Cours d'analyse de données en géographie
Niveau Master 1 - GEANDO
Pour commencer avec de bonnes bases…
Dénombrement

Maxime Forriez[1,a]

[1] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

1[er] juillet 2025

1 Exercices pour comprendre et calculer les factorielles

1.1 Exercice 1

Déterminer n, un nombre naturel, tel que :

1. $n! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \Rightarrow n = 4$
2. $(n-1)! = 24 = 4! \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 3$
3. $(n+1)! + 18 = 5098 \Rightarrow (n-1)! = 5098 = 7! \Rightarrow n + 1 = 7 \Rightarrow n = 6$
4. $n! - 3 = -2 \Rightarrow n! = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n! = 1! \\ \text{ou} \\ n! = 0! \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 1 \\ \text{ou} \\ n = 0 \end{array} \right.$
5. $n! = n \Rightarrow n\left((n-1)!\right) \Rightarrow (n-1)! = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (n-1)! = 1! \\ \text{ou} \\ (n-1)! = 0! \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n-1 = 1 \\ \text{ou} \\ n-1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \\ \text{ou} \\ n = 1 \end{array} \right.$
6. $(n+2)! = 5\left((n+1)!\right) \Rightarrow (n+2)\left((n+1)!\right) = 5\left((n+1)!\right) \Rightarrow n + 2 = 5 \Rightarrow n = 3$
7. $(n-1)! = \frac{n!}{10} \Rightarrow 10\left((n-1)!\right) = n\left((n-1)!\right) \Rightarrow n = 10$
8. $n! = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times (6!)}{6!} = 7 \times 4 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! \Rightarrow n = 7$

9. $\frac{n!}{6!} = 7! \Rightarrow n! = (7!)\,(6!) = 1 \times 2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 \times 7 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10! \Rightarrow n = 10$
10. $2^{n!} = 8^{n!-4} \Rightarrow 2^{n!} = 2^{3(n!)-12} \Rightarrow n! = 3\,(n!) - 12 \Rightarrow 2\,(n!) = 12 \Rightarrow n! = 6 = 3 \times 2 \times 1 = 3! \Rightarrow n = 3$

1.2 Exercice 2

Calculer sans calculatrice :

1. $\frac{8!6!}{5!7!} = 48$
2. $\frac{11!3!}{9!1!} = 660$
3. $\frac{11!4!2!}{3!5!12!} = \frac{1}{180}$

1.3 Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier :

1. $\frac{(n+5)!(n-4)!}{(n+4)!(n-3)!} = \frac{n+5}{n-3}$ avec $n \geq 4$
2. $\frac{(n+3)!}{(n+2)!} - \frac{(n-4)!}{(n-3)!} = (n+2)^2$ avec $n \geq 3$
3. $\frac{(n+2)!}{(n+1)!} - \frac{2(n!)!}{(n-1)!} = -n + 2$ avec $n \geq 1$
4. $\frac{(n+3)!}{(n+2)!} - \frac{(n-4)!}{(n-3)!} = \frac{n^2-10}{n-3}$ avec $n \geq 3$

2 Exercices pour comprendre les permutations – Tirages complets sans remise

2.1 Exercice 1

Un sac contient les cinq lettres du mot VILLE inscrites sur cinq cartons. Ils sont **indiscernables au toucher**. On tire **tous** les cartons du sac que l'on dispose dans l'ordre du tirage pour former un mot. Combien de mots différents peut-on obtenir ?

1. On tire **tous** les cartons. Il s'agit par conséquent d'une **permutation**.
2. Il existe deux lettres identiques : LL. Cela signifie que la permutation contient une répétition valant 2!.
3. La permutation avec répétition vaut alors :

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times (2!)}{2!} = 60 \qquad (1)$$

On peut faire 60 mots différents.

2.2 Exercice 2

Un sac contient les dix lettres du mot ASSURANCES inscrites sur dix cartons. Ils sont **indiscernables au toucher**. On tire **tous** les cartons du sac que l'on dispose dans l'ordre du tirage pour former un mot. Combien de mots différents peut-on obtenir ?

1. On tire **tous** les cartons. Il s'agit par conséquent d'une **permutation**.
2. Il existe trois lettres identiques : SSS **et** deux lettres : AA. Cela signifie que la permutation contient une répétition valant : $3!2!$.
3. La permutation avec répétition vaut alors :

$$\frac{10!}{3!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2 \times 2 \times (3!)}{3!2!} = 302400 \tag{2}$$

On peut faire 302300 mots.

2.3 Exercice 3

Les Rapetou se ressemblent et s'habillent de manière identique. L'unique manière de les différencier est leur matricule de prisonnier. Les trois combinaisons récurrentes sont 176-167, 176-671 et 176-761. Carl Barks déclara lors d'une interview qu'il existait autant de Rapetou que de matricules. ABC-XYZ avec les chiffres. 1, 6 et 7 avant et après le tiret. Combien existe de Rapetou ?

ABC et XYZ sont **indépendants**. Le tirage est complet et sans remise. ABC et XYZ sont deux permutations.

— Avec ABC, $3!$ cas sont possibles.

— Avec XYZ, $3!$ cas sont possibles.

ABC **et** XYZ ont $3!3!$ cas sont possibles.

$$3!3! = 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 36 \tag{3}$$

Il existe 36 Rapetou dans l'univers de Carl Barks.

2.4 Exercice 4

Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres des mots ?

1. DEUX
2. ABRACADABRA
3. SOCIOLOGIQUE

Il s'agit d'un tirage complet sans répétition des lettres de chaque mot. Il est demandé une permutation de toutes les lettres soit :

1. $4! = 24$
2. $11! = 83160$
3. $12! = 39916800$

2.5 Exercice 5

Les douze tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard.

1. Combien existe-t-il de manière de les aligner sur une étagère ? Cela revient à les ranger toutes peu importe l'ordre. C'est une permutation.

$$12! = 479001600 \tag{4}$$

2. Parmi les classements, combien en existe-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côté dans cet ordre ? Cela revient à exiger que toutes les encyclopédies des tomes 3 à 12, soit 10 au total n'ont pas d'ordre précis, **et** 11 possibilités que $(1, 2)$ soit l'une à côté de l'autre.

$$11 \times 10! = 39916800 \tag{5}$$

3 Exercices pour comprendre les arrangements – Tirages incomplets et successifs sans remise

3.1 Exercice 1

Dans une urne, il y a six boules noires, trois boules blanches et deux boules bleues. On tire **successivement et sans remise** trois boules au hasard.

1. Combien de tirages différents sont possibles ? Cela revient à tirer 1 boule parmi 11 **et** 1 boule parmi 10 **et** 1 boule parmi 9.

$$A_1^{11} A_1^{10} A_1^{9} = \frac{11!}{10!} \times \frac{10!}{9!} \times \frac{9!}{8!} = \frac{11!}{8!} = 11 \times 10 \times 9 = 990 \tag{6}$$

Il existe 990 tirages différents.

2. Combien de tirages comportent **exactement** une boule noire ? Cela revient à tirer 1 boule parmi 6 **et** 2 boules parmi 5.

$$A_1^{6} A_2^{5} = \frac{6!}{5!} \times \frac{5!}{2!} = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 30 \times 12 = 360 \tag{7}$$

Il existe 360 tirages comportant exactement une boule noire.

3. Combien de tirages comportent **au moins** une boule noire ? Cela revient à cherche combien de tirage **n'**on **aucune** boule noire. On recherche le **complémentaire**, soit 3 boules parmi 5.

$$A_3^{5} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \tag{8}$$

Il suffit de faire la différence entre le nombre de tirages différents **et** le nombre de tirages sans boule noire soit :

$$990 - 60 = 930 \tag{9}$$

Il existe 930 tirages avec au moins une boule noire.

3.2 Exercice 2

Chaque classe doit avoir une délégation de trois élèves : un délégué, un suppléant du délégué et un laveur de tableau. Soit une classe composée de : 11 filles et 3 garçons.

1. Combien existe-t-il de délégations possibles ? Cela revient à sélectionner 3 élèves parmi 14.

$$A_3^{14} = \frac{14!}{11!} = 14 \times 13 \times 12 = 2184 \tag{10}$$

   Il existe 2184 délégations possibles.

2. Combien existe-t-il de délégations si le délégué et le suppléant sont de sexes différents ? Cela revient à sélectionner 1 fille parmi 11 **et** 1 garçon parmi 3 **et** 1 garçon parmi 2 **ou** 1 fille parmi 11 **et** 1 garçon parmi 3 **et** 1 parmi 10.

$$2\times A_1^2 A_1^{11} A_1^3 + 2\times A_1^{11} A_1^3 A_1^{10} = 2\times\frac{2!}{1!}\times\frac{11!}{10!}\times\frac{3!}{2!} + 2\times\frac{11!}{10!}\times\frac{3!}{2!}\times\frac{10!}{9!} = 2\times 11\times 3 + 2\times 11\times 3\times 10 = 132+6 \tag{11}$$

   Il existe 792 délégations possibles.

   — Cas 1 : FGG ou CFG

   — Cas 2 : FGF ou GFG

3. Combien existe-t-il de délégations si le laveur de tableau doit être un garçon ? Cela revient à choisir 1 fille parmi 11 et 1 fille parmi 10 et 1 garçon parmi 3 **ou** 1 fille parmi 11 et 1 garçon parmi 3 et 1 garçon parmi 2 **ou** 1 garçon parmi 3 et 1 garçon parmi 2 et 1 garçon parmi 1.

$$A_1^{11} A_1^{10} A_1^3 + 2\times A_1^{11} A_1^3 A_1^2 + A_1^3 A_1^2 A_1^1 = 11\times 10\times 3 + 2\times 11\times 3\times 2 + 3\times 2\times 1 = 468 \tag{12}$$

   Il existe 792 délégations possibles.

   — Cas 1 : FFG

   — Cas 2 : FGG ou GFG

   — Cas 3 : GGG

4. Combien existe-t-il de délégations si les deux sexes doivent être présents dans chaque délégation ? Cela revient à choisir 1 fille parmi 11 et 1 fille parmi 10 et 1 garçon parmi 3 **ou** 1 fille parmi 10 et 1 garçon parmi 3 et 1 garçon parmi 2.

$$3 \times A_1^{11} A_1^{10} A_1^3 + 3 \times A_1^{11} A_1^3 A_1^2 = 11 \times 10 \times 3 \times 3 + 11 \times 3 \times 2 \times 3 = 1188 \tag{13}$$

   On dispose de deux cas :

   — Cas 1 : FFG, GFF et FGF ;

   — Cas 2 : GGF, GFG et FGG.

3.3 Exercice 3

Un représentation s'apprête à visiter cinq clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites…

- … s'il les fait toutes le même jour ? Il s'agit d'une permutation : $5! = 120$.
- … s'il les fait trois un jour et deux le lendemain ? Il s'agit de deux arrangements : $A_3^5 A_2^2 = \frac{5!}{2!} \times \frac{2!}{0!} = 5! = 120$.

4 Exercices pour comprendre les combinaisons – Tirages incomplets et simultanés

N.B. Il faudra bien déterminer les cas avec ou sans répétition (ou remise).

Astuce. Écrire littéralement ce qui est demandé. Conformément à l'algèbre des ensembles finis, chaque « ou » équivaut à une somme, et chaque « et » équivaut à un produit.

4.1 Exercice 1

Le jeu de scrabble comporte 98 lettres dont 15 E. On tire 7 lettres dans le sac dans lequel sont placées les 98 lettres du jeu. On les dispose sur son chevalet.

1. Combien de tirages différents sont possibles ? On tire **simultanément** 7 lettres parmi 98.
$$C_{98}^7 = \frac{98!}{7!91!} = 13834413152 \tag{14}$$
2. Combien de tirages comportent **exactement** une lettre E ? On tire simultanément 1 lettre E parmi 15 **et** 6 lettres parmi 83.
$$C_{15}^1 \times C_{83}^6 = \frac{15!}{1!14!} \times \frac{83!}{6!77!} = 15 \times \frac{83!}{6!77!} = 5661707220 \tag{15}$$
3. Combien de tirages comportent **au moins** une lettre E ?
   - On évalue dans un premier temps les tirages simultanés sans la lettre 5.
$$C_{83}^7 = 4151918628 \tag{16}$$
   - On calcule la différence entre le nombre de tirages différents et le nombre de tirages sans la lettre E dans un second temps.
$$C_{98}^7 - C_{83}^7 = 9682494524 \tag{17}$$

4.2 Exercice 2. Résultat du loto

On tire **successivement** 6 nombres entre 1 et 49.

1. Quel est le nombre de tirages différents ? Cela revient à tirer 6 nombres parmi 49.

$$A_6^{49} = \frac{49!}{43!} = 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 = 10068347520 \tag{18}$$

2. On refuse de prendre en compte l'ordre. Quel est le nombre de tirages différents ?

$$C_{49}^6 = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13983816 \tag{19}$$

Dans ce cas, $(1, 2, 3, 4, 5, 6) \neq (2, 1, 3, 4, 5, 6)$, mais $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq \{2, 1, 3, 4, 5, 6\}$

4.3 Exercice 3. Compter les triominos

Chaque triomino comporte trois chiffres entre 0 et 5. Combien existe-t-il de triominos ? On note a, b et c les trois chiffres. Il existe trois cas :

1. $a = b = c$;
2. $a = b \neq c$;
3. $a \neq b \neq c$.
   — Soit les trois chiffres suivent le sens des aiguilles d'une montre (jeu normal).
   — Soit les trois chiffres suivent le sens inverse des aiguilles d'une montre (jeu étendu).

Cas 1. Pour les symboles identiques, il est facile d'établir qu'il existe 6 configurations.

Cas 2. Il existe 2 symboles identiques parmi 3 **ou** 1 autre symbole parmi 5. L'ordre n'a pas d'importance

$$C_6^2 + C_6^1 = 15 + 5 = 20 \tag{20}$$

Cas 3. Il existe 3 symboles parmi 6. L'ordre n'a pas d'importance :

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20 \tag{21}$$

Si l'on ajoute le cas des sens inverses, il en existe de fait 20 de plus.

4.4 Exercice 4

Une urne contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 1 boule noire. On tire **simultanément** trois boules.

1. Quel est le nombre de tirages possible ? $n = 4 + 5 + 1 = 10$ boules. On tire **simultanément** 3 boules parmi 10, donc :

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!7!} = \frac{10 \times 3 \times 3 \times 2 \times 4}{3 \times 2} = 120 \tag{22}$$

Il existe 120 tirages possibles au maximum.

2. Quel est le nombre de tirages avec des boules de même couleur ? Cela revient à chercher les tirages avec 3 boules blanches parmi 4 **ou** les tirages avec 3 boules rouges parmi 5 :

$$C_4^3 + C_5^3 = \frac{4!}{3!} + \frac{5!}{3!2!} = 4 + \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = 4 + 10 = 14 \tag{23}$$

Il existe 14 tirages possibles avec des boules de même couleur.

3. Quel est le nombre de tirages avec des boules de couleurs différentes ? Cela revient à chercher les tirages avec 1 boule blanche parmi 4 **et** 1 boule rouge parmi 5 **et** 1 boule noire parmi 1.

$$C_4^1 \times C_5^1 \times C_1^1 = \frac{4!}{1!3!} \times \frac{5!}{1!4!} \times \frac{1!}{1!0!} = 4 \times 5 \times 1 = 20 \tag{24}$$

Il existe 20 tirages possibles avec des boules de couleurs différentes.

4. Quel est le nombre de tirages **sans** boule blanche ? Cela revient à tirer 3 boules parmi les 6 boules non blanches.

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 5 \times 4 = 20 \tag{25}$$

Il existe 20 tirages sans boules blanches.

5. Quel est le nombre de tirages avec **au moins** une boule blanche ? Cela revient à tirer 1 boule blanche parmi 4 et 2 boules non blanches parmi 6 **ou** 2 boules blanches parmi 4 et 1 boule non blanche parmi 6 **ou** 3 boules blanches parmi 4 et 0 boule non blanche parmi 6 :

$$C_4^1 C_6^2 + C_4^2 C_6^1 + C_6^0 C_4^3 = \frac{4!}{1!3!} \times \frac{6!}{2!4!} + \frac{4!}{2!2!} \times \frac{6!}{1!5!} + \frac{6!}{0!6!} \times \frac{4!}{3!1!} = 4 \times 15 + 6 \times 6 + 4 = 60 + 36 + 4 = 100 \tag{26}$$

Il existe 100 tirages avec au moins une boule blanche.

6. Quel est le nombre de tirages avec **au plus** une boule blanche ? Cela revient à tirer 1 boule blanche parmi 4 et 2 boules non blanches parmi 6 **ou** 0 boule blanche parmi 4 et 3 boules non blanches parmi 6.

$$C_4^1 C_6^2 + C_4^0 C_6^3 = \frac{4!}{1!3!} \times \frac{6!}{2!4!} + \frac{4!}{0!4!} \times \frac{6!}{3!3!} = 4 \times 15 + 1 \times 5 \times 4 = 60 + 20 = 80 \tag{27}$$

Il existe 80 tirages avec au plus une boule blanche.

Table des matières