Séries de fonctions - Chapitre 2
Révisions sur les intégrales

1 Primitives usuelles

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

$$f_1(x) = 5x^3 - 3x + 7 \qquad f_2(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x) \qquad f_3(x) = 10 - 3e^x + x$$
$$f_4(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \qquad f_5(x) = \frac{x+5}{x^2} \qquad f_6(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$$

1. $f_1(x) = 5x^3 - 3x + 7$ sur $\mathbb{R}$:

$$F_1(x) = 5\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 7x + C = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x + C$$

2. $f_2(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$$F_2(x) = 2\sin(x) - 3(-\cos(x)) + C = 2\sin(x) + 3\cos(x) + C$$

3. $f_3(x) = 10 - 3e^x + x$ sur $\mathbb{R}$:

$$F_3(x) = 10x - 3e^x + \frac{x^2}{2} + C$$

4. $f_4(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$:

$$f_4(x) = 5x^{-1/2} + 4x^{-1} + 2x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$F_4(x) = 5\frac{x^{1/2}}{1/2} + 4\ln|x| + 2\frac{x^{-1}}{-1} + 2\frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$F_4(x) = 10\sqrt{x} + 4\ln(x) - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + C$$

5. $f_5(x) = \frac{x+5}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$:

$$f_5(x) = \frac{x}{x^2} + \frac{5}{x^2} = \frac{1}{x} + 5x^{-2}$$

$$F_5(x) = \ln|x| + 5\frac{x^{-1}}{-1} + C = \ln|x| - \frac{5}{x} + C$$

6. $f_6(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$ sur $\mathbb{R}$:

$$F_6(x) = \frac{1}{5}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}x + C = \frac{x^3}{15} + \frac{x}{6} + C$$

2 Primitives usuelles

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle bien choisi :

$$f_1(x) = e^{4x} \qquad f_2(x) = e^{4x+3} \qquad f_3(x) = \sin(2x)$$
$$f_4(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \quad f_5(x) = (2x+1)^2 \quad f_6(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+1}}.$$

1. $f_1(x) = e^{4x}$ sur $\mathbb{R}$:
$$F_1(x) = \frac{e^{4x}}{4} + C$$
2. $f_2(x) = e^{4x+3}$ sur $\mathbb{R}$:
$$f_2(x) = e^{4x}e^3 = e^3 \cdot e^{4x}$$
$$F_2(x) = e^3 \cdot \frac{e^{4x}}{4} + C = \frac{e^{4x+3}}{4} + C$$
3. $f_3(x) = \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$:
$$F_3(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$$
4. $f_4(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$:
$$F_4(x) = \frac{\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)}{3} + C$$
5. $f_5(x) = (2x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$:
$$f_5(x) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$
$$F_5(x) = 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x + C$$
Ou en utilisant la substitution $u = 2x + 1$:
$$F_5(x) = \frac{(2x+1)^3}{3 \cdot 2} + C = \frac{(2x+1)^3}{6} + C$$
6. $f_6(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+1}}$ sur $]-\frac{1}{5}, +\infty[$:
$$f_6(x) = 3(5x+1)^{-1/2}$$
$$F_6(x) = 3\frac{(5x+1)^{1/2}}{1/2 \cdot 5} + C = \frac{6\sqrt{5x+1}}{5} + C$$

3 Reconnaissance de formes

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \qquad h(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$k(x) = \cos(x)\sin^2(x) \qquad l(x) = \frac{1}{x \ln x} \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.$$

1. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$:

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + x^2$ et $u' = 2x$, donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

2. $g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$ sur $\mathbb{R}$:

   On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + e^{3x}$ et $u' = 3e^{3x}$, donc :

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}}$$

$$G(x) = \frac{1}{3} \ln|1 + e^{3x}| + C = \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3x}) + C$$

3. $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

   On reconnaît la forme $u' \cdot u$ avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$, donc :

$$H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

4. $k(x) = \cos(x) \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$:

   On reconnaît la forme $u' \cdot u^n$ avec $u = \sin x$ et $u' = \cos x$, donc :

$$K(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

5. $l(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$:

   On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$, donc :

$$L(x) = \ln|\ln x| + C$$

6. $m(x) = 3x\sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$:

   On reconnaît la forme $u' \cdot u^{1/2}$ avec $u = 1 + x^2$ et $u' = 2x$, donc :

$$m(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1 + x^2)^{1/2}$$

$$M(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{3/2}}{3/2} + C = (1 + x^2)^{3/2} + C$$

4 Reconnaissance de formes

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x - 1)(3x^2 - 2x + 3)^3,\ I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3},\ I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[$.

5 Intégration par parties - Niveau 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{1}.\quad I = \int_0^1 xe^x dx \qquad \mathbf{2}.\quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

1. Calcul de $I = \int_0^1 xe^x dx$

Intégration par parties : $u = x$, $dv = e^x dx$, donc $du = dx$, $v = e^x$

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - (e - 1) = 1$$

2. Calcul de $J = \int_1^e x^2 \ln x dx$

Intégration par parties : $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, donc $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^3}{3}$

$$J = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3}\ln e - \frac{1^3}{3}\ln 1 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - 0 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

6 Intégration par parties - Niveau 2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1}.\quad x \mapsto \arctan(x) \qquad \mathbf{2}.\quad x \mapsto (\ln x)^2 \qquad \mathbf{3}. x \mapsto \sin(\ln x).$$

1. Primitive de $x \mapsto \arctan(x)$

Intégration par parties : $u = \arctan(x)$, $dv = dx$, donc $du = \frac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Pour $\int \frac{x}{1+x^2}dx$, on reconnaît la forme $\frac{u'}{2u}$ avec $u = 1 + x^2$:

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

Donc : $\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

2. Primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$

Intégration par parties : $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$, donc $du = \frac{2\ln x}{x}dx$, $v = x$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x} dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx$$

Pour $\int \ln x dx$, on utilise l'intégration par parties : $u = \ln x$, $dv = dx$, donc $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

Donc : $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + C = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

3. Primitive de $x \mapsto \sin(\ln x)$

Intégration par parties : $u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$, donc $du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$, $v = x$

$$\int \sin(\ln x)dx = x \sin(\ln x) - \int x \cdot \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

Pour $\int \cos(\ln x)dx$, on utilise l'intégration par parties : $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$, donc $du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$, $v = x$

$$\int \cos(\ln x)dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$$

En substituant dans la première équation :

$$\int \sin(\ln x)dx = x \sin(\ln x) - \left(x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx\right)$$

$$2 \int \sin(\ln x)dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) + C$$

Donc : $\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

7 Intégration par parties en boucle

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad 2. \int_0^\pi e^x \sin(x)dx.$$

8 Changements de variables - Niveau 1

En effectuant le changement de variables demandé, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$;
2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ en posant $x = \cos t$;
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t)+t}$ en posant $x = \ln t$.

9 Changements de variables - Niveau 2

En effectuant le changement de variables indiqué, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$ en posant $x = e^t$;
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$;

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$ en posant $t = \sin\theta$.

10 Changement de variables - Recherche de primitives - Niveau 1

En effectuant le changement de variables indiqué, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, en posant $u = \sqrt{1+x}$;
2. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$, en posant $u = e^x$;
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$, en posant $u = \ln x$.

11 Changements de variables - Recherche de primitives - Niveau 2

En effectuant un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos(2\ln x)$;
2. $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$;
3. $x \mapsto \dfrac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$.

12 Primitive de fractions rationnelles

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ **2**.$f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1, +\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2, +\infty[$ **4**.$f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2, 1/3[$

13 Exponentielle * Polynôme

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 (x+6)e^{2x}dx$ **2**. $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$

14 Exponentielle * trigonométrique

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)dx$ **2**. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$

15 Exponentielle * polynôme * trigonométrique

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx.$$

16 Quelques primitives à savoir calculer !

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
4. $x \mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$
5. $x \mapsto \sin^3(x)$
6. $x \mapsto \arctan(x)$

Pour les corrigés : http ://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php ?id=46200