Table des matières

Algèbre linéaire - Chapitre 1

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Résumé des idées

À retenir dans une semaine :

— Nous intérprêterons les vecteurs plutôt comme des points, et pas comme des flèches.

— Pour résoudre un système linéaire, on le rend **échelonné** avec le pivot de Gauss.

— On peut interpréter un système linéaire de 4 façons différentes :

- Comme une intersection d'éléments géométriques (droites, plans, etc.).
- Comme une combinaison linéaire de vecteurs.
- Comme une equation matricielle.

Ce que je dois savoir

— Que signifie qu'un système soit échelonné ?

— Quelles sont les manipulations autorisées pour le pivot de Gauss ?

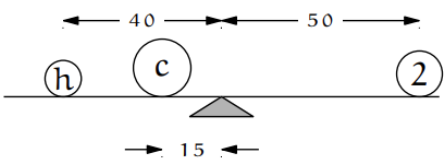
— Comment interpréter un système linéaire comme une combinaison de vecteurs ?

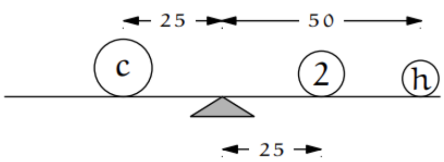
1.1 Exercices

1.1.1 Equations de réactions Chimiques

Les équations de réactions chimiques peuvent être interprétées comme des systèmes linéaires.
Y a-t-il toujours une infinité de façon d'équilibrer l'équation ?

Transformer le problème suivant en système linéaire. Sans le résoudre, combien a-t-il de solutions ?





1.1.2 Combien de solutions ?

Ces systèmes admettent-ils zéro, une ou une infinité de solutions ?

a)
$$\begin{cases} -3x+2y &= 0 \\ -2y &= 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x+y &= 4 \\ y-z &= 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x+y &= 4 \\ y-z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x+y &= 4 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x+6y+z &= -0.5 \\ -z &= 2.5 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x-3y &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x+2y &= 4 \\ y &= 1 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 2x+y &= 0 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x-y &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 4 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} x+y-3z &= -1 \\ y-z &= 2 \\ z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

1.1.3 Systèmes d'équations linéaires

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x+2y=5 \\ x-4y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ x+y+2z=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-y=1 \\ -3x-3y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y+z=20 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+z=5 \\ x+y-z=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+z+w=5 \\ y-w=-1 \\ 3x-z-w=0 \\ 4x+y+2z+w=9 \end{cases}$$

1.1.4 Approfondissement

Résoudre
$$\begin{cases} 2\sin\alpha-\cos\beta+3\tan\gamma &= 3 \\ 4\sin\alpha+2\cos\beta-2\tan\gamma &= 10 \\ 6\sin\alpha-3\cos\beta+\tan\gamma &= 9 \end{cases}$$

1.1.5 Manipulation

La méthode de Gauss consiste à combiner les équations d'un système pour en former de nouvelles.

a) Peut-on obtenir l'équation $3x-2y=5$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?
$$\begin{cases} x+y=1 \\ 4x-y=6 \end{cases}$$

b) Peut-on obtenir l'équation $5x-3y=2$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?
$$\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 3x+y=4 \end{cases}$$

c) Peut-on obtenir $6x-9y+5z=-2$ par une suite d'opérations de réduction de Gauss à partir des équations de ce système ?
$$\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 6x-3y+z=5 \end{cases}$$

1.1.6 Interprétation

Choisir 3 systèmes linéaire dans un exercice précédent et l'écrire des 2 manières différentes :

1. Comme une combinaison linéaires de vecteurs.
2. Comme une equation matricielle.

Par exemple, le système
$$\begin{cases} x+y=1 \\ 4x-y=6 \end{cases}$$
peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs :
$$x\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$$
ou comme une equation matricielle :
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$$

1.1.7 Pour ceux qui s'ennuient

Une boîte contenant des pennies, des nickels et des dimes renferme treize pièces d'une valeur totale de 83 cents. Combien y a-t-il de pièces de chaque type dans la boîte ? (Ce sont des pièces américaines : un penny vaut 1 cent, un nickel 5 cents et un dime 10 cents.)