Les applications dans le plan

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

1 Les transformations du plan

Une **transformation** est une **bijection du plan dans le plan**.
Une transformation est un **groupe** si et seulement si, la loi rond vérifie :

— que la composée de deux transformations est la somme des transformations ;
— les lois d'associativité et de commutativité ;
— l'existence d'un élément neutre ;
— que la composée de la transformation avec sa réciproque donne l'élément neutre ;
— que la composée de la transformation avec l'élément neutre est la transformation elle-même ;
— l'existence d'un élément symétrique

1.1 Symétrie centrale

Une **symétrie centrale** de centre O est une transformation ponctuelle du plan qui, à tout point M, associe le point M' tel que O soit le milieu du segment $[MM']$.

1.2 Réflexion ou symétrie axiale ou symétrie orthogonale

On appelle **réflexion** R d'axe (Δ) la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M' tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[MM']$. On dit également que deux points M et M' sont symétriques par rapport à une droite (Δ), si et seulement si (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$.

Si $R_{(\Delta)}(M) = M = R_{(\Delta)}(M')$, alors la réflexion est une **involution** $R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta)}(M) = M$.

La réflexion conserve :

- des distances ;
- des angles géométriques, mais pas des angles orientés ;
- des produits scalaires ;
- des barycentres ;
- des aires ;
- de l'alignement ;
- du parallélisme ;
- des milieux.

L'image d'une droite est une droite.

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

1.3 Translation

Une translation T de vecteur $\vec{u}$ est une transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$.

Si $T_{\vec{u}}(A) = A'$ et $T_{\vec{u}}(B) = B'$, alors $\vec{A'B'} = \vec{AB}$.

$\vec{AD} = \vec{BC}$ se traduit par B a pour image C par translation du vecteur $\vec{AD}$.

Les translations conservent :

- les distances ;
- les directions ;
- le parallélisme ;
- les milieux ;
- l'alignement ;
- les angles orientés ;
- les produits scalaires ;
- les barycentres.

Les translations ont trois grandes propriétés :

1. $T_{\vec{0}} = Id_P$;
2. $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$;
3. $(T_{\vec{u}})^{-1} = T_{-\vec{u}}$.

avec Id_P l'application identique du plan.

1.4 Rotation

On appelle **rotation** r la transformation du plan qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\Omega \bar{M}, \Omega \bar{M}'\right) = \alpha \, [2\pi] \end{array} \right. \tag{1}$$

avec $\Omega \neq M$. On note la rotation $M \xrightarrow{r_{\Omega,\alpha}} M'$. M a pour image M' par la rotation de centre Ω d'angle α et de sens positif ou négatif.

Si $\Omega = M$, alors $r_{\Omega,\alpha}(M) = M'$.

On note que la relation réciproque est simplement :

$$M' = r_{\Omega,\alpha}(M) \Leftrightarrow M = r_{\Omega,-\alpha}(M) \tag{2}$$

Les rotations sont des **bijections**.

$$(r_{\Omega,\alpha})^{-1} = r_{\Omega,-\alpha} \tag{3}$$

Propriété fondamentale. Soient $r_{\Omega,\alpha}(A)\, A'$ et $r_{\Omega,\alpha}(B)\, B'$, alors :

$$\left(\bar{AB}, \bar{A'B'}\right) = \alpha \, [2\pi] \tag{4}$$

et

$$AB = A'B' \tag{5}$$

La rotation conserve :

- des distances ;
- des angles orientés ;
- du parallélisme ;
- de l'orthogonalité ;
- de l'alignement : $r([AB]) = [A'B']$;
- des barycentres ;
- des produits scalaires.

L'image d'une droite est une droite telle que l'angle entre les deux droites est égal à l'angle de la rotation.

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

Il existe trois cas particuliers de rotation.

1. $r_{\Omega,\pi} = R_{\Omega} = H_{\Omega,-1}$;
2. $r_{\Omega,0} = Id_P = T_{\vec{0}} = H_{\Omega,-1}$;
3. Si $r_{\Omega,\alpha}(M) = M'$, alors Ω appartient à la médiatrice $[MM']$.

avec R une réflexion, H une homothétie, T une translation et avec Id_P l'application identique du plan.

1.5 Propriétés communes à ces quatre transformations

Propriété 1. Elles conservent les longueurs.

Propriété 2. Elles conservent les angles.

Propriété 3. Elles conservent l'alignement.

Propriété 4. Elles conservent le parallélisme et la perpendicularité.

Propriété 5. Elles conservent les aires.

1.6 Homothéties

Une homothétie H de centre Ω et de rapport k avec $k \neq 0$ est une transformation ponctuelle qui, à tout point M du plan, associe le pont M' tel que $\Omega\vec{M}' = k\Omega\vec{M}$.

Si $H(A) = A'$ et $H(B) = B'$, alors $A'\vec{B}' = A\vec{B}$.

Les homothéties conservent :

— les milieux ;

— les directions ;

— le parallélisme ;

— l'alignement ;

— les barycentres ;

— les angles orientés.

Les homothéties multiplient :

— les distances par $|k|$;

— les produits scalaires par k^2.

Les homothéties ont quatre grandes propriétés :

1. $H_{\Omega,1} = Id_P$;
2. $H_{\Omega,-1} = r_{\Omega,\pi}$;
3. $H_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'} = H_{\Omega,k'} \circ h_{\Omega,k} = H_{\Omega,kk'}$;
4. $(H_{\Omega,k})^{-1} = H_{\Omega,\frac{1}{k}}$.

avec Id_P l'application identique du plan et r une rotation.

Si A, B et C sont trois points alignés, alors il existe une homothétie de centre A qui transforme B en C. Si $\vec{AC} = k\vec{AB}$, alors $B \xrightarrow{H_{A,k}} C$.

2 L'image d'une droite…

Une droite est un ensemble de points.

2.1 … par une symétrie centrale

La droite (D) par la symétrie centrale autour du point I est une droite parallèle à (D).

2.2 … par une réflexion

La réflexion R d'une droite (D) par l'axe (Δ) est une droite.

2.3 … par une translation

La translation T d'une droite (D) est une droite obtenue par une translation d'un vecteur $\vec{u}$. $T_{\vec{u}}\,(D)$ est une droite parallèle à (D).

2.4 … par une homothétie

La homothétie H de centre Ω et de rapport k d'une droite (D) est une droite parallèle à (D).

2.5 Propriété de conservation de la symétrie centrale, la réflexion, la translation et la rotation d'une droite

Les quatre transformations précédentes conservent toutes :

— le parallélisme ;

— l'orthogonalité.

2.6 … par une rotation

La rotation r de centre Ω et de rayon α d'une droite (D) est une droite.

3 La composition entre deux transformations

3.1 La composée de deux translations

$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$

3.2 La composée de deux réflexions

La composée de deux réflexions de même axe (Δ) est l'identité du plan.

$$R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta)} = Id_P \tag{6}$$

La réciproque d'une réflexion vaut :

$$\left(R_{(\Delta)}\right)^{-1} = R_{(\Delta)} \tag{7}$$

Si $(\Delta) \,//\, (\Delta')$, alors $R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta')} = T_{2\vec{u}}$, mais $R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta')} = T_{-2\vec{u}}$, avec T une translation.

Si $(\Delta) \perp (\Delta')$, alors $R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta')} = r_{\Omega,0}$, avec r une rotation et $\Omega\,(\Delta) \cap (\Delta')$.

3.2.1 Composée de deux réflexions munies de deux axes parallèles

Soient deux axes (Δ) et (Δ') parallèles, et on effectue les réflexions suivantes :

$$M \xrightarrow{R_{(\Delta)}} M' \xrightarrow{R_{(\Delta')}} M'' \tag{8}$$

alors I est le milieu de $[MM']$, et J est le milieu de $[M'M'']$ (Fig. 1).

$$M\vec{M}'' = M\vec{M}' + M'\vec{M}'' = 2\vec{MI} + 2\vec{M'J} = 2\left(\vec{MI} + \vec{M'J}\right) = 2\left(\vec{MI} + \vec{M'M} + \vec{MJ}\right) = 2\left(\vec{M'I} + \right. \tag{9}$$

Théorème. Si $(\Delta) \,//\, (\Delta')$, alors $R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta')}$ est une translation de vecteur $2\vec{IJ}$.

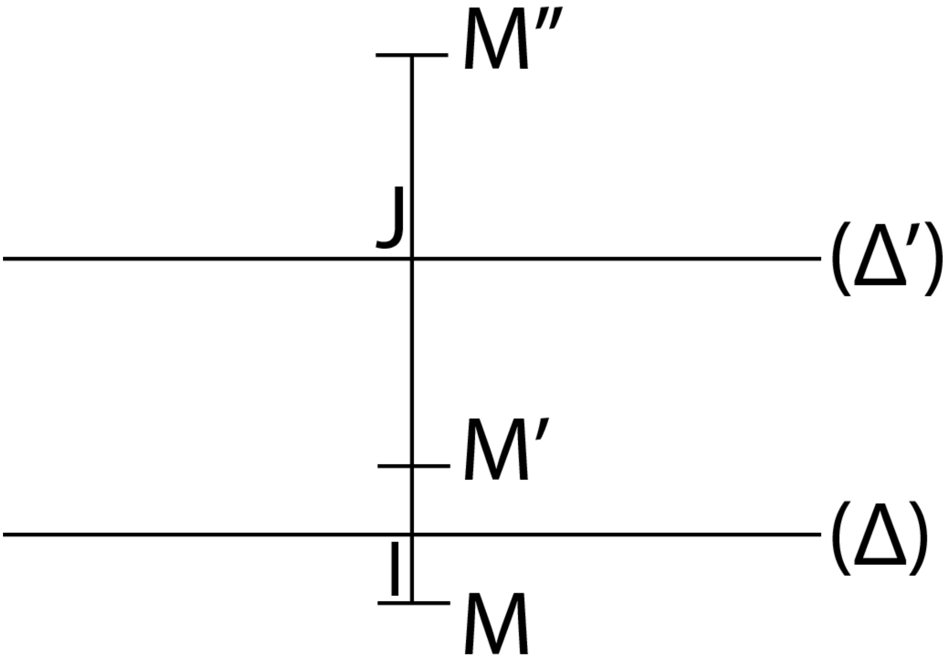

FIGURE 1 – Composée de deux réflexions munies de deux axes parallèles

3.2.2 Composée de deux réflexions munies de deux axes sécants

Soient deux axes (Δ) et (Δ') sécantes au point $\Omega = (\Delta) \cap (\Delta')$, et on effectue les réflexions suivantes :

$$M \xrightarrow{R_{(\Delta)}} M' \xrightarrow{R_{(\Delta')}} M'' \tag{10}$$

alors I est le milieu de $[MM']$, et J est le milieu de $[M'M'']$ (Fig. 2).

Étape 1. Déterminer la nature de la composée de deux réflexions munies de deux axes sécants

— (Δ) est la médiatrice de $[MM']$, donc $\Omega M = \Omega M'$.

— (Δ') est la médiatrice de $[M'M'']$, donc $\Omega M' = \Omega M''$.

— On en déduit que $\Omega M = \Omega M' = \Omega M''$. M, M' et M'' sont sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon ΩM.

$$(M, M', M'') \in (\mathcal{C}_{\Omega,\Omega M})^3 \tag{11}$$

Étape 2. Calculer l'angle de la rotation $r_{\Omega,\Omega M}$. Si $M \neq \Omega$, alors :

$$\left(\Omega\vec{M}, \vec{\Omega I}\right) = \left(\vec{\Omega I}, \Omega\vec{M'}\right) [2\pi] \tag{12}$$

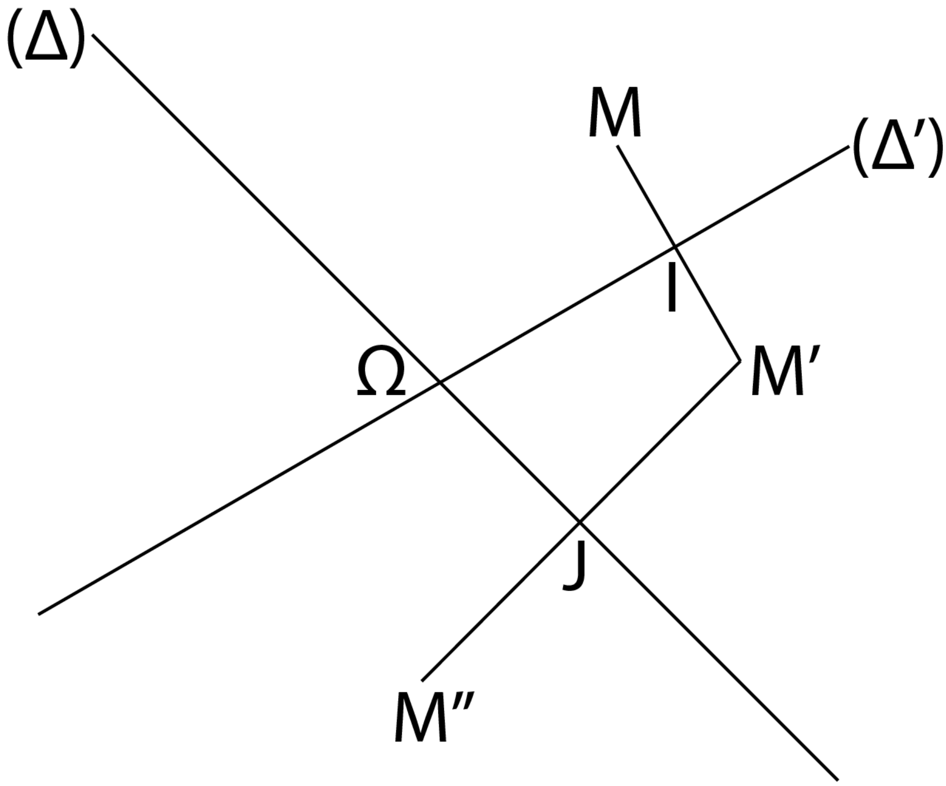

FIGURE 2 – Composée de deux réflexions munies de deux axes sécants

et

$$\left(\Omega\vec{M},\Omega\vec{J}\right)=\left(\Omega\vec{J},\Omega\vec{M}''\right)[2\pi] \tag{13}$$

On en déduit que :

$$\left(\Omega\vec{M},\Omega\vec{M}''\right)=\left(\Omega\vec{M},\Omega\vec{M}'\right)+\left(\Omega\vec{M}',\Omega\vec{M}''\right)=2\left(\Omega\vec{I},\Omega\vec{M}'\right)+2\left(\Omega\vec{M}',\Omega\vec{J}\right)=2\left(\Omega\vec{I},\Omega\vec{J}\right) \tag{14}$$

Étape 3. Démontrer que l'angle $2\left(\Omega\vec{I},\Omega\vec{J}\right)$ est indépendant de M.

Attention ! $\left(\Omega\vec{I},\Omega\vec{J}\right)$ dépend de M (Fig. 3).

— $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},-\vec{v})$ et $\beta=\alpha+\pi$

— On constate deux cas :

$$\begin{cases}\beta=\alpha+\pi+2k\pi=\alpha+2\left(k+1\right)\pi\\ \beta=\alpha+\pi+2k\pi\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases}2\beta=2\alpha+2\left(k+1\right)2\pi\\ 2\beta=2\alpha+2\pi+2k\pi\end{cases} \tag{16}$$

donc : $2\beta=2\alpha+2k'\pi$, soit $\beta=\alpha+k'\pi$.

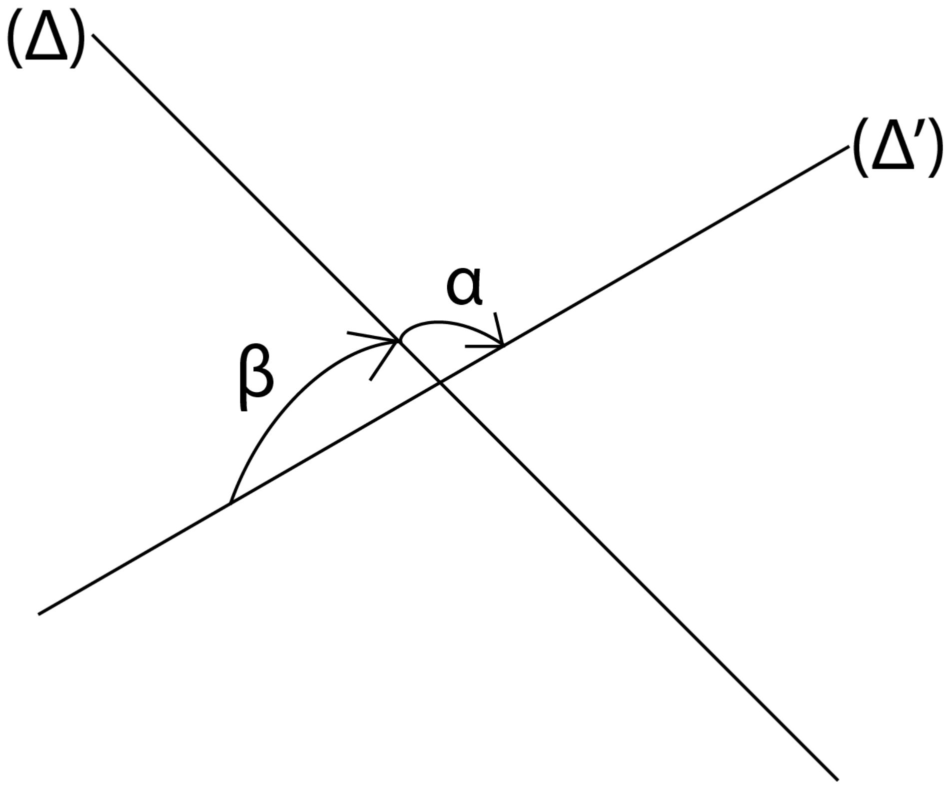

FIGURE 3 – L'angle $\left(\vec{\Omega I}, \vec{\Omega J}\right)$

3.3 La composée de deux homothéties

3.3.1 La composée de deux homothéties de même centre

L'ensemble des homothéties de centre A munies de la loi rond est un **groupe commutatif** vérifiant :

- l'associativité;
- l'existence d'un élément neutre;
- que l'élément symétrique de $H_{A,k}$ est $H_{A,\frac{1}{k}}$;
- que la composée de deux homothéties de même centre A est une homothétie de centre A.

Attention! La composée de deux homothéties de centre différents n'est pas forcément une homothétie. Par exemple, cela peut-être une translation pour les rapports inverses.

3.3.2 La composée de deux homothéties de centres différents et de rapports inverses

La composée de deux homothéties de centres A et B différents et, respectivement, de rapports k et k' tels que $k' = \frac{1}{k}$ est une translation. Cette composée n'est pas commutable, sauf pour $k = 1$

La relation vectorielle est : $M\vec{M'} = \frac{k-1}{k}A\vec{B}$.

3.3.3 La composée de deux homothéties de centres différents et de rapports quelconque

Soit $M\left(z\right) \xrightarrow{H_{A,k}} M_1\left(z_1\right) \xrightarrow{H'_{B,k'}} M'\left(z'\right)$, alors on a :

$$M_1 = H\left(M\right) : A\vec{M}_1 = kA\vec{M} \tag{17}$$

et

$$M' = H'\left(M_1\right) : B\vec{M'} = k'B\vec{M}_1 \tag{18}$$

On distingue deux cas :

— si $kk' = 1$, c'est-à-dire le cas précédent pour lequel $k = \frac{1}{k'}$, alors $M\vec{M'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)A\vec{B}$ avec $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}$. En résumé, la composée de deux homothéties de centres différents et de rapport inverse correspond à :

$$H'_{B,\frac{1}{k}} \circ H_{A,k} = T_{\left(1-\frac{1}{k}\right)A\vec{B}} \tag{19}$$

$$H'_{A,k} \circ H_{B,\frac{1}{k}} = T_{(1-k)A\vec{B}} \tag{20}$$

— si $kk' \neq 1$, alors :

1. on recherche d'éventuels points invariants tel que $\left(H' \circ H\right)\left(M\right) = M$. En général, on trouve un point I ;
2. la composée $H' \circ H$ est l'homothétie de centre I et de rapport kk'.

$$I\vec{M'} = kk'I\vec{M} \tag{21}$$

3.3.4 La composée d'une homothétie et d'une translation

Si H est une homothétie de centre A de rapport k avec $k \neq 1$. T est la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $T \circ H$ et $H \circ T$ sont des homothéties de rapport k dont les centres se situent sur la droite $(A, \vec{u})$.

Attention ! $T \circ H$ et $H \circ T$ ne sont pas commutables.

3.3.5 La méthode pour déterminer le centre d'homothétie de la composée deux homothéties

Soient f une homothétie de centre A et de rapport $k = 2$, g est une homothétie de centre B et de rapport $k' = -\frac{3}{4}$, calculer $g \circ f$.

1. On sait que $g \circ f$ est une homothétie de centre I, car $kk' = -\frac{3}{2}$.
2. Il suffit de connaître un point M et son image M'. On choisit le pont A. A est par conséquent un point invariant, donc $g\left(A\right) = \left(g \circ f\right)\left(A\right) = A'$. De fait, $\vec{BA'} = -\frac{3}{4}\vec{BA}$, or $\vec{IA'} = \frac{3}{2}\vec{IA'}$, donc $-\vec{BA'} + \vec{IA'} = \frac{3}{4}\left(\vec{BA} - 2\vec{IA}\right)$.

$$\Leftrightarrow \vec{IB} = \frac{3}{4}\vec{BA} - \frac{3}{2}\vec{IA} \tag{22}$$

$$\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{AB} = \frac{3}{4}\vec{BA} - \frac{3}{2}\vec{IA} \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\vec{IA} = \frac{7}{4}\vec{AB} \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{7}{10}\vec{AB} \tag{25}$$

3.4 La composée entre deux rotations

3.4.1 Deux rotations de même centre

Soient deux rotations r_1 et r_2 de même centre Ω, mais d'angles orientés différents α et β, alors :

$$r_{\Omega,\beta} \circ r_{\Omega,\alpha} = r_{\Omega,\alpha+\beta} \tag{26}$$

Si $\alpha = \beta$, alors :

$$r_{\Omega,\alpha} \circ r_{\Omega,\alpha} = r_{\Omega,2\alpha} \tag{27}$$

3.4.2 Deux rotations de centres différents

Soit (Δ_1) la droite passant par Ω telle que l'angle entre (Δ_1) et $(\Omega\Omega')$ soit égal à $-\frac{1}{2}$ fois l'angle de la rotation α de $r_{\Omega,\alpha}$, donc l'angle entre (Δ_1) et $(\Omega\Omega')$ vaut $-\frac{\alpha'}{2}$.

$$r_{\Omega,\alpha} = R_{(\Omega\Omega')} \circ R_{(\Delta_1)} \tag{28}$$

avec R une réflexion.

Soit (Δ_2) la droite passant par Ω' telle que l'angle entre (Δ_2) et $(\Omega\Omega')$ soit égal à $\frac{\alpha}{2}$.

$$r_{\Omega',\alpha'} = R_{\left(\Delta_2 \circ R_{(\Omega\Omega')}\right)} \tag{29}$$

On note que :

— $M_2 = r_{\Omega,\alpha}(M)$;

— $M' = r_{\Omega,\alpha'}(M_2)$.

Au final, on trouve la figure 4.

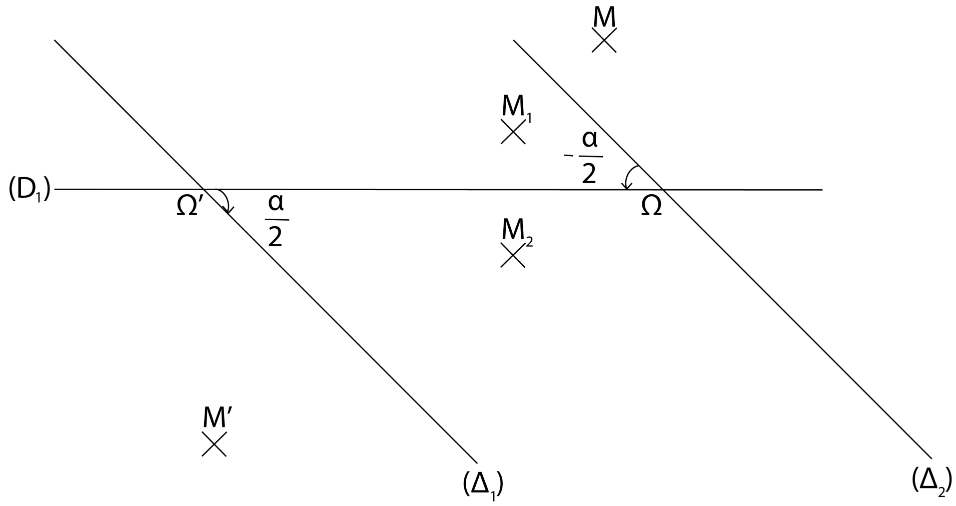

FIGURE 4 – Composée de deux rotations de centres différents

On a :

$$r_{\Omega',\alpha'} \circ r_{\Omega,\alpha} = R_{(\Delta_2)} \circ R_{\Omega\Omega'} \circ R_{\Omega\Omega'} \circ R_{(\Delta_1)} \tag{30}$$

or $R_{\Omega\Omega'} \circ R_{\Omega\Omega'} = Id_P$, donc :

$$r_{\Omega',\alpha'} \circ r_{\Omega,\alpha} = R_{(\Delta_2)} \circ R_{(\Delta_1)} \tag{31}$$

On recherche la valeur de l'angle de la rotation de centre I. On distingue deux cas :

1. $(\Delta_1, \Delta_2) = (\Delta_1, \Omega\Omega') + (\Omega\Omega', \Delta_2) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} + k\pi$;
2. Si $(\Delta_1) \mathbin{//} (\Delta_2)$, alors $(\Delta_1, \Delta_2) = 0 + k\pi \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} = k\pi \Leftrightarrow \alpha + \alpha' = 2k\pi$.

En conclusion, on distingue deux cas en fonction de $\alpha + \alpha'$.

1. Si $\alpha + \alpha' = 2k\pi$, alors on a une translation.
2. Si $\alpha + \alpha' \neq= 2k\pi$, alors on a une rotation.

La composée de deux rotations d'angles α et α' et de centres Ω et Ω', notée $r_{\Omega',\alpha'} \circ r_{\Omega,\alpha}$ est :

1. une translation T de vecteur $2\vec{\Omega\Omega'}$ si $\alpha + \alpha' = 2k\pi$;
2. une rotation de centre $I = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ et d'angle $\alpha + \alpha' \neq 2k\pi$.

Toutefois, en pratique, on ne recherchera jamais la composée avec cette méthode.

3.4.3 Décomposition d'une rotation en deux réflexions

Soient r la rotation de centre A et d'angle α, une droite (Δ) contenant le point A, alors il existe une unique droite (Δ') telle que $r_{A,\alpha} = R_{(\Delta')} \circ R_{(\Delta)}$.

(Δ') est la droite passant par A telle que $\left(\vec{u}, \vec{u'}\right) = \frac{\alpha}{2}$ avec $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{u'}$ un vecteur directeur de (Δ').

3.5 Composée d'une translation et d'une réflexion

$T_{\vec{u}} \circ R_{(\Delta)}$ n'est simplifiable que si $\vec{u}$ est un vecteur normal à (Δ), ce qui signifie que la direction de $\vec{u}$ est orthogonale à celle de (Δ).

Il existe deux cas (Fig. 5).

1. $T_{\vec{u}} = R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta')}$, mais $T_{\vec{u}} \circ R_{(\Delta)} = R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta')} \circ R_{(\Delta)}$;
2. $T_{\vec{u}} = R_{(\Delta')} \circ R_{(\Delta)}$, et $T_{\vec{u}} \circ R_{(\Delta)} = R_{(\Delta')} \circ R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta')} = R_{(\Delta')}$.

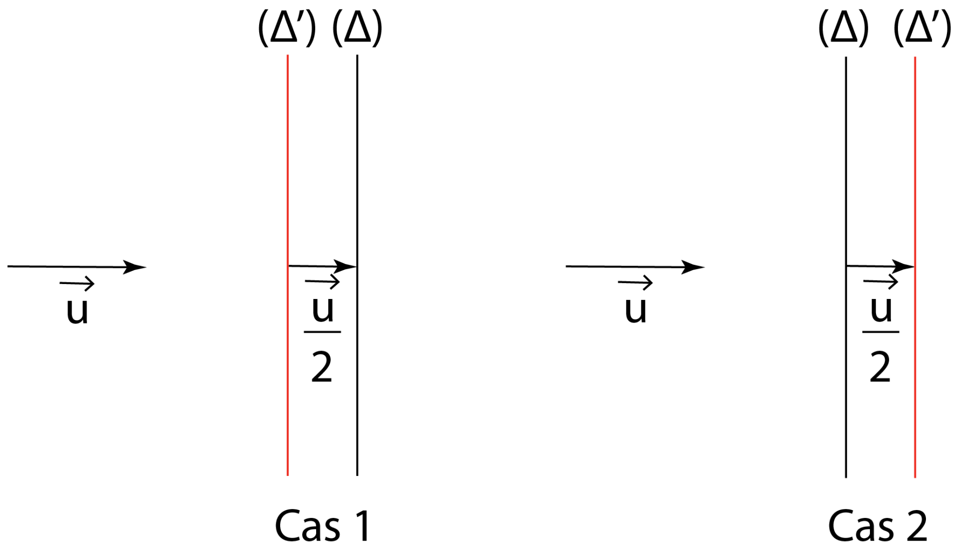

FIGURE 5 – Composée d'une translation et d'une réflexion

Si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal, alors $T_{\vec{u}} \circ R_{(\Delta)} = R_{(\Delta_2)} \circ R_{(\Delta_1)} \circ R_{(\Delta)} = R_{(\Delta_2)} \circ r_{(O_1,2\alpha)}$. La composée d'une translation et d'une réflexion n'est par conséquent pas simplifiable.

3.6 Composée d'une rotation et d'une réflexion

La composée $T_{\vec{u}} \circ r_{O,\alpha}$ correspond à la figure 6.

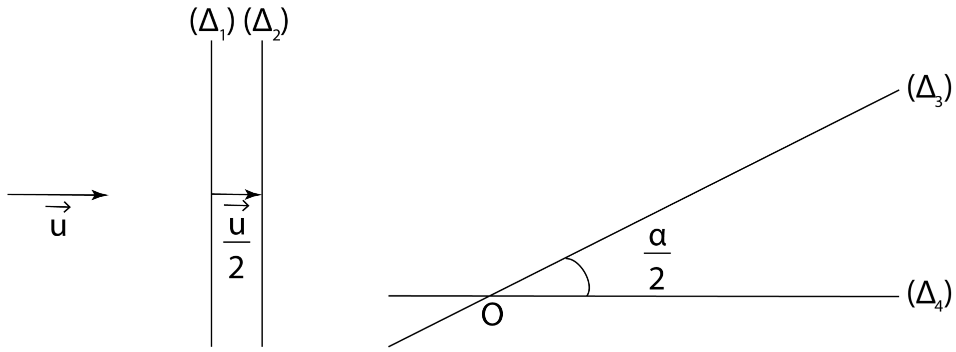

FIGURE 6 – Composée d'une rotation et d'une réflexion

Pour obtenir la composée, il faut que $(\Delta_2) // (\Delta_3)$. Deux cas apparaissent (Fig. 7).

1. $T_{\vec{u}} = R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta_1)}$ et $r_{O,\alpha} = R_{(\Delta_2)} \circ R_{(\Delta)}$, mais $T_{\vec{u}} \circ r_{O,\alpha} = R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta_1)} \circ R_{(\Delta_2)} \circ R_{(\Delta)}$.
2. $T_{\vec{u}} = R_{(\Delta_1)} \circ R_{(\Delta)}$ et $r_{O,\alpha} = R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta_2)}$, donc $T_{\vec{u}} \circ r_{O,\alpha} = R_{(\Delta_1)} \circ R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta_2)} = r_{O',\frac{\alpha}{2}}$.

4 Les isométries

Une **isométrie** est une transformation conservant les distances.

4.1 Théorèmes

Théorème 1. La composée de deux transformations est une transformation. Généralement, la composée de deux bijections et une bijection.

$$\forall M'' \in \mathcal{P}, T(M) = M'' \Leftrightarrow (T_2 \circ T_1)(M) = M'' \Leftrightarrow T_2(T_1(M)) = M'' \quad (32)$$

or M'' a un seul et unique antécédent par T_2 et M' a un seul et unique antécédent par T_1.

Théorème 2. La composée de deux isométries est une isométrie. La démonstration s'effectue de la même manière que le théorème précédents en tenant compte des distances.

4.2 Classification

Les isométries conservant trois points A, B, C non alignés, c'est-à-dire trois points invariants non alignés fixés, existent-elles ? Pour le vérifier, on opère une

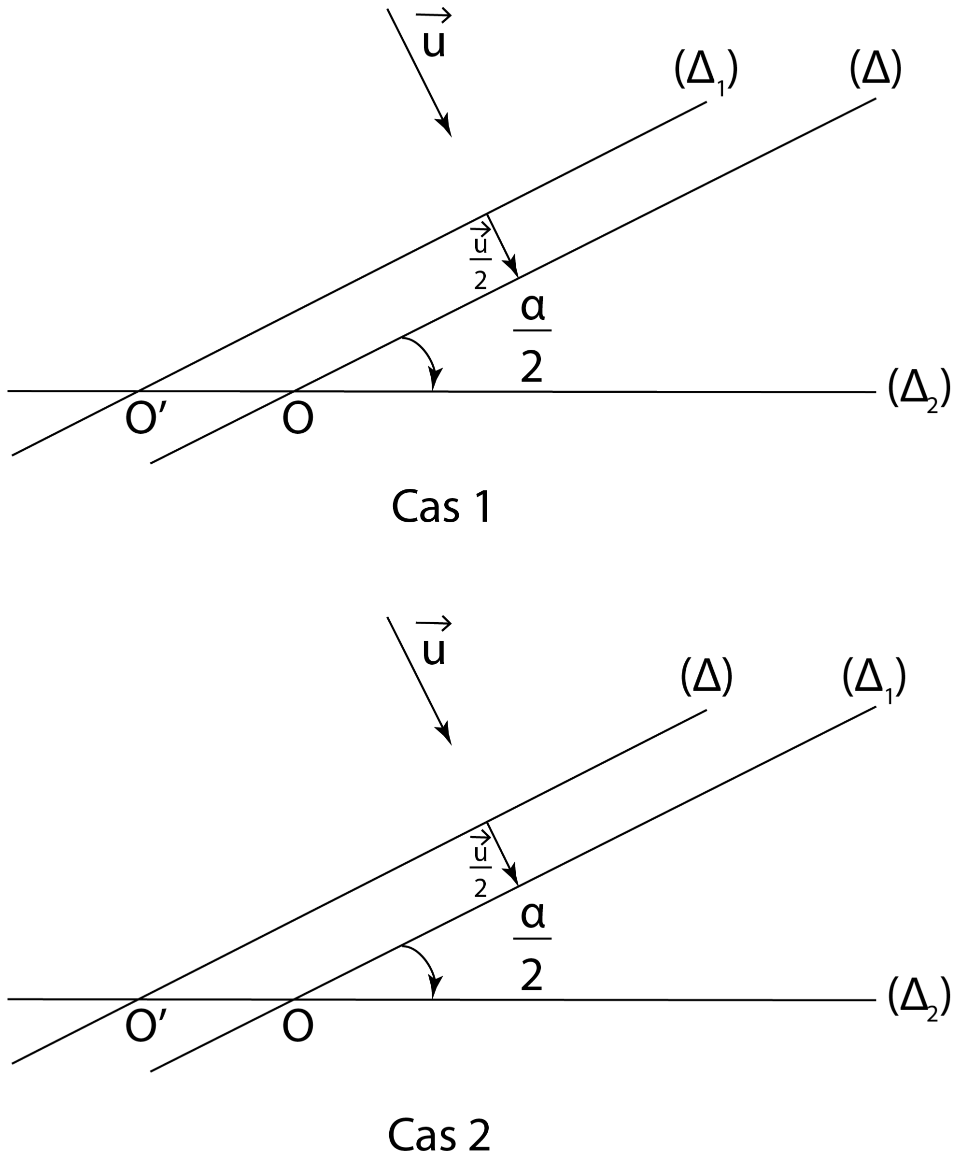

FIGURE 7 – Composée d'une rotation et d'une réflexion

démonstration par l'absurde. Si on a une isométrie, on sait que :

$$BM = BM' \text{ et } CM = CM' \tag{33}$$

et

$$M \neq M' \Rightarrow (A, B, C) \in (\text{médiatrice de } [MM'])^3 \tag{34}$$

or les points A, B, C ne sont pas alignés, donc c'est impossible.

Théorème. Une isométrie conservant trois points non alignés est l'identité.

Les isométries, différentes de l'identité, conservant deux points A et B non alignés existent-elles ? Pour le démontrer, on distingue deux cas. Soit $M' = I(M)$, I étant une isométrie, alors :

1. si $M \neq M'$, alors :

$$\left.\begin{array}{l} AM = AM' \\ BM = BM' \end{array}\right\} \Rightarrow () \text{ est la médiatrice de } [MM'] \Rightarrow M' = R_{(AB)}(M) \tag{35}$$

2. si $M \neq M'$, alors on opère une démonstration par l'absurde. Si $M \notin (AB)$, alors I serait l'identité, car M, A, B seraient trois points invariants non alignés, or I n'est pas l'identité, donc par contraposée $M \in (AB)$.

$$M' = R_{(AB)}(M) = M \tag{36}$$

Théorème. La seule isométrie différente de l'identité conservant deux points est la symétrie d'axe joignant ces deux points.

Les isométries conservant un et seul point existent-elle ? Soient $A' = I(A)$, I étant une isométrie, et (Δ) la médiatrice de $[AA']$, car $A \neq A'$, alors on peut définir I', la composée de deux isométries, comme : $I' = R_{(\Delta)} \circ I$. Par définition, I' est également une isométrie.

$$I'(A) = R_{(\Delta)}(I(A)) = R_{(\Delta)}(A') = A \tag{37}$$

et

$$I'(O) = R_{(\Delta)}(I(O)) = R_{(\Delta)}(O) \tag{38}$$

On en déduit que :

$$\left.\begin{array}{l} I(O) = O \\ I(A) = A' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Les distances sont conservées.} \tag{39}$$

$$OA' = OA \text{ et } O \in (\Delta) \Rightarrow R_{(\Delta)}(O) = O \tag{40}$$

Deux cas sont possibles pour I', il s'agit soit d'une identité, soit d'une symétrie d'axe (OA).

— Si $I' = R_{(\Delta)} \circ I = Id$, alors $R_{(\Delta)} \circ I = R_{(\Delta)} \circ Id = R_{(\Delta)}$. On a $R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta)} \circ I = R_{(\Delta)}$, donc $I = R_{(\Delta)}$, ce qui est impossible, car il n'existe qu'un point invariant.

— Si $I' = R_{(OA)}$, alors $I' = R_{(\Delta)} \circ I = R_{(OA)}$. On a $R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta)} \circ I = R_{(\Delta)} \circ R_{(OA)}$, donc $I = R_{(\Delta)} \circ R_{(OA)} = r_{O,\alpha}$

Théorème. L'unique isométrie différente de l'identité conservant un point est la rotation ayant pour centre ce point.

Des isométries n'ayant aucun point invariant existent-elles ? Soient $O \in \mathcal{P}$, $I(O) = O'$, $O \neq O'$, et (Δ) la médiatrice du segment $[OO']$, alors :

$$I' = R_{(\Delta)} \circ I \tag{41}$$

et

$$I'(O) = R_{(\Delta)}(O') = O \tag{42}$$

Il existe éventuellement trois cas.

1. $I' = Id$: $R_{(\Delta)} \circ I = Id \Rightarrow R_{(\Delta)} \circ R_{(\Delta)} \circ I = R_{(\Delta)} \Rightarrow I = R_{(\Delta)}$, ce qui est impossible, car I n'a pas de points invariants.
2. $I' = R_{\Delta_1} \Rightarrow I' = R_\Delta \circ I = R_{\Delta_1} \Rightarrow R_\Delta \circ R_\Delta \circ I = R_\Delta \circ R_{\Delta_1} \Rightarrow I = R_\Delta \circ R_{\Delta_1}$. On sait que $(R_{\Delta_1}) \,//\, (R_\Delta)$, car, si R_Δ et R_{Δ_1} sont sécants $I = r_{O,\alpha}$ et on aurait un point invariant $I = R_{(\Delta)} \circ R_{\Delta_1}$. I est par conséquent une translation.
3. $I' = r_{O,\alpha}$ avec $R_{(\Delta)} \circ I = r_{O,\alpha} \Rightarrow I = R_\Delta \circ r_{O,\alpha} = T_{\vec{u}} \circ R_{\Delta_1}$ avec $\vec{u}$ non normal à (Δ_1).

Théorème. L'unique isométrie différente de l'identité n'ayant pas de point invariant est la translation.

	Trois points invariants non alignés	**Deux points invariants non alignés**	**Un point invariant**	**Aucun point invariant**
Réflexion	non	oui	non	non
Rotation	non	non	oui	non
Translation	non	non	non	oui
Identité	oui	non	non	non
$\mathbf{T \circ R}$	non	non	non	oui

TABLE 1 – Classification des isométries

N.B. T est une translation. R est une réflexion.

4.3 Déplacement et antidéplacement

Il existe deux sortes d'isométries :

— celles qui conservent les angles orientés. Ce sont les **déplacements** :

- l'identité ;

- ■ la rotation ;
- ■ la translation.

— celles qui inversent les angles orientés. Ce sont les **antidéplacements** :

- ■ $T \circ R$ avec T une translation et R une réflexion ;
- ■ la réflexion.

Propriété 1. La composée d'un déplacement est un déplacement.

Propriété 2. L'ensemble des déplacements est un groupe non commutatif.

Propriété 3. Toute isométrie qui n'est pas un déplacement est un antidéplacement. L'ensemble des déplacements et des antidéplacement forme une **partition**.

Propriété 4. La composée de deux antidéplacements est un déplacement. Plus généralement, si la composée comprend un nombre pair d'antidéplacements, alors sa composée est un déplacement, et si la composée comprend un nombre impair d'antidéplacements, alors sa composée est un antidéplacement.

Propriété 5. La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Propriété 6. On passe d'un déplacement à un antidéplacement par composition avec une réflexion d'axe $[\ Ox\ )$.

5 Les similitudes

Une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances par un même nombre k avec $k \neq 0$ appelé **rapport de la similitude**. Par exemple, on peut citer :

— une homothétie de rapport $|k|$;

— les isométries. Ce sont des similitudes de rapport 1.

5.1 Propriétés

Théorème 1. Une similitude conserve les angles géométriques. Elle conserve les cosinus.

Théorème 2. Soit s une similitude, alors $s_{k_1} \circ s_{k_2} = s_{k_1 k_2}$.

Théorème 3. Une similitude conserve :

— l'alignement ;

— le parallélisme, mais pas les directions ,

— les barycentres ;
— l'orthogonalité.

Théorème 4. Une similitude multiplie les distances par k et les aires par k^2.

5.2 Décomposition d'une similitude

Les similitudes sont :
— l'identité ;
— la réflexion ;
— la translation ;
— l'homothétie ;
— $T \circ s$ avec T une translation et s une similitude.

Il n'existe que deux types de similitudes possibles.
— La composée entre une rotation r et une homothétie H, $H \circ r$, est appelée **similitude directe**. Elle conserve les angles orientés. Dans ce cas, le centre de la rotation et de l'homothétie sont supposés distincts.
— La composée entre une réflexion R et une homothétie H, $H \circ R$, est appelée **similitude indirecte**. Elle ne conserve pas les angles orientés.