
Séries de fonctions - Chapitre 7

Equations différentielles

Introduction

Les équations différentielles du premier ordre sont des équations de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où y est une fonction de x . l'inconnue dans cette équation est y , il faut trouver une fonction.

La résolution de cette équation se fait en deux étapes :

1. Trouver les solutions homogènes
2. Trouver une solution particulière

Solutions Homogènes

Une équation différentielle est dite homogène si $b(x) = 0$, elle peut être écrite sous la forme :

$$y' + a(x)y = 0$$

Les solutions sont de la forme $y = Ce^{-A(x)}$ où C est une constante et $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

Exemple

Donnez les solutions des équations :

1.

$$y' + 2y = 0$$

2.

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

3.

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$$

Solutions Particulières

Lorsque l'équation différentielle n'est pas homogène, il faut chercher une solution particulière, c'est à dire une fonction qui satisfait l'équation différentielle complète. On obtient ensuite toutes les solutions en ajoutant la solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.

Pour trouver une solution particulière, on peut la chercher sous la forme d'une fonction simple (polynôme, exponentielle, etc.) et vérifier par identification.

Exemple

Trouver toutes les solutions des équations :

1.

$$y' + 2y = 2x + 3$$

On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Ax + B$.

2.

$$xy' + (x - 1)y = x^3$$

On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Exercices

Résoudre les équations :

1.

$$y' + y = xe^{-x}$$

2.

$$y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$$

3.

$$y' - 2xy = -(2x - 1)e^x \text{ sur } \mathbb{R}$$

4.

$$y' - \frac{2}{t}y = t^2 \text{ sur }]0, +\infty[$$

Point de cours : Méthode de variation de la constante

Parfois, on ne trouve pas de solution particulière évidente, on peut alors utiliser la méthode de variation de la constante.

La méthode de variation de la constante est une technique utilisée pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire non homogène. Cette méthode repose sur l'idée de remplacer les constantes de la solution générale de l'équation homogène associée par des fonctions variables.

Considérons une équation différentielle linéaire non homogène de la forme :

$$ay' + by = f(x)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée :

$$y' + a(x)y = 0$$

et trouver la solution générale sous la forme :

$$y_h(x) = Ce^{-A(x)}$$

où C est une constante.

2. Pour trouver une solution particulière de l'équation non homogène, on suppose que la constante C devient une fonction de x , c'est-à-dire :

$$y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$$

3. Déterminer la fonction $C(x)$ en réinjectant y_p dans l'équation différentielle, on obtient toujours une équation sur C' :

$$C'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

4. Intégrer la fonction $C'(x)$ pour obtenir $C(x)$.

5. La solution générale de l'équation différentielle est alors donnée par :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-A(x)} + C(x)e^{-A(x)}$$

Cette méthode permet de trouver une solution particulière sans avoir à deviner la forme de la solution, ce qui peut être utile pour des équations différentielles complexes.

Équations Différentielles d'Ordre 2

Les équations différentielles d'ordre 2 sont des équations qui impliquent des dérivées secondes d'une fonction inconnue. Nous étudierons seulement les équations linéaires à coefficients constants.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

où a , b et c sont des constantes. Dans le cas général, a , b et c pourraient être des fonctions de x .

Pour trouver toutes les solutions, c'est le même principe que pour les équations d'ordre 1, on trouve d'abord les solutions homogènes, puis on trouve une solution particulière.

Point de cours : Équation caractéristique et forme des solutions

Pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

on utilise l'équation caractéristique associée :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Cette équation provient de la recherche de solutions de la forme $y = e^{rx}$.

Les solutions de l'équation différentielle dépendent des racines de l'équation caractéristique :

1. Si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , la solution générale est :

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2. Si l'équation caractéristique a une racine réelle double r , la solution générale est :

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

3. Si l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm i\beta$, la solution générale est :

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

Exercices

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

2.

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

3.

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

4.

$$y'' - 2y' + y = \sin^2 x$$

5.

$$y'' + y' + y = e^x \cos x$$

Méthode de Séparation des Variables

Si on a de la chance et qu'on sait bien intégrer, on peut aussi utiliser une méthode différente pour obtenir toutes les solutions d'un coup. Cette méthode s'applique aux équations de la forme :

$$y' = g(x)h(y)$$

en réécrivant l'équation sous la forme :

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

et en intégrant des deux côtés.

Exemple

Résoudre les équations :

1.

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{xy}$$

Exercices de Synthèse

Les exercices suivants permettent de mettre en pratique l'ensemble des méthodes vues dans ce chapitre. Pour chaque équation, identifiez d'abord le type d'équation et choisissez la méthode appropriée.

Exercices sur les équations différentielles d'ordre 1

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 3y = e^{-3x}$$

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3 \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

3. Résoudre l'équation différentielle en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

4. Résoudre l'équation différentielle par séparation des variables :

$$y' = \frac{y^2}{1 + x^2}$$

5. Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y' + 2xy = 1$$

Exercices sur les équations différentielles d'ordre 2

1. Résoudre l'équation différentielle homogène :

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle homogène :

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

3. Résoudre l'équation différentielle homogène :

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

4. Résoudre l'équation différentielle complète :

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Axe^{2x}$.

5. Résoudre l'équation différentielle complète :

$$y'' + y = \cos(x)$$

Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$.

6. Résoudre l'équation différentielle complète :

$$y'' - 2y' + y = xe^x$$

Exercices mixtes

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + y \tan(x) = \sin(2x) \quad \text{sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

2. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

3. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Indication : effectuer le changement de variable $z = \frac{y}{x}$.

4. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - y' - 2y = 3x^2 + 1$$

5. Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie
- $y(0) = 1$
- :

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$