Cours d'analyse de données en géographie
Niveau Master 1 - GEANDO
Pour commencer avec de bonnes bases…
Statistiques

Maxime Forriez[1,a]

[1] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

17 septembre 2025

Exercice 1

Soit la matrice stochastique régulière $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Chercher un vecteur de probabilité à deux composantes, noté $t = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ tel que $t.P = t$.
2. Vers quelle matrice T converge la suite $P, P^2, P^3, \ldots$?

Question 1. Méthode 1

$$t.P = t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[0x + \frac{1}{2}(1-x) \quad x + \frac{1}{2}(1-x) \right] = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 1 - x \end{cases} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \tag{7}$$

On en déduit que $t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Il constitue l'unique vecteur de probabilité constant de P.

Question 1. Méthode 2

On pose $u = \begin{pmatrix} x, y \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre :

$$\begin{pmatrix} x, y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, y \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}y \quad x + \frac{1}{2}y \right] = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ x + \frac{1}{2}y = y \end{cases} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y \end{cases} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ y = y \end{cases} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y - \frac{1}{2}y = x \end{cases} \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \frac{1}{2}y = x \end{cases} \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2x \end{cases} \tag{16}$$

Si $x = 1$, alors $y = 2$. On en déduit $u = \begin{pmatrix} 1, 2 \end{pmatrix}$. Pour obtenir un vecteur de probabilité, on divise par le total de la ligne, soit 3, donc $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Question 2

La suite $P, P^2, P^3, \ldots$ converge vers la matrice T dont les lignes sont toutes égales au vecteur t.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,33 & 0,67 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,37 & 0,63 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,37 & 0,63 \\ 0,31 & 0,69 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \\ \frac{11}{32} & \frac{11}{32} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,31 & 0,68 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} \to T \tag{22}$$

Exercice 2

Déterminer l'unique vecteur de probabilité constant de la matrice stochastique régulière :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Soit $u = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ un vecteur de probabilité constant.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0x + 0y + \frac{1}{2}z & x + 0y + \frac{1}{2}z & 0x + y + 0z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z & x + \frac{1}{2}z & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}z = x \\ x + \frac{1}{2}z = y \\ y = z \end{cases} \tag{28}$$

On obtient un système homogène avec une infinité de solution.

On choisit $z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ Pour obtenir un vecteur de probabilité, il suffit de multiplier u par l'inverse de $\frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}$:

$$\frac{2}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Pour éviter le calcul fractionnel, il suffit de prendre $z = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $x + y + z = 1 + 2 + 2 = 5$, soit :

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \tag{30}$$

On obtient ainsi un vecteur de probabilité constant.

Exercice 3

Un ouvrier se rend chaque matin à son travail soit en voiture, soit en train. On suppose qu'il ne prend jamais le train deux jours consécutifs, mais s'il se rend à son travail en voiture, il peut le jour suivant tout aussi bien prendre sa voiture, ou prendre le train.

1. Définir l'espace des états du système. On pose v pour la voiture et t pour le train.
   — On pose v pour la voiture et t pour le train, soit $\{t, u\}$.
2. Justifier pourquoi il s'agit d'une chaîne de Markov.
   — Le processus stochastique est une chaîne de Markov puisque le résultat du jour donné dépend **uniquement** de ce qui s'est passé le jour précédent.
3. Établir la matrice de transition.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{31}$$

   — Les lignes correspondent à la situation de la veille. Les colonnes correspondent aux modes de transport possibles du jour.

   — La ligne 1 représente le train. Si la veille, l'ouvrier a pris le train, la probabilité qu'il prenne le train le lendemain est nulle. Si la veille, l'ouvrier a pris sa voiture, la probabilité qu'il prenne sa voiture le lendemain est certaine.

   — La ligne 2 représente la voiture. Si la veille, l'ouvrier a pris sa voiture, la probabilité qu'il prenne le train le lendemain est $\frac{1}{2}$. Si la veille, l'ouvrier a pris sa voiture la probabilité qu'il prenne sa voiture le lendemain est $\frac{1}{2}$.
4. Quelle est la matrice de transition matérialisant le choix du mode de transport de l'ouvrier le quatrième jour ?
   — Le quatrième jour, la matrice de transition matérialisant le choix du mode de transport de l'ouvrier est P^4.

$$P^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{11}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix} \tag{32}$$

— La probabilité pour que le système évolue de l'état t à l'état v en quatre transitions **exactement** est $\frac{5}{8}$.
— La probabilité pour que le système évolue de l'état t à l'état t en quatre transitions **exactement** est $\frac{3}{8}$.
— La probabilité pour que le système évolue de l'état v à l'état t en quatre transitions **exactement** est $\frac{11}{32}$.
— La probabilité pour que le système évolue de l'état v à l'état t en quatre transitions **exactement** est $\frac{21}{32}$.

5. Si le premier jour, l'ouvrier jette un dé bien équilibré et décide de ne partir travailler en voiture que si et seulement s'il obtient un 6, calculer l'état dans quatre jour.
   — En d'autres termes, $p^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ est la distribution de probabilité initiale. L'état dans quatre jours est : $p^{(4)}$

$$p^{(4)} = p^{(0)} P^4 \tag{33}$$

$$p^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{11}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{96} & \frac{61}{96} \end{pmatrix} \tag{34}$$

   — La probabilité que l'ouvrier prenne le train dans quatre jours **exactement** est $\frac{35}{96}$.
   — La probabilité que l'ouvrier prenne sa voiture dans quatre jours **exactement** est $\frac{61}{96}$.

6. Calculer l'état stationnaire à n itérations.
   — L'état stationnaire des choix de transport de l'ouvrier converge vers le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. À n itérations, l'ouvrier a $\frac{1}{3}$ de chances de choisir le train, et $\frac{2}{3}$ sa voiture.

Exercice 4

Trois garçons A, B, C jouent au ballon.

— A lance **toujours** le ballon à B.
— B lance **toujours** le ballon à C.
— C peut lancer **tout aussi bien** le ballon à A ou B.

1. Quel est l'espace des états ?
   — L'espace des états est $\{A, B, C\}$.
2. Justifier pourquoi il s'agit d'une chaîne de Markov.
   — C'est une chaîne de Markov puisque le joueur qui jette le ballon n'est pas influencé par ceux qui ont eu le ballon avant lui.
3. Calculer la matrice de transition.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

N.B. Il est impossible de se lancer le ballon à soi-même. La diagonale est nulle.

4. Si C est le premier à avoir le ballon, quelle est la probabilité pour que A ait le ballon après trois lancers ?
   - Si C est le premier à avoir le ballon, cela signifie que $p^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la distribution initiale alors :

$$p^{(1)} = p^{(0)}.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}.P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}.P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{38}$$

   - Après trois lancers de ballon, la probabilité pour que A ait le ballon est $\frac{1}{4}$; B, $\frac{1}{4}$ et C, $\frac{1}{2}$.
   - Si on veut directement le résultat, il suffit de calculer :

$$p^{(3)} = p^{(0)}.P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{39}$$

   - Si A est le premier à avoir le ballon, alors $p^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $p^{(3)} = p^{(0)}.P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   - Si B est le premier à avoir le ballon, alors $p^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $p^{(3)} = p^{(0)}.P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5. Calculer l'état stationnaire à n itérations.
   - L'état stationnaire des passes est le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. À n itérations, A a $\frac{1}{5}$ de chances d'avoir le ballon ; B, $\frac{2}{5}$; C, $\frac{2}{5}$.