

## Composition de MATHÉMATIQUES (3h) : 35 points

### **■ Exercice 1 : Équations (8 points)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations ou systèmes suivants :

$$1. e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$3. \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \ln(4x^2) = 2$$

$$4. \cos(7x) + \sin(7x) = 1$$

### **■ Exercice 2 : Réponse d'un capteur à un changement de température (6 points)**

Un capteur de température est initialement à l'équilibre thermique dans un environnement à  $20^\circ\text{C}$ . À l'instant  $t = 0$ , il est brusquement plongé dans un liquide maintenu à  $80^\circ\text{C}$ .

On modélise la température  $T(t)$  indiquée par le capteur à l'instant  $t$  (en secondes) par la fonction :

$$T(t) = 80 - 60e^{-t/5}$$

où  $T(t)$  est exprimée en degrés Celsius.

1. Quelle est la température initiale lue par le capteur ? Et la température à long terme ?
2. À quelle date le capteur affiche-t-il une température de  $50^\circ\text{C}$  ?
3. Déterminer la dérivée  $T'(t)$ , puis montrer que :

$$T'(t) = \frac{12}{e^{t/5}}$$

4. Interpréter le signe de  $T'(t)$ . Que peut-on dire de l'évolution de la température ?
5. Déterminer le temps mis par le capteur pour atteindre 95% de la température finale.

### ■ Exercice 3 : Logique, sommes et produits (10 points)

1. Donner la table de vérité de la proposition logique :

$$(P \Rightarrow Q)$$

2. Donner la table de vérité de la proposition logique :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

3. En déduire une équivalence logique.

4. Démontrer par récurrence que :

$$(*) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. Calculer les expressions suivantes :

$$-\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$-\prod_{k=1}^n e^{k-1}, \text{ on pourra utiliser la relation } (*).$$

### ■ Exercice 4 : Vecteurs et géométrie plane (11 points)

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé les points :  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(0, 4, 6)$ ,  $C(7, -1, 2)$ .

1. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

2. Calculer les longueurs  $AB$  et  $AC$ .

3. Calculer le produit scalaire entre les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et le produit vectoriel vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

4. En déduire le cosinus et le sinus de l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

5. Donner une équation paramétrique de la droite  $(AB)$ .

6. Déterminer la distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$ .