Traitement des Signaux Aléatoires
Détection Quadratique

4 ETI – CPE Lyon

Travaux Pratiques TSA

Noms, Prénoms :

Groupe :

Date :

Contexte et Objectif

On souhaite étudier expérimentalement la chaine de détection quadratique présentée dans l'énoncé.
On souhaite détecter la présence ou non d'un signal aléatoire $S(t)$ dans un mélange signal + bruit. Le signal $X(t)$ reçu est égal à :

$$X(t) = S(t) + B(t)$$

Le signal $S(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence ν_0, d'amplitude A_0, à phase équipartie sur $[0, 2\pi[$ et modulé par un signal binaire $M(t) = 0$ ou 1 :

$$S(t) = M(t) \cdot A_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$$

Ce signal est bruité lors de la transmission par un bruit $B(t)$ gaussien, centré, stationnaire d'ordre 2 et de largeur de bande B centrée sur ν_0 (on supposera que le bruit est blanc sur le support fréquentiel du filtre $\mathcal{F}_1$).

$$X(t) = \begin{cases} B(t) & \text{si } M(t) = 0; \\ A_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \phi) + B(t) & \text{si } M(t) = 1 \end{cases}$$

L'objectif de la chaine de détection quadratique est de détecter dans l'observation reçue $X(t)$, la présence ($\mathbf{M(t) = 1}$) ou l'absence ($\mathbf{M(t) = 0}$) du signal utile $S(t)$.

Etudier soigneusement le TD corrigé qui vous a été remis et qui détaille le calcul des rapports signal sur bruit (SNR) aux différents étages de la chaine de détection. Répondre aux questions de préparation qui suivent.

Question 1. On considère un bruit $B(t)$ centré, de puissance moyenne $\overline{P_B} = 5\ V^2$.
Que mesure l'aire située sous la densité spectrale moyenne de puissance d'un bruit ?
Que vaut cette quantité par rapport à l'écart-type, la variance, la moyenne du bruit ?
Dans le cas du bruit $B(t)$ ci-dessus, calculer l'écart-type et l'amplitude Γ_0 de la densité spectrale.

réponse

□

Question 2. On filtre le bruit $B(t)$ par un filtre passe-bande, de bande passante $\Delta\nu$ centrée sur la fréquence F_0. Quel est le rôle du filtre passe-bande dans la chaine de détection quadratique. Sur quelle fréquence F_0 doit-il être accordé ?

réponse

□

Question 3. Soit $Y_B(t)$ la réponse du filtre $\mathcal{F}_1$ au bruit $B(t)$ ci-dessus. Que vaut la puissance de $Y_B(t)$ par rapport à celle de $B(t)$? Que vaut l'écart-type de $Y_B(t)$?
Application numérique avec $\Delta\nu = 16Hz$.

réponse

□

Question 4. A quoi sert l'ensemble QUADRATEUR + FILTRE PASSE-BAS RC ?

réponse

□

Question 5. Que signifie *hypothèse d'intégration forte* ? Quelle condition assure ici cette hypothèse ?

réponse

□

Question 6. Sous hypothèse d'intégration forte, que vaut alors $\mathbb{E}\{W_B\}$?
Application numérique avec $B(t)$ et $\Delta\nu = 16Hz$.

réponse

□

Question 7. On étudie à présent le signal $W(t)$ en sortie du filtre RC passe-bas, lorsque le mélange $X(t) = S(t) + B(t)$ est reçu en entrée du détecteur.
Avec la valeur de σ_B calculée à la Question 1, déterminer les paramètres du signal $S(t)$ tels que le mélange $X(t) = S(t) + B(t)$ ait un rapport signal sur bruit de $\eta_E = -10\ dB$.

réponse

□

$\Delta\nu \times RC$	2	20	100
RC			
S_S			
$B_S = \mathbb{S}td\{W_{S+B}\}$			
SNR η_S			
Gain g_1			
Gain g			

TABLE 1 – Valeurs théoriques

Question 8. Que valent dans ces conditions et lorsque $\Delta\nu = 16Hz$, le SNR η_{E_1} et le gain en rapport signal sur bruit η_{E_1}/η_E ?

réponse

□

Question 9. Rappeler ci-dessous les expressions théoriques de :

— $S_S = \mathbb{E}\{W_{S+B}\} - \mathbb{E}\{W_B\}$

— $B_S^2 = \sigma^2_{W_{S+B}}$

— du rapport signal sur bruit $\eta_S = \frac{S_S}{B_S}$

— des gains en SNR $g_1 = \frac{\eta_S}{\eta_{E_1}}$ et $g = \frac{\eta_S}{\eta_E}$

réponse

□

Question 10. Avec les valeurs théoriques de σ_B et de Γ_0, et pour $\Delta\nu = 16Hz$, calculer et porter dans la table 1, les valeurs demandées.

compléter la table 1

□

FIGURE 1 – Réalisation et densité spectrale de puissance moyenne du bruit : $B = 160\ Hz$, $P_B = 5\ V^2$, $\sigma_B = \sqrt{5}$, $\mu_B = 0$.

Manipulation

Dans l'ensemble du TP :

— tous les signaux sont échantillonnés à la fréquence $\mathbf{F_s} = \mathbf{500\ Hz}$.
— la bande passante du bruit $B(t)$ est fixée à $\mathbf{B} = \mathbf{160\ Hz}$.
— la fréquence du signal sinusoïdal $S(t)$ est fixée à $\nu_{\mathbf{0}} = \mathbf{100\ Hz}$
— l'ordre du filtre passe-bande $\mathcal{F}_1$ (butterworth) est fixé à `ordre` $= 6$

Vous veillerez à mettre sur vos Figures des légendes et des labels explicites et informatifs.

1 Etude du bruit seul

Dans cette partie, $M(t) = 0,\ \forall t$, de sorte que le signal est toujours absent.

1.1 Synthèse du bruit $B(t)$

On considère un bruit $B(t)$ centré, de puissance moyenne $\overline{P_B} = 5\ V^2$.
Avec les paramètres déterminés en préparation, reproduire dans le cadre ci-dessous, le code `Matlab` permettant :

- de générer une réalisation du bruit $B(t)$ sur une durée $T = 100\ s$
  Afficher la sortie de `CGN.m` dans la Figure 1 (**veillez à ajouter des légendes pertinentes**)
- de mesurer sur la trace de bruit ainsi obtenu les paramètres demandés à la **Table 2**.

code ci-dessous

□

figure ci-dessous

□

Moyenne $B(t)$	
Variance $B(t)$	

TABLE 2 – Mesures de la moyenne et de la variance de $B(t)$.

A partir de la Figure 1 et en expliquant la démarche suivie, retrouver (approximativement) la valeur de Γ_0. Comparer à la valeur théorique de la préparation.

réponse ci-dessous

□

Moyenne $Y_B(t)$	
Variance $Y_B(t)$	

TABLE 3 – Mesures de la moyenne et de la variance de $Y_B(t)$.

1.2 Etude du filtre passe-bande $\mathcal{F}_1$

On filtre le bruit $B(t)$ par un filtre passe-bande, de bande passante $\Delta\nu$ centrée sur la fréquence F_0.

1.2.1

On choisit $\Delta\nu = 16\ Hz$ et la valeur de F_0 identifiée dans la préparation.
Reproduire dans le cadre ci-dessous, le code permettant de :

- synthétiser le filtre $\mathcal{F}_1$ correspondant
- filtrer le bruit $B(t)$ par le filtre $\mathcal{F}_1$ (afficher avec des légendes pertinentes, la sortie du `BPF.m` dans la Figure 2)
- de mesurer sur la trace en sortie du filtre $\mathcal{F}_1$ les valeurs des paramètres demandés dans la **Table 3** (reporter ces valeur mesurées dans la **Table 3**) :

code ci-dessous

☐

figure ci-dessous

FIGURE 2 – Bruit Y(t) filtré passe-bande pour $\Delta\nu = 16$ Hz

☐

1.2.2

Estimer la valeur de Γ_0. Comparer les mesures ($\overline{P}_{Y_B}$ et Γ_0) aux valeurs théoriques obtenues en préparation. Comment peut on expliquer les éventuelles différence ?

réponse ci-dessous

☐

1.2.3

En pratique, qu'est ce qui limite le choix d'une bande passante $\Delta\nu$ trop étroite ?

réponse ci-dessous

☐

1.3 Elévation au carré et Filtrage RC passe-bas

1.3.1

Comme précédemment, on choisit $\Delta\nu = 16Hz$. En faisant varier le produit $\Delta\nu \times RC$ dans une boucle (du type `for ...end`), donner dans le cadre ci-dessous, le code qui :

- génère le signal $Z_B(t) = Y_B^2(t)$
- calcule la valeur de la constante RC correspondant au produit $\Delta\nu \times RC$ choisi
- filtre le signal $Z_B(t)$ par le filtre $\mathcal{H}_I$ de constante de temps RC
- mesure sur la sortie $W_B(t)$ les paramètres demandés dans la **Table 4** (y reporter les valeurs mesurées)

code ci-dessous

□

Remplir le tableau de mesures de la Table 4 (ignorez dans un premier temps les mesures demandées *après correction*).

$\Delta\nu \times RC$	2	20	100
RC			
moyenne $W_B(t)$			
variance $W_B(t)$			
Kurtosis $W_B(t)$			
moyenne $W_B(t)$ (après correction)			
variance $W_B(t)$ (après correction)			
Kurtosis $W_B(t)$ (après correction)			

TABLE 4 – Sortie Filtre RC - Cas du bruit seul.

1.3.2

Le processus $Z_B(t)$ (**signal en sortie du quadrateur**) est-il gaussien ? Pourquoi ?

réponse ci-dessous

□

(a) (b)

FIGURE 3 – Sortie $W_B(t)$ du filtre passe-bas pour $\Delta\nu = 16$ Hz – (a) $RC = ???$. ($\Delta\nu \times RC =$???) (b) $RC =$??? ($\Delta\nu \times RC =$???)

1.3.3

Pour les 2 valeurs extrêmes de $\Delta\nu \times RC$ proposées dans la Table 4, afficher dans la Figure ci-dessous, les sorties de `RCF.m`.

figure ci-dessous

□

1.3.4

Comparer pour chaque valeur de la constante RC, la valeur moyenne mesurée à la valeur théorique déterminée dans la préparation. Qu'est ce qui peut expliquer ces différences ? Comment corriger cet effet ?

réponse ci-dessous

□

1.3.5

Donner dans l'encadré ci-dessous les 2 lignes de code qui implémentent cette solution.

code ci-dessous

□

Appliquer cette correction et porter les nouvelles mesures dans la Table 4 (partie *avec correction*).

1.3.6

Lorsque le Kurtosis est proche de 3, que peut on dire de la statistique du processus $W_B(t)$?
Quel théorème important ce résultat illustre-t-il ?
Pour quelles(s) valeur(s) de RC a-t-on une *intégration forte* ? Comparer les variances de $W_B(t)$ mesurées pour les deux valeurs extrêmes de RC.

réponse ci-dessous

□

Dans la suite du TP, il faudra systématiquement appliquer cette correction aux mesures effectuées en sortie du filtre RC.

2 Mélange Signal + Bruit

On étudie à présent le signal $W(t)$ en sortie du filtre RC passe-bas, lorsque le mélange $X(t) = S(t)+B(t)$ est reçu en entrée du détecteur.

2.1 Sortie du filtre passe-bande $\mathcal{F}_1$

2.1.1

En utilisant les paramètres déterminés en préparation, générer une réalisation du signal $S(t)$ sur la même durée $T = 100\ s$ et la même fréquence d'échantillonnage $F_s = 500\ Hz$.

Reporter le code correspondant ci-dessous.

code ci-dessous

□

2.1.2

Vérifier que le filtre passe-bande, s'il est accordé sur la fréquence ν_0 n'altère pas le signal $S(t)$, en mesurant en sortie de $\mathcal{F}_1$ (dans le cas où $S(t)$ se présente seul en entrée) les paramètres demandés à la **Table 5**. En reprenant les mesures effectuées au paragraphe 1.2, déterminer le rapport signal sur bruit η_{E_1} en sortie du sortie du filtre $\mathcal{F}_1$ ainsi que le gain η_{E_1}/η_E introduit par $\mathcal{F}_1$.

Fréquence $Y_S(t)$	
Amplitude $Y_S(t)$	
Puissance $Y_S(t)$	
Puissance $Y_B(t)$ (recopie Table 3)	
SNR η_{E_1}	
Gain η_{E_1}/η_E	

Table 5 – Mesures des SNR et gains en sortie de $\mathcal{F}_1$.

2.1.3

Comparer aux valeurs théoriques.

réponse ci-dessous

□

	$\Delta\nu \times RC$	2	20	100
	RC			
T	S_S			
H	$B_S = \mathbb{S}td\{W_{S+B}\}$			
É	SNR η_S			
O	Gain g_1			
.	Gain g			
M	moyenne W_B (recopie de Table 4)			
E	moyenne W_{S+B}			
S	S_S			
U	$B_S = \mathbb{S}td\{W_{S+B}\}$			
R	SNR η_S			
E	Gain g_1			
S	Gain g			

Table 6 – Sortie Filtre RC - Cas du mélange signal + bruit.

2.2 Sortie du filtre RC passe-bas

2.2.1

Dans les mêmes conditions expérimentales ($\overline{P_B} = 5\ V^2$, $\Delta\nu = 16 Hz$, $\eta_E = -10\ dB$), effectuer les différentes mesures demandées dans **la table 6**.

2.2.2

Représentez dans la Figure 4, la sortie de `RCF.m` correspondant au cas $\Delta\nu \times RC = 20$.

figure ci-dessous

FIGURE 4 – Signal $W_{S+B}(t)$ dans le cas du mélange signal + bruit ($\Delta\nu = 16$ Hz, $\Delta\nu \times RC = 20$)

☐

(a) (b)
(c) (d)

FIGURE 5 – (a) Signal binaire $S(t)$. (b) Mélange Signal (binaire) + bruit avant et apres filtrage passe-bande. (c) Sortie $W(t)$ de la chaine de détection quadratique. (d) Signal binaire détecté après seuillage de la sortie quadratique.

3 Transmission d'un message binaire

3.1 Modulation binaire périodique

On souhaite à présent transmettre et détecter une séquence périodique binaire.

3.1.1

Avec les paramètres suivant :

- Puissance du bruit $B(t)$, $\overline{P}_B = 5\ V^2$
- Rapport signal sur bruit en entrée de la chaine, $\eta_E = -10\ dB$
- Fréquence du signal modulant $M(t)$, $F_M = 0.05\ Hz$
- Durée des signaux, $T = 100\ s$

synthétiser les signaux $S(t)$, $B(t)$ et $X(t)$ correspondant.

En vous basant sur les résultats expérimentaux obtenus dans la partie 2, choisissez un jeu de paramètres pertinent pour calibrer les filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{H}_I$. Reporter dans le cadre ci-dessous le code de détection du signal binaire reçu.

code ci-dessous

□

3.1.2

Visualiser dans la Figure 5 (en organisant avec la commande `subplot(4,1,·)` et en ajoutant une légende pertinente), les signaux :

- $S(t)$
- $X(t)$
- $W(t)$
- Le signal binaire détecté obtenu par seuillage du signal $W(t)$ (commenter le choix du seuil Σ choisi)

figure ci-dessous

□

3.1.3

Indiquez les valeurs des paramètres de détection utilisés.

réponse ci-dessous

□

3.1.4

Essentiellement quel élément de la chaine de détection va-t-il limiter le débit de transmission ?

réponse ci-dessous

□

3.1.5

Sans chercher à les estimer ici, quel(s) critère(s) permettrai(en)t de mesurer la qualité de la détection ?

réponse ci-dessous

□

3.2 Décodage d'un message inconnu

Charger le signal reçu `'SignalRecu_j'`, où j est le numéro de votre binôme.

```
>> load SignalRecu_1
```

Le signal $X(t)$ correspond à un message codé (code ascii 7 bits) transmis par modulation d'amplitude et dégradé par un bruit additif lié au canal de transmission. Exécuter la commande :

```
>> [TxMsg,Xp] = RxMessage_DQ(X,Xp) ;
```

pour lancer une détection quadratique *automatique* sur le signal reçu X (la structure Xp contient tous les paramètres de la transmission). Ajuster en ligne, les différents paramètres de la détection jusqu'à ce que le message décodé vous semble satisfaisant. Recopier ci-dessous, le message décodé.

réponse ci-dessous

□