Master Parisien de Recherche Opérationnelle

Etude de Cas et Management de la RO

Projet d'optimisation robuste : Partie Théorique

Auteurs :
Maxime BRISINGER
Nicolas SCHLEGEL

Enseignant :
Zacharie ALES

18 janvier 2022

Table des matières

1 Exercice 1 : Modélisation papier

1.1 Question 1 : Modélisation du problème statique

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & \sum_{(ij)\in A} d_{ij} x_{ij} && && (1a)\\
\text{s.c :} \quad & \sum_{j,\,(ij)\in A} x_{ji} - \sum_{j,\,(ji)\in A} x_{ij} &=\ & 0 \quad \forall i \in V\backslash\{s,t\} && (1b)\\
& \sum_{j,\,(sj)\in A} x_{sj} - \sum_{j,\,(js)\in A} x_{js} &=\ & 1 && (1c)\\
& \sum_{j,\,(tj)\in A} x_{tj} - \sum_{j,\,(jt)\in A} x_{jt} &=\ & -1 && (1d)\\
& \sum_{j,\,(ij)\in A} x_{ij} &\leq\ & 1 \quad \forall i \in V && (1e)\\
& \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s} x_{ij} p_i &\leq\ & S - p_t - p_s && (1f)\\
& x_j &\in\ & \{0,1\} \quad \forall j = 1,\dots,n && (1g)
\end{aligned}
$$

1.2 Question 2 : Modélisation du problème robuste

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \max_{\delta^1} \quad & \sum_{(ij)\in A} d_{ij}(1+\delta^1_{ij}) x_{ij} && && (2a)\\
\text{s.c :} \quad & \sum_{j,\,(ij)\in A} x_{ji} - \sum_{j,\,(ji)\in A} x_{ij} &=\ & 0 \quad \forall i \in V\backslash\{s,t\} && (2b)\\
& \sum_{j,\,(sj)\in A} x_{sj} - \sum_{j,\,(js)\in A} x_{js} &=\ & 1 && (2c)\\
& \sum_{j,\,(tj)\in A} x_{tj} - \sum_{j,\,(jt)\in A} x_{jt} &=\ & -1 && (2d)\\
& \sum_{j,\,(ij)\in A} x_{ij} &\leq\ & 1 \quad \forall i \in V && (2e)\\
& \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s,\ i\neq t} x_{ij} p^2_i &\leq\ & S - p^2_s - p^2_t \quad \forall \{p^2_i\}_{i\in V} \in \mathcal{U}^2 && (2f)\\
& \sum_{(ij)\in A} \delta^1_{ij} &\leq\ & d_1 && (2g)\\
& \delta^1_{ij} &\in\ & [0,\ D_{ij}] \quad \forall (ij) \in A && (2h)\\
& x_j &\in\ & \{0,1\} \quad \forall j = 1,\dots,n && (2i)
\end{aligned}
$$

1.3 Question 3 : Résolution par plans coupants et LazyCallback

3.a) On fait apparaître la robustesse dans les contraintes.

$$\begin{aligned}
\min \quad & z && && (3a)\\
\text{s.c :} \quad & \sum_{j,\ (ij)\in A} x_{ji} - \sum_{j,\ (ji)\in A} x_{ij} &&= 0 && \forall i \in V\setminus\{s,t\} \quad (3b)\\
& \sum_{j,\ (sj)\in A} x_{sj} - \sum_{j,\ (js)\in A} x_{js} &&= 1 && (3c)\\
& \sum_{j,\ (tj)\in A} x_{tj} - \sum_{j,\ (jt)\in A} x_{jt} &&= -1 && (3d)\\
& \sum_{j,\ (ij)\in A} x_{ij} &&\leq 1 && \forall i \in V \quad (3e)\\
& p_s^2 + p_t^2 + \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s,\ i\neq t} x_{ij} p_i^2 &&\leq S && \forall \{p_i^2\}_{i\in V} \in \mathscr{U}^2 \quad (3f)\\
& \sum_{(ij)\in A} d_{ij}^1 x_{ij} &&\leq z && \forall \{d_{ij}^1\}_{(ij)\in A} \in \mathscr{U}^1 \quad (3g)\\
& x_j &&\in \{0,1\} && \forall j = 1,\dots,n \quad (3h)
\end{aligned}$$

3.b) Définition des ensembles $\mathscr{U}^{1*}$ et $\mathscr{U}^{2*}$:

$$\mathscr{U}^{1*} = \left\{ \{d_{ij}^1 = d_{ij}^1(1+\min(D_{ij}, \frac{d_1}{|A|}))\}_{ij\in A} \right\}$$

$$\mathscr{U}^{2*} = \left\{ \{p_i^2 = p_i + \hat{p}_i . \min(2, \frac{d_2}{|A|})\}_{i\in V} \right\}$$

L'idée de ces ensembles initiaux est d'essayer de répartir de manière équilibrée les incertitudes entre toutes les arrêtes dans le premier cas et tous les sommets dans le second.

3.c) Sous-problèmes pour résolution par plans coupants :

— Sous-problème lié à $\mathscr{U}^1$ (nommé $SP_1(x^*)$) :

$$\begin{aligned}
\max_{\delta^1} \quad & \sum_{(ij)\in A} d_{ij}(1+\delta_{ij}^1) x_{ij}^* && (4a)\\
\text{s.c :} \quad & \sum_{(ij)\in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 && (4b)\\
& \delta_{ij}^1 \in [0,\ D_{ij}] \quad \forall (ij) \in A && (4c)
\end{aligned}$$

— Sous-problème lié à $\mathscr{U}^2$, (nommé $SP_2(x^*)$) :

$$\max_{\delta^2} \quad (p_s + \delta_s^2 \hat{p}_s) + (p_t + \delta_t^2 \hat{p}_t) + \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s,\ i\neq t} x_{ij}^*(p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i) \tag{5a}$$

$$\text{s.c :} \quad \sum_{i\in V} \delta_i^2 \leq d_2 \tag{5b}$$

$$\delta_i^2 \in [0,\ 2] \qquad \forall i \in V \tag{5c}$$

3.d) Pour qu'une solution du problème maître (x^*, z^*) soit optimale, il faut :

— Vérifier que $\text{val}(SP_1(x^*)) = z^*$ pour s'assurer que l'objectif correspond bien à la distance du plus court chemin dans le pire des cas (l'égalité vient du fait que le problème a pour objectif de minimiser z).
— Vérifier que $\text{val}(SP_2(x^*)) \leq S$, ce qui signifie que la solution x^* vérifie les contraintes de poids maximum pour toutes les instances.

3.e) Après avoir résolu le problème maître avec les ensembles d'incertitudes simplifiés, avec une solution courante (x^*, z^*). On résout les sous-problèmes $SP_1(x^*)$ et $SP_2(x^*)$ et on nomme $\{\bar{d}_{ij}^1\}_{ij\in A}$ la distribution des distances dans une solution optimale de $SP_1(x^*)$ et $\{\bar{p}_i^2\}_{i\in V}$ la distribution des poids dans une solution optimale de $SP_2(x^*)$.

On obtient les coupes suivantes :

— $z \geq \sum_{(ij)\in A} \bar{d}_{ij}^1 x_{ij}$
— $S \geq \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s,\ i\neq t} \bar{p}_i^2 x_{ij} + \bar{p}_s^2 + +\bar{p}_t^2$

1.4 Question 4 : Résolution par dualisation

4.a) Reformulation de l'objectif du problème robuste. L'objectif

$$\min_x \quad \max_{\delta^1,\delta^2} \quad \sum_{(ij)\in A} d_{ij}(1+\delta_{ij}^1)x_{ij} \tag{6}$$

Peut se reformuler en séparant les variables x des variables δ^1 :

$$\min_x \sum_{(ij)\in A} d_{ij}x_{ij} \quad + \quad \max_{\delta^1} \sum_{(ij)\in A} d_{ij}\delta_{ij}^1 x_{ij} \tag{7}$$

4.b) On exhibe le problème interne lié aux δ_{ij}^1.

$$\max_{\delta^1} \quad \sum_{(ij)\in A} d_{ij}x_{ij}\delta_{ij}^1 \tag{8a}$$

$$\text{s.c :} \quad \sum_{(ij)\in A} \delta_{ij}^1 \quad \leq \quad d_1 \tag{8b}$$

$$\delta_{ij}^1 \quad \in \quad [0,\ D_{ij}] \quad \forall (ij) \in A \tag{8c}$$

4.c) On dualise le problème et on obtient :

$$\min_{\alpha,\ \beta} \quad \alpha d_1 + \sum_{(ij)\in A} \beta_{ij} D_{ij} \tag{9a}$$

$$\text{s.c :} \quad \alpha + \beta_{ij} \geq d_{ij} x_{ij} \quad \forall (ij) \in A \tag{9b}$$

$$\alpha \geq 0 \tag{9c}$$

$$\beta_{ij} \geq 0 \quad \forall (ij) \in A \tag{9d}$$

4.d) On reformule la contrainte robuste et isole les termes en δ_i^2 à gauche de l'inégalité :

$$\hat{p}_s \delta_s^2 + \hat{p}_t \delta_t^2 + \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s,\ i\neq t} x_{ij} \hat{p}_i \delta_i^2 \quad \leq \quad S - (p_s + p_t + \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s,\ i\neq t} x_{ij} p_i)$$

4.e) Le problème interne lié aux δ_{ij}^2 consiste donc à maximiser le terme de gauche de l'inégalité.

$$\max_{\delta^2} \quad \hat{p}_s \delta_s^2 + \hat{p}_t \delta_t^2 + \sum_{i\in V\setminus\{s,t\}} (\sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij}) \hat{p}_i \ \delta_i^2 \tag{10a}$$

$$\text{s.c :} \quad \sum_{i\in V} \delta_i^2 \leq d_2 \tag{10b}$$

$$\delta_i^2 \in [0,\ 2] \quad \forall i \in V \tag{10c}$$

4.f) On dualise le problème et on obtient :

$$\min_{\mu,\ \nu} \quad \mu d_2 + 2 \sum_{i\in V} \nu_i \tag{11a}$$

$$\text{s.c :} \quad \mu + \nu_i \geq \hat{p}_i \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} \quad \forall i \in V\setminus\{s,t\} \tag{11b}$$

$$\mu + \nu_s \geq \hat{p}_s \tag{11c}$$

$$\mu + \nu_t \geq \hat{p}_t \tag{11d}$$

$$\mu \geq 0 \tag{11e}$$

$$\nu_i \geq 0 \quad \forall i \in V \tag{11f}$$

4.g) Les deux problèmes que l'on a vu étant linéaires, par dualité forte, on peut remplacer leur valeur par celle de leurs duals dans la formulation robuste du problème et contracter les minimums. Le problème devient :

$$
\begin{aligned}
\min_{x,\alpha,\beta,\mu,\nu} \quad & \sum_{(ij)\in A} d_{ij}x_{ij} + \alpha d_1 + \sum_{(ij)\in A} \beta_{ij} D_{ij} && && && (12a)\\
\text{s.c}: \quad & \sum_{j,\ (ij)\in A} x_{ji} - \sum_{j,\ (ji)\in A} x_{ij} &=\ & 0 && \forall i \in V\setminus\{s,t\} && (12b)\\
& \sum_{j,\ (sj)\in A} x_{sj} - \sum_{j,\ (js)\in A} x_{js} &=\ & 1 && && (12c)\\
& \sum_{j,\ (tj)\in A} x_{tj} - \sum_{j,\ (jt)\in A} x_{jt} &=\ & -1 && && (12d)\\
& \sum_{j,\ (ij)\in A} x_{ij} &\le\ & 1 && \forall i \in V && (12e)\\
& \sum_{(ij)\in A,\ i\neq s,\ i\neq t} x_{ij}p_i + \mu d_2 + 2\sum_{i\in V} \nu_i &\le\ & S - p_s - p_t && && (12f)\\
& d_{ij}x_{ij} - \alpha - \beta_{ij} &\le\ & 0 && \forall (ij) \in A && (12g)\\
& \hat{p}_i \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \mu - \nu_i &\le\ & 0 && \forall i \in V\setminus\{s,t\} && (12h)\\
& -\mu - \nu_s &\le\ & -\hat{p}_s && && (12i)\\
& -\mu - \nu_t &\le\ & -\hat{p}_t && && (12j)\\
& \mu &\ge\ & 0 && && (12k)\\
& \nu_i &\ge\ & 0 && \forall i \in V && (12l)\\
& \alpha &\ge\ & 0 && && (12m)\\
& \beta_{ij} &\ge\ & 0 && \forall (ij) \in A && (12n)\\
& x_j &\in\ & \{0,1\} && \forall j = 1,\dots,n && (12o)
\end{aligned}
$$