Études de bijections entre objets combinatoires comptés par les nombres de Catalan

Maxime CAUTRÈS

LaBRI

06/07/2021

Sommaire

Découverte

- Leonhard Euler (XVIII)

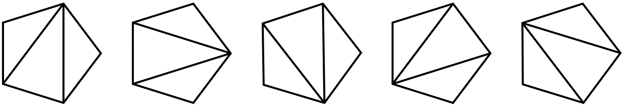


FIGURE – Les 5 triangulations pour un polygone à 5 côtés

- Eugène Charles Catalan

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k)C(n-1-k) = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

Exemples d'objets combinatoires comptés par les nombres de Catalan

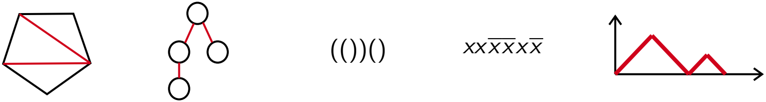


FIGURE – De gauche à droite : Triangulations, Arbres planaires, mots de parenthèses, mots de Dyck, chemins de Dyck

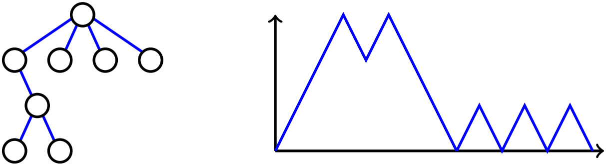
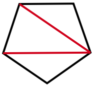
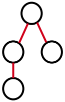


FIGURE – Idées pour dénombrer

. Richard P. Stanley [?] a référencé 214 objets comptés par les nombres de Catalan

Exemples d'objets combinatoires comptés par les nombres de Catalan

(())()

$xx\overline{x}\overline{x}x\overline{x}$

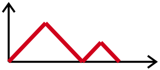


FIGURE – De gauche à droite : Triangulations, Arbres planaires, mots de parenthèses, mots de Dyck, chemins de Dyck

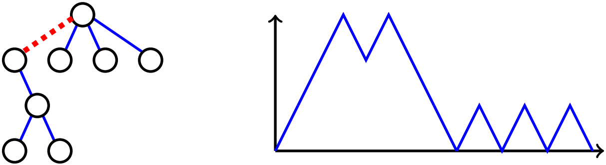


FIGURE – Idées pour dénombrer

. Richard P. Stanley [?] a référencé 214 objets comptés par les nombres de Catalan

Exemples d'objets combinatoires comptés par les nombres de Catalan

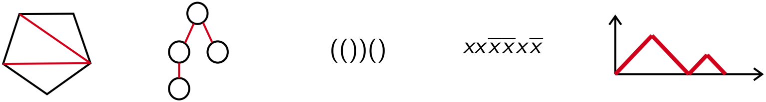


FIGURE – De gauche à droite : Triangulations, Arbres planaires, mots de parenthèses, mots de Dyck, chemins de Dyck

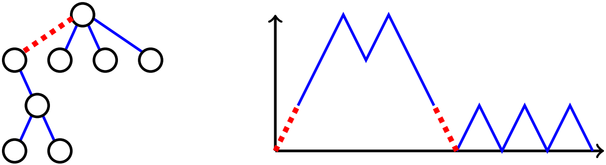


FIGURE – Idées pour dénombrer

. Richard P. Stanley [?] a référencé 214 objets comptés par les nombres de Catalan

Les q,t-Catalan et un problème ouvert :

Area($w \in \mathcal{DW}$)

Dinv($w \in \mathcal{DW}$)

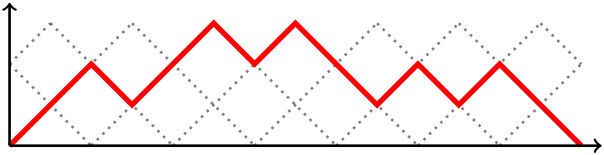


FIGURE – Illustration de l'Area et du Dinv sur un chemin de Dyck

Les q,t-Catalan et un problème ouvert :

$\mathrm{Area}(w \in \mathcal{DW})$

$\mathrm{Dinv}(w \in \mathcal{DW})$

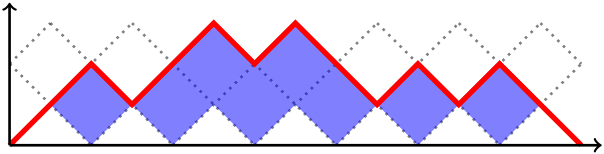


FIGURE – Illustration de l'Area et du Dinv sur un chemin de Dyck

Les q,t-Catalan et un problème ouvert :

Area($w \in \mathcal{DW}$)

Dinv($w \in \mathcal{DW}$)

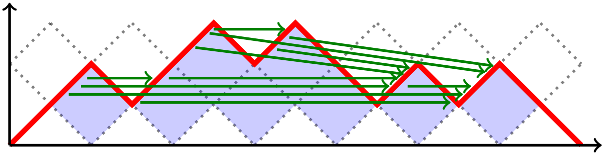


FIGURE – Illustration de l'Area et du Dinv sur un chemin de Dyck

Les q,t-Catalan et un problème ouvert :

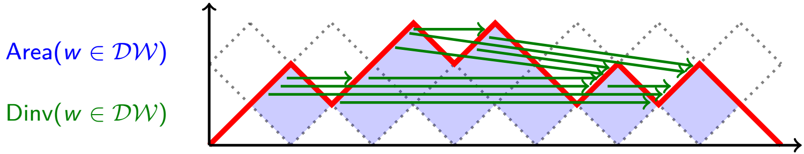


FIGURE – Illustration de l'Area et du Dinv sur un chemin de Dyck

- Area ⇔ **Somme** des tailles de piles dans le DFS de l'arbre équivalent
- Dinv ⇔ **Somme** des tailles de files dans le BFS de l'arbre équivalent

Les q,t-Catalan et un problème ouvert :

Area($w \in \mathcal{DW}$)

Dinv($w \in \mathcal{DW}$)

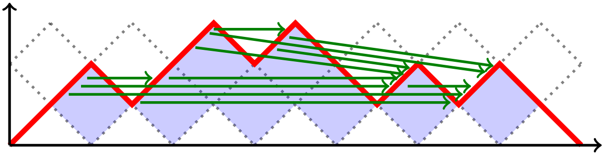


FIGURE – Illustration de l'Area et du Dinv sur un chemin de Dyck

- Area $\Leftrightarrow$ **Somme** des tailles de piles dans le DFS de l'arbre équivalent
- Dinv $\Leftrightarrow$ **Somme** des tailles de files dans le BFS de l'arbre équivalent

Les q,t-Catalan[?] : $C_n(q,t) = \sum_{w \in \mathcal{DW}_n} q^{\mathrm{Area}(w)} t^{\mathrm{Dinv}(w)}$

- Une Symétrie : $\forall q\ t, C_n(q,t) = C_n(t,q)$
- Une involution ? $\exists\ \varphi\ \mathrm{Stat}\ \forall q\ t, C(q,t) = \sum_{w \in \mathcal{DW}} q^{\mathrm{Stat}(w)} t^{\mathrm{Stat}(\varphi(w))}$

Sommaire

Mots de Dyck, Suites quasi decroissantes

- **Mot de Dyck ($\mathcal{DW}$)** : Soit w un mot sur l'alphabet $\{x, \overline{x}\}$.

$$u \in \mathcal{DW} \iff |u|_x = |u|_{\overline{x}} \text{ et } \forall v \text{ suffixe } u, |v|_x \leq |v|_{\overline{x}}$$

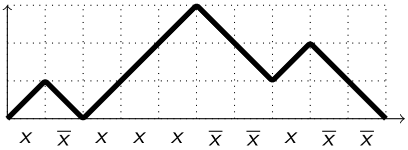


FIGURE – Représentation graphique d'un $\mathcal{DW}$ et d'un $\mathcal{ADS}$ associé

Mots de Dyck, Suites quasi decroissantes

- **Mot de Dyck ($\mathcal{DW}$)** : Soit w un mot sur l'alphabet $\{x, \overline{x}\}$.

$$u \in \mathcal{DW} \iff |u|_x = |u|_{\overline{x}} \text{ et } \forall v \text{ suffixe } u, |v|_x \leq |v|_{\overline{x}}$$

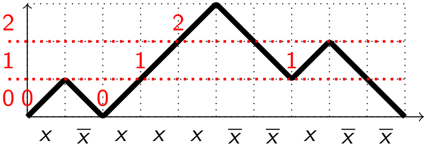


FIGURE – Représentation graphique d'un $\mathcal{DW}$ et d'un $\mathcal{ADS}$ associé

- **Suites quasi décroissantes ($\mathcal{ADS}$)** :

$$(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathcal{ADS} \iff a_0 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!], a_{k+1} \in [\![0, a_k + 1]\!]$$

Mots de Dyck marqués, Insertions

- $\mathcal{DW}$ **marqué** ($\mathcal{MDW}$) $:= \{w \sqcup v / w \in \mathcal{DW} \land v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\bigsqcup_{k\in[\![0,n]\!]} k\overline{k}\}\}$

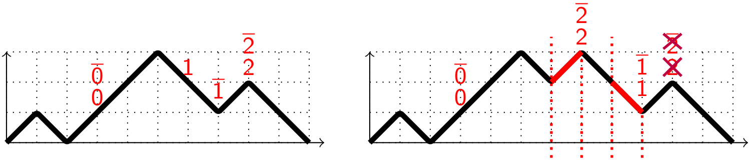


FIGURE – On réécrit en 1 avec la règle $(1, \overline{1}) \rightarrow (x2\overline{2}, \overline{x}1\overline{1})$

- Une **règle :** $(1, \overline{1}) \rightarrow (x2\overline{2}, \overline{x}1\overline{1})$

Mots de Dyck marqués, Insertions

- $\mathcal{DW}$ **marqué** $(\mathcal{MDW})$ $:= \{w \sqcup v / w \in \mathcal{DW} \wedge v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ \bigsqcup_{k\in[\![0,n]\!]} k\bar{k}\}\}$

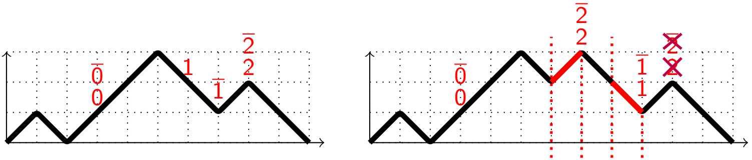


FIGURE – On réécrit en 1 avec la règle $(1, \bar{1}) \to (x2\bar{2}, \bar{x}1\bar{1})$

- Une **règle :** $(1, \bar{1}) \to (x2\bar{2}, \bar{x}1\bar{1})$
- On **généralise** la règle : On pose $B = A + 1$

$$(1, \bar{1}) \to (x2\bar{2}, \bar{x}1\bar{1}) \text{ donne } (A, \bar{A}) \to (xB\bar{B}, \bar{x}A\bar{A})$$

Mots de Dyck marqués, Insertions

- $\mathcal{DW}$ **marqué ($\mathcal{MDW}$)** $:= \{w \sqcup\!\sqcup v / w \in \mathcal{DW} \wedge v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ \sqcup\!\sqcup_{k\in[\![0,n]\!]} k\overline{k}\}\}$

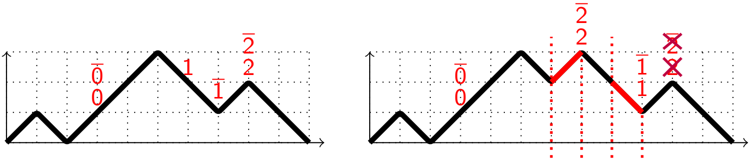


FIGURE – On réécrit en 1 avec la règle $(1, \overline{1}) \rightarrow (x2\overline{2}, \overline{x}1\overline{1})$

- Une **règle :** $(1, \overline{1}) \rightarrow (x2\overline{2}, \overline{x}1\overline{1})$
- On **généralise** la règle : On pose $B = A + 1$

$$(1, \overline{1}) \rightarrow (x2\overline{2}, \overline{x}1\overline{1}) \text{ donne } (A, \overline{A}) \rightarrow (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$$

- **Les grammaires ($\mathcal{GR}$)**[**?**, LeBorgne04] :

$$\mathcal{GR} := \{(A, \overline{A}) \rightarrow (m_R, m_F)/m_R.`,`.m_F \in (x, \overline{x} \sqcup\!\sqcup A\overline{A} \sqcup\!\sqcup B\overline{B})\}$$

Des applications des $\mathcal{ADS}$ de taille n dans $\mathcal{DW}$ de demie longueur n

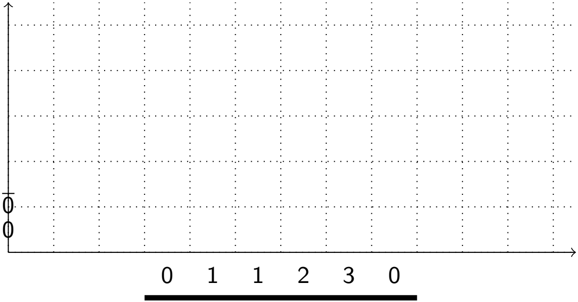


FIGURE – Affichage des étapes de l'algorithme sur 011230 avec $(A, \overline{A}) \to (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$

- **Une généralisation :** Utilisation de 2 règles

Des applications des $\mathcal{ADS}$ de taille n dans $\mathcal{DW}$ de demie longueur n

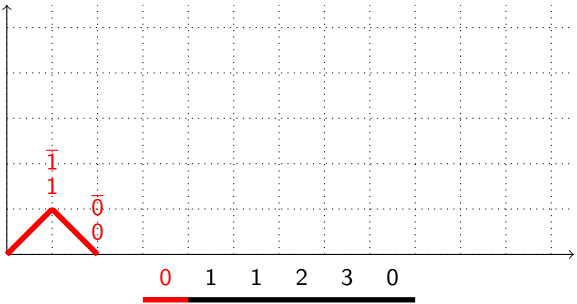


FIGURE – Affichage des étapes de l'algorithme sur 011230 avec $(A, \overline{A}) \to (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$

- **Une généralisation :** Utilisation de 2 règles

Des applications des $\mathcal{ADS}$ de taille n dans $\mathcal{DW}$ de demie longueur n

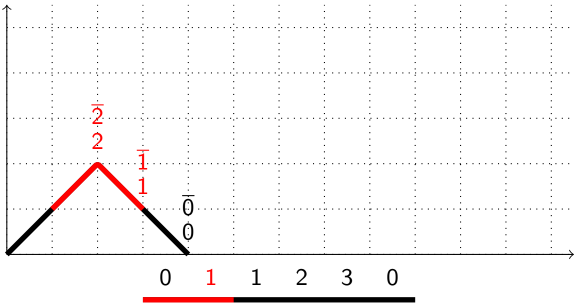


FIGURE – Affichage des étapes de l'algorithme sur 011230 avec $(A, \overline{A}) \to (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$

- **Une généralisation :** Utilisation de 2 règles

Des applications des $\mathcal{ADS}$ de taille n dans $\mathcal{DW}$ de demie longueur n

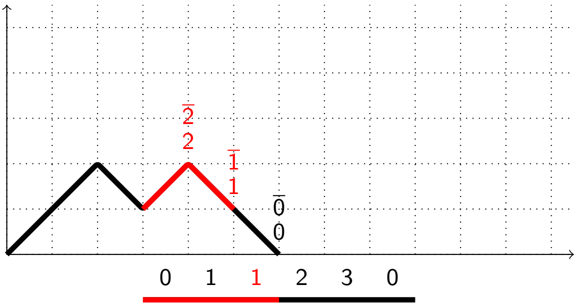


FIGURE – Affichage des étapes de l'algorithme sur 011230 avec $(A, \overline{A}) \rightarrow (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$

- **Une généralisation :** Utilisation de 2 règles

Des applications des $\mathcal{ADS}$ de taille n dans $\mathcal{DW}$ de demie longueur n

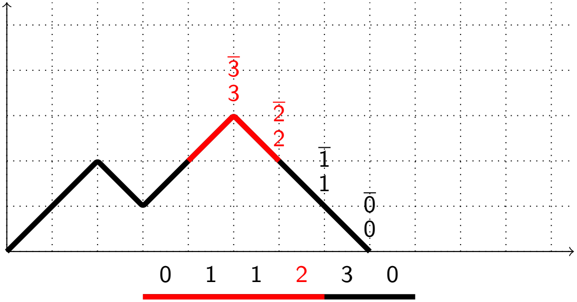


FIGURE – Affichage des étapes de l'algorithme sur 011230 avec $(A, \overline{A}) \to (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$

- **Une généralisation :** Utilisation de 2 règles

Des applications des $\mathcal{ADS}$ de taille n dans $\mathcal{DW}$ de demie longueur n

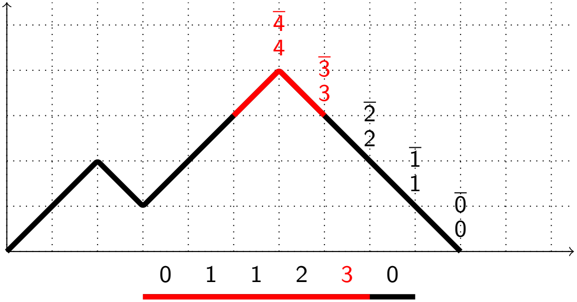


FIGURE – Affichage des étapes de l'algorithme sur 011230 avec $(A, \overline{A}) \rightarrow (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$

- **Une généralisation :** Utilisation de 2 règles

Des applications des $\mathcal{ADS}$ de taille n dans $\mathcal{DW}$ de demie longueur n

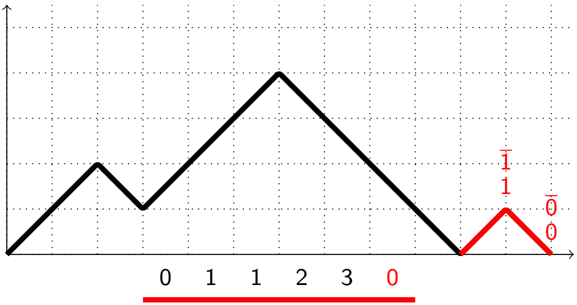


FIGURE – Affichage des étapes de l'algorithme sur 011230 avec $(A, \overline{A}) \rightarrow (xB\overline{B}, \overline{x}A\overline{A})$

- **Une généralisation :** Utilisation de 2 règles

Cardinaux et Constats

- Il y a **210 grammaires** distinctes et **44100 couples**.

$$\underbrace{\left(\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\right)}_{\#(\mathrm{mel}(`x,\overline{x}`,'A\overline{A}`)} \times \underbrace{\left(\binom{6}{2}+\binom{6}{1}\right)}_{\#(\mathrm{mel}(`x,\overline{x}A\overline{A}`,'B\overline{B}`)} = 10 \times 21 = 210$$

- **Au moins** 178/210 règles ne sont **pas injectives**, tout comme **au moins** 43314/44100 couples
- Une méthode pour l'étude de bijectivité :

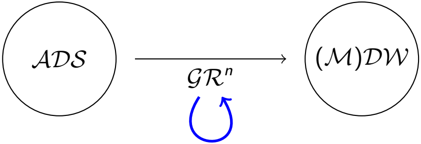


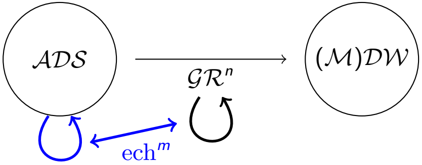
FIGURE – Différents liens intéressants à étudier

Cardinaux et Constats

- Il y a **210 grammaires** distinctes et **44100 couples**.

$$\underbrace{\left(\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\right)}_{\#(\mathrm{mel}(`x,\overline{x}`,`A\overline{A}`)} \times \underbrace{\left(\binom{6}{2}+\binom{6}{1}\right)}_{\#(\mathrm{mel}(`x,\overline{x}A\overline{A}`,`B\overline{B}`)} = 10 \times 21 = 210$$

- **Au moins** 178/210 règles ne sont **pas injectives**, tout comme **au moins** 43314/44100 couples
- Une méthode pour l'étude de bijectivité :



$$\Phi_{\mathrm{ech}^m(G)} = \Phi_G \circ \mathrm{ech}$$

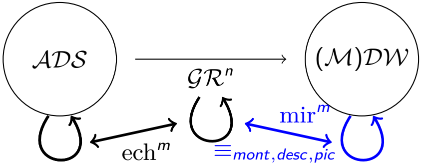
FIGURE – Différents liens intéressants à étudier

Cardinaux et Constats

- Il y a **210 grammaires** distinctes et **44100 couples**.

$$\underbrace{\left(\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\right)}_{\#(\mathrm{mel}(`x,\overline{x}`,`A\overline{A}`)} \times \underbrace{\left(\binom{6}{2}+\binom{6}{1}\right)}_{\#(\mathrm{mel}(`x,\overline{x}A\overline{A}`,`B\overline{B}`)} = 10 \times 21 = 210$$

- **Au moins** 178/210 règles ne sont **pas injectives**, tout comme **au moins** 43314/44100 couples
- Une méthode pour l'étude de bijectivité :



$$\Phi_{\mathrm{ech}^m(G)} = \Phi_G \circ \mathrm{ech} \qquad \Phi_{\mathrm{mir}^m(G)} = \mathrm{mir} \circ \Phi_G$$

FIGURE – Différents liens intéressants à étudier

Étude des équivalences et symétries **(uniforme)** : Conservation de la bijectivité ?

$$\left\{\begin{array}{ll} & (xB\overline{B},\overline{x}A\overline{A}) \\ \equiv_{pic} & (x,B\overline{B}\overline{x}A\overline{A}) \\ \equiv_{pic} & (xB,\overline{B}\overline{x}A\overline{A}) \\ \equiv_{mont} & (Bx,\overline{B}\overline{x}A\overline{A}) \end{array}\right. \iff_{\mathrm{mir}^m} \left\{\begin{array}{ll} & (A\overline{A}x,B\overline{B}\overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (A\overline{A}xB\overline{B},\overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (A\overline{A}xB,\overline{B}\overline{x}) \\ \equiv_{desc} & (A\overline{A}xB,\overline{x}\overline{B}) \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow \mathrm{ech}^m \qquad\qquad \Updownarrow \mathrm{ech}^m$$

$$\left\{\begin{array}{ll} & (xA\overline{A},\overline{x}B\overline{B}) \\ \equiv_{pic} & (x,A\overline{A}\overline{x}B\overline{B}) \\ \equiv_{pic} & (xA,\overline{A}\overline{x}B\overline{B}) \\ \equiv_{desc} & (Ax,\overline{A}\overline{x}B\overline{B}) \end{array}\right. \iff_{\mathrm{mir}^m} \left\{\begin{array}{ll} & (B\overline{B}x,A\overline{A}\overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (B\overline{B}xA\overline{A},\overline{x}) \\ \equiv_{pic} & (B\overline{B}xA,\overline{A}\overline{x}) \\ \equiv_{mont} & (B\overline{B}xA,\overline{x}\overline{A}) \end{array}\right.$$

Théorème

Transmission de propriétés*[**?**, LeBorgne04] :*

- $\equiv_{mont,desc,pic}$ *induise la même application*
- $\mathrm{mir},\mathrm{ech}$ *conserve la bijectivité*

Étude empirique des équivalences et symétrie **(2-périodique)** :

Les données suivantes sont **stables à partir de** $n = 5$ (testé pour $n \leq 16$).

- **Au plus** 786 grammaires induisent une bijection
- Suspicions de 114 **bijections induites**
- Symétries : Soit $G_0, G_1 \in \mathcal{GR}^2$. On a $\mathrm{sym}_0((G_0, G_1)) = (\mathrm{sym}(G_0), G_1)$.

Nombre de sous règles bijectives	Nombre de grammaires bijectives	ech_{01}^m	ech_0^m	ech_1^m	mir_{01}^m	mir_0^m	mir_1^m
0	68	0	0	0	68	28	28
1	116	0	16	16	116	4	4
2	602	472	528	528	602	324	324
total	786	472	544	544	786	356	356

FIGURE – Données obtenues par simulation

- Pour $\equiv$, l'étude n'a pas été approfondie.

Observations des symétries sur les grammaires à 2 règles

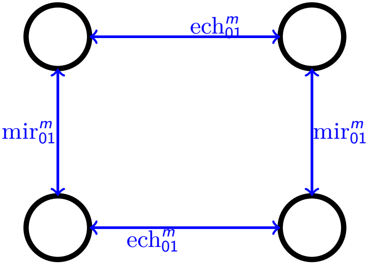


FIGURE – Représentation des relations entre $2-\mathcal{GR}$

- Pour tout $G' = (G, G)$ telle que G bijective $\in \mathcal{GR}$. La bijectivité de G' semble **être préservée** avec les symétries sauf $\mathrm{mir}_{0,1}$

Observations des symétries sur les grammaires à 2 règles

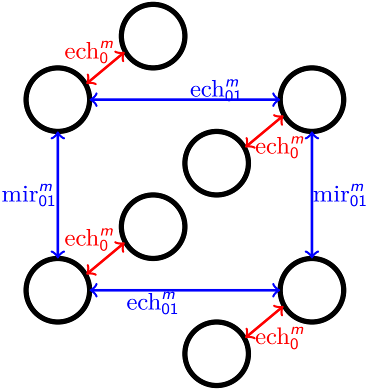


FIGURE – Représentation des relations entre $2-\mathcal{GR}$

- Pour tout $G' = (G, G)$ telle que G bijective $\in \mathcal{GR}$. La bijectivité de G' semble **être préservée** avec les symétries sauf $\mathrm{mir}_{0,1}$
- La relation importante : $\forall s, \Phi_{\mathrm{ech}_0^m(G_0,G_1)}(s) = \Phi_{G_0,G_1}(\mathrm{ech}_0(s))$

Observations des symétries sur les grammaires à 2 règles

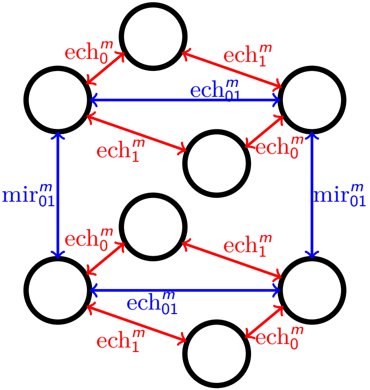


FIGURE – Représentation des relations entre $2-\mathcal{GR}$

- Pour tout $G' = (G, G)$ telle que G bijective $\in \mathcal{GR}$. La bijectivité de G' semble **être préservée** avec les symétries sauf $\mathrm{mir}_{0,1}$
- La relation importante : $\forall s, \Phi_{\mathrm{ech}_0^m(G_0,G_1)}(s) = \Phi_{G_0,G_1}(\mathrm{ech}_0(s))$

Sommaire

La structure arborescente des $\mathcal{ADS}$

- Une relation qui motive la définition ech_0 :

$$\forall s, \Phi_{\mathrm{ech}_0^m(G_0,G_1)}(s) = \Phi_{G_0,G_1}(\mathrm{ech}_0(s))$$

- Une représentation des $\mathcal{ADS}$.

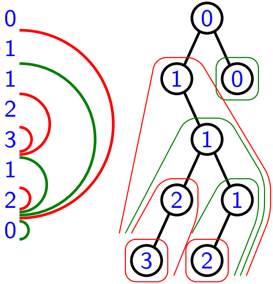


FIGURE – Arbre représentant l'$\mathcal{ADS}$ $0, 1, 1, 2, 3, 1, 2, 0$

Une définition induite de ech^m ech_0^m sur les $\mathcal{ADS}$

- $\mathrm{ech}((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + j, \mathrm{ech}(t2, j+1), \mathrm{ech}(t1, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathrm{ech}_i((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t2, j+1), \mathrm{ech}_i(t1, j-1) & \text{sinon si } k \equiv i[2] \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t1, j), \mathrm{ech}_i(t2, j) & \text{sinon} \end{cases}$

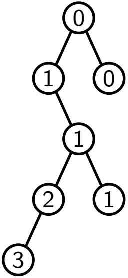


FIGURE – Effet de ech et ech_0 sur l'arbre de $0, 1, 1, 2, 3, 1, 0$

Une définition induite de ech^m ech_0^m sur les $\mathcal{ADS}$

- $\mathrm{ech}((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + j, \mathrm{ech}(t2, j+1), \mathrm{ech}(t1, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathrm{ech}_i((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t2, j+1), \mathrm{ech}_i(t1, j-1) & \text{sinon si } k \equiv i[2] \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t1, j), \mathrm{ech}_i(t2, j) & \text{sinon} \end{cases}$

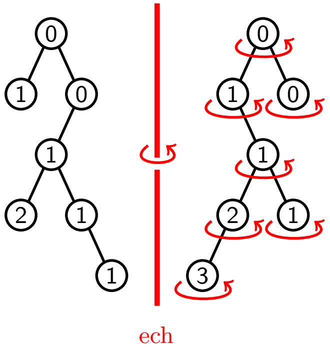


Figure – Effet de ech et ech_0 sur l'arbre de $0, 1, 1, 2, 3, 1, 0$

Une définition induite de ech^m ech_0^m sur les $\mathcal{ADS}$

- $\mathrm{ech}((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + j, \mathrm{ech}(t2, j+1), \mathrm{ech}(t1, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathrm{ech}_i((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t2, j+1), \mathrm{ech}_i(t1, j-1) & \text{sinon si } k \equiv i[2] \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t1, j), \mathrm{ech}_i(t2, j) & \text{sinon} \end{cases}$

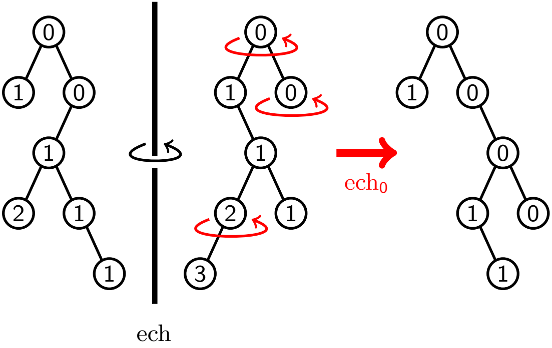


FIGURE – Effet de ech et ech_0 sur l'arbre de $0, 1, 1, 2, 3, 1, 0$

Une définition induite de ech^m ech_0^m sur les $\mathcal{ADS}$

- $\mathrm{ech}((k,t1,t2),j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k=\varepsilon \\ k+j, \mathrm{ech}(t2,j+1), \mathrm{ech}(t1,j-1) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathrm{ech}_i((k,t1,t2),j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k=\varepsilon \\ k+j, \mathrm{ech}_i(t2,j+1), \mathrm{ech}_i(t1,j-1) & \text{sinon si } k \equiv i[2] \\ k+j, \mathrm{ech}_i(t1,j), \mathrm{ech}_i(t2,j) & \text{sinon} \end{cases}$

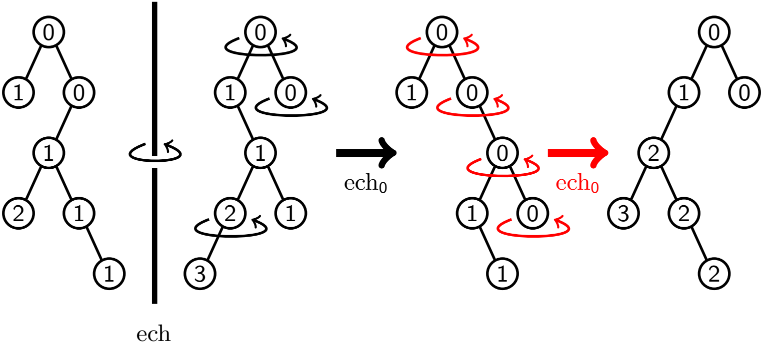


FIGURE – Effet de ech et ech_0 sur l'arbre de $0,1,1,2,3,1,0$

Bijectivité de ech_0

On définit l'application réciproque ech_i^{-1} :

- $\mathrm{ech}_i((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t2, j+1), \mathrm{ech}_i(t1, j-1) & \text{sinon si } k \equiv i[2] \\ k + j, \mathrm{ech}_i(t1, j), \mathrm{ech}_i(t2, j) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathrm{ech}_i^{-1}((k, t1, t2), j) :=$
$\begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k + i, \mathrm{ech}_i^{-1}(t2, i+1), \mathrm{ech}_i(t1, j-1) & \text{sinon si } k + j \equiv i[2] \\ k + i, \mathrm{ech}_i^{-1}(t1, i), \mathrm{ech}_i(t2, j) & \text{sinon} \end{cases}$

Pour s'en convaincre :

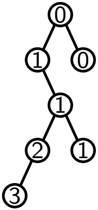


Figure – Illustration de ech_0^{-1}

Bijectivité de ech_0

On définit l'application réciproque ech_i^{-1} :

- $\mathrm{ech}_i((k, t1, t2), j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k+j, \mathrm{ech}_i(t2, j+1), \mathrm{ech}_i(t1, j-1) & \text{sinon si } k \equiv i[2] \\ k+j, \mathrm{ech}_i(t1, j), \mathrm{ech}_i(t2, j) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathrm{ech}_i^{-1}((k, t1, t2), j) :=$
$$\begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = \varepsilon \\ k+i, \mathrm{ech}_i^{-1}(t2, i+1), \mathrm{ech}_i(t1, j-1) & \text{sinon si } k+j \equiv i[2] \\ k+i, \mathrm{ech}_i^{-1}(t1, i), \mathrm{ech}_i(t2, j) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour s'en convaincre :

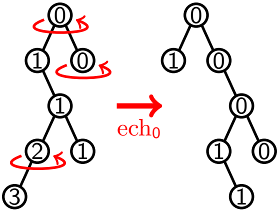


FIGURE – Illustration de ech_0^{-1}

Bijectivité de ech_0

On définit l'application réciproque ech_i^{-1} :

- $\mathrm{ech}_i((k,t1,t2),j) := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k=\varepsilon \\ k+j, \mathrm{ech}_i(t2,j+1), \mathrm{ech}_i(t1,j-1) & \text{sinon si } k \equiv i[2] \\ k+j, \mathrm{ech}_i(t1,j), \mathrm{ech}_i(t2,j) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathrm{ech}_i^{-1}((k,t1,t2),j) :=$
$\begin{cases} \varepsilon & \text{si } k=\varepsilon \\ k+i, \mathrm{ech}_i^{-1}(t2,i+1), \mathrm{ech}_i(t1,j-1) & \text{sinon si } k+j \equiv i[2] \\ k+i, \mathrm{ech}_i^{-1}(t1,i), \mathrm{ech}_i(t2,j) & \text{sinon} \end{cases}$

Pour s'en convaincre :

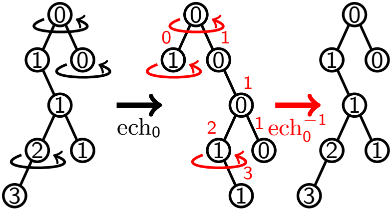


FIGURE – Illustration de ech_0^{-1}

Où en est-on ?

- On a **démontré** toutes les flèches du schéma ci-dessous.
- Cependant on n'a **pas de nouvelle involution** pour ech_0.
- On se restreint **aux branches**.

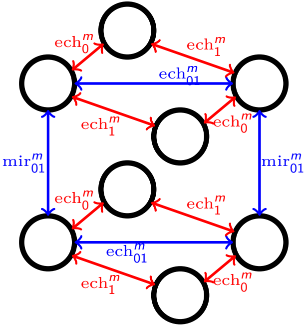


FIGURE – Représentation des relations entre $2-\mathcal{GR}$

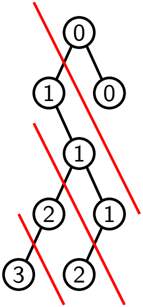


FIGURE – Illustration des couches de la structure arborescente des $\mathcal{ADS}$

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1						
1						
1						
1						
1						
1						

	1	1	1	1	1	1

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1						
1						
1						
1						
1						

	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	1	0	1

ech_0

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1						
1						
1						
1						

	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	1	0	1
	1	0	0	1	1	0

ech_0

ech_0

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} (\mathrm{mod}\ 2)$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \text{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	~~84~~	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	~~28~~	~~84~~	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
~~1~~	~~7~~	~~28~~	~~84~~	210	462	924

	1	1	1	1	1	1	ech_0
	0	1	0	1	0	1	ech_0
	1	0	0	1	1	0	ech_0
	0	0	0	1	0	0	ech_0
	1	1	1	0	0	0	ech_0
	0	1	0	0	0	0	ech_0
	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Trace des itérés de ech_0 sur 11...11

Lemme

Trace : *La trace de* ech_0 *sur* 11...11 *génère le* ***triangle de Sierpinski***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{ech}_0^k(\underbrace{11...11}_{n})[n-1] \equiv \binom{k+n}{n} \pmod 2$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
~~1~~	~~7~~	~~28~~	~~84~~	210	462	924

1	1	1	1	1	1	1	ech_0
1	0	1	0	1	0	1	ech_0
1	1	0	0	1	1	0	ech_0
1	0	0	0	1	0	0	ech_0
1	1	1	1	0	0	0	ech_0
1	0	1	0	0	0	0	ech_0
1	1	0	0	0	0	0	

FIGURE – Trace des appels successifs de ech_0

Ordre de de la branche 11...11

Théorème

Ordre : $\forall n \in N^*; \forall k \in N, \mathrm{ordre}(\mathrm{ech}_0, \underbrace{11...11}_{n}) = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0

FIGURE – Trace des puissances successives de ech_0 sur l'entrée 11...11

L'ordre et conjecture de définitions

Théorème

Ordre : $\forall n \in N^*; \forall k \in N, \mathrm{ordre}(\mathrm{ech}_0, \{0,1\}^n) = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$

- **Hauteur :** La hauteur d'un arbre est le nombre d'arêtes de sa plus longue branche
- **Définition :** $\mathrm{ech}_0^u(s) := \underbrace{\mathrm{ech}_0 \circ \ldots \circ \mathrm{ech}_0}_{2^{\lfloor \log_2(\mathrm{hauteur}(s)) \rfloor}}(s)$

Conjecture

Expression ech_0^u **sur les branches :** Après simulation on trouve le pattern suivant :

$$\mathrm{ech}_0^u(s = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} s_k 2^k) := s + (-1)^{s_{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}} + \sum_{k \in [\![0, \lfloor \log_2 n \rfloor [\![} s_{\lfloor \log_2 n \rfloor + k} (-1)^{s_k} 2^k$$

$$\mathrm{ech}_0^u(101101) = \begin{array}{r} 10|1101 \\ 110 \end{array} = 10|1011$$

Une nouvelle involution

Théorème

Involutivité :

- ech_0^u *est **involutive***
- *Sur un arbre elle n'effectue que **des flips***
- *D'où une involution de $\mathcal{ADS}$ de taille n dans les $\mathcal{ADS}$ de taille n*

- On va pouvoir faire des statistiques et comparer au q,t-Catalan

Un nouveau formalisme

Le fait de travailler sur les branches ouvre un **nouveau formalisme** :

- Caractériser les bijections
- Caractériser les involutions
- Les énumérer ?
- Une étude systématique à la **recherche de l'involution des q,t-Catalan**.

J. Haglund.
Conjectured statistics for the q,t-catalan numbers.
Advances in Mathematics, 175 :319–334, 10 2000.

Yvan Le Borgne.
Variations combinatoires sur des classes d'objets comptées par la suite de Catalan.
PhD thesis, Bordeaux 1, 2004.

Richard P Stanley.
Catalan numbers.
Cambridge University Press, 2015.