Méthode des éléments finis – TD4

Des éléments 2D

En dimension 2, les éléments finis de Lagrange sont des triangles et les fonctions de forme sont des polynômes à deux variables. Pour des éléments d'ordre 1 (les seuls points du maillage sont les sommets du triangle), il faut 3 polynômes par éléments.

La première section vise à obtenir des formules pour calculer les expressions des polynômes sur chaque élément.

Préliminaires : élément de réference

Dans un repère (O, r, s), prenons un triangle rectangle isocèle de côté 1 et de sommets $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, c'est notre élément de référence.

1. Pour ce triangle, rappelez ou retrouvez les polynômes $\varphi_A(r, s)$, $\varphi_B(r, s)$, $\varphi_C(r, s)$ tels que

$$\varphi_A(r_A, s_A) = 1, \quad \varphi_A(r_B, s_B) = 0, \quad \varphi_A(r_C, s_C) = 0.$$
$$\varphi_B(r_A, s_A) = 0, \quad \varphi_B(r_B, s_B) = 1, \quad \varphi_B(r_C, s_C) = 0.$$
$$\varphi_C(r_A, s_A) = 0, \quad \varphi_C(r_B, s_B) = 0, \quad \varphi_C(r_C, s_C) = 1.$$

Solution.

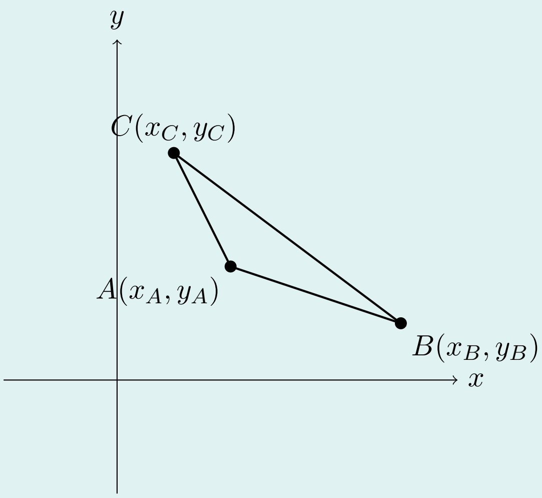
Les polynômes sont :

$$\varphi_A(r, s) = 1 - r - s, \quad \varphi_B(r, s) = r, \quad \varphi_C(r, s) = s.$$

Plaçons-nous maintenant dans un autre repère orthonormé (O, x, y) et considérons un triangle T quelconque, de sommets $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$.

2. Faites un dessin.

Solution.



Nous allons définir un nouveau repère (A, r, s) lié au triangle T de la façon suivante :

— A est l'origine,
— r est le vecteur $\overrightarrow{AB}$,
— s est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

3. Donner les coordonnées de A, B et C dans ce repère. et déduisez-en les expressions des polynômes $\varphi_A(r, s)$, $\varphi_B(r, s)$, $\varphi_C(r, s)$ dans ce repère.

Solution.

Dans ce repère, les coordonnées de A, B et C sont respectivement $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

On retrouve notre élément de référence.

Les polynômes sont :

$$\varphi_A(r,s) = 1 - r - s, \quad \varphi_B(r,s) = r, \quad \varphi_C(r,s) = s.$$

Notre but est maintenant de déterminer les polynômes $\varphi_A(x,y)$, $\varphi_B(x,y)$, $\varphi_C(x,y)$ dans le repère (O,x,y). Pour cela, nous cherchons le changement de base sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} s.$$

où (a_1,b_1), (a_2,b_2) et (a_3,b_3) sont des constantes que nous allons déterminer.

4. Déterminez les constantes (a_1,b_1), (a_2,b_2) et (a_3,b_3) en fonction des coordonnées de A, B et C dans les deux repères.

Solution.

Les abscisses des points A, B et C doivent vérifier :

$$x_A = a_1, \quad x_B = a_1 + a_2, \quad x_C = a_1 + a_3.$$

On en déduit :

$$a_1 = x_A, \quad a_2 = x_B - x_A, \quad a_3 = x_C - x_A.$$

De même pour les ordonnées :

$$b_1 = y_A, \quad b_2 = y_B - y_A, \quad b_3 = y_C - y_A.$$

5. Déterminez les expressions des polynômes $\varphi_A(x,y)$, $\varphi_B(x,y)$, $\varphi_C(x,y)$ dans le cas où $A = (1,0)$, $B = (2,0)$, $C = (1,1)$.

Solution.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} x = 1 + r \\ y = s \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} r = x - 1 \\ s = y \end{cases}$$

On en déduit, si $\varphi'_A(r,s)$, $\varphi'_B(r,s)$ et $\varphi'_C(r,s)$ sont les polynômes de référence :

$$\varphi_A(x,y) = \varphi'_A(r,s) = \varphi'_A(x-1,y) = 1 - (x-1) - y = 2 - x - y,$$

$$\varphi_B(x,y) = \varphi'_B(r,s) = \varphi'_B(x-1,y) = x - 1,$$

$$\varphi_C(x,y) = \varphi'_C(r,s) = \varphi'_C(x-1,y) = y.$$

6. Faites de même dans le cas où $A = (2,2)$, $B = (1,2)$, $C = (2,1)$.

Solution.

On a :

$$\begin{cases} x = 2 - r \\ y = 2 - s \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} r = 2 - x \\ s = 2 - y \end{cases}$$

On en déduit :

$$\varphi_A(x,y) = \varphi'_A(r,s) = \varphi'_A(2-x, 2-y) = 1 - (2-x) - (2-y) = x + y - 3,$$

$$\varphi_B(x,y) = \varphi'_B(r,s) = \varphi'_B(2-x, 2-y) = 2 - x,$$

$$\varphi_C(x,y) = \varphi'_C(r,s) = \varphi'_C(2-x, 2-y) = 2 - y.$$

Une équation différentielle

Considérons l'équation différentielle suivante sur le domaine carré $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega,$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Exercice 1 : des triangles rectangle isocèle

1. **Formulation Variationnelle** : Donnez la formulation variationnelle du problème. On pourra utiliser la formule de Green, généralisation de l'intégration par parties en dimension 2 :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = -\int_\Omega v \Delta u \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS,$$

où $\partial\Omega$ est la frontière du domaine Ω.

Solution.

Pour la formulation variationnelle, on multiplie par une fonction test v et on intègre :

$$-\int_\Omega v \Delta u \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = -\int_\Omega v \Delta u \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS,$$

en choisissant $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient la formulation variationnelle :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

On pose donc

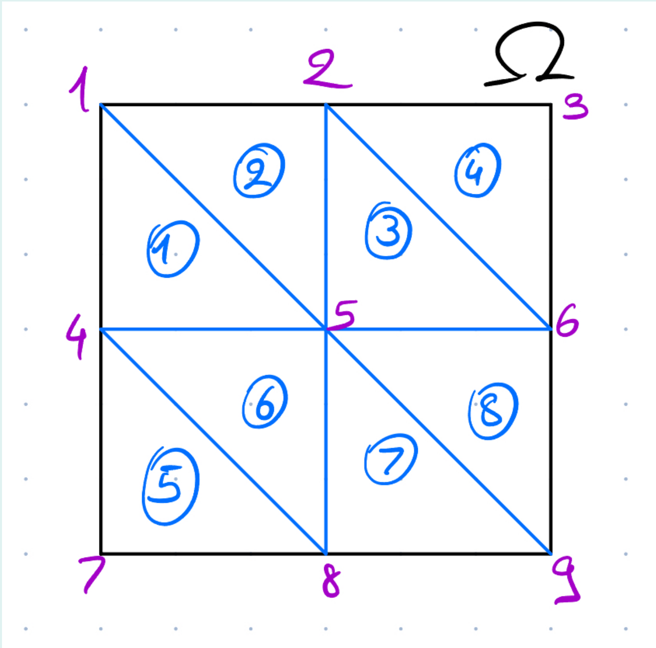
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad L(v) = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

2. **Maillage en triangles rectangle isocèle** :

   a. Découpez le domaines en 4 carrés, puis en 8 triangles rectangle isocèles. Nommez les noeuds et les éléments correspondant.

   Solution.

   Une possibilité :



   b. Etablissez le tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.

Solution.

Ce maillage est associé aux tableaux suivants :

Tableau de coordonnées des noeuds :

Noeud	Coordonnées
1	(0,1)
2	(1/2,1)
3	(1,1)
4	(0,1/2)
5	(1/2,1/2)
6	(1,1/2)
7	(0,0)
8	(1/2,0)
9	(1,0)

Tableau de connectivité des éléments :

Elément	noeuds
1	1, 4, 5
2	1, 5, 2
3	2, 5, 6
4	2, 6, 3
5	4, 7, 8
6	4, 8, 5
7	5, 8, 9
8	5, 9, 6

3. **Calcul des Coefficients du Système Linéaire** :

   a. Placez-vous dans l'élément de votre choix, et déterminer les 3 polynômes pour cet élément. *On utilisera la première partie*

Solution.

On se place par exemple sur l'élément 1 : Les coordonnées des noeuds sont :

— $A = (0, 1/2)$ est le sommet 4
— $B = (1/2, 1/2)$ est le sommet 5
— $C = (0, 1)$ est le sommet 1

Le changement de repère est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{s}{2} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} r = 2x \\ s = 2y - 1 \end{cases}$$

Les polynômes sont :

$$\varphi_A(x,y) = 1 - 2x - (2y-1) = 2 - 2x - 2y = 2 - 2x - 2y,$$

$$\varphi_B(x,y) = 2x,$$

$$\varphi_C(x,y) = 2\ y - 1\ .$$

b. Exprimez puis calculer la matrice de rigidité K_e pour cet élément.

Solution.

On cherche la solution approchée u_h sous la forme $u_h = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \varphi_i(x,y)$, la matrice de rigidité s'exprime :

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_A, \varphi_A) & a(\varphi_A, \varphi_B) & a(\varphi_A, \varphi_C) \\ a(\varphi_B, \varphi_A) & a(\varphi_B, \varphi_B) & a(\varphi_B, \varphi_C) \\ a(\varphi_C, \varphi_A) & a(\varphi_C, \varphi_B) & a(\varphi_C, \varphi_C) \end{pmatrix}$$

avec,

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \int_0^1 \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j 1_{(x,y)\in ABC}\, dx\, dy.$$

Commençons par déterminer les vecteurs gradients des polynômes :

$$\nabla\varphi_A = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla\varphi_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\varphi_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a(\varphi_A, \varphi_A) &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} 1_{(x,y)\in ABC}\, dx\, dy \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^1 1_{(x,y)\in ABC}\, dx\, dy = 8\, \text{Aire}(ABC) \\ &= 8 \times \frac{1}{8} = 1. \end{aligned}$$

De même, on trouve :

$$a(\varphi_A, \varphi_B) = a(\varphi_A, \varphi_C) = a(\varphi_B, \varphi_A) = a(\varphi_C, \varphi_A) = -\frac{1}{2}$$

et
$$a(\varphi_B, \varphi_B) = a(\varphi_C, \varphi_C) = \frac{1}{2}.$$
et enfin :
$$a(\varphi_B, \varphi_C) = a(\varphi_C, \varphi_B) = 0.$$
On en déduit la matrice de rigidité :
$$K_e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Elle conduira au système linéaire :
$$K_e \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_A) \\ L(\varphi_B) \\ L(\varphi_C) \end{pmatrix}.$$

c. Choisissez un triangle qui n'est pas dans le même sens que votre premier choix, exprimez la matrice de rigidité pour ce triangle.

Solution.

Choisissons maintenant un autre triangle, par exemple le triangle 8. Les coordonnées des noeuds sont :

- $A = (1, 1/2)$ est le sommet 6
- $B = (1/2, 1/2)$ est le sommet 5
- $C = (1, 0)$ est le sommet 9

Le changement de repère est :
$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{r}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{s}{2} \end{cases}$$
donc
$$\begin{cases} r = 2 - 2x \\ s = 1 - 2y \end{cases}$$
Les polynômes sont :
$$\varphi_A(x,y) = 1-(2-2x)-(1-2y) = 2x+2y-2, \quad \varphi_B(x,y) = 2-2x, \quad \varphi_C(x,y) = 1-2y.$$
Leur gradient :
$$\nabla\varphi_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla\varphi_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\varphi_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
On en déduit la matrice de rigidité :
$$K_e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
C'est la même matrice que pour l'élément 1. Le système linéaire associé est :
$$K_e \begin{pmatrix} \alpha_6 \\ \alpha_5 \\ \alpha_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_A) \\ L(\varphi_B) \\ L(\varphi_C) \end{pmatrix}.$$

d. Ecrivez le système linéaire associé à votre maillage.

Solution.

Pour obtenir la matrice de rigidité globale, il faut suivre les étapes décrites dans le CM :

- On écrit une grosse matrice pleine de 0, de la bonne taille : ici 9×9.
- On place les matrices de rigidité élémentaires dans les endroits adéquats.

Par exemple, la matrice de rigidité qui prend en compte uniquement l'élément 1 est :

$$K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En ajoutant celle pour l'élément 8, on obtient :

$$K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, en ajoutant tous les éléments, on obtient :

$$K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & . & -1 & . & . & . & . & . \\ -1 & 4 & -1 & . & -2 & . & . & . & . \\ . & -1 & 2 & . & . & -1 & . & . & . \\ -1 & . & . & 4 & -2 & . & -1 & . & . \\ . & -2 & . & -2 & 8 & -2 & . & -2 & . \\ . & . & -1 & . & -2 & 4 & . & . & -1 \\ . & . & . & -1 & . & . & 2 & -1 & . \\ . & . & . & . & -2 & . & -1 & 4 & -1 \\ . & . & . & . & . & -1 & . & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Pour aller plus vite :

- Pour les coefficients diagonaux, on peut dire qu'un sommet marque 2 points s'il est sur un angle droit, un point sinon.
- Pour les coefficients non diagonaux, on peut dire qu'une paire de sommets marque 1 point si c'est un côté d'un triangle, mais pas l'hypothénuse.)

Le système linéaire associé est :

$$K \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix}.$$

Pour les f_i, il faudra procéder de manière analogue.

Exercice 2 : des carrés

a. **Préliminaires : élément de référence** :

Dans un repère (O, r, s), prenons un carré de côté 2 et de sommets $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$, $D = (-1, 1)$, c'est notre élément de référence.

1. Pour ce carré, rappelez ou retrouvez les polynômes $\varphi_A(r, s)$, $\varphi_B(r, s)$, $\varphi_C(r, s)$, $\varphi_D(r, s)$.

Solution.

Les polynômes sont :

$$\varphi_A(r, s) = \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s), \quad \varphi_B(r, s) = \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s),$$

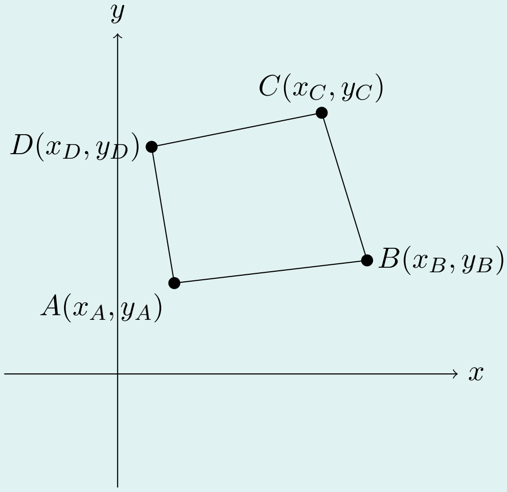
et

$$\varphi_C(r, s) = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s), \quad \varphi_D(r, s) = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s).$$

Plaçons-nous maintenant dans un autre repère orthonormé (O, x, y) et considérons un quadrilatère Q quelconque, de sommets $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$.

2. Faites un dessin.

Solution.



Nous allons définir un nouveau repère (M, r, s) lié au quadrilatère Q de la façon suivante :
— M est l'origine, le centre du quadrilatère,
— r parallèle à (AB),
— s parallèle à (AC).

3. Donner les coordonnées de A, B, C, D dans ce repère et déduisez-en les expressions des polynômes $\varphi_A(r,s)$, $\varphi_B(r,s)$, $\varphi_C(r,s)$, $\varphi_D(r,s)$ dans ce repère.

Solution.

Dans ce repère, on retrouve notre élément de référence, les polynômes sont les mêmes qu'à la première question.

Notre but est maintenant de déterminer les polynômes $\varphi_A(x,y)$, $\varphi_B(x,y)$, $\varphi_C(x,y)$, $\varphi_D(x,y)$ dans le repère (O, x, y). Pour cela, nous cherchons le changement de base sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} rs.$$

où (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) et (a_4, b_4) sont des constantes que nous allons déterminer.

4. Déterminez les constantes (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) et (a_4, b_4) en fonction des coordonnées de A, B, C et D dans les deux repères.

Solution.

Pour les abscisses :

$$x_A = a_1 - a_2 - a_3 + a_4, \quad x_B = a_1 + a_2 - a_3 - a_4,$$

$$x_C = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad x_D = a_1 - a_2 + a_3 - a_4.$$

Cela donne un système de 4 équations à 4 inconnues, qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix}.$$

L'inverse de la matrice du système est :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve donc :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_A + x_C \\ x_C - x_D \\ -x_B + x_C \\ x_A - x_B + x_C - x_D \end{pmatrix}.$$

les ordonnées se déduisent de manière analogue :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_A + y_C \\ y_C - y_D \\ -y_B + y_C \\ y_A - y_B + y_C - y_D \end{pmatrix}.$$

5. Déterminez les expressions des polynômes $\varphi_A(x, y)$, $\varphi_B(x, y)$, $\varphi_C(x, y)$, $\varphi_D(x, y)$ dans le cas où $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$.

Solution.

Avec ces coordonnées, le système devient :

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = a_4 = 0$$

et

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_3 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 = b_4 = 0.$$

Le changement de repère s'écrit donc

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}r \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}s \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} r = 2x - 1 \\ s = 2y - 1 \end{cases}$$

En notant, $\varphi'_A, \varphi'_B, \varphi'_C, \varphi'_D$ les polynômes associés à l'élément de référence, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_A(x, y) &= \varphi'_A(r, s) = \varphi'_A(2x - 1, 2y - 1) \\ &= \frac{1}{4}(1 - (2x - 1))(1 - (2y - 1)) = (1 - x)(1 - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_B(x, y) &= \varphi'_B(r, s) = \varphi'_B(2x - 1, 2y - 1) \\ &= \frac{1}{4}(1 + (2x - 1))(1 - (2y - 1)) = x(1 - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_C(x, y) &= \varphi'_C(r, s) = \varphi'_C(2x - 1, 2y - 1) \\ &= \frac{1}{4}(1 + (2x - 1))(1 + (2y - 1)) = xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_D(x,y) &= \varphi'_D(r,s) = \varphi'_D(2x-1, 2y-1)\\ &= \frac{1}{4}(1-(2x-1))(1+(2y-1)) = (1-x)y\end{aligned}$$

6. Faites de même dans le cas où $A = (1,1)$, $B = (2,1)$, $C = (2,2)$, $D = (1,2)$.

Solution.

Avec ces coordonnées, on obtient

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_4 = 0,$$

$$b_1 = \frac{3}{2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{1}{2}, \quad b_4 = 0,$$

le changement de repère s'écrit :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}r \\ y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}s \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} r = 2x-3 \\ s = 2y-3 \end{cases}$$

En notant $\varphi'_A, \varphi'_B, \varphi'_C, \varphi'_D$ les polynômes associés à l'élément de référence, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_A(x,y) &= \varphi'_A(r,s) = \varphi'_A(2x-3, 2y-3)\\ &= \frac{1}{4}(1-(2x-3))(1-(2y-3)) = (2-x)(2-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_B(x,y) &= \varphi'_B(r,s) = \varphi'_B(2x-3, 2y-3)\\ &= \frac{1}{4}(1+(2x-3))(1-(2y-3)) = (x-1)(2-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_C(x,y) &= \varphi'_C(r,s) = \varphi'_C(2x-3, 2y-3)\\ &= \frac{1}{4}(1+(2x-3))(1+(2y-3)) = (x-1)(y-1)\end{aligned}$$

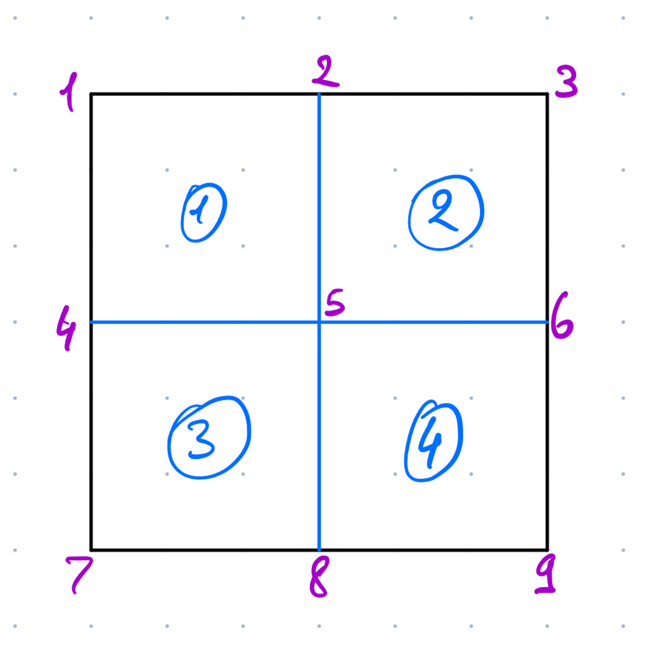
$$\begin{aligned}\varphi_D(x,y) &= \varphi'_D(r,s) = \varphi'_D(2x-3, 2y-3)\\ &= \frac{1}{4}(1-(2x-3))(1+(2y-3)) = (2-x)(y-1)\end{aligned}$$

b. **définir le maillage** :

1. Découpez le domaine Ω en 4 carrés. Nommez les noeuds et les éléments correspondant.

Solution.

Par exemple :



2. Etablissez le nouveau tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.

Solution.

Pour ce maillage, le tableau de coordonnées des noeuds est le même que pour les triangles : ce sont les mêmes noeuds :

Noeud	Coordonnées
1	(0,1)
2	(1/2,1)
3	(1,1)
4	(0,1/2)
5	(1/2,1/2)
6	(1,1/2)
7	(0,0)
8	(1/2,0)
9	(1,0)

Tableau de connectivité des éléments :

Elément	noeuds
1	4, 5, 2, 1
2	5, 6, 3, 2
3	7, 8, 5, 4
4	8, 9, 6, 5

c. **Obtention des fonctions de forme** :

1. Choisissez un élément fini, et exprimez les fonctions de forme pour cet élément.

Solution.

Prenons par exemple l'élément 1. Les coordonnées des points sont :

— $A = (0, 1/2)$ pour le sommet 4

— $B = (1/2, 1/2)$ pour le sommet 5

— $C = (1/2, 1)$ pour le sommet 2

— $D = (0, 1)$ pour le sommet 1

Le changement de repère s'écrit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} r \\ y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} s \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} r = 4x - 1 \\ s = 4y - 3 \end{cases}$$

En notant $\varphi'_A(r,s)$, $\varphi'_B(r,s)$, $\varphi'_C(r,s)$, $\varphi'_D(r,s)$ les polynômes associés à l'élément de référence, les polynômes sont :

$$\begin{aligned} \varphi_A(x,y) &= \varphi'_A(r,s) = \varphi'_A(4x-1, 4y-3) \\ &= \frac{1}{4}(1-(4x-1))(1-(4y-3)) = \frac{1}{4}(2-4x)(4-4y) = 2(1-2x)(1-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_B(x,y) &= \varphi'_B(r,s) = \varphi'_B(4x-1, 4y-3) \\ &= \frac{1}{4}(1+(4x-1))(1-(4y-3)) = \frac{1}{4}(4x)(4-4y) = 4x(1-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_C(x,y) &= \varphi'_C(r,s) = \varphi'_C(4x-1, 4y-3) \\ &= \frac{1}{4}(1+(4x-1))(1+(4y-3)) = \frac{1}{4}(4x)(4y-2) = 4x(2y-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_D(x,y) &= \varphi'_D(r,s) = \varphi'_D(4x-1, 4y-3) \\ &= \frac{1}{4}(1-(4x-1))(1+(4y-3)) = \frac{1}{4}(2-4x)(4y-2) = (1-2x)(2y-1) \end{aligned}$$

2. Décrivez puis calculez la matrice élémentaire K_e pour cet élément.

Solution.

La matrice de rigidité s'écrit :

$$K_e = \begin{pmatrix} a(\varphi_A,\varphi_A) & a(\varphi_A,\varphi_B) & a(\varphi_A,\varphi_C) & a(\varphi_A,\varphi_D) \\ a(\varphi_B,\varphi_A) & a(\varphi_B,\varphi_B) & a(\varphi_B,\varphi_C) & a(\varphi_B,\varphi_D) \\ a(\varphi_C,\varphi_A) & a(\varphi_C,\varphi_B) & a(\varphi_C,\varphi_C) & a(\varphi_C,\varphi_D) \\ a(\varphi_D,\varphi_A) & a(\varphi_D,\varphi_B) & a(\varphi_D,\varphi_C) & a(\varphi_D,\varphi_D) \end{pmatrix}$$

avec

$$a(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy.$$

Commençons par calculer les vecteurs gradients :

$$\nabla\varphi_A = \begin{pmatrix} -4(1-y) \\ -2(1-2x) \end{pmatrix}, \qquad \nabla\varphi_B = \begin{pmatrix} 4(1-y) \\ -4x \end{pmatrix},$$

$$\nabla\varphi_C = \begin{pmatrix} 4(2y-1) \\ 8x \end{pmatrix}, \qquad \nabla\varphi_D = \begin{pmatrix} -2(2y-1) \\ 2(1-2x) \end{pmatrix}.$$

Pour le premier coefficient :

$$
\begin{aligned}
a(\varphi_A, \varphi_A) &= \int_0^1 \int_0^1 \nabla\varphi_A \cdot \nabla\varphi_A dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 16(1-y)^2 + 4(1-2x)^2 dxdy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} 16(1-y)^2 + \left[-\frac{2}{3}(1-2x)^3\right]_0^1 dy \\
&= \left[-\frac{16}{3}(1-y)^3\right]_0^1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\
&= \frac{16}{3} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

Il faudrait calculer les 9 autres intégrales pour pouvoir obtenir une matrice.

3. Comparez les résultats de cette méthode avec ceux obtenus dans l'Exercice 1. Les noeuds sont identiques, le système linéaire est-il le même ?

Solution.

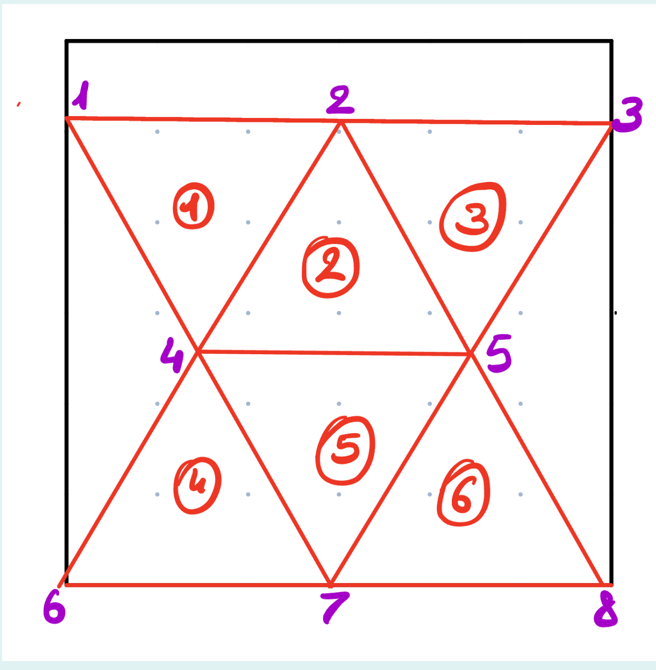
Les deux méthodes utilisent les mêmes noeuds, mais le système linéaire obtenu n'est pas le même : avec les triangles, chaque matrice élémentaire relie seulement trois noeuds, alors qu'avec les carrés, elle relie quatre noeuds à la fois. Ainsi, la structure de la matrice globale diffère selon le type de maillage, même si les inconnues sont les mêmes.

d. **maillage avec des triangles équilatéraux** :

1. Modifiez le domaine initial Ω en adaptant un maillage composé de 6 triangles équilatéraux. *Vous ne pourrez pas paver le carré, il restera des trous.*
2. Numérotez les noeuds et les éléments correspondants.

Solution.

On ne peut pas paver un carré avec des triangles équilatéraux. Un exemple de maillage qu'on puisse obtenir est le suivant :



On pourrait utiliser des triangles équilatéraux plus petits, pour couvrir une meilleure surface, mais il restera toujours des trous.

3. Établissez le tableau de coordonnées des noeuds et le tableau de connectivité des éléments.
4. Exprimez les fonctions de forme pour cet élément.

Solution.

Plaçons-nous dans le triangle numéro 4, ses sommets sont

— $A = (0, 0)$ pour le sommet 6

— $B = (1/2, 0)$ pour le sommet 7

— $C = (1/4, \sqrt{3}/4)$ pour le sommet 4

En reprenant la partie préliminaire, le changement de repère s'écrit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\, r + \dfrac{1}{4}\, s \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, s \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} r = 2x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, y \\ s = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\, y \end{cases}$$

Si $\varphi'_A(r, s)$, $\varphi'_B(r, s)$, $\varphi'_C(r, s)$ sont les polynômes associés à l'élément de référence, alors les polynômes sont :

$$\begin{aligned} \varphi_A(x, y) &= \varphi'_A(r, s) = \varphi'_A(2x - \frac{2}{\sqrt{3}}\, y, \frac{4}{\sqrt{3}}\, y) \\ &= 1 - (2x - \frac{2}{\sqrt{3}}\, y) - \frac{4}{\sqrt{3}}\, y = 1 - 2x - \frac{6}{\sqrt{3}}\, y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_B(x, y) &= \varphi'_B(r, s) = \varphi'_B(2x - \frac{2}{\sqrt{3}}\, y, \frac{4}{\sqrt{3}}\, y) \\ &= 2x - \frac{2}{\sqrt{3}}\, y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_C(x, y) &= \varphi'_C(r, s) = \varphi'_C(2x - \frac{2}{\sqrt{3}}\, y, \frac{4}{\sqrt{3}}\, y) \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\, y \end{aligned}$$

Les gradients :

$$\nabla\varphi_A = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \nabla\varphi_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \nabla\varphi_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Cette fois, aucun coefficient de la matrice de rigidité n'est nul.

e. Quelle méthode préférez-vous ? Pourquoi ?

Solution.

Si on doit faire les calculs à la main, la première méthode est clairement plus simple pour cette forme. Avec des triangles équilatéraux on arrivera rarement à couvrir exactement la pièce.

Pour des pièces complexes, les quadrilatères engendrent moins d'éléments donc moins d'erreurs d'arrondis. Si on arrive à paver une pièce avec des quadrilatères, on pourra toujours le faire avec des triangles (simplement en traçant une diagonale), mais pas l'inverse.

Les triangles sont donc plus flexibles mais demandent plus de calculs car ils ont plus d'éléments, ils servent pour ajuster le maillage à des formes complexes.