Annexe H

Loi des grands nombres

H.1 Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, indépendantes, centrées, telles que les variances ${\sigma_i}^2$ existent et vérifient :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}{\sigma_i}^2 \to 0 \tag{H.1}$$

lorsque $n \to +\infty$. Dans ces conditions, la suite des moyennes :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{H.2}$$

converge en probabilité vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

La suite (X_n) satisfait à la **loi faible des grands nombres**. Ce résultat se démontre grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebyschev.

H.2 Loi forte des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, indépendantes, centrées, telles que les variances ${\sigma_i}^2$ existent et vérifient :

$$\sum_{i\geq 1}^{n}\frac{{\sigma_i}^2}{i^2} < +\infty \tag{H.3}$$

Dans ces conditions, la suite des moyennes :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{H.4}$$

convergence presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La démonstration de ce théorème nécessite l'utilisation de théorémes fins d'analyse.

Ces résultats sont utilisés dans la théorie de l'estimation et des tests.

Bibliographie