = k$

On a donc bien montré qu'il existe un réel  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .

**Remarque** : l'hypothèse de continuité est indispensable dans le théorème. Essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $k = \frac{1}{2}$

