TP TSA3 - DETECTION QUADRATIQUE

Préparation

Etudier soigneusement le document ci-dessous rédigé sous la forme d'un TD avec sa correction : lire et comprendre le fonctionnement de la chaîne de détection quadratique ainsi que les calculs conduisant aux expressions des performances attendues en termes de gain en rapport signal sur bruit

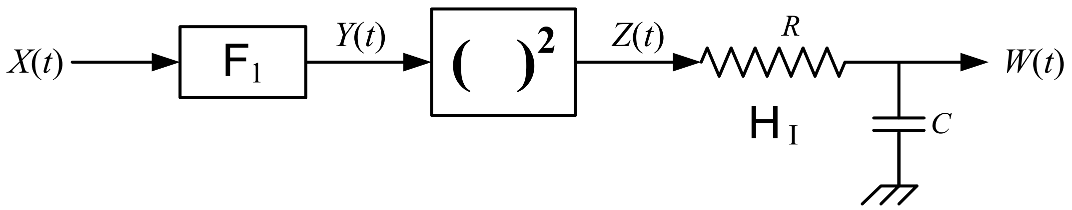
On souhaite détecter la présence ou non d'un signal aléatoire $S(t)$ dans un mélange signal + bruit. Le signal $X(t)$ reçu est égal à :

$$X(t) = S(t) + B(t) \text{ (signal présent)} \qquad \text{ou} \qquad X(t) = B(t) \text{ (signal absent)}$$

avec :

- $S(t)$ signal sinusoïdal à phase aléatoire : $S(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \Phi)$ avec Φ équipartie sur $[0, 2\pi[$,
- $B(t)$ bruit gaussien, réel, centré, stationnaire d'ordre 2, de densité spectrale de puissance moyenne $\Gamma_B(\nu) = \Gamma_0(\Pi_B(\nu - \nu_0) + \Pi_B(\nu + \nu_0))$ avec $\nu_0 > \frac{B}{2}$,
- $B(t)$ et Φ indépendants.

Pour améliorer la détection du signal $S(t)$, on cherche à augmenter le rapport signal sur bruit. Pour ce faire, on utilise la chaîne de traitement suivante appelée « chaîne de détection quadratique » :



$\mathcal{F}_1$: Filtre d'entrée sélectif autour de ν_0 : $|F_1(\nu)|^2 = \Pi_{\Delta\nu}(\nu - \nu_0) + \Pi_{\Delta\nu}(\nu + \nu_0)$ avec $\Delta\nu < B$

$\mathcal{H}_I$: Filtre passe bas de sortie qui élimine au moins les composantes fréquentielles autour de $2\nu_0$

On note : $S_1(t) = \mathrm{F}_1(S(t))$ et $B_1(t) = \mathrm{F}_1(B(t))$ les filtrées respectives de $S(t)$ et $B(t)$ par $\mathcal{F}_1$.

1 Etude de la chaîne de traitement

1.1 Rôle du filtre $\mathcal{F}_1$

1.1.1 Ecrire $Y(t)$ en fonction de $X(t)$.

$Y(t)=\int_R f_1(t-u)X(u)du$ où f_1 est la réponse impulsionnelle du filtre d'entrée.

1.1.2 Donner l'expression de $\Gamma_Y(\nu)$ et la représenter dans les cas signal absent et signal présent.

$\Gamma_Y(\nu)=\Gamma_X(\nu)\left|F_1(\nu)\right|^2$

En absence de signal, $\Gamma_X(\nu)=\Gamma_B(\nu)$. En présence de signal, $\Gamma_X(\nu)=\Gamma_S(\nu)+\Gamma_B(\nu)$.

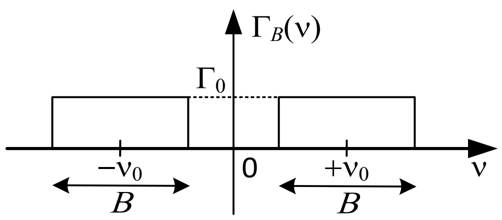
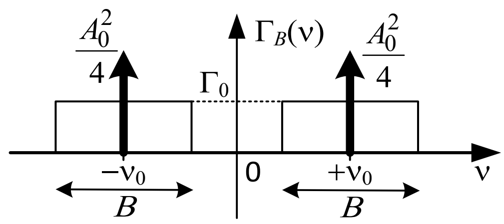
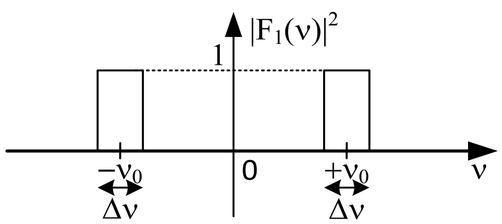
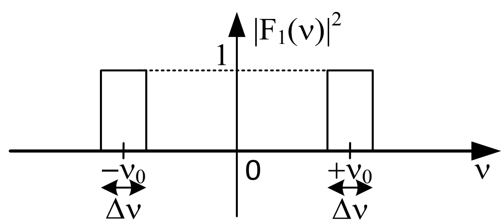
En effet, $B(t)$ et Φ sont indépendants, donc $B(t)$ et $S(t)$ sont indépendants. De plus, $B(t)$ et $S(t)$ sont centrés.

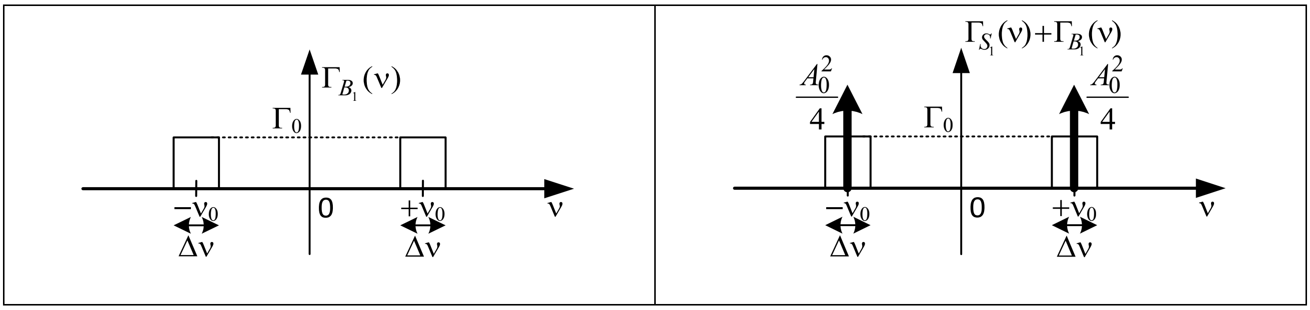
$$\Gamma_Y(\nu)=\Gamma_X(\nu)\left|F_1(\nu)\right|^2=\begin{cases}\Gamma_B(\nu)\left|F_1(\nu)\right|^2=\Gamma_{B_1}(\nu) & \text{signal absent}\\ \left(\Gamma_S(\nu)+\Gamma_B(\nu)\right)\left|F_1(\nu)\right|^2=\Gamma_{S_1}(\nu)+\Gamma_{B_1}(\nu) & \text{signal présent}\end{cases}$$

avec $\left|F_1(\nu)\right|^2=\Pi_{\Delta\nu}(\nu-\nu_0)+\Pi_{\Delta\nu}(\nu+\nu_0)$

$$\Gamma_S(\nu)=\frac{A_0^2}{4}\left(\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)\right)\Rightarrow\Gamma_{S_1}(\nu)=\frac{A_0^2}{4}\left(\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)\right)$$

$$\Gamma_B(\nu)=\Gamma_0\left(\Pi_B(\nu-\nu_0)+\Pi_B(\nu+\nu_0)\right)\text{ avec }\nu_0>\frac{B}{2}\Rightarrow\Gamma_{B_1}(\nu)=\Gamma_0\left(\Pi_{\Delta\nu}(\nu-\nu_0)+\Pi_{\Delta\nu}(\nu+\nu_0)\right)$$

Signal absent	Signal présent
	
	



1.1.3 Calculer les rapports signal sur bruit à l'entrée du filtre $\mathcal{F}_1$ et à la sortie du filtre $\mathcal{F}_1$:

$$\eta_E = \left[\frac{S}{B}\right]_E = \frac{\overline{P}_S}{\overline{P}_B} \quad \text{et} \quad \eta_{E_1} = \left[\frac{S}{B}\right]_{E_1} = \frac{\overline{P}_{S_1}}{\overline{P}_{B_1}}$$

On a $\overline{P}_S = E\left\{(S(t))^2\right\}$ ou $\overline{P}_S = \gamma_S(0)$ ou $\overline{P}_S = \int_R \Gamma_S(\nu)d\nu$

Pour un signal sinusoïdal à phase équipartie, on a montré (TD1) que $\gamma_S(\tau) = \frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi\nu_0\tau)$ donc $\overline{P}_S = \frac{A_0^2}{2}$.

$\overline{P}_B = \int_R \Gamma_B(\nu)d\nu = 2B\Gamma_0$

De la même façon, $\overline{P}_{S_1} = \frac{A_0^2}{2}$ et $\overline{P}_{B_1} = \int_R \Gamma_{B_1}(\nu)d\nu = 2B\Delta\nu$

$$\eta_E = \left[\frac{S}{B}\right]_E = \frac{\overline{P}_S}{\overline{P}_B} = \frac{A_0^2}{2\cdot 2B\Gamma_0} \text{ et } \qquad \eta_{E_1} = \left[\frac{S}{B}\right]_{E_1} = \frac{\overline{P}_{S_1}}{\overline{P}_{B_1}} = \frac{A_0^2}{2\cdot 2\Delta\nu\Gamma_0}$$

1.1.4 A quoi sert le filtre d'entrée $\mathcal{F}_1$?

Le filtre d'entrée $\mathcal{F}_1$ permet d'éliminer une partie significative du bruit. On a déjà un gain en rapport signal sur bruit de $\frac{B}{\Delta\nu}$.

1.2 Elévation au carré suivie de filtrage passe-bas

1.2.1 Qu'estime-t-on en sortie de cette chaîne de mesure ?

Ce type de traitement permet d'estimer la puissance moyenne de $Y(t)$.

En effet, $E\{W(t)\} = H_I(0)E\{Z(t)\} = 1 \cdot E\{Y^2(t)\} = \overline{P}_Y$

1.2.2 Evaluer cette grandeur en présence et en absence de signal.

$$E\{W_B(t)\} = \overline{P}_{B_1} = 2\Gamma_0 \Delta\nu$$

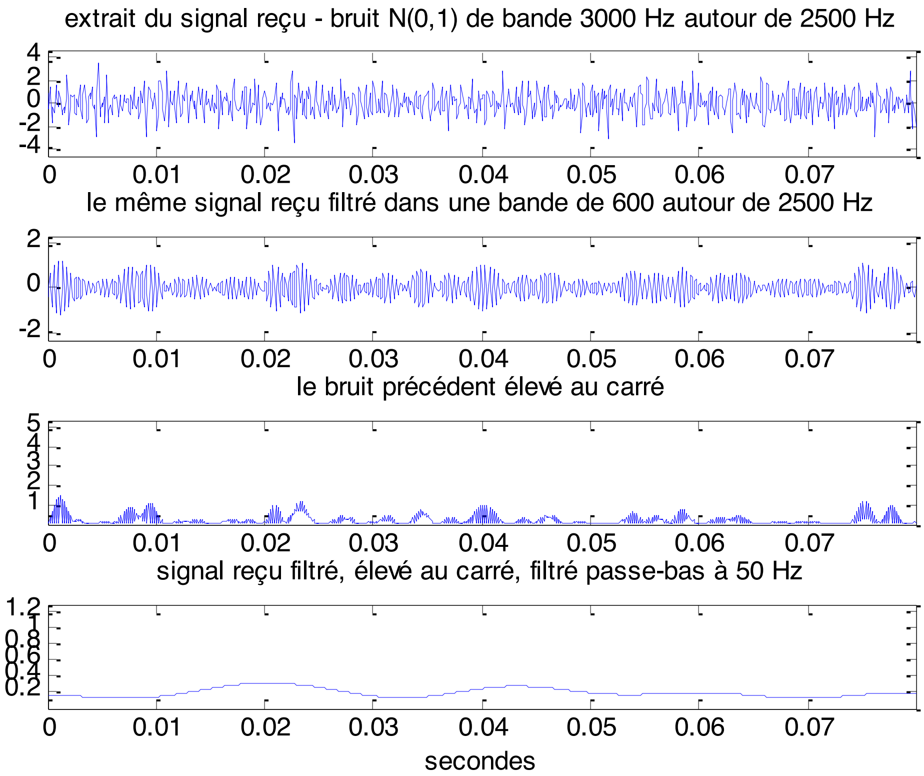
$$E\{W_{S+B}(t)\} = 1 \cdot E\{(S_1(t) + B_1(t))^2\} = \overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1} + 2E\{S_1(t) \cdot B_1(t)\}$$

S et B sont centrés et indépendants, S_1 et B_1 le sont aussi. Le dernier terme est donc nul.

$$E\{W_{S+B}(t)\} = \frac{A_0^2}{2} + 2\Gamma_0 \Delta\nu$$

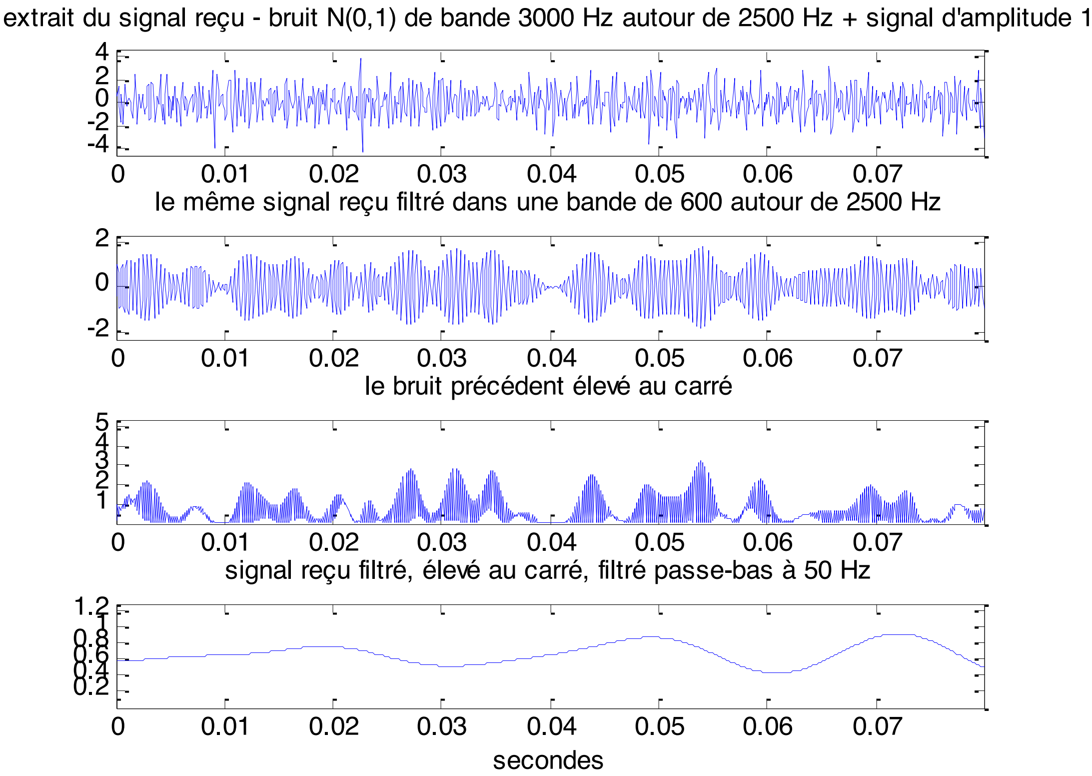
1.3 Fonctionnement global

1.3.1 Représenter sommairement les signaux aux différents points de la chaîne de traitement dans le cas signal absent.



1.3.2 Quels changements sont à prévoir quand le signal est présent ?

Le niveau de chacun des signaux va croître. Et en particulier le signal de sortie de la chaîne W va passer d'une moyenne de $E\{W_B(t)\} = \overline{P}_{B_1} = 2\Gamma_0 \Delta\nu$ à une moyenne de $E\{W_{S+B}(t)\} = \frac{A_0^2}{2} + 2\Gamma_0 \Delta\nu$. Mais les fluctuations vont également s'amplifier. Et il ne sera pas forcément facile de placer un seuil au-delà duquel on décidera que le signal est présent sans faire d'erreur.



2 Evaluation du gain en rapport signal sur bruit

On souhaite s'intéresser aux gains en rapport signal sur bruit $g = \dfrac{\eta_S}{\eta_E}$ et $g_1 = \dfrac{\eta_S}{\eta_{E_1}}$.

On définit le rapport signal sur bruit en sortie η_S par $\eta_S = \dfrac{S_S}{B_S}$ où :

- S_S, appelé **signal de sortie**, est l'augmentation de valeur moyenne en sortie, due à la présence de signal soit $S_S = E\{W_{S+B}(t)\} - E\{W_B(t)\}$,
- B_S, appelé **bruit de sortie**, est une mesure de l'importance des fluctuations du signal de sortie en présence de bruit et de signal à l'entrée, soit $B_S = \sigma_{W_{S+B}}$.

2.1 Signal de sortie - Exprimer S_S en fonction des caractéristiques du signal d'entrée $S(t)$.

Le signal de sortie est simplement : $S_S = E\{W_{S+B}(t)\} - E\{W_B(t)\} = \overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1} - \overline{P}_{B_1} = \overline{P}_{S_1} = \dfrac{A_0^2}{2}$

2.2 Bruit de sortie

2.2.1 Exprimer B_S^2 en fonction de $\Gamma_Z(\nu)$, $|H_1(\nu)|^2$, $\overline{P}_{S_1}$ et $\overline{P}_{B_1}$.

$$B_S^2 = E\{W_{S+B}^2(t)\} - E^2\{W_{S+B}(t)\} = \gamma_{W_{S+B}}(0) - \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2 = \int_R \Gamma_{W_{S+B}}(\nu)d\nu - \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2$$

$$= \int_R \Gamma_{Z_{S+B}}(\nu)\left|H_1(\nu)\right|^2 d\nu - \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2$$

2.2.2 Pour exprimer $\Gamma_Z(\nu)$, donner l'expression de $\gamma_{Z_{S+B}}(\tau)$ en fonction de γ_{S_1} et γ_{B_1}, puis en effectuer la transformée de Fourier.

$$\gamma_{Z_{S+B}}(\tau) = E\{Z_{S+B}(t)Z_{S+B}(t-\tau)\} = E\{Y_{S+B}^2(t)Y_{S+B}^2(t-\tau)\}$$

$$\gamma_{Z_{S+B}}(\tau) = E\left\{(S_1(t)+B_1(t))^2(S_1(t-\tau)+B_1(t-\tau))^2\right\}$$
$$= E\left\{\left(S_1^2(t)+B_1^2(t)+2S_1(t)B_1(t)\right)\left(S_1^2(t-\tau)+B_1^2(t-\tau)+2S_1(t-\tau)B_1(t-\tau)\right)\right\}$$
$$= \gamma_{S_1^2}(\tau)+\overline{P}_{S_1}\cdot\overline{P}_{B_1}+2\cdot 0+\overline{P}_{S_1}\cdot\overline{P}_{B_1}+\gamma_{B_1^2}(\tau)+2\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot 0+4\gamma_{S_1}(\tau)\gamma_{B_1}(\tau)$$

$\gamma_{S_1^2}(\tau)$ peut s'exprimer avec l'aide de la formule donnée en annexe. En effet, $S_1(t)$ est aussi un sinus à phase équipartie et on peut écrire $\gamma_{S_1^2}(\tau) = \overline{P}_{S_1}^2 + \dfrac{\overline{P}_{S_1}^2}{2}\cos(2\pi\cdot 2\nu_0\tau)$

$\gamma_{B_1^2}(\tau)$ est un moment du quatrième ordre d'un bruit gaussien centré. On peut donc l'exprimer en fonction de produits de moments du second ordre :

$$\gamma_{B_1^2}(\tau) = E\{B_1(t)B_1(t)B_1(t-\tau)B_1(t-\tau)\} = \overline{P}_{B_1}^2 + 2\gamma_{B_1}^2(\tau)$$

$$\gamma_{Z_{S+B}}(\tau) = \overline{P}_{S_1}^2 + \frac{\overline{P}_{S_1}^2}{2}\cos(2\pi\cdot 2\nu_0\tau) + 2\overline{P}_{S_1}\cdot\overline{P}_{B_1} + \overline{P}_{B_1}^2 + 2\gamma_{B_1}^2(\tau) + 4\gamma_{S_1}(\tau)\gamma_{B_1}(\tau).$$

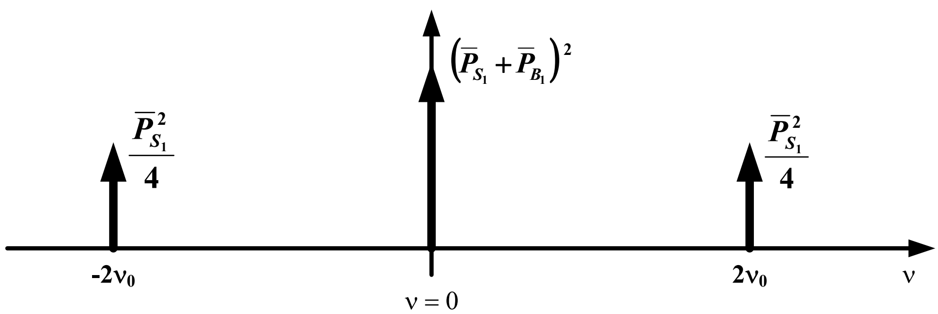
En regroupant les différents termes, il vient :

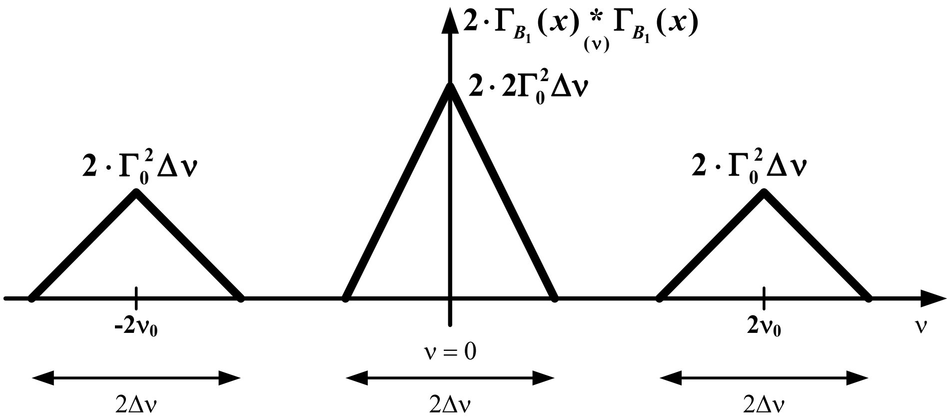
$$\gamma_{Z_{S+B}}(\tau) = \left(\overline{P}_{S_1}+\overline{P}_{B_1}\right)^2 + 2\gamma_{B_1}^2(\tau) + 4\gamma_{S_1}(\tau)\gamma_{B_1}(\tau) + \frac{\overline{P}_{S_1}^2}{2}\cos(2\pi\cdot 2\nu_0\tau)$$

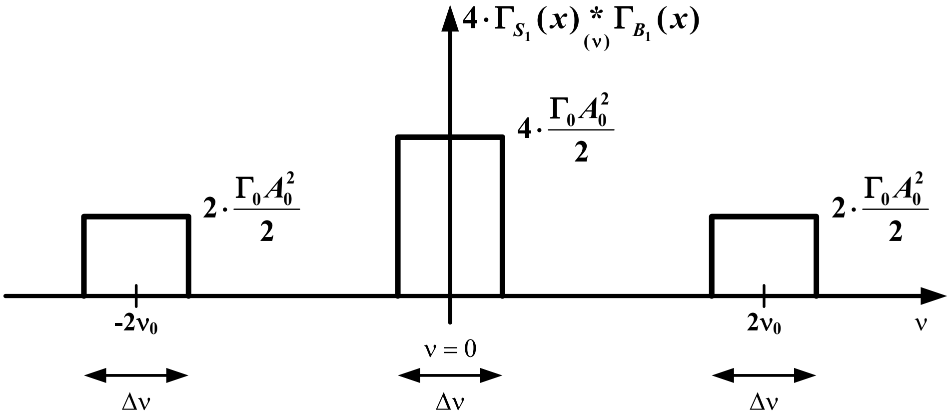
$$\Gamma_{Z_{S+B}}(\nu) = \left(\overline{P}_{S_1}+\overline{P}_{B_1}\right)^2\delta(\nu) + 2\Gamma_{B_1}(x)\underset{(\nu)}{*}\Gamma_{B_1}(x) + 4\Gamma_{S_1}(x)\underset{(\nu)}{*}\Gamma_{B_1}(x) + \frac{\overline{P}_{S_1}^2}{4}\left(\delta(\nu-2\nu_0)+\delta(\nu+2\nu_0)\right)$$

2.2.3 Représenter $\Gamma_{Z_{S+B}}(\nu)$.

On aura à superposer :







2.2.4 Calculer B_S^2 sous l'hypothèse dite « d'intégration forte », c'est-à-dire $\frac{1}{RC} << \Delta\nu$ en faisant les approximations qui en découlent.

$$B_S^2 = \int_R \Gamma_{Z_{S+B}}(\nu)\left|H_1(\nu)\right|^2 d\nu - \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2$$

$$\Gamma_{Z_{S+B}}(\nu) = \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2\delta(\nu) + \underbrace{2\Gamma_{B_1}(x)\underset{(\nu)}{*}\Gamma_{B_1}(x) + 4\Gamma_{S_1}(x)\underset{(\nu)}{*}\Gamma_{B_1}(x) + \frac{\overline{P}_{S_1}^2}{4}\left(\delta(\nu - 2\nu_0) + \delta(\nu + 2\nu_0)\right)}_{A(\nu)}$$

Pour le premier terme :

$$\int_R \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2\delta(\nu)\left|H_1(\nu)\right|^2 d\nu = \int_R \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2\delta(\nu)\left|H_1(0)\right|^2 d\nu = \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2\left|H_1(0)\right|^2\int_R \delta(\nu)d\nu = \left(\overline{P}_{S_1} + \overline{P}_{B_1}\right)^2$$

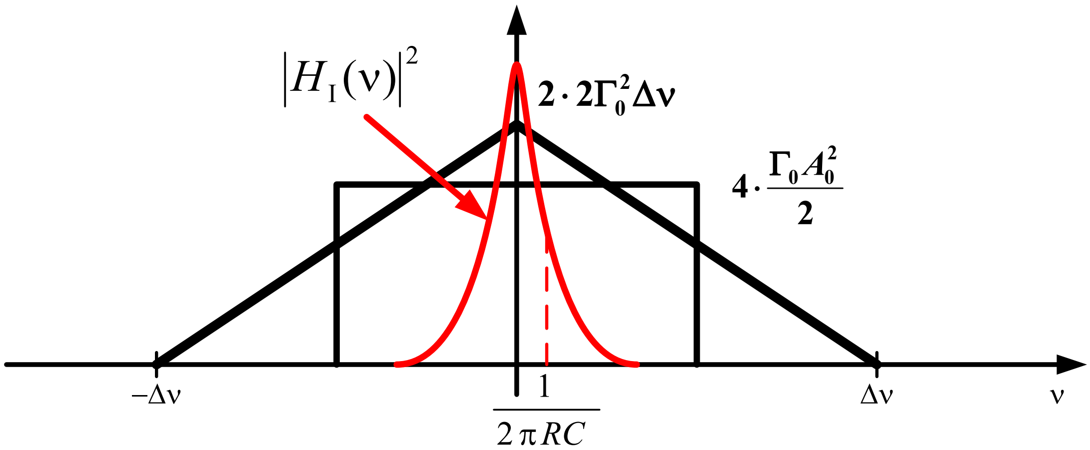
Ce terme va donc disparaître de l'expression de B_S^2

$$B_S^2 = \int_R A(\nu)\left|H_1(\nu)\right|^2 d\nu$$

Dans le terme $A(\nu)$, un certain nombre de composantes sont situées autour de $2\nu_0$ et seront éliminées par le filtre passe-bas H_1.

$$\left|H_1(\nu)\right|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2R^2C^2}$$

Dans l'hypothèse d'intégration forte, $\frac{1}{RC} << \Delta\nu$, on fait l'approximation que le triangle et la porte situés autour de ν = 0 sont à très large bande devant le support spectral de $|H_I(\nu)|^2$. Ils seront considérés comme constants sur ce support.



$$B_S^2 = \int_R A(\nu)|H_I(\nu)|^2 d\nu \approx \int_R (4\Gamma_0^2\Delta\nu + 2\Gamma_0 A_0^2)\,|H_I(\nu)|^2 d\nu$$

$$\Rightarrow B_S^2 \approx (4\Gamma_0^2\Delta\nu + 2\Gamma_0 A_0^2)\int_R |H_I(\nu)|^2 d\nu$$

$$B_S^2 \approx (4\Gamma_0^2\Delta\nu + 2\Gamma_0 A_0^2)\cdot\frac{1}{2RC}$$

2.3 Rapport signal sur bruit en sortie et gains

2.3.1 Calculer le rapport signal sur bruit en sortie η_S

$\eta_S = \frac{S_S}{B_S}$ avec $S_S = \frac{A_0^2}{2}$ et $B_S^2 \approx (4\Gamma_0^2\Delta\nu + 2\Gamma_0 A_0^2)\cdot\frac{1}{2RC}$, soit $\eta_S = \frac{A_0^2\sqrt{RC}}{2\sqrt{2\Gamma_0^2\Delta\nu + \Gamma_0 A_0^2}}$.

On a aussi $\eta_{E_1} = \frac{A_0^2}{4\Delta\nu\Gamma_0}$.

$\eta_S = \frac{A_0^2\sqrt{RC}}{2\sqrt{2\Gamma_0^2\Delta\nu}\sqrt{1+\frac{\Gamma_0 A_0^2}{2\Gamma_0^2\Delta\nu}}} = \frac{A_0^2\sqrt{RC}}{2\Gamma_0\sqrt{2\Delta\nu}\sqrt{1+2\eta_{E_1}}}$ que l'on peut encore écrire : $\eta_S = \frac{A_0^2\sqrt{2RC\Delta\nu}}{4\Gamma_0\Delta\nu\sqrt{1+2\eta_{E_1}}}$

2.3.2 Exprimer les gains g et g_1 en fonction de $\Delta\nu$, B, RC et η_{E1}.

On a $\eta_E = \frac{A_0^2}{4B\Gamma_0}$

$$g_1 = \frac{\eta_S}{\eta_{E_1}} = \frac{\sqrt{2RC\Delta\nu}}{\sqrt{1+2\eta_{E_1}}} \quad \text{et} \quad g = \frac{\eta_S}{\eta_E} = \frac{B}{\Delta\nu}\cdot\frac{\sqrt{2RC\Delta\nu}}{\sqrt{1+2\eta_{E_1}}}$$

Annexes : rappels et aides

- Autocorrélation du carré d'un signal sinusoïdal à phase équipartie sur $[0, 2\pi[$

  $$S^2(t) = A^2 \cos^2(2\pi\nu_0 t + \Phi) = \frac{A^2}{2}\left(1 + \cos(4\pi\nu_0 t + 2\Phi)\right)$$ avec 2Φ équipartie sur $[0, 4\pi[$

  $$\Rightarrow\ S^2(t) = \overline{P}_S + \overline{P}_S \cos(2\pi \cdot 2\nu_0 t + 2\Phi)$$

  $$\Rightarrow\ \gamma_{S^2}(\tau) = \overline{P}_S^2 + \frac{\overline{P}_S^2}{2}\cos(2\pi \cdot 2\nu_0 \tau)$$

- $\Pi_{2\Delta\nu}(\theta) \underset{(\nu)}{*} \Pi_{2\Delta\nu}(\theta) = 2\Delta\nu\left(1 - \frac{|\nu|}{2\Delta\nu}\right)$ pour $|\nu| \leq 2\Delta\nu$ et nulle ailleurs.

- $\int_R \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2}\, d\nu = \frac{1}{2RC}$

- Si $X(t)$ est gaussien <u>centré</u>

  $E\{X(t_1) X(t_2)\, X(t_3)\, X(t_4)\} = E\{X(t_1)\, X(t_2)\}\ E\{X(t_3)\, X(t_4)\} + \ldots$

  $\ldots + E\{X(t_1)\, X(t_3)\}\ E\{X(t_2)\, X(t_4)\} + E\{X(t_1)\, X(t_4)\}\ E\{X(t_2)\, X(t_3)\}$