

TP TSA - Estimation Spectrale

1. Préparation

- Relire attentivement le chapitre Estimation et la partie sur l'estimation des Densités Spectrales de Puissance Moyenne et consulter les documents projetés pendant le cours (cf CPe-campus).
- Lire soigneusement l'énoncé.
- Rédiger les **réponses aux questions suivantes** :

Question 1. Comment peut-on **calculer simplement** la densité spectrale d'énergie (DSE) d'un signal certain d'énergie finie ?

Question 2. Comment est **définie** la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) d'un processus aléatoire ?

Question 3. Quelles sont les grandeurs qui permettent de chiffrer la qualité d'une estimation dans le cas général ? et la qualité de l'estimation spectrale en particulier.

Question 4. Exprimer la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) $\Gamma_B(f)$ d'un bruit blanc stationnaire centré.

Question 5. Exprimer $\Gamma_X(f)$, où $X(t)$ est la sortie d'un filtre excité par un bruit blanc centré, en fonction de la DSPM du bruit blanc et des caractéristiques du filtre.

Question 6. En une phrase (sans formule), décrire le procédé de calcul de la DSPM estimée $\hat{\Gamma}_1(f)$ d'une séquence aléatoire via l'estimateur simple.

Question 7. Rappeler le mode de graduation d'une TFD- N points en fréquences réduites.

Question 8. Décrire (avec une phrase) le procédé de calcul de la DSPM estimée $\hat{\Gamma}_2(f)$ d'une séquence aléatoire via l'estimateur moyenné.

Question 9. Que signifie le terme « compromis biais-variance » dans le cas de l'estimateur moyenné ?

Question 10. Quelles modifications sont apportées au procédé de calcul de l'estimateur de Welch par rapport à l'estimateur moyenné ?

2. Consignes

Le TP se déroule sous Matlab. Les estimateurs de DSPM seront programmés et étudiés sur deux types de signaux tests.

Le répertoire de travail sera exclusivement sur le compte d'un des membres du binôme (changer le répertoire courant de Matlab). Mais pour la génération des signaux et certains affichages, on fera appel à des fonctions préprogrammées et à des fichiers de données spécifiques. *On récupérera l'ensemble des fichiers utiles sur la plateforme CPe-campus dans le cours Traitement des Signaux Aléatoires.*

Le compte-rendu sera rédigé en utilisant la trame au format LaTeX fournie sur CPe-campus et rendu au format .pdf dans la semaine qui suit la séance de TP. Il comportera aux emplacements prévus, les scripts Matlab développés, les figures et bien sûr les commentaires des résultats.

3. Premier signal test : Bruit blanc gaussien filtré

3.1. Génération du bruit à analyser

Le bruit X à analyser est la sortie d'un filtre excité par un bruit blanc B gaussien de moyenne nulle et de variance unité.

Pour générer une séquence de bruit x à analyser, utiliser la commande **`x=genbrfil(*)`**;

La fonction `genbrfil` génère dans un premier temps 200000 échantillons du bruit blanc B gaussien de moyenne nulle et de variance unité dont l'histogramme s'affiche.

Le procédé de génération de ce bruit blanc fait appel à la fonction `randn` de Matlab qui génère une suite de nombres pseudo-aléatoires (de période supérieure à 2^{30}) que l'on initialise à l'aide d'un entier. Vérifier à ce stade que l'allure de l'histogramme est bien de forme gaussienne.

Ensuite cette séquence blanche est filtrée par le filtre passe-bas de fonction de transfert

$$\mathcal{H}(z) \approx \frac{0,0148 + 0,0593z^{-1} + 0,0890z^{-2} + 0,0593z^{-3} + 0,0148z^{-4}}{1 - 1,7293z^{-1} + 1,4461z^{-2} - 0,5713z^{-3} + 0,0917z^{-4}}$$

Il s'agit d'un filtre de Butterworth de fréquence de coupure 0,14.

Puis les 100000 échantillons centraux de la séquence sont stockés dans la variable de sortie et affichés.

(*) Quand un programme ne fait plus rien, il est en pause : appuyer sur la barre d'espace pour continuer.

3.2. Estimateur spectral simple

3.2.1. Mise en œuvre et programmation

On élaborera une fonction dont les paramètres d'entrée seront :

- le nom de la variable contenant le bruit filtré à analyser,
- le numéro du premier échantillon de la séquence à prendre en compte n_d ,
- le numéro du dernier échantillon de la séquence à prendre en compte n_f ,
- le nombre de points de transformée de Fourier $NFFT$ (choisir une puissance de 2).

Et qui exécutera les opérations suivantes

- sélection de la séquence à analyser
- calcul du nombre d'échantillons résultant N à analyser
- calcul de l'estimation $\hat{\Gamma}_1(f)$ pour la séquence considérée et pour f allant de 0 à $1-\Delta f$.

Cette fonction fournira en paramètres de sortie :

- l'estimation $\hat{\Gamma}_1(f)$ calculée
- le vecteur de fréquence allant de 0 à $1-\Delta f$ correspondant
- le nombre N d'échantillons de bruit analysés

Dans le programme principal, on fera appel à cette fonction pour estimer la DSPM du signal généré par la routine **genbrfil.m** et pour différentes valeurs des paramètres. On utilisera aussi le programme **sptheo.m** pour obtenir les valeurs théoriques de $\Gamma_x(f)$ (variable `Gth` en sortie de **sptheo.m**) et de $(\Gamma_x(f') * W_B^N(f'))(f)$ (variable `Gbiais` en sortie de **sptheo.m**). Ces grandeurs théoriques correspondent au bruit généré par **genbrfil.m** et sont exprimées en dB.

Pour chaque analyse, on affichera en dB sur une dynamique adaptée (par exemple s'étendant entre +10dB et -50 dB) et en les superposition sur l'intervalle $0 \leq f < 0,5$:

- l'estimation faite à partir des échantillons de bruit utilisés, soit $\hat{\Gamma}_1(f)$,
- la densité spectrale de puissance moyenne vraie de $x(n)$: $\Gamma_x(f)$,
- $(\Gamma_x(f') * W_B^N(f'))(f)$

Prévoir des titres de figure pertinents pour afficher les paramètres d'analyse.

Pour sélectionner les échantillons d'un vecteur x des indices $n1$ à $n2$: `y=x(n1 :n2)`

Pour superposer des tracés utiliser :

`plot(abscisse1,ordonnée1,'couleur1',abscisse2,ordonnée2,'couleur2',...abscisse3,ordonnée3,'couleur3')`

Pour afficher des valeurs de paramètres dans des titres ou des labels, on peut utiliser la syntaxe décrite dans l'exemple suivant :

```
title(['libellé titre ', num2str(NFFT), ' suite du titre'])
```

3.2.2. Expérimentation

Utiliser la fonction développée pour étudier les performances de ce type d'analyse en termes de biais et de variance en fonction :

- du nombre d'échantillons de bruit N pris en compte,
- de la position de la réalisation considérée dans la séquence à N fixé,
- du nombre $NFFT$ de points utilisés pour le calcul de la transformée de Fourier.

Compte-rendu

Insérer le script de la fonction développée dans le document LaTeX disponible.

Insérer les figures demandées (l'instruction à exécuter dans la fenêtre de commande de Matlab:

```
>> print -depsc [ou -dpng] NomFichier
```

permet de créer un fichier graphique NomFichier.eps [ou .png] à partir de la figure courante de Matlab.)

Rédiger les commentaires demandés en termes de biais et variance. On s'intéressera en particulier à la **comparaison entre les observations pratiques et les résultats théoriques du cours**.

3.3. Estimateur spectral moyenné

3.3.1. Mise en œuvre et programmation

On élaborera une fonction qui a comme paramètres d'entrée:

- le nom de la variable contenant les données à analyser,
- le nombre N d'échantillons total à analyser,
- le nombre M d'échantillons par segment,
- le nombre de points de transformée de Fourier $NFFT$

effectue les opérations suivantes :

- sélection de la séquence à analyser
- calcul grâce à la fonction **pwelch.m**, de l'estimation $\hat{\Gamma}_2(f)$, pour la séquence de N échantillons considérée pour f allant de 0 à $1-\Delta f$

et fournira comme paramètres de sortie :

- l'estimation $\hat{\Gamma}_2(f)$ calculée
- le vecteur de fréquence allant de 0 à $1-\Delta f$ correspondant

Dans le programme principal, on fera appel à cette fonction pour comparer l'estimation $\hat{\Gamma}_2(f)$ obtenue, aux grandeurs théoriques $\Gamma_x(f)$ et $(\Gamma_x(f') * W_B^M(f'))(f)$ fournies par la routine **sptheo.m** convenablement utilisée (attention à la valeur des paramètres à passer en entrée de cette fonction !)

Pour chaque analyse, afficher en dB sur une dynamique judicieusement choisie et en les superposant sur l'intervalle $0 \leq f < 0,5$:

- la mesure à partir des échantillons de bruit utilisés soit $\hat{\Gamma}_2(f)$.
- la densité spectrale de puissance moyenne théorique de $x(n)$: $\Gamma_x(f)$
- $(\Gamma_x(f') * W_B^M(f'))(f)$

3.3.2. Expérimentation et compte-rendu :

On étudiera avec la fonction développée les performances de ce type d'analyse en termes de biais et de variance à N fixé (on choisira une valeur de l'ordre de 10.000 points) en fonction :

- de la taille M des segments et (donc de leur nombre : $L = N/M$).

Choisissez une valeur de M (que l'on notera M^* par la suite) conduisant à un biais « acceptable » jusqu'à -30dB. Tracez en dB, l'estimation correspondante superposée aux densités (vraie et biaisée) théoriques. Sur ce tracé, mesurer la variabilité de $\hat{\Gamma}_2(f)$ dans la bande passante du bruit (on pourra par exemple mesurer l'écart-type).

Compte-rendu

Insérer le script de la fonction développée dans le document LaTeX fourni.

Inserer les figures demandées.

Rédiger les commentaires demandés en termes de biais et variance. On s'intéressera en particulier à la comparaison entre les observations pratiques et les résultats théoriques du cours.

3.4. Estimateur spectral de Welch

3.4.1. Etude préalable des fenêtres

On commencera par étudier les propriétés des différentes fenêtres à disposition en utilisant la commande `fenetre` qui fournit successivement : l'allure temporelle des six fenêtres disponibles (de longueur $M=40$ ici), leur spectre tracé en linéaire, puis leur spectre tracé en dB. Sur chacun de ces tracés, mesurer :

- la largeur des lobes principaux
- la largeur des lobes secondaires

- le taux d’atténuation d’amplitude des lobes secondaires.

Sur quelle(s) caractéristique(s) de l’estimation de densité spectrale de puissance moyenne, ces fenêtres vont-elles agir ? Expliquez en indiquant quelle serait le profil de la fenêtre idéale.

3.4.2. Mise en œuvre

On élaborera une fonction dont les paramètres d’entrée seront :

- le nom de la variable contenant les données à analyser,
- N le nombre d’échantillons total à analyser,
- `Nom_fenetre` le nom de la fenêtre sous la forme d’une chaîne de caractères (exemple : `'rectwin'`)
- M le nombre d’échantillons par tranche,
- `NOVERLAP` le nombre de points de recouvrement (attention : sur OCTAVE, `NOVERLAP` est exprimé en pourcentage !),
- le nombre de points de transformée de Fourier `NFFT`

et qui effectue les opérations suivantes :

- sélection de la séquence à analyser
- calcul, grâce à la fonction `pwelch.m` convenablement utilisée, de l’estimation $\hat{\Gamma}_3(f)$ à partir de la séquence considérée.

Cette fonction restituera les variables de sortie suivantes :

- l’estimation $\hat{\Gamma}_3(f)$ calculée
- le vecteur de fréquence allant de 0 à $1-\Delta f$ correspondant

Dans le programme principal, on fera appel à cette fonction pour comparer l’estimation $\hat{\Gamma}_3(f)$ obtenue, aux grandeurs théoriques $\Gamma_x(f)$ et $(\Gamma_x(f') * W_B^M(f'))(f)$ fournies par la routine `sptheo.m`.

Pour calculer le vecteur contenant les valeurs de la fenêtre de longueur M , il faut faire appel à la fonction Matlab qui porte le nom de cette fenêtre. Mais on ne peut pas directement utiliser la variable d’entrée donnant le nom de cette fenêtre car c’est un paramètre ‘chaîne de caractères’. Il faut utiliser la fonction `eval` pour reconstituer la ligne de commande qui doit permettre de calculer les valeurs de la fenêtre et exécuter le calcul. La ligne de code `eval(['WIN=', nom_fenetre, '(M)'])` crée un vecteur `WIN` qui contiendra les M valeurs de la fenêtre désignée par `nom_fenetre`.

Pour chaque analyse, elle affichera en dB sur une dynamique convenablement choisie et en les superposition sur l’intervalle $0 \leq f < 0,5$:

- la mesure à partir des échantillons de bruit utilisés soit $\hat{\Gamma}_3(f)$.

- la densité spectrale de puissance moyenne vraie de $x(n)$: $\Gamma_x(f)$
- $(\Gamma_x(f') * P(f'))(f)$

3.4.3. Expérimentation et compte-rendu

Avec les valeurs de N et de M^* retenues à la question précédente, et en générant le bruit avec la même initialisation (« seed »), on étudiera les performances de l'estimateur de Welch, en termes de biais et de variance. Pour cela :

- Pour différentes valeurs de recouvrement (25%, 50% et 75%) d'une **fenêtre rectangulaire**, on mesurera la variabilité de $\hat{\Gamma}_3(f)$ dans la bande passante du bruit. Comparer ces valeurs à celle mesurée en 3.3.2. Expliquez ces résultats en les confrontant à l'étude théorique vue en cours. Que permet le recouvrement entre segments ?

Comment se comporte le biais d'estimation en fonction du taux de recouvrement ? Expliquer.

- Toujours avec les mêmes valeurs de N , de M^* , du « seed » et pour une valeur de recouvrement choisie parmi les précédentes, tracez sur une même figure partagée en subplot les spectres estimés obtenus pour les différents choix de fenêtre proposés (on adaptera la dynamique d'affichage). Dans chaque cas, mesurez le biais obtenu (amplitude minimale du spectre estimé pour un biais « acceptable »). Expliquez ces résultats en faisant référence à l'étude conduite en 3.4.1. Que peut-on dire de la variance d'estimation pour chacune de ces fenêtres ? Pourquoi ?

Pour quelles valeurs des paramètres d'analyse (M^* , recouvrement, fenêtre) obtenez-vous le résultat qui vous semble le meilleur ?

4. Analyse d'un signal inconnu

Utiliser la commande `load sig` pour charger le vecteur `s` correspondant au signal à analyser. Il comporte 100000 échantillons.

4.1. Programmation

Utilisez les trois fonctions développées aux sections précédentes pour estimer « au mieux », la DSPM du signal à analyser contenu dans le vecteur `s`. Dans ce cas de signal inconnu :

- on ne dispose pas de modèles théoriques pour $\Gamma_x(f)$ ni pour $(\Gamma_x(f') * P(f'))(f)$, et par conséquent la routine `sptheo.m` n'est ici d'aucune utilité !
- il est préférable d'abandonner l'affichage en dB et d'utiliser la fonction `semilogy` à la place de `plot`, et une dynamique comprise entre 10 et 10^7 .

4.2. Estimation de la DSPM du signal inconnu

En expliquant la démarche scientifique suivie, faites l'analyse spectrale du signal avec les trois estimateurs étudiés précédemment. Justifiez le choix de l'ordre dans lequel vous appliquez les trois estimateurs. Précisez quel est pour vous le choix naturel de N . Pour chaque estimateur, ajustez les paramètres d'analyse, affichez et interprétez les spectres obtenus (en indiquant les informations qu'ils révèlent et les incertitudes qu'ils soulèvent sur le signal analysé).

Enfin, sur le spectre $\hat{\Gamma}_3(f)$ obtenu, décrivez le contenu spectral du signal, en mesurant :

- la position fréquentielle des pics observés
- l'amplitude respective de ces pics
- la nature du bruit de fond
- la puissance moyenne de ce bruit. Expliquez le calcul. En déduire une valeur du rapport signal sur bruit (SNR).

Fonctions Matlab utiles

[Gth,Gbiais,f]=sptheo(Q,method, fenetre) ;

calcule dans le cadre du TP Estimation spectrale

- Gth : la valeur en dB de la DSPM du bruit blanc filtré entre 0 et 0,5
- Gbiais : la valeur en dB de Gth convolué par la grandeur régissant le biais attaché à la 'method'
- f : un vecteur fréquence réduite de même taille que Gth et Gbiais

method peut prendre 3 valeurs: 'simple', 'moyenne' ou 'welch'

Si method='simple', Q représente la longueur de l'échantillon analysé

Si method='moyenne' ou 'welch', Q représente la longueur d'une tranche

Si method='simple' ou 'moyenne' le paramètre fenetre est ignoré.

Si method='welch', il faut spécifier le nom de la fenêtre dans le 3^{ème} paramètre

Exemple: [Gth,Gbiais,f]=sptheo(1024,'welch','hamming');

[Pxx,F] = pwelch(X,WINDOW,NOVERLAP,NFFT,Fs,'twosided')

- returns the Power Spectral Density (PSD) estimate, Pxx, of a discrete-time signal vector X using Welch's averaged, modified periodogram method.
- returns a vector of frequencies F at which the PSD is estimated and has units of Hz. For real signals, F spans the interval [0,Fs]. If Fs is equal to 1, F spans the interval [0,1].
- WINDOW must be a vector defined by the name of the window to be used and the length of each section (example: rectwin(M))
- Pwelch divides X into overlapping sections of length equal to the length of WINDOW, M and apply the WINDOW to each section.
- Pwelch uses NOVERLAP samples of overlap from section to section. NOVERLAP must be an integer smaller than the length of WINDOW
- NFFT specifies the number of FFT points used to calculate the PSD estimate. If NFFT is greater than the segment the data is zero-padded.

Fenêtres disponibles

```
rectwin(M); % fenêtre rectangulaire
bartlett(M); % fenêtre triangulaire
hann(M); % fenêtre de Hanning
hamming(M); % fenêtre de Hamming
blackman(M); % fenêtre de Blackmann
gausswin(M); % fenêtre de Gauss
```