La géométrie descriptive

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

« Je n'épouse pas les opinions exceptées celles des livres d'Euclide. »
(Montesquieu)

Euclide d'Alexandrie (vers 300 a.-C.)

Chalres Louis de Secondat, baron de La Brède et de Montesquieu (1689-1755)

« La géométrie (de *geo*, « terre », et *metrein*, « mesure ») traite des questions relatives aux longueurs des courbes, aires des surfaces et volumes des solides. Ces questions furent affrontées de manière systématique à partir des *Éléments* d'Euclide qui procurèrent en 300 a.-C. une fondation géométrique à toute la mathématique grecque » [**?**, p. 34]. Aujourd'hui, cette géométrie sert toujours, mais la fondation des mathématiques repose sur la théorie des ensembles dans laquelle quatre des axiomes d'Euclide ont été intégrés.

1 Le plan et les points

Il existe un ensemble, appelé **plan**, dont les éléments sont appelés **points**.

Plan et point sont des infinis. Tout dessin n'est qu'une représentation, approximation, géométrique.

2 Les droites

Étant donné deux points distincts A et B, il existe une et une seule droite contenant A. et B. Néanmoins, une droite est composée d'un ensemble de points. On note cette droite : (AB) ou (d).

Il est possible de partager une droite en deux **demi-droites** grâce à un point A servant d'origine. Pour nommer la demi-droite, on positionne un point B sur la demi-droite, que l'on note $[\mathrm{AB})$.

2.1 Droites parallèles

2.1.1 Définitions

Deux droites sont **parallèles** si elles n'ont aucun point commun – elles sont alors disjointes –, ou si elles sont confondues.

Si deux droites ont un point commun, alors elles sont sécantes.

2.1.2 Axiome

Étant donné une droite (d) et un point A, il n'existe qu'une seule droite parallèle à (d) passant par A.

2.1.3 Propriétés

Propriété 1. Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Propriété 2. Si deux droites sont parallèles, alors toute sécante à l'une est sécante à l'autre.

2.2 Les angles

Deux droites sécantes forment quatre angles que l'on mesure en degré ou en radian. Ils forment une paire d'angles opposés par le sommet (Fig. **??**). Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure :

$$a = c \text{ et } b = d \tag{1}$$

Un angle qui a pour mesure 0° est un angle nul. Un angle droit est un angle de 90°. Un angle plat est un angle de 180°.

Un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 90° est un angle aigu. Un angle dont la mesure est comprise entre 90° et 180° est un angle obtu. Un angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360° est un angle rentrant.

Deux angles adjacents ont un sommet en commun, un côté commun ; les autres côtés sont situés de part et d'autre du côté commun.

Des angles sont dits **complémentaires** si leur somme fait 90°.

Des angles sont dits **supplémentaires** si leur somme fait 180°.

Soient trois droites sécantes, il existe huit angles (Fig. 2).

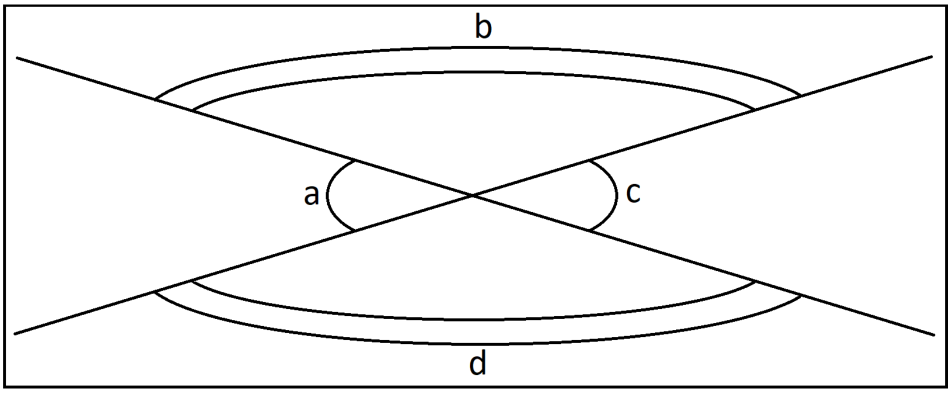

FIGURE 1 – Droites et angles opposés par le sommet

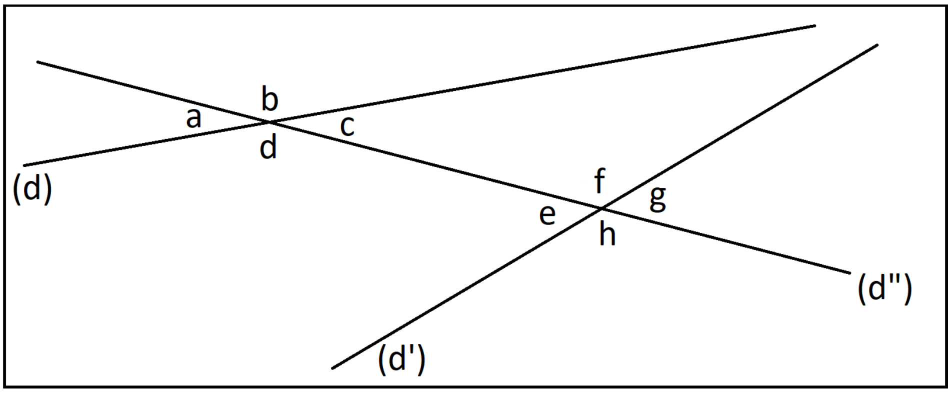

FIGURE 2 – Droites et angles

- Un angle situé à l'intérieur de la partie délimitée par les deux droites (d) et (d'), est un **angle interne**. Ici, c, d, e et f sont internes.
- Un angle situé à l'extérieur de la partie délimitée par les deux droites (d) et (d'), est un **angle externe**. Ici, a, b, g et h sont externes.
- Deux angles situés de part et d'autre de la sécante sont **alternes**. Par exemple, a et f ou b et h sont alternes.
- Les angles qui sont à la fois alternes et internes sont appelés **alternes internes**.
- Les angles qui sont à la fois alternes et externes sont appelés **alternes externes**.
- Des angles qui sont du même côtés de la sécante, l'un interne et l'autre externe sont appelés **angles correspondants**. Par exemple, a et e sont correspondants.

Si les droites (d) et (d') sont parallèles, alors :

— des angles correspondants sont égaux $a = e$, $b = f$, $c = g$ et $d = h$;

— des angles opposés par le sommet sont égaux $a = c$, $b = d$, $e = g$ et $f = h$;

— les angles alternes internes sont égaux $d = f$ et $c = e$;

— des angles alternes externes sont égaux $a = g$ et $b = h$.

La réciproque est vraie.

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

— Tout point intérieur de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.

— Si un point intérieur est équidistant des côtés de cet angles, alors il est sur la bissectrice de cet angle.

2.3 Droites perpendiculaires

2.3.1 Définition

Deux droites perpendiculaires sont deux droites sécantes dont l'intersection est un angle droit.

2.3.2 Axiome

Étant donné une droite (d) et un point A, il n'existe qu'une et une seule droite perpendiculaire à (d) passant par le point A.

2.3.3 Propriétés

— Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

— Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

2.4 Les segments de droite

Un segment est un morceau de droite matérialisé par deux points, A et B, formant ses extrémités. Il est noté $[\mathrm{AB}]$. La représentation d'un segment permet de mesurer une **distance** entre les deux extrémités. Il en existe plusieurs types, mais l'unité de mesure principale est le système métrique.

2.4.1 Définition du milieu d'un segment

Le **milieu** I d'un segment est équidistant (à égale distance) des extrémités A et B, c'est-à-dire :

$$\mathrm{AI} = \mathrm{IB} \tag{2}$$

ou

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AI} + \mathrm{IB} \tag{3}$$

2.4.2 Définition de la médiatrice d'un segment

La **médiatrice** d'un segment $[\mathrm{AB}]$ est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu I.

- Tout point M de la médiatrice d'un segment $[\mathrm{AB}]$ est équidistant des extrémités de ce segment.

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM} \tag{4}$$

- Réciproquement, tout point M équidistant des extrémités d'un segment $[\mathrm{AB}]$ est sur la médiatrice de ce segment.

3 Les projections sur une droite

3.1 Projection sur une droite

Soient deux droites sécantes (d_1) et (d_2), la projection d'un point M sur la droite (d_1), parallèlement à la droite (d_2) est le point M', intersection de la droite (d_1) avec la parallèle à (d_2) passant par M.

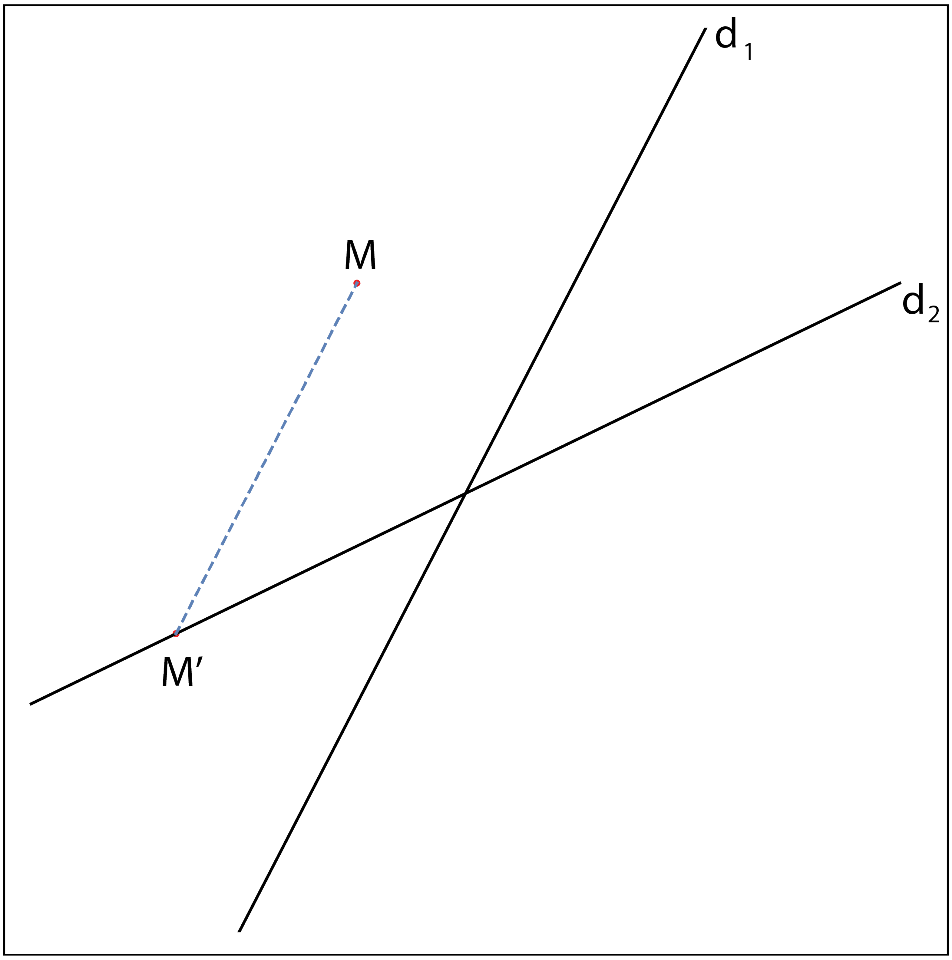

FIGURE 3 – La projection d’un point sur une droite

3.2 Projection orthogonale

La **projection orthogonale** est un cas particulier de projection dans lequel la droite (d_2) est perpendiculaire à la droite (d_1).

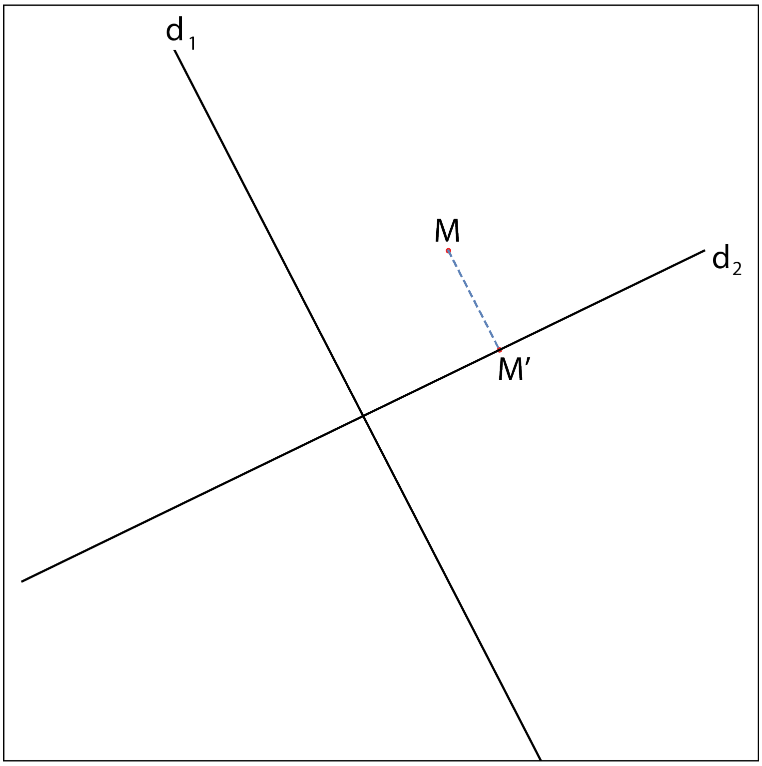

FIGURE 4 – La projection orthogonale d'un point sur une droite

3.3 Projection du milieu d'un segment

Si un segment $[\mathrm{AB}]$ se projette en un segment $[\mathrm{A'B'}]$, alors son milieu I se projette en $\mathrm{I'}$, milieu de $[\mathrm{A'B'}]$.

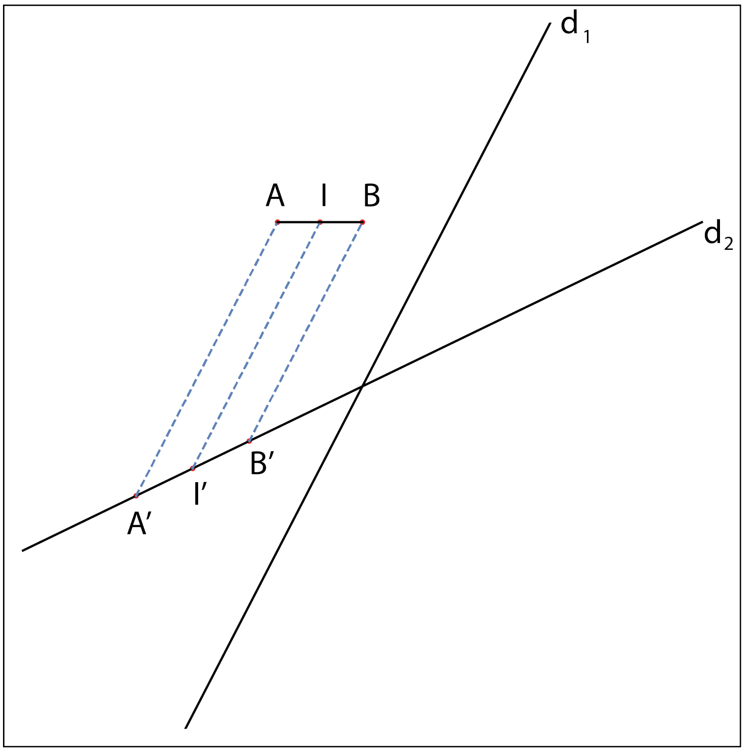

FIGURE 5 – La projection d'un segment sur une droite

3.4 Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A à une droite (d) est la plus courte distance entre ce point et la droite : AH, le point H étant la projection orthogonale de A sur (d).

3.5 Repère

Un **repère** permet d'identifier par une liste de coordonnées chaque point d'un plan, ou d'un espace. Dans le plan, le repère est muni de deux axes sécants au point O : l'axe des **abscisses** et l'axe des **ordonnées**. Chaque axe est muni d'une unité de référence, notée OI et OJ, telle que $OI = OJ = 1$ unité.

Soit un point M dans le plan, alors on trace les droites parallèles aux deux axes passant par le point M. Les points sécants entre la droite et l'axe des abscisses x_M et entre le droite et l'axe des ordonnées y_M définissent les coordonnées du point M. Elles correspondent respectivement à la distance entre O et x_M et à la distance entre O et y_M, mesurée en fonction de l'unité définie.

4 Les cercles

Le cercle de centre O est de rayon r est l'ensemble de tous les points situés à la distance r du point O.

Le double du rayon $2r$ est le diamètre du cercle.

4.1 Position d'une droite et d'un cercle

— Si une droite (d) munie d'un point H ne coupe pas le cercle de centre O, alors on dit qu'elle est **distincte** du cercle, c'est-à-dire que :

$$\mathrm{OH} > r \tag{5}$$

— Si une droite (d) munie d'un point H touche le cercle de centre O, alors on dit qu'elle est **tangente** du cercle, c'est-à-dire que (OH) et (d) sont perpendiculaires et :

$$\mathrm{OH} = r \tag{6}$$

— Si une droite (d) munie d'un point H coupe le cercle de centre O, alors on dit qu'elle est **sécante** du cercle, c'est-à-dire que :

$$\mathrm{OH} < r \tag{7}$$

4.2 Théorème de l'angle inscrit

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure. Par exemple, les angles $D\hat{B}E$, $D\hat{C}E$ et $D\hat{A}E$ sont inscrits et interceptent le même arc de cercle $\hat{DE}$; ils ont par conséquent la même mesure (Fig. **??**).

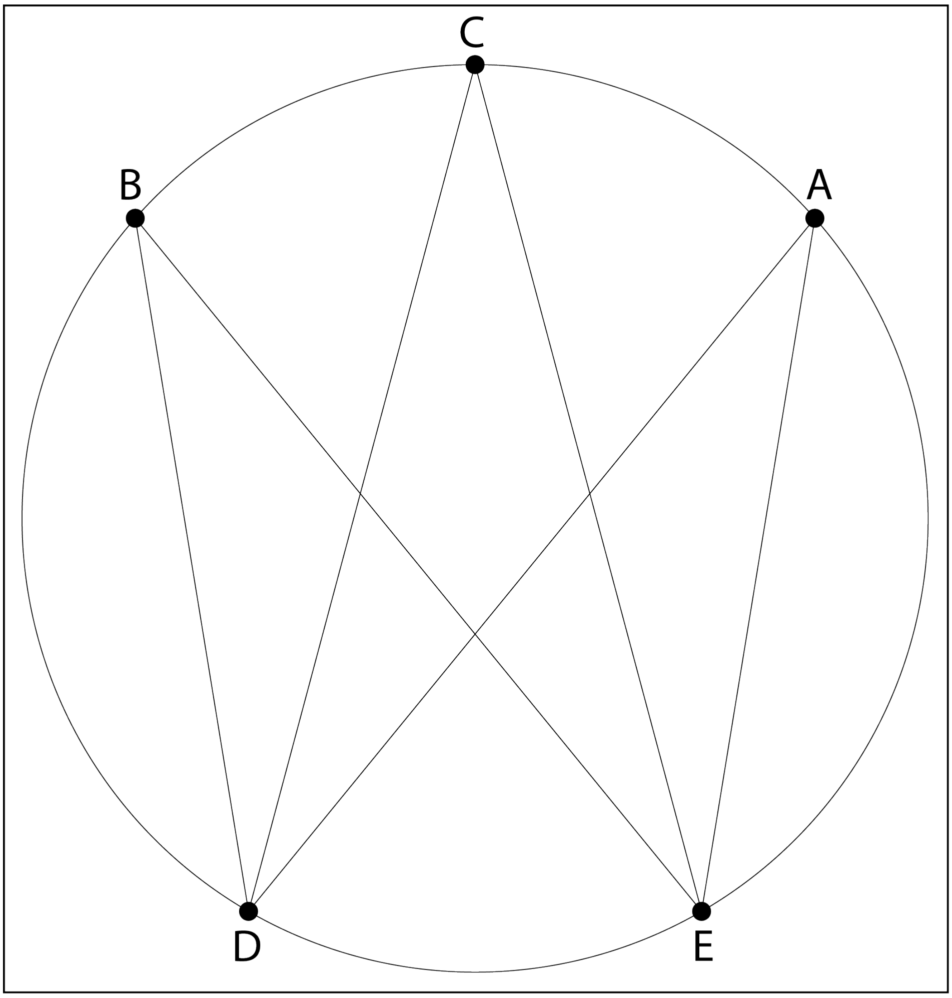

FIGURE 6 – Illustration du théorème de l'angle inscrit

4.3 Théorème de l'angle au centre

La mesure de l'angle inscrit égale la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc. Par exemple, les angles $B\hat{A}C$ et $B\hat{O}C$ interceptent le même arc de cercle, $B\hat{A}C$ est inscrit et $B\hat{O}C$ est un angle au centre, on a ainsi $B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C$ (Fig. **??**).

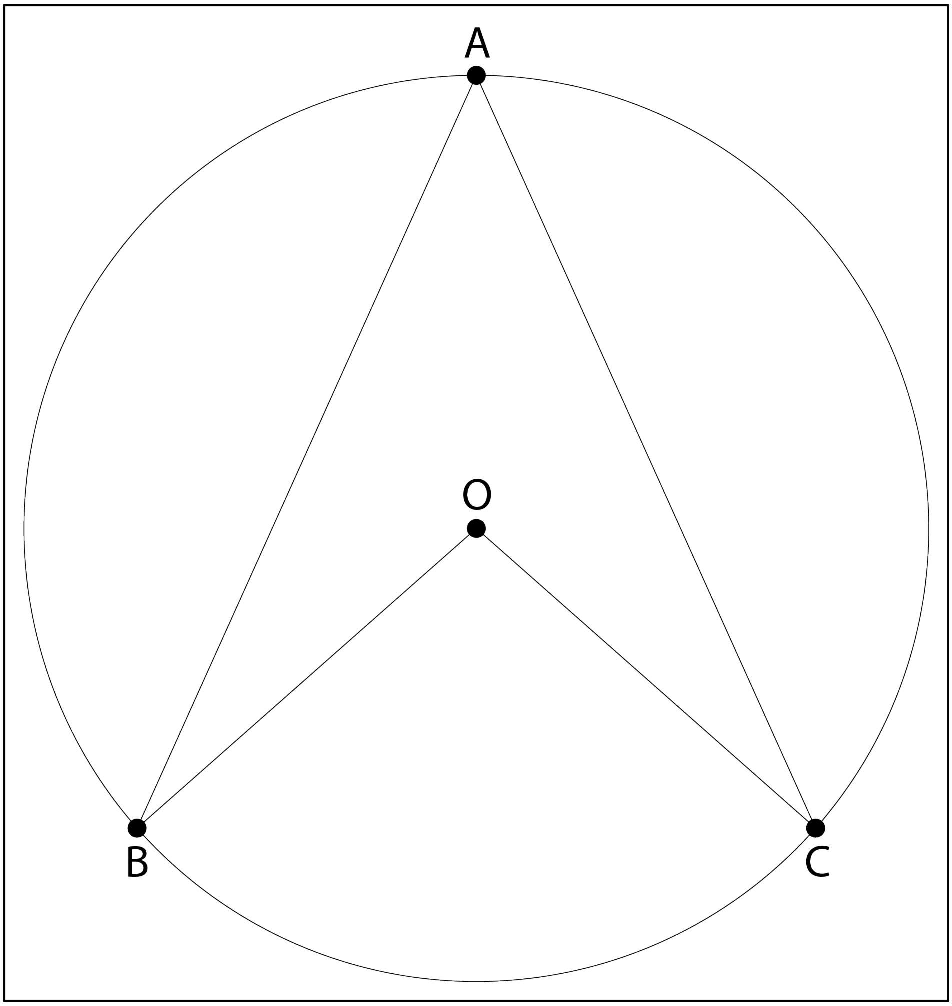

FIGURE 7 – Illustration du théorème de l'angle au centre

4.4 Le radian

Avec les cercles, il est désormais possible de mesurer les angles non plus en degrés, mais en radians.

La circonférence p d'un cercle (son périmètre) de rayon r vaut :

$$p = 2\pi r \tag{8}$$

Il est alors possible de faire correspondre les mesures en degrés à des proportions du nombre π. En effet, 2π correspond à un angle de 360°. Il est alors facile de déduire que π vaut 180°, *etc*. (Fig. 1). Cette nouvelle mesure est appelée radian.

Degré	0	15	30	45	60	90	180	360
Radian	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

TABLE 1 – Correspondance entre les degrés et les radians

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'introduire de la constante π dans la mesure d'un angle facilite les calculs, notamment analytique. Il faut prendre l'habitude d'exprimer les angles en radians, et non en degrés.

4.5 L'aire d'un disque

La surface d'un cercle S de rayon r est appelée disque. Elle vaut :

$$S = \pi r^2 \tag{9}$$

5 Les polygones

Tout polygone possède des sommets, des côtés et des angles. Un polygone avec trois côtés est un triangle, avec quatre côtés, un quadrilatère, avec cinq côtés, un pentagone, avec six angles, un hexagone, avec sept angles, un heptagone, avec huit angles, un octogone, avec neuf angles, un ennéagone, et avec dix angles, un décagone.

5.1 Les polygones convexes

Un polygone est **convexe** si tous ses angles intérieurs ont une mesure inférieure à 180°.

Tous les polygones réguliers sont convexes.

5.2 Les polygones réguliers

5.2.1 Définition

Un **polygone régulier** est un polygone convexe dont tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles « au sommet » sont égaux.

5.2.2 Propriétés

Tout polygone régulier est inscrit dans un cercle et les angles au centre relatifs à chaque côté sont égaux.

Un polygone régulier à trois côtés est un triangle équilatéral.

Un polygone régulier à quatre côtés est un carré.

Parmi les plus utilisés, il existe les pentagones et les hexagones réguliers.

5.3 Les polygones concaves

Un polygone **concave** (ou non convexe, ou rentrant, ou croisé) désigne un polygone simple ayant au moins un angle rentrant intérieur, c'est-à-dire un angle dont la mesure se situe entre 180 et 360°.

6 Les triangles

Un triangle est un polygone à trois côtés.

Un triangle ABC est une figure géométrique possédant trois côtés : $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BC}]$. Les points A, B et C sont les sommets du triangle. Pour finir, comme son nom l'indique, le triangle a trois angles.

6.1 Les triangles quelconque

6.1.1 L'inégalité triangulaire

Définition Soient trois points A, B et C d'un plan, alors la distance AC est inférieure à $AB + BC$, de même la distance AB est inférieure à $AC + BC$, et la distance BC est inférieure à $AB + AC$.

$$\begin{array}{l} AC < AB + BC \\ AB < AC + BC \\ BC < AB + AC \end{array} \tag{10}$$

La somme des angles d'un triangle Dans la triangle ABC, la somme de ses angles est égale à 180° ou π radian.

Propriétés

Propriété 1. Dans un triangle ABC, la longueur d'un côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Propriété 2. Sur le segment $[AB]$, si M appartient au segment $[AB]$, alors $AB = MA + MB$.

Propriété 3. Sur un segment $[AB]$, si $AB = MA + MB$, alors M appartient au segment $[AB]$.

6.1.2 Les droites remarquables d'un triangle

La **hauteur** d'un triangle est la droite passant par un sommet et coupant perpendiculairement le côté opposé à ce sommet.

La **médiane** d'un côté d'un triangle est la droite passant par le milieu de ce côté et par le sommet opposé.

Tout triangle possède trois hauteurs correspondant à des droites perpendiculaires au segment du sommet opposé par où elles passent (Fig. 8). Elles sont concourantes en un point appelé l'**orthocentre**.

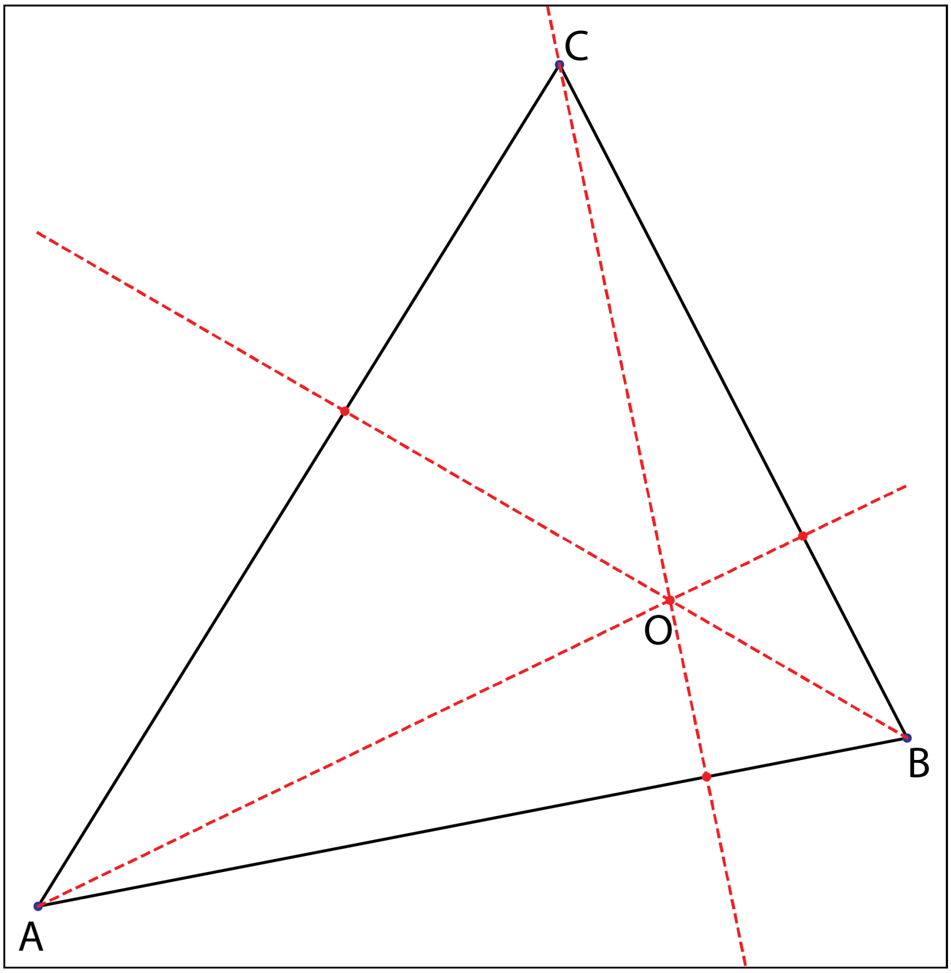

FIGURE 8 – Les hauteurs d'un triangle

Tout triangle possède trois médianes correspondant à des droites reliant le milieu de chaque segment au sommet opposé à celui-ci (Fig. 9). Elles sont concourantes en un point G appelé le **centre de gravité**. Soient les points I, J et K, les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{BC}]$ et $[\mathrm{AC}]$.

$$\mathrm{AG} = \frac{2}{3}\mathrm{AJ} \tag{11}$$

$$\mathrm{BG} = \frac{2}{3}\mathrm{BK} \tag{12}$$

$$\mathrm{CG} = \frac{2}{3}\mathrm{CI} \tag{13}$$

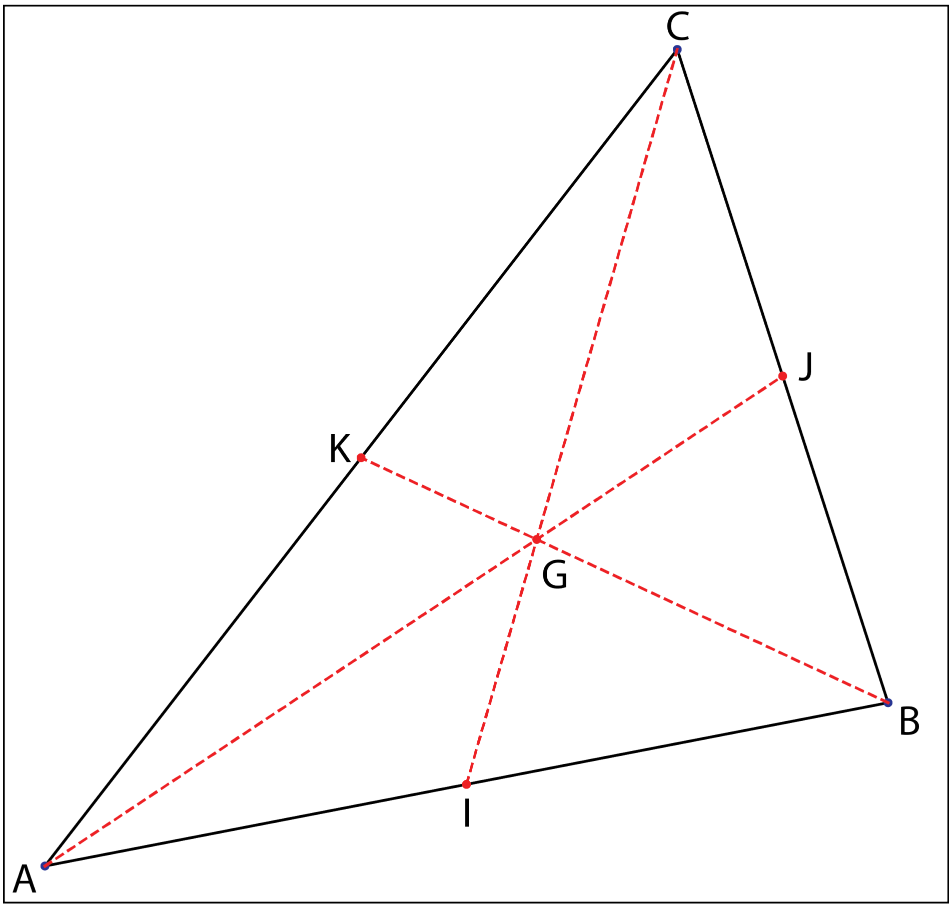

FIGURE 9 – Les médianes d'un triangle

Tout triangle possède trois médiatrices correspondant à des droites perpendiculaire passant par le milieu de chaque segment (Fig. 10). Elles sont concourantes en un point appelé le **centre du cercle circonscrit au triangle**.

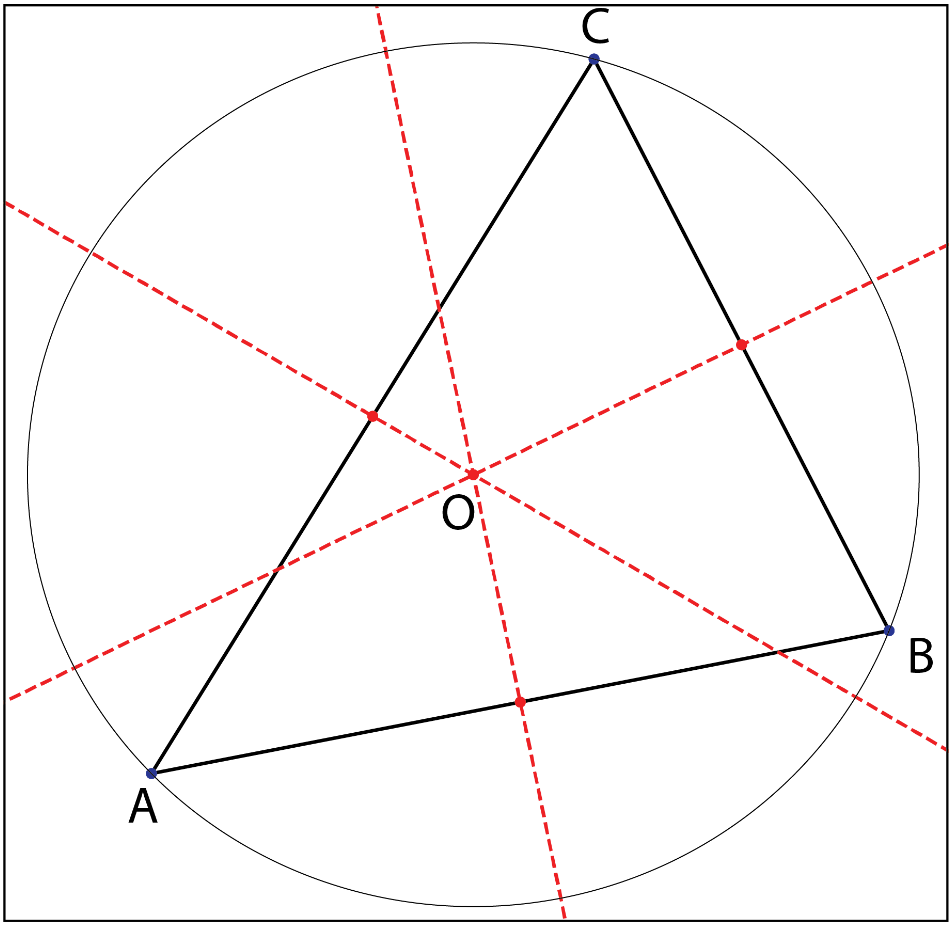

FIGURE 10 – Les médiatrices d'un triangle

La droite de L. Euler est une droite qui passe par le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre.

Leonhard Euler (1707-1783)

Tout triangle possède trois bissectrices correspondant à des droites partageant chaque angle en deux angles égaux (Fig. 11). Elles sont concourantes en un point appelé le **centre du cercle inscrit au triangle**. Le cercle inscrit est tangent aux trois côtés du triangle.

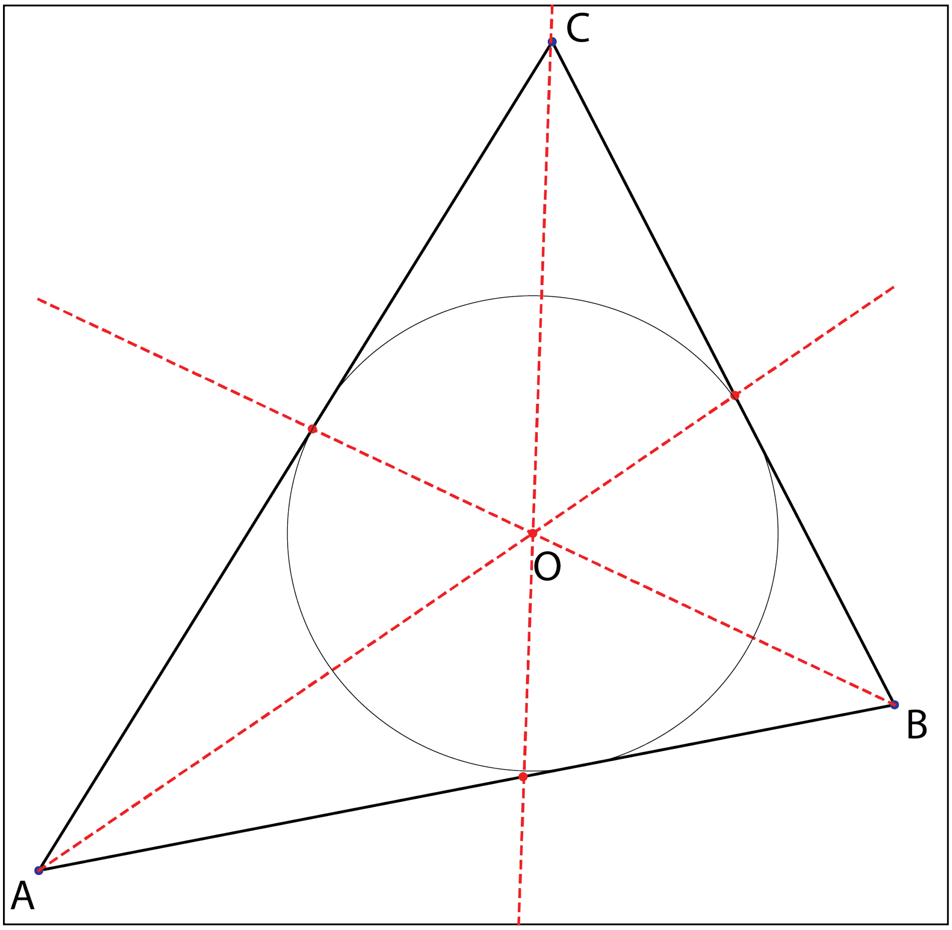

FIGURE 11 – Les bissectrices d'un triangle

6.1.3 Le théorème de Thalès

Thalès (vers 625-620 – vers 548-458 a.-C.)

Théorème Dans un triangle ABC, soient M et N deux points situés sur les droites (AB) et (AC) (Fig. 12). Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \tag{14}$$

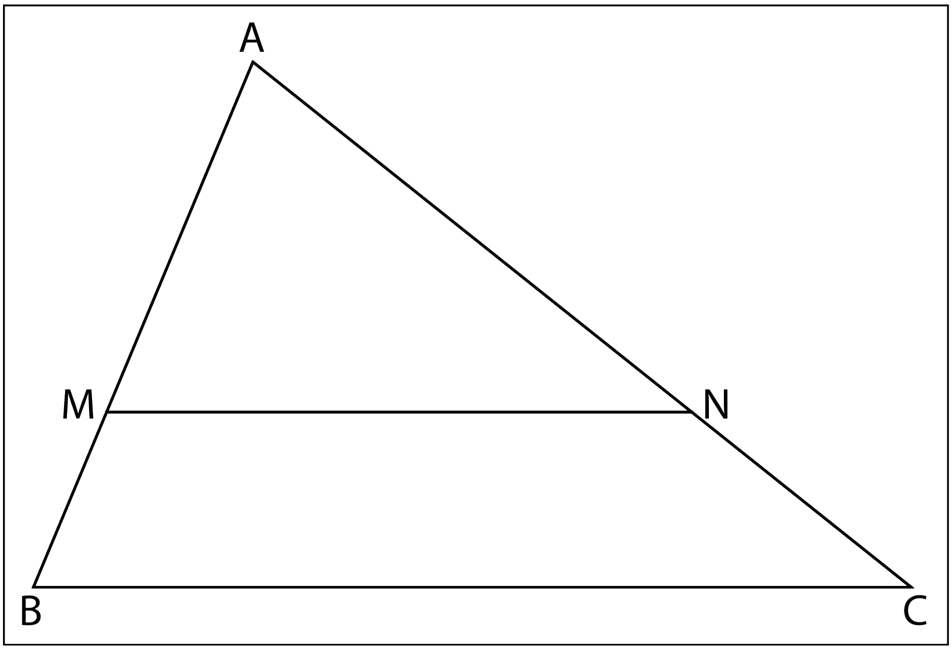

FIGURE 12 – Illustration du théorème de Thalès

Réciproque du théorème Dans un triangle ABC, soient M et N deux points situés sur les droites (AB) et (AC). Si la position de M et N est la même sur les droites (AB) et (AC) et que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

6.1.4 La droite des milieux d'un triangle

Théorème Corollaire au théorème de Thalès, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté. Le segment joignant les deux milieux est égal à la moitié du troisième côté.

Réciproque du théorème Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle et passe par le milieu d'un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Les propriétés des triangles quelconque peuvent être légèrement modifiées s'il s'agit d'un triangle rectangle, isocèle ou équilatéral.

6.1.5 L'aire d'un triangle

L'aire S d'un triangle est égale au demi-produit de la base b par la hauteur h correspondante.

$$S = \frac{1}{2}bh \tag{15}$$

6.2 Le triangle rectangle

6.2.1 Définition

Un triangle ABC est dit **rectangle** si l'un des angles est droit (Fig. 13)..

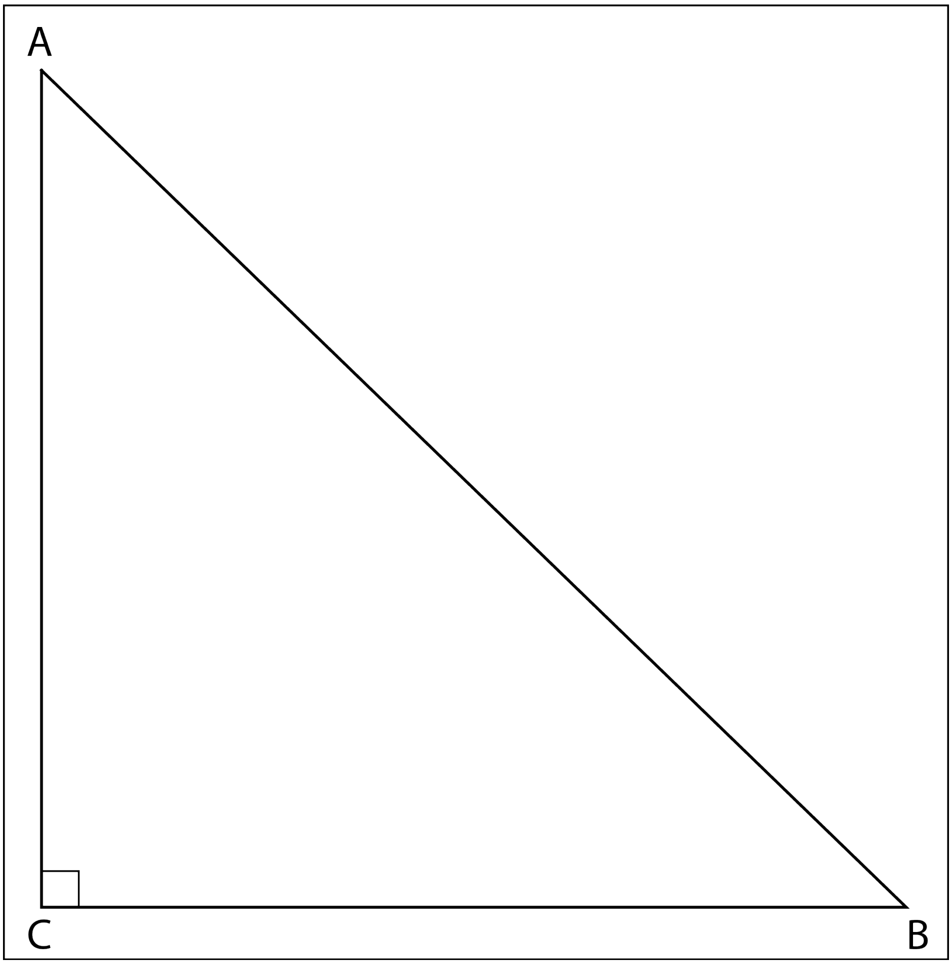

FIGURE 13 – Le triangle rectangle

6.2.2 Théorème de Pythagore

Pythagore (vers 580- vers 495 a.-C.)

Théorème Dans un triangle ABC rectangle en C le carré de l'hypoténuse, c'est-à-dire le côté le plus long AB, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 \tag{16}$$

Réciproque du théorème Si, dans un triangle ABC, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

6.2.3 La propriété de la médiane

Propriété Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de celui-ci.

Réciproque de la propriété Si, dans un triangle, la médiane relative à un côté mesure la moitié de ce côté, alors ce triangle est rectangle.

6.2.4 Propriété du cercle circonscrit

Propriété Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

Réciproque de la propriété Si un triangle est inscrit dans un cercle et a un côté diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

6.2.5 Lignes trigonométriques

Le **sinus** d'un des angles du triangle rectangle est le rapport entre le côté opposé de l'angle et l'hypoténuse.

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \tag{17}$$

Le **cosinus** d'un des angles du triangle rectangle est le rapport entre le côté adjacent de l'angle et l'hypoténuse.

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \tag{18}$$

Le **tangente** d'un des angles du triangle rectangle est le rapport entre le côté opposé de l'angle et le côté adjacent de l'angle.

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \tag{19}$$

Le **cotangente** d'un des angles du triangle rectangle est le rapport entre le côté adjacent de l'angle et le côté opposé de l'angle.

$$\cot \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} \tag{20}$$

6.3 Le triangle isocèle

6.3.1 Définition

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur (Fig. 14). Le troisième côté est appelé la base du triangle isocèle. On dit que le triangle est isocèle au sommet formé par les deux côtés de même longueur.

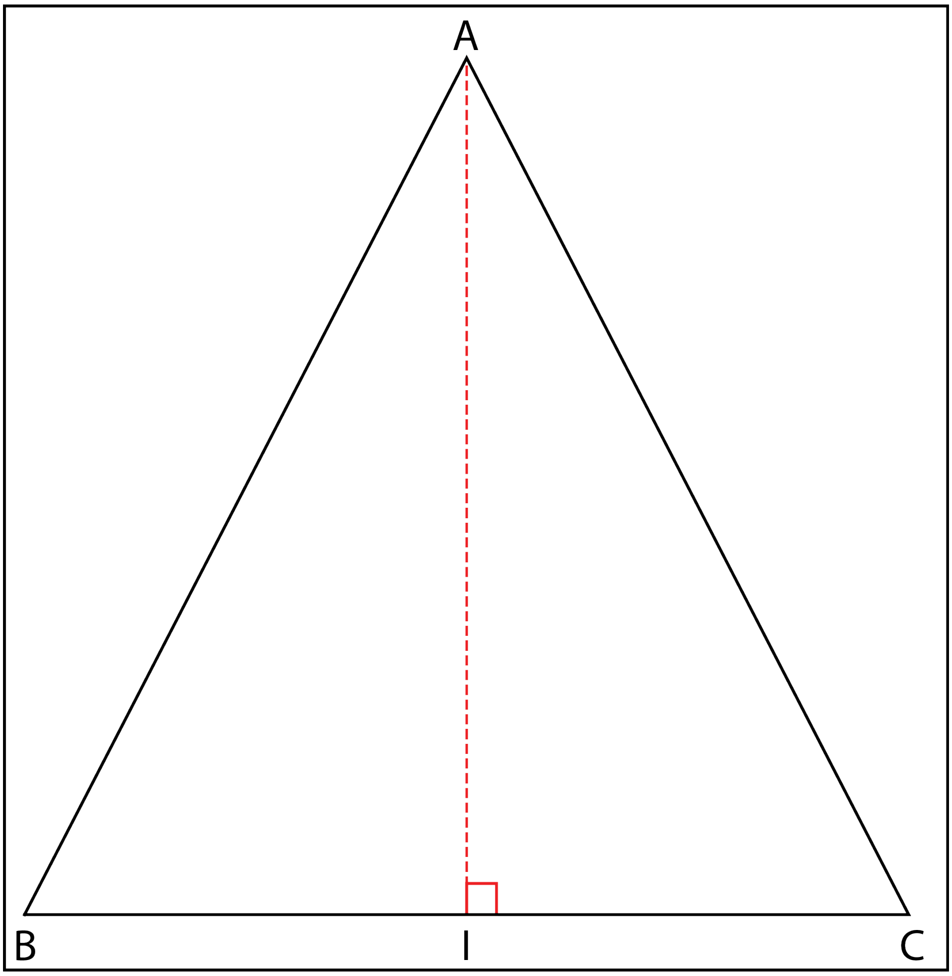

FIGURE 14 – Le triangle isocèle

6.3.2 Propriétés

Propriété 1. Si un triangle a deux côtés de même longueur, alors le triangle est isocèle.

Propriété 2. Dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure.

Propriété 3. Si, dans un triangle deux angles ont la même mesure, alors ce triangle est isocèle.

Propriété 4. Dans un triangle ABC isocèle en A, la médiane relative à $[BC]$, la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle A et la médiatrice de la base $[BC]$ sont confondues.

6.4 Le triangle rectangle isocèle

Il est possible de construire un triangle rectangle qui est isocèle, c'est-à-dire que les deux côtés, autre que l'hypoténuse, sont de longueurs égales. Dans ce cas, les angles de la base valent 45° ou $\frac{\pi}{4}$ radian.

6.5 Le triangle équilatéral

6.5.1 Définition

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés ont la même longueur (Fig. 15).

6.5.2 Propriétés

Propriété 1. Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60° ou $\frac{\pi}{3}$ radian.

Propriété 2. Un triangle ayant ses angles de même mesure est équilatéral.

Propriété 3. Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie, qui sont à la fois médianes, hauteurs, médiatrices et bissectrices.

Propriété 4. Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité, l'orthocentre, les centres des cercles circonscrit et inscrit sont confondus.

Par opposition, on dit qu'un triangle dont les trois côtés sont inégaux est un **triangle scalène**.

7 Les quadrilatères convexes

Un **quadrilatère** est un polygone ayant quatre côtés.

Dans un quadrilatère, une **diagonale** joint deux angles opposés. Il en possède deux.

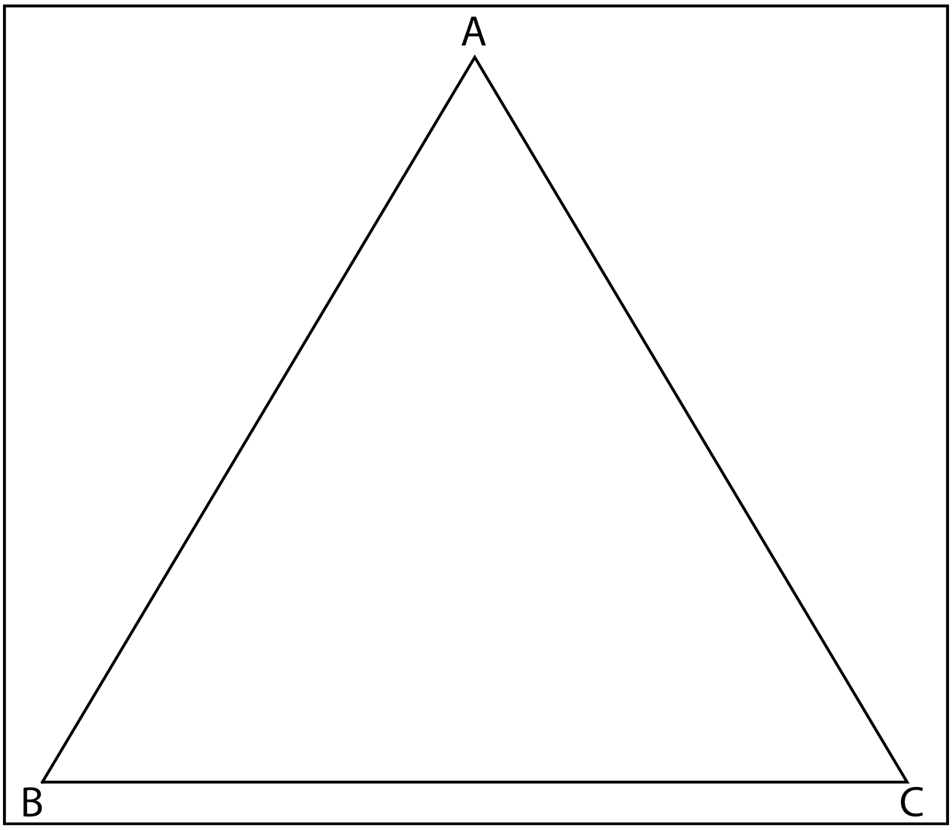

FIGURE 15 – Le triangle équilatéral

7.1 Les trapèzes

7.1.1 Définition

Un **trapèze** possède deux côtés opposés parallèles, appelés **bases**, souvent notées b (petite base) et B (grande base).

7.1.2 Propriétés

Au plus, trois côtés peuvent être de même taille.

Au plus, deux angles peuvent être droits.

Si les deux côtés non parallèles sont de même longueur, alors le **trapèze** est **isocèle**.

Un trapèze possédant deux angles droits est un **trapèze rectangle**.

La hauteur d'un trapèze est la distance h entre les deux bases, telle que le segment tracé soit perpendiculaire aux deux bases.

L'aire d'un trapèze vaut :

$$S = \frac{1}{2} h \left(B + b \right) \tag{21}$$

7.2 Les parallélogrammes

7.2.1 Définition et propriétés

Définition Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Propriétés

Propriété 1. Les côtés opposés ont la même longueur.

Propriété 2. Deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

Propriété 3. Les diagonales se coupent en leur milieu.

Propriété 4. Les angles opposés ont la même mesure.

Propriété 5. Les angles consécutifs sont supplémentaires.

L'aire d'un parallélogramme S égale le produit de la hauteur h par une base b.

$$S = bh \tag{22}$$

7.2.2 Les rectangles

Définition Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits. Il possède une largeur et une longueur.

Propriétés

Propriété 1. Le rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit.

Propriété 2. Le rectangle est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur.

L'aire d'un rectangle S égale le produit de la longueur L par la largeur l.

$$S = Ll \tag{23}$$

7.2.3 Les losanges

Définition Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur.

Propriétés

Propriété 1. Le losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.

Propriété 2. Le losange est un parallélogramme dont ses diagonales sont perpendiculaires.

L'aire du losange S égale le demi-produit des diagonales D et d.

$$S = \frac{1}{2}dD \tag{24}$$

7.2.4 Les carrés

Définition Un carré est un quadrilatère ayant quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.

Un carré est un parallélogramme, un rectangle et un losange. Il possède toutes leurs propriétés.

L'aire d'un carré S égale le carré d'un côté c.

$$S = c^2 \tag{25}$$

La longueur des diagonales d'un carré vaut $c\sqrt{2}$.

Propriétés Il a toutes les propriétés du parallélogramme, rectangle et losange.

8 La sphère

8.1 Définition

La sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à la distance R du point O. Dit autrement, la sphère est une surface.

8.2 Section d'une sphère par un plan

Propriété 1. Si un plan coupe une sphère, alors la section est un cercle plus ou moins grand.

Propriété 2. Lorsque le plan passe par le centre, on obtient un **grand cercle** dont le rayon est celui de la sphère.

Propriété 3. Si le plan est tangent à la sphère, il n'existe qu'un point commun à la sphère et au plan.

Propriété 4. Si un plan coupe la boule, la section est un disque.

8.3 L'aire d'une sphère

L'aire de la sphère S de rayon r vaut :

$$S = 4\pi r^2 \tag{26}$$

9 Les solides

Jusqu'à présent, les figures géométriques étudiées du triangle au polygone étaient dans le plan, c'est-à-dire un espace à deux dimensions. Il existe des figures dans un espace à trois dimensions.

Le **volume d'un solide** correspond au produit de la surface de base et de la hauteur.

9.1 Le cube

Le cube est un solide à six faces carrées égales.

Le volume d'un cube de côté c vaut : c^3.

9.2 La boule

La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O inférieur ou égale au rayon R.

Propriété. Si un plan coupe une boule de rayon r, alors la section est un disque.

Le volume d'une boule vaut : $\frac{4}{3}\pi r^3$.

9.3 La pyramide

La **pyramide** est un solide limité par des faces planes dont la base est un polygone et les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun qui est le sommet de la pyramide.

La **pyramide** est **régulière** si sa base est un polygone régulier et sa hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à la base.

Le volume V d'une pyramide de hauteur h et avec une aire de base S vaut :

$$V = \frac{1}{3}hS \tag{27}$$

9.4 Le cône de révolution

Un cône de révolution est un solide engendré par un triangle rectangle effectuant un tour complet autour de l'un de ses côtés de l'angle droit sa base est un disque et l'hypoténuse du triangle rectangle est appelé la **génératrice** ou l'**apothème**.

Le volume d'un cône vaut : $\frac{1}{3}h\pi r^2$ avec h la hauteur et r le rayon du disque de sa base.

Le volume V d'un cône de hauteur h et avec une aire de base $S = \pi r^2$ (r étant le rayon du cercle de la base) vaut :

$$V = \frac{1}{3}hS \tag{28}$$

9.5 Le prisme droit

Définition Un prisme droit est un solide limité par deux bases, qui sont deux polygones superposables, et par des rectangles qui constituent la surface latérale du prisme.

Propriétés

Propriété 1. Si les bases sont rectangles, le prisme droit est alors un rectangle.

Propriété 2. Les arêtes de chaque base sont parallèles au plan de l'autre base.

Propriété 3. Les plans des bases sont parallèles.

Propriété 4. Toute arête latérale est strictement parallèle aux faces latérales qui ne contiennent pas.

Propriété 5. Les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases, leur longueur commune est appelée hauteur du prisme droit.

Propriété 6. Le plan de chaque face latérale est perpendiculaire aux plans des bases.

9.6 Le cylindre de révolution

Définition En faisant tourner un rectangle autour d'un axe, on obtient une surface qui limite un solide appelé cylindre de révolution. La base est circulaire. La hauteur est appelée génératrice.

Le volume d'un cylindre vaut : $\pi r^2 h$ avec r le rayon du disque de base et h la hauteur du cylindre.

Propriétés

Propriété 1. Les plans des bases sont parallèles.

Propriété 2. Les génératrices sont parallèles à l'axe du cylindre.

Propriété 3. L'axe du cylindre est perpendiculaire aux plans des bases.

Propriété 4. Les génératrices sont perpendiculaires aux plans de bases. Leur longueur commune est appelée hauteur du cylindre.

Le volume V d'un cylindre de révolution de hauteur h et avec une aire de base $S = \pi r^2$ (r étant le rayon du cercle de la base) vaut :

$$V = Sh \tag{29}$$

10 La réduction et l'agrandissement des figures géométriques

Si, au cours d'un agrandissement (ou d'une réduction), les dimensions sont multipliées (ou divisées par un nombre k,

— alors le périmètre est multiplié (ou divisé) par k.

— alors l'aire est multipliée (ou divisée) par k^2.

— alors le volume est multiplié (ou divisé) par k^3.

L'exposant entier de k est appelé **dimension topologique**.

11 Vers d'autres géométries

La géométrie euclidienne repose sur des règles autour des triangles. Les deux plus importantes sont le fait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°, et le théorème de Pythagore. La géométrie des espaces courbes, la géométrie riemannienne, nie ces deux règles. Tout triangle ayant une somme de ses angles valant plus que 180° a un excès angulaire, tandis que, pour l'inverse, on dit qu'il a un défaut angulaire. Il arrive, de fait, dans le cadre de cette géométrie, qu'un triangle possède deux angles droits, ce qui est impossible en géométrie euclidienne. Quant au théorème de Pythagore, il devient simplement faux et rarement applicable.

Néanmoins, la géométrie euclidienne sert de référence aux autres géométries y compris les géométries fractales. Il faut par conséquent bien la connaître avant de se lancer dans des géométries beaucoup plus complexes.