# Table des matières

**1 Suites et séries numériques** **2**
1 Des exemples . . . . . 2
2 Vrai ou Faux ? . . . . . 3
3 Étude de suites . . . . . 3
4 Plus difficile . . . . . 3
5 Formule de Stirling . . . . . 3
6 Télescopiques . . . . . 4
1.1 Séries numériques . . . . . 4
1 Paramètres . . . . . 4
2 Avec l'exponentielle . . . . . 4
3 Suites de fonctions . . . . . 4
4 Suites de fonctions . . . . . 4

# Algèbre linéaire - Chapitre 1

# Suites et séries numériques

### Résumé des idées

*À retenir dans une semaine :*

— Les formules pour calculer les sommes de séries arithmétiques et géométriques.

— Le critère de Riemann pour les séries à termes positifs.

— Les contre-exemples de suites de fonctions qui convergent simplement mais pas uniformément.

### Ce que je dois savoir

— Quelle est la définition d'une suite convergente ?

— Quels sont les outils pour montrer la convergence d'une série numérique ?

— Quels sont les deux modes de convergence d'une suite de fonctions ?

## Exercices

### 1 Des exemples

Donner deux exemples différents dans chacune des situations suivantes :

- ☐ une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0 .
- ☐ une suite bornée non convergente.
- ☐ une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$.
- ☐ une suite non monotone qui tend vers 0.
- ☐ une suite positive qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

## 2 Vrai ou Faux ?

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses avec une démonstration ou un contre-exemple.

- ☐ Toute suite non-majorée tend vers $+\infty$.
- ☐ Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors, $(u_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.
- ☐ Si $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$.
- ☐ Soit $(u_n)$ une suite croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. Si pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \geq N$ tel que $u_{n_0} > \ell$, alors $(u_n)$ ne converge pas vers $\ell$.
- ☐ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et que $(u_n)$ vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n$, alors $(u_n)$ est croissante.
- ☐ Si $u$ est divergente, alors $u$ est non bornée.
- ☐ Si $u_n \to \ell$ et $f$ continue, alors $f(u_n) \to f(\ell)$

## 3 Étude de suites

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer un équivalent simple :

a) $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$

b) $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

c) $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$

d) $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

e) $u_n = 3^n e^{-3n}$.

f) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

g) $u_n = \dfrac{n!}{45^n}$

h) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

i) $u_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$.

## 4 Plus difficile

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer un équivalent simple :

a) $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n+1)$

b) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

c) $_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, a, b \in ]0, +\infty[$

d) $u_n = \frac{\ln(n+e^n)}{n}$

e) $u_n = \frac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

## 5 Formule de Stirling

a) Soit $(x_n)$ une suite de réels et soit $(y_n)$ définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite $(x_n)$ sont de même nature.

b) On pose ( $u_n$ ) la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n} n^n e^{-n}$$

### 6 Télescopiques

a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1}$.

b) En déduire la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

c) Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

e) En déduire le comportement de la suite ( $u_n$ ) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

## Séries numériques

### 7 Paramètres

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de $(a, b)$ la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

b) Dans le(s) cas où la série converge, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

### 8 Avec l'exponentielle

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$

b) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}$

c) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$.

## Suites de fonctions

### 9 Suites de fonctions

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $f$ sur un intervalle $I$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

a) Si les $f_n$ sont croissantes, alors $f$ aussi.

b) Si les $f_n$ sont strictement croissantes, alors $f$ aussi.

c) Si les $f_n$ sont périodiques de période $T$, alors $f$ aussi.

d) Si les $f_n$ sont continues en $a$, alors $f$ aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

### 10 Suites de fonctions

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in ]0, 1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

a) Démontrer que $(f_n)$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction $f$ que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.

b) Étudier les variations de g.

c) En déduire que la convergence de $(f_n)$ vers $f$ n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

d) Soit $a \in [0, 1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0, a]$.