

# Analyse et Algèbre - TD5

## Distributions

### Exercice 1 : Le Dirac et la fonction de Heaviside

On rappelle que la distribution de Dirac  $\delta_a$  est définie par  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$  pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

(Rappel : une fonction test est une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à support compact.)

Les fonctions  $\varphi$  suivantes n'appartiennent pas à  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , l'objectif de cet exercice est purement pédagogique.

1. Calculer  $\langle \delta_0, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$ .
2. Calculer  $\langle \delta_2, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ .
3. Calculer  $\langle \delta_{-1} + 2\delta_3, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = \cos(\pi x)$ .

On note  $H$  la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. Calculer  $\langle H, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = e^{-x}$ .

*Indication : on rappelle l'action d'une distribution sur une fonction test :  $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi(x)dx$ .*

5. Calculer  $\langle H + 2\delta_{-\pi}, \varphi \rangle$  pour  $\varphi(x) = \cos(x)$ .

### Exercice 2 : Dériver des fonctions discontinues

Montrer que la dérivée (au sens des distributions) de la fonction de Heaviside  $H$  est égale à  $\delta_0$ .

*Indication : Utiliser la définition  $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$ .*

On peut aussi calculer la dérivée des distributions en utilisant nos connaissances sur les dérivées classiques : On dérive quand c'est possible et ajoute des diracs aux points de discontinuité. Voir dans le dernier cours pour un exemple.

Pour chaque fonction  $f$  suivante, calculer sa dérivée au sens des distributions en utilisant la formule des sauts :

$$f' = \{f'\} + \sum_k \sigma_k \delta_{a_k}$$

où  $\{f'\}$  désigne la dérivée classique de  $f$  là où elle existe, et  $\sigma_k = f(a_k^+) - f(a_k^-)$  est le saut en  $a_k$ .

1.  $f(x) = H(x - 1)$  (Heaviside translatée)
2.  $f(x) = H(x) - H(x - 2)$  (fonction porte sur  $[0, 2]$ )
3.  $f(x) = xH(x)$  (rampe)
4.  $f(x) = x^2H(x)$

### Exercice 3 : Équation différentielle avec second membre impulsif

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y' + 2y = \delta_0$$

où  $y$  est une distribution.

1. Quelle est l'interprétation physique de cette équation ?
2. On cherche  $y$  sous la forme  $y = f \cdot H$  où  $f$  est une fonction continue et  $H$  la fonction de Heaviside. Calculer  $y'$  au sens des distributions.
3. En substituant dans l'équation, montrer que  $f$  doit vérifier  $f' + 2f = 0$  sur  $]0, +\infty[$  et déterminer  $f(0)$ .
4. Résoudre l'équation différentielle  $f' + 2f = 0$  et en déduire  $y$ .
5. Vérifier que cette solution est correcte en calculant  $y' + 2y$ .

### Exercice 4 : Équation du second ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle au sens des distributions :

$$y'' + y = \delta_0$$

1. On cherche  $y$  sous la forme  $y = f(t)H(t)$  où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ . Calculer  $y'$  et  $y''$  au sens des distributions.
2. En substituant et en supposant  $f(0) = 0$  (pour éviter le terme en  $\delta'_0$ ), montrer que  $f$  doit vérifier  $f'' + f = 0$  avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .
3. En déduire la solution  $y$ .

### Exercice 5 : Manipulations de fonctions test

On considère la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le support de la fonction  $\psi$ . La fonction  $\psi$  est-elle dans  $\mathbb{D}$  ?  
On pourra étudier  $\psi(-1+h)$  et  $\psi(1-h)$ , avec  $h$  un réel positif qui tend vers 0.
2. En déduire une fonction  $\varphi \in \mathbb{D}$  dont le maximum est 3 et dont le support est  $[-2, 2]$ .

On définit les distributions suivantes :

$$T_1 = \delta_0, \quad T_2 = \delta_{-1} + \delta_1, \quad T_3(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx, \quad T_4(\varphi) = \int_5^{10} \sqrt{x}\varphi(x)dx$$

3. Quelles valeurs associent-elles à la fonction  $\psi$  ?