# Analyse et Algèbre - TD4

*Introduction aux distributions*

## Rappels de cours

### Motivation : pourquoi les distributions ?

En physique et en ingénierie, on rencontre souvent des phénomènes que les fonctions classiques ne peuvent pas modéliser : une force ponctuelle, une impulsion ou un choc Les **distributions** généralisent la notion de fonction pour traiter ces cas.

### Fonctions test et espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

**Définition : Fonction test**

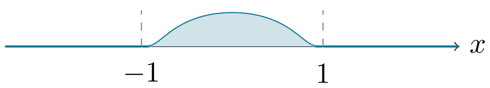
Une **fonction test** est une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est :

1. **Infiniment dérivable** ($C^\infty$)
2. **À support compact** : il existe $[a, b]$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour $x \notin [a, b]$

L'ensemble des fonctions test est noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

**Exemple fondamental :** La fonction bosse (bump function)

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$




### Définition d'une distribution

**Définition : Distribution**

Une **distribution** $T$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. **Linéarité :** $\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle T, \varphi \rangle + \beta\langle T, \psi \rangle$
2. **Continuité :** Si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}$, alors $\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$

**Interprétation :** Une distribution attribue un nombre réel à chaque fonction test. C'est une façon de ń sonder ż un objet mathématique avec des fonctions lisses localisées.

### Distributions régulières

Toute fonction $f$ localement intégrable définit une distribution $T_f$ par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$$

**Exemples :**

— $f(x) = 1$ : $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$

— Fonction de Heaviside $H(x)$ : $\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$

### Distribution de Dirac

**Définition : Distribution de Dirac**

La **distribution de Dirac** $\delta$ est définie par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Plus généralement, le Dirac en $a$ est : $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$

**Propriété fondamentale :** $\delta$ n'est **pas** une fonction ! Aucune fonction $f$ ne vérifie $\int f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ pour toute $\varphi$.

### Dérivation des distributions

**Définition : Dérivée d'une distribution**

La dérivée d'une distribution $T$ est la distribution $T'$ définie par :

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

**Résultat fondamental :** $H' = \delta$ (la dérivée de Heaviside est le Dirac).

## Exercice 1 : Fonctions test

1. Pour chacune des fonctions suivantes, tracer son graphe et dire si c'est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(a) $\varphi(x) = e^{-x^2}$

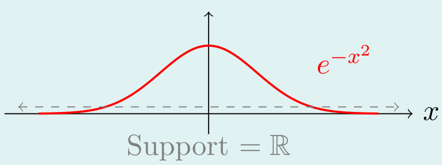
(b) $\varphi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^3 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

(c) $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

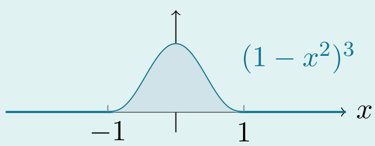
(d) $\varphi(x) = \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)$

**Solution.**

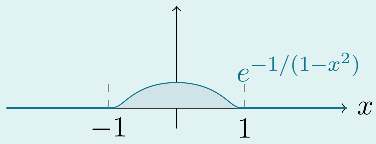
(a) $e^{-x^2}$ est $C^\infty$ mais son support est $\mathbb{R}$ tout entier (elle ne s'annule jamais). **Ce n'est pas une fonction test.**



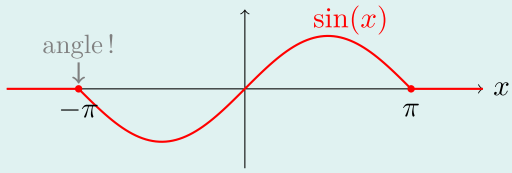

(b) $(1-x^2)^3$ pour $|x| \leq 1$ : le support est compact $[-1, 1]$. En $x = \pm 1$, on a $\varphi(\pm 1) = 0$ et $\varphi'(x) = -6x(1-x^2)^2$, donc $\varphi'(\pm 1) = 0$. On peut montrer que toutes les dérivées s'annulent en $\pm 1$, donc $\varphi$ est $C^\infty$. **C'est une fonction test.**




(c) $e^{-1/(1-x^2)}$ pour $|x| < 1$ : c'est l'exemple fondamental. Support compact $[-1, 1]$, $C^\infty$ car toutes les dérivées tendent vers 0 quand $x \to \pm 1$. **C'est une fonction test.**




(d) $\sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$ : le support est compact $[-\pi, \pi]$. Mais en $x = \pm\pi$, $\sin(\pm\pi) = 0$ mais la dérivée $\cos(\pm\pi) = -1 \neq 0$. La fonction n'est pas dérivable en ces points (angle). **Ce n'est pas une fonction test.**




2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\psi(x) = \varphi(x - a)$ (translatée) est aussi une fonction test. Quel est son support ?

**Solution.**

**$C^\infty$ :** Si $\varphi$ est $C^\infty$, alors $\psi(x) = \varphi(x - a)$ l'est aussi car c'est une composée de $\varphi$ (qui est $C^\infty$) avec la translation $x \mapsto x - a$ (qui est $C^\infty$).

**Support compact :** Si $\text{supp}(\varphi) \subset [b, c]$, alors $\varphi(x - a) = 0$ si $x - a \notin [b, c]$, c'est-à-dire si $x \notin [a + b, a + c]$.

Donc $\text{supp}(\psi) = \text{supp}(\varphi) + a$ (translaté de $a$).

**Conclusion :** $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. On pose $\psi(x) = \varphi(\lambda x)$ (dilatée). Montrer que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et déterminer son support.

**Solution.**

**$C^\infty$ :** $\psi(x) = \varphi(\lambda x)$ est $C^\infty$ car composée de fonctions $C^\infty$.

**Support :** $\psi(x) = 0$ si et seulement si $\varphi(\lambda x) = 0$, c'est-à-dire $\lambda x \notin \text{supp}(\varphi)$.

Si $\text{supp}(\varphi) \subset [a, b]$, alors $\psi(x) = 0$ pour $x \notin [a/\lambda, b/\lambda]$.

Donc $\text{supp}(\psi) = \frac{1}{\lambda}\text{supp}(\varphi)$ (support contracté d'un facteur $\lambda$).

## Exercice 2 : Distributions régulières

1. Soit $f(x) = |x|$. Calculer $\langle T_f, \varphi \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

**Solution.**

Par définition :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |x|\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (-x)\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx$$

Comme $\varphi$ est à support compact, ces intégrales sont en fait sur un intervalle borné et donc bien définies.

2. Soit $H$ la fonction de Heaviside. Calculer explicitement $\langle T_H, \varphi \rangle$ pour les fonctions test suivantes (on suppose $\text{supp}(\varphi) \subset [-2, 2]$) :

   (a) $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

   (b) $\varphi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

**Solution.**

**(a)** On a :

$$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \int_0^1 e^{-1/(1-x^2)}\, dx$$

Cette intégrale n'a pas de forme explicite simple, mais elle vaut environ 0.221.

**(b)** On a :

$$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^1 (1-x^2)^2\, dx = \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\, dx$$

$$= \left[ x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15 - 10 + 3}{15} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

3. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définit-elle une distribution régulière sur $\mathbb{R}$ ? Justifier.

**Solution.**

Pour que $f$ définisse une distribution régulière, il faut que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ converge pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Prenons $\varphi$ une fonction test avec $\varphi(0) \neq 0$ et $\text{supp}(\varphi) \subset [-1, 1]$.

Au voisinage de 0, $\varphi(x) \approx \varphi(0)$, donc $\frac{\varphi(x)}{x} \approx \frac{\varphi(0)}{x}$.

L'intégrale $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{x} dx$ diverge (intégrale impropre).

**Conclusion :** $\frac{1}{x}$ ne définit **pas** directement une distribution régulière. Il faut utiliser la notion de **valeur principale** (vp) : $\text{vp}\frac{1}{x}$ est la distribution définie par :

$$\left\langle \text{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

## Exercice 3 : Distribution de Dirac

1. Calculer les quantités suivantes :

   (a) $\langle \delta, x^2 + 3x + 5 \rangle$

   (b) $\langle \delta_2, e^{-x} \rangle$

   (c) $\langle \delta_{-1}, \cos(\pi x) \rangle$

   (d) $\langle \delta_\pi, \sin(x) \rangle$

**Solution.**

(a) $\langle \delta, x^2 + 3x + 5 \rangle = (0)^2 + 3(0) + 5 = \boxed{5}$

(b) $\langle \delta_2, e^{-x} \rangle = e^{-2} = \boxed{e^{-2}}$

(c) $\langle \delta_{-1}, \cos(\pi x) \rangle = \cos(-\pi) = \boxed{-1}$

(d) $\langle \delta_\pi, \sin(x) \rangle = \sin(\pi) = \boxed{0}$

2. **Propriété de filtrage.** Soit $f$ une fonction continue. Montrer que :

$$\langle f \cdot \delta_a, \varphi \rangle = f(a)\langle \delta_a, \varphi \rangle = f(a)\varphi(a)$$

On note cette propriété $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$.

**Solution.**

Par définition du produit d'une fonction par une distribution :

$$\langle f \cdot \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, f \cdot \varphi \rangle$$

Or $\langle \delta_a, f \cdot \varphi \rangle = (f \cdot \varphi)(a) = f(a)\varphi(a)$.

D'autre part, $f(a)\langle \delta_a, \varphi \rangle = f(a)\varphi(a)$.

**Conclusion :** $\langle f \cdot \delta_a, \varphi \rangle = f(a)\varphi(a) = f(a)\langle \delta_a, \varphi \rangle$.

On peut donc écrire symboliquement : $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$.

*Cas particulier :* $x\delta_0 = 0$ (car $0 \cdot \delta_0 = 0$).

3. En utilisant la propriété précédente, simplifier :

(a) $x^2\delta_3$

(b) $(x-1)\delta_1$

(c) $e^x\delta_0$

(d) $\sin(x)\delta_{\pi/2}$

**Solution.**

(a) $x^2\delta_3 = (3)^2\delta_3 = \boxed{9\delta_3}$

(b) $(x-1)\delta_1 = (1-1)\delta_1 = \boxed{0}$

(c) $e^x\delta_0 = e^0\delta_0 = \boxed{\delta_0}$

(d) $\sin(x)\delta_{\pi/2} = \sin(\pi/2)\delta_{\pi/2} = \boxed{\delta_{\pi/2}}$

4. **Suite régularisante.** On considère la suite de fonctions :

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

(a) Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)dx = 1$ pour tout $n$.

(b) Montrer que pour toute fonction test $\varphi$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

*On pourra utiliser le fait que* $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$.

**Solution.**

**(a)** Changement de variable $u = nx$, donc $du = n\,dx$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

**(b)** On a :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-n^2x^2}\varphi(x)dx$$

Changement de variable $u = nx$ :

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \varphi(u/n) du$$

Quand $n \to +\infty$, $\varphi(u/n) \to \varphi(0)$ uniformément (car $\varphi$ est continue et à support compact). Par convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \varphi(u/n) du = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \varphi(0)$$

**Conclusion :** $\delta_n \to \delta$ au sens des distributions.

## Exercice 4 : Dérivation des distributions

**Rappel :** La dérivée d'une distribution $T$ est définie par $\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle$.

1. **Dérivée de Heaviside.** Montrer que $H' = \delta$ au sens des distributions.

**Solution.**

On calcule $\langle H', \varphi\rangle$ pour toute fonction test $\varphi$ :

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx$$

Comme $\varphi$ est à support compact, $\varphi(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ :

$$= -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

**Conclusion :** $H' = \delta$.

2. Calculer la dérivée (au sens des distributions) de $H_a(x) = H(x - a)$ (Heaviside décalé).

**Solution.**

$$\langle H_a', \varphi\rangle = -\langle H_a, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x-a)\varphi'(x)dx = -\int_a^{+\infty} \varphi'(x)dx$$
$$= -[\varphi(x)]_a^{+\infty} = -(0 - \varphi(a)) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle$$

**Conclusion :** $H(x - a)' = \delta_a$ (Dirac en $a$).

3. **Dérivée du Dirac.** Calculer $\langle \delta', \varphi\rangle$.

**Solution.**

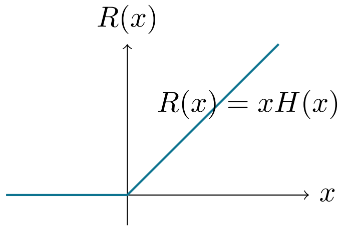
Par définition :

$$\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi'\rangle = -\varphi'(0)$$

La distribution $\delta'$ (appelée **doublet**) agit donc en évaluant l'opposé de la dérivée en 0.

Plus généralement : $\langle \delta^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

4. Soit la fonction ń rampe ż $R(x) = x \cdot H(x) = \max(0, x)$.




(a) Calculer $R'$ au sens des distributions.
(b) Calculer $R''$ au sens des distributions.

**Solution.**

**(a)** On a $R(x) = xH(x)$. Par la règle de Leibniz pour les distributions :

$$R' = (xH)' = H + xH' = H + x\delta$$

Or $x\delta = 0$ (propriété de filtrage : $x\delta_0 = 0 \cdot \delta_0 = 0$).

Donc $\boxed{R' = H}$.

*Vérification directe :*

$$\langle R', \varphi \rangle = -\langle R, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx$$

Intégration par parties ($u = x$, $dv = \varphi' dx$) :

$$= -[x\varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = 0 + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \langle H, \varphi \rangle$$

**(b)** $R'' = H' = \delta$.

Donc $\boxed{R'' = \delta}$.

5. Soit $f(x) = |x|$.

(a) Exprimer $f$ en fonction de la fonction rampe $R$.
(b) En déduire $f'$ et $f''$ au sens des distributions.

**Solution.**

**(a)** On a :

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

On peut écrire : $|x| = xH(x) - x(1 - H(x)) = xH(x) - x + xH(x) = 2xH(x) - x$.

Donc $|x| = 2R(x) - x$.

**(b)** $f' = 2R' - 1 = 2H - 1$.

On reconnaît la fonction **signe** : $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

Donc $\boxed{|x|' = \text{sgn}(x) = 2H(x) - 1}$.

Et $f'' = 2H' = 2\delta$.

Donc $\boxed{|x|'' = 2\delta}$.

## Exercice 5 : Calculs de dérivées distributionnelles

1. Calculer la dérivée au sens des distributions de :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

*Indication : écrire $f$ comme somme de fonctions plus simples.*

**Solution.**

**Méthode 1 : Décomposition**

On peut écrire : $f(x) = x^2(H(x) - H(x-1)) + H(x-1) = x^2H(x) - x^2H(x-1) + H(x-1)$.

**Méthode 2 : Analyse des discontinuités**

La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (en $x = 0$ : $f(0^-) = 0 = f(0^+)$ ; en $x = 1$ : $f(1^-) = 1 = f(1^+)$).

Sa dérivée au sens classique est :

$$f'_{\text{class}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Mais en $x = 0$, $f'(0^-) = 0$ et $f'(0^+) = 0$ : pas de saut. En $x = 1$, $f'(1^-) = 2$ et $f'(1^+) = 0$ : saut de $-2$.

Donc au sens des distributions :

$$\boxed{f' = 2x(H(x) - H(x-1)) - 2\delta_1 = 2x \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x) - 2\delta_1}$$

*Le terme $-2\delta_1$ vient du saut de la dérivée en $x = 1$.*

2. Soit $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer $f'$ et $f''$ au sens des distributions.

**Solution.**

**Calcul de $f'$ :**

On a $f(x) = e^{-|x|}$, donc : - Pour $x > 0$ : $f(x) = e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x}$ - Pour $x < 0$ : $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

Aux limites en 0 : $f'(0^-) = e^0 = 1$ et $f'(0^+) = -e^0 = -1$.

La fonction $f$ est continue en 0 ($f(0) = 1$), donc pas de Dirac dans $f'$.

On peut écrire : $f'(x) = -\text{sgn}(x)e^{-|x|}$ pour $x \neq 0$.

$$\boxed{f'(x) = -\text{sgn}(x)e^{-|x|}}$$

**Calcul de $f''$ :**

$f'(x) = e^x$ pour $x < 0$ et $f'(x) = -e^{-x}$ pour $x > 0$.

Donc $f''_{\text{class}}(x) = e^x$ pour $x < 0$ et $f''_{\text{class}}(x) = e^{-x}$ pour $x > 0$.

Saut de $f'$ en 0 : $f'(0^+) - f'(0^-) = -1 - 1 = -2$.

Donc :

$$\boxed{f'' = e^{-|x|} - 2\delta_0 = f - 2\delta}$$

On a la relation remarquable : $f'' - f = -2\delta$.

3. **Application : EDP avec source ponctuelle.** On considère l'équation :

$$-u''(x) = \delta_0$$

Trouver une solution $u$ continue sur $\mathbb{R}$, en utilisant le résultat de la question précédente.

**Solution.**

D'après la question précédente, si $f(x) = e^{-|x|}$, alors $f'' = f - 2\delta$.

Donc $-f'' = 2\delta - f$, soit $(-f/2)'' = \delta - f/2$.

Cherchons plutôt directement. On veut $-u'' = \delta$.

Pour $x \neq 0$, on a $u'' = 0$, donc $u(x) = ax + b$ pour $x > 0$ et $u(x) = cx + d$ pour $x < 0$.

**Continuité en 0 :** $u(0^+) = b$ et $u(0^-) = d$, donc $b = d$.

**Saut de la dérivée :** La relation $-u'' = \delta$ implique que le saut de $u'$ en 0 vaut $-1$ : $u'(0^+) - u'(0^-) = -1$, soit $a - c = -1$.

**Conditions aux limites :** Pour une solution bornée, on impose $a \leq 0$ et $c \geq 0$.

La solution la plus simple est $a = 0$, $c = 1$, $b = d = 0$ :

$$u(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Mais si on veut une solution symétrique et bornée : $a = -1/2$, $c = 1/2$, ce qui donne :

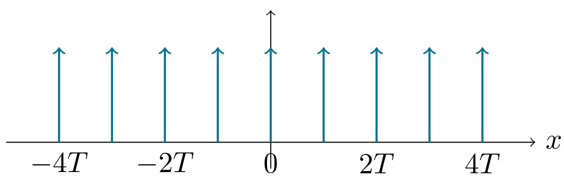
$$\boxed{u(x) = -\frac{|x|}{2} + C}$$

*Application physique :* C'est le potentiel créé par une charge ponctuelle en dimension 1.

## Exercice 6 : Peigne de Dirac

Le **peigne de Dirac** de période $T$ est la distribution :

$$_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}$$




1. Calculer $\langle _T, \varphi \rangle$ pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

**Solution.**

Par linéarité et définition du Dirac :

$$\langle {}_T, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \delta_{nT}, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nT)$$

Comme $\varphi$ est à support compact, seul un nombre fini de termes sont non nuls.

**Interprétation :** Le peigne de Dirac ń échantillonne ż la fonction $\varphi$ aux points $nT$.

2. Montrer que ${}_T$ est $T$-périodique : ${}_T(x - T) = {}_T(x)$.

**Solution.**

On a :

$${}_T(x - T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}(x - T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta((x - T) - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - (n+1)T)$$

En posant $m = n + 1$ :

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mT) = {}_T(x)$$

**Conclusion :** ${}_T$ est $T$-périodique.

3. Calculer la dérivée ${}'_T$.

**Solution.**

Par linéarité de la dérivation :

$${}'_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'_{nT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'_{nT}$$

C'est un ń peigne de doublets ż.

4. **Application : échantillonnage.** Soit $f$ une fonction continue. On définit la fonction échantillonnée $f_e = f \cdot {}_T$. Exprimer $\langle f_e, \varphi \rangle$.

**Solution.**

Par définition du produit :

$$\langle f \cdot {}_T, \varphi \rangle = \langle {}_T, f \cdot \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f \cdot \varphi)(nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\varphi(nT)$$

On peut aussi écrire :

$$f \cdot {}_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta_{nT}$$

**Interprétation :** $f_e$ est une ń version discrète ż de $f$, constituée de Diracs pondérés par les valeurs de $f$ aux points d'échantillonnage.

## Exercice 7 : Transformée de Fourier des distributions

**Rappel :** La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est :

$$\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\, dx$$

Pour les distributions, on définit : $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$.

1. **Transformée de Fourier du Dirac.** Calculer $\hat{\delta}$.

**Solution.**

Pour toute fonction test $\varphi$ :

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi i\cdot 0\cdot x}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

**Conclusion :** $\boxed{\hat{\delta} = 1}$

*Interprétation :* Le Dirac (impulsion infiniment localisée en espace) a un spectre constant (toutes les fréquences avec la même amplitude).

2. En déduire la transformée de Fourier de la fonction constante $f(x) = 1$.

*Indication : utiliser que $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x) = f(-x)$ pour les distributions.*

**Solution.**

D'après la formule d'inversion, $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f\}\}(x) = f(-x)$.

On a $\hat{\delta} = 1$, donc $\mathcal{F}\{1\} = \mathcal{F}\{\hat{\delta}\}$.

Or $\mathcal{F}\{\hat{f}\}(x) = f(-x)$, donc $\mathcal{F}\{1\}(x) = \delta(-x) = \delta(x)$ (car $\delta$ est paire).

**Conclusion :** $\boxed{\hat{1} = \delta}$

*Interprétation :* Un signal constant (DC) a un spectre qui est un Dirac à la fréquence 0.

3. Calculer la transformée de Fourier de $\delta_a$ (Dirac en $a$).

**Solution.**

Pour toute fonction test $\varphi$ :

$$\langle \hat{\delta_a}, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi iax}dx$$

Or $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi iax}dx = \langle e^{-2\pi ia\cdot}, \varphi \rangle$.

**Conclusion :** $\boxed{\hat{\delta_a}(\xi) = e^{-2\pi ia\xi}}$

*C'est la propriété de décalage en Fourier : un décalage en espace donne une modulation en fréquence.*

4. Calculer la transformée de Fourier de $e^{2\pi i\nu_0 x}$ (exponentielle complexe de fréquence $\nu_0$).

**Solution.**

Par dualité avec le résultat précédent :

Si $\hat{\delta_a}(\xi) = e^{-2\pi ia\xi}$, alors $\mathcal{F}\{e^{-2\pi iax}\} = \delta_a$.

En remplaçant $a$ par $-\nu_0$ :

$$\mathcal{F}\{e^{2\pi i\nu_0 x}\} = \delta_{-\nu_0}(-\xi) = \delta_{\nu_0}(\xi)$$

**Conclusion :** $\boxed{\mathcal{F}\{e^{2\pi i\nu_0 x}\} = \delta_{\nu_0}}$

*Une sinusoïde pure de fréquence $\nu_0$ a un spectre qui est un Dirac en $\nu_0$.*

5. En déduire la transformée de Fourier de $\cos(2\pi\nu_0 x)$ et $\sin(2\pi\nu_0 x)$.

**Solution.**

**Pour le cosinus :**

$$\cos(2\pi\nu_0 x) = \frac{e^{2\pi i\nu_0 x} + e^{-2\pi i\nu_0 x}}{2}$$

Par linéarité :

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi\nu_0 x)\} = \frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0})$$

**Pour le sinus :**

$$\sin(2\pi\nu_0 x) = \frac{e^{2\pi i\nu_0 x} - e^{-2\pi i\nu_0 x}}{2i}$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi\nu_0 x)\} = \frac{1}{2i}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0}) = \frac{i}{2}(\delta_{-\nu_0} - \delta_{\nu_0})$$

**Conclusions :**

$$\boxed{\widehat{\cos}(2\pi\nu_0 x) = \frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0})}$$

$$\boxed{\widehat{\sin}(2\pi\nu_0 x) = \frac{1}{2i}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0})}$$

6. **Transformée de la dérivée.** Montrer que $\mathcal{F}\{T'\} = 2\pi i\xi \cdot \hat{T}$.

   En déduire $\mathcal{F}\{\delta'\}$.

**Solution.**

Soit $\varphi$ une fonction test. On a :

$$\langle \mathcal{F}\{T'\}, \varphi\rangle = \langle T', \hat{\varphi}\rangle = -\langle T, \hat{\varphi}'\rangle$$

Or, par dérivation sous l'intégrale :

$$\hat{\varphi}'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(-2\pi ix)e^{-2\pi i\xi x}dx = \mathcal{F}\{-2\pi ix\varphi(x)\}(\xi)$$

Donc :

$$-\langle T, \hat{\varphi}'\rangle = -\langle T, \mathcal{F}\{-2\pi ix\varphi\}\rangle = \langle \hat{T}, 2\pi ix\varphi\rangle = \langle 2\pi i\xi\hat{T}, \varphi\rangle$$

**Conclusion :** $\mathcal{F}\{T'\} = 2\pi i\xi \cdot \hat{T}$.

**Application à $\delta'$ :**

$$\mathcal{F}\{\delta'\} = 2\pi i\xi \cdot \hat{\delta} = 2\pi i\xi \cdot 1 = \boxed{2\pi i\xi}$$

7. **Formule de Poisson.** Admettre que la transformée de Fourier du peigne de Dirac $_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}$

est :

$$\hat{}_T = \frac{1}{T}{}_{1/T} = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k/T}$$

En déduire la **formule de Poisson** : pour une fonction $f$ suffisamment régulière,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right)$$

**Solution.**

Soit $f$ une fonction (régulière et à décroissance rapide). Le produit de convolution $f * {}_T$ donne :

$$(f * {}_T)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x - nT)$$

En Fourier : $\mathcal{F}\{f * {}_T\} = \hat{f} \cdot \hat{}_T = \hat{f} \cdot \frac{1}{T}{}_{1/T}$.

En évaluant en $x = 0$ (ou en appliquant à une fonction test appropriée) :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)$$

correspond à

$$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k/T)$$

**Formule de Poisson :**

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right)}$$

*Application :* Cette formule est fondamentale en traitement du signal (théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist) et en théorie des nombres.

## Formulaire : Distributions

| **Distribution** | **Définition** |
|---|---|
| $\delta$ (Dirac en 0) | $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ |
| $\delta_a$ (Dirac en $a$) | $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ |
| $\delta'$ (doublet) | $\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$ |
| $\delta^{(n)}$ | $\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$ |
| $T_f$ (dist. régulière) | $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ |

TABLE 1 – Distributions fondamentales

| **Fonction** | **Dérivée au sens des distributions** |
|---|---|
| $H(x)$ (Heaviside) | $H' = \delta$ |
| $H(x-a)$ | $(H(x-a))' = \delta_a$ |
| $\lvert x\rvert$ | $\lvert x\rvert' = \operatorname{sgn}(x), \quad \lvert x\rvert'' = 2\delta$ |
| $xH(x)$ (rampe) | $(xH)' = H, \quad (xH)'' = \delta$ |
| $e^{-\lvert x\rvert}$ | $(e^{-\lvert x\rvert})'' = e^{-\lvert x\rvert} - 2\delta$ |

TABLE 2 – Dérivées distributionnelles usuelles

| **Distribution** | **Transformée de Fourier** |
|---|---|
| $\delta$ | $\hat{\delta} = 1$ |
| $1$ | $\hat{1} = \delta$ |
| $\delta_a$ | $\hat{\delta_a}(\xi) = e^{-2\pi i a \xi}$ |
| $e^{2\pi i \nu_0 x}$ | $\delta_{\nu_0}$ |
| $\cos(2\pi\nu_0 x)$ | $\frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0})$ |
| $\sin(2\pi\nu_0 x)$ | $\frac{1}{2i}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0})$ |
| $\delta'$ | $2\pi i \xi$ |
| ${}_T$ (peigne) | $\frac{1}{T}{}_{1/T}$ |

TABLE 3 – Transformées de Fourier de distributions