Les nombres complexes

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

« Les nombres complexes furent introduits par J. Cardan en 1545 dans le cadre de la résolution des équations du troisième degré et les opérations sur leur corps furent définies par R. Bombelli en 1572 » [**?**, p. 38]. « La définition formelle des nombres complexes, comme couple de nombres réels, et des opérations de leur corps fut donnée par W. R. Hamilton en 1837 » [**?**, p. 39].

Jérôme Cardan (1501-1576)

Raphaël Bombelli (1526-1572/1573)

William Rowan Hamilton (1805-1865)

1 Définitions

Définition 1. L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $^2 = -1$. On le note $\mathbb{C}$.

Un nombre complexe se note $z = a + ib$.

— a est la partie réelle de z : $\Re(z) = a$.

— b est la partie imaginaire pure de z : $\Im(z) = b$.

L'ensemble des imaginaires est noté $i\mathbb{R}$.

Si $\Re(z) = 0$, alors $z = ib$ est dit **imaginaire pur**.

Définition 2. Soit $\mathbb{R}$ le corps des réels, soit $\mathbb{C}$ l'ensemble-produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dont chaque élément est un couple rangé $z = (a, b)$ de deux nombres réels a et b.

Définition 3. L'ensemble $\mathbb{C}$ se définit par deux opérations internes, conférant à $\mathbb{C}$ la structure de corps commutatif de telle manière que l'on puisse établir un isomorphisme entre $\mathbb{R}$ et une partie $\mathbb{C}^*$ de $\mathbb{C}$. Il faut préciser que $\mathbb{C}^*$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ de la forme $(a, 0)$.

Dit autrement, l'application $\underbrace{a}_{\in\mathbb{R}} \leftrightarrow \underbrace{(a,0)}_{\in\mathbb{C}^*}$ réalise un isomorphisme pour l'addition entre les ensembles $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}$.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors :

1. l'égalité dans $\mathbb{C}$ est l'identité :
$$(a,b) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right. \tag{1}$$
2. $z = 0 \Leftrightarrow a + ib = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Re(z) = a = 0 \\ \Im(z) = b = 0 \end{array} \right.$
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0$
4. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = 0$

1.1 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors :

— les lois de composition interne sont :
  - l'addition :
    - l'associativité : $z + z' = a + a' + i(b + b')$;
    - la commutativité : $z + z' = z' + z$;
    - l'opposé de z : $-z = -a - ib$;
    - $z = 0 = (a + ib) + (-a - ib)$.
  - la multiplication :
    - l'associativité : $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$;
    - la commutativité : $zz' = z'z$;
    - l'élément neutre : $z \times 1 = (a + ib)(1 + i0) = a + ib = z$;
    - l'élément absorbant : $z \times 0 = 0$;
    - la distributivité par rapport à l'addition.

— tout élément non nul a un inverse noté $z^{-1} = \frac{1}{z}$;

— tout élément de $\mathbb{C}$ n'est simplifié que s'il est écrit sous sa forme algébrique : $a + ib$.

1.2 Interprétation géométrique

On considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (Fig. 1).

$$\begin{cases} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \delta \\ z = a + ib \mapsto M\left(a, b\right) \end{cases} \tag{2}$$

$\mathcal{P}$ et appelé **plan complexe**.

M est le point image de z.

z s'appelle l'**affixe** de M, noté $M\left(z\right)$ ou représente un vecteur $\vec{OM}$..

L'axe des abscisses est appelé l'**axe des réels**. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M \in \text{(axe des réels)}$

L'axe des ordonnées est appelé l'**axe des imaginaires**. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M \in \text{(axe des imaginaires)}$

$$\vec{v} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}\left(a, b\right) \\ \vec{v} \text{ est le } \textbf{vecteur image} \text{ de } z \\ z \text{ est l'affixe de } \vec{v}\text{, noté } \vec{v}\left(z\right) \end{cases} \tag{3}$$

1.3 Propriétés des vecteurs dans le plan complexe

$\vec{u}\left(z\right)$ et $\vec{v}\left(z'\right) \Leftrightarrow \left(\vec{u} + \vec{v}\right)\left(z + z'\right)$

$\vec{u}\left(z\right) \Leftrightarrow \lambda\vec{u}\left(\lambda z\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$: $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

Si I est le milieu de $[AB]$, alors $z_I = \frac{1}{2}\left(z_A + z_B\right)$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$

$\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ z_{\vec{u}} = k\vec{v}$

2 Le conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, on appelle conjugué de z, le complexe $a \breve{} ib$. On le note $\bar{z}$, ce qui se lit « z barre ».

2.1 Propriétés

$(\bar{\bar{z}}) = z$

$z + \bar{z} = 2a = 2\Re\left(z\right)$

$z - \bar{z} = 2ib = 2\Im\left(z\right)$

$z\bar{z} = a^2 + b^2$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z}$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

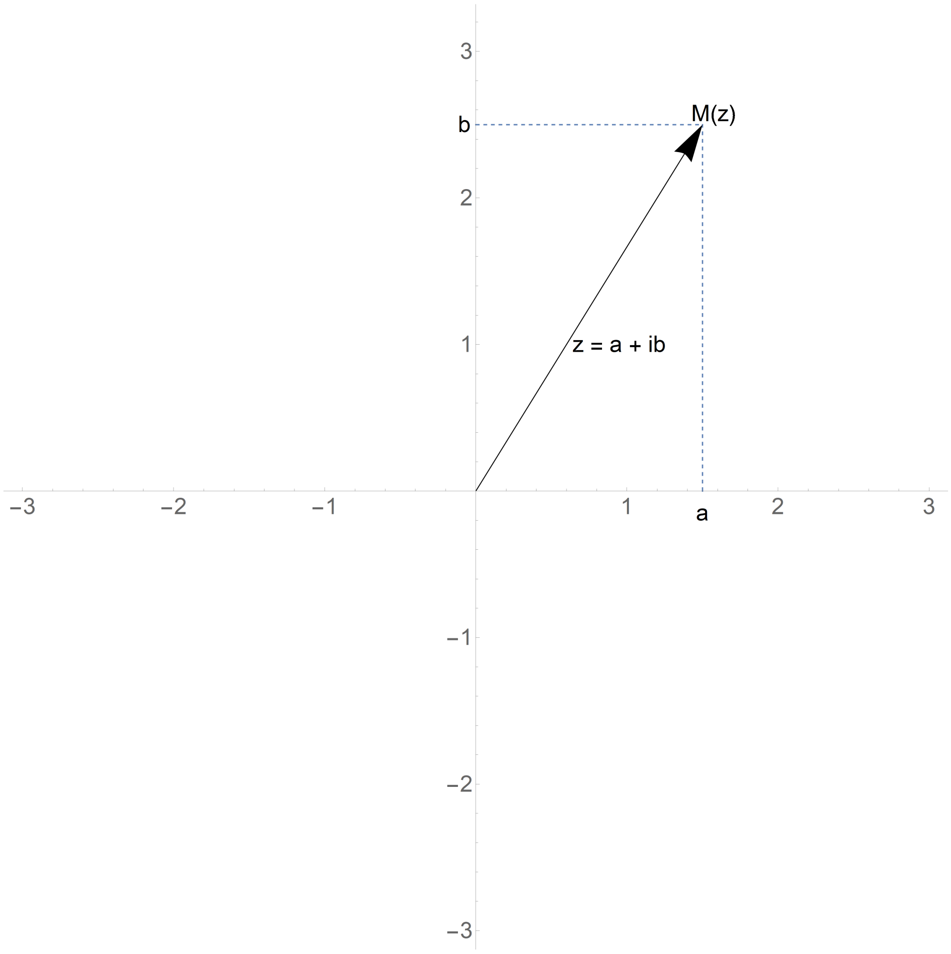

FIGURE 1 – Représentation d'un nombre complexe dans le plan complexe

2.2 Opérations

Théorème. La loi qui, à un nombre complexe, fait correspondre son conjugué est un automorphisme sur $\mathbb{C}$ muni d'une structure de corps.

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' = a^2 + b^2$
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

2.3 Interprétation géométrique

Soient $M\left(z\right) : a + ib$ et $M'\left(\bar{z}\right) : a - ib$, alors on obtient le plan complexe de la figure 2. La correspondance $z \leftrightarrow \bar{z}$ est une bijection **involutive** dans laquelle les seuls éléments invariants sont les nombres réels.

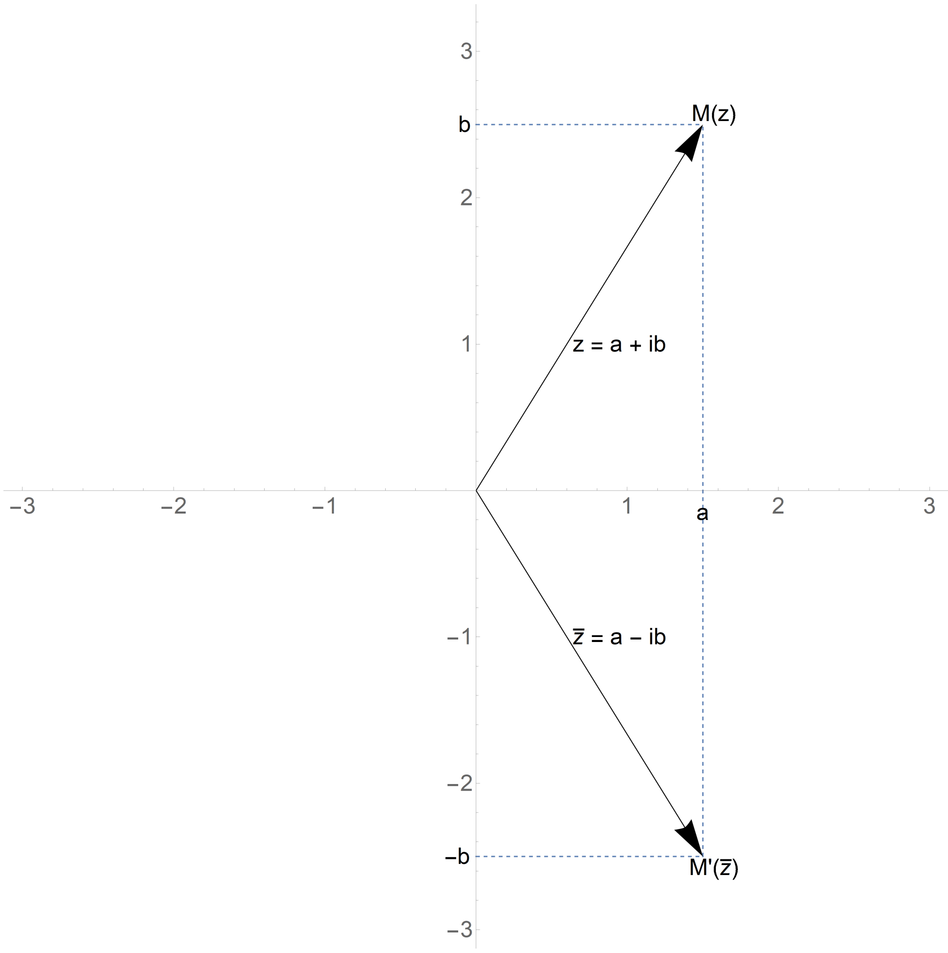

FIGURE 2 – Représentation d'un nombre complexe et de son conjugué dans le plan complexe

3 Polynôme du second degré dans $\mathbb{C}$

3.1 Définition

Soit le polynôme de second degré à coefficients réels, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, et variables complexes $P(z)$ tel que :

$$P(z) = az^2 + bz + c \tag{4}$$

alors si z_0 est une racine de $P(z)$, alors $\bar{z_0}$ est une racine de $P(z)$.

$$P(z) = a(z - z_0)(z - \bar{z_0}) \tag{5}$$

3.2 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit le polynôme du second degré $P(z) = az^2 + bz + c$, alors :

— si $\Delta \geq 0$, alors il existe une ou deux racines réelles ;

— si $\Delta \leq 0$, alors il existe deux racines réelles :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \bar{z_2} \tag{6}$$

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \bar{z_1} \tag{7}$$

— avec $\Delta = -(-\Delta) = i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

On remarque que :

— $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$;

— $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

4 Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, on appelle **module** de z le réel positif : $\sqrt{a^2 + b^2}$, noté $|z|$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{8}$$

On utilise souvent le carré du module z :

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z} \tag{9}$$

Si $b = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = |a| \tag{10}$$

c'est-à-dire le module de z est égale à la valeur absolue de a.

Attention !

— Si $a \in \mathbb{R}$, alors $|a|^2 = a^2$.

— Si $z \in \mathbb{C}$, alors $|z|^2 \neq z^2$.

$$|z|^2 = z\bar{z} = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 \tag{11}$$

mais :

$$|z|^2 = (a - ib)(a + ib) \tag{12}$$

4.1 Propriétés

$|zz'| = |z|\,|z'|$
$|zz'|^2 = |z|^2\,|z'|^2$
$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
$z \in \mathbb{R}, |z| = |a|$
$|i| = 1$
$|ib| = |b|$ (en valeur absolue)
$|\bar{z}| = |z|$

4.2 Interprétation géométrique

Le module de z est la distance entre l'origine et le point $M\,(z)$ d'affixe $a + ib$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM \tag{13}$$

$|z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_{O,1}$ avec $\mathcal{C}_{O,1}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

Pour écrire un vecteur $\vec{u}\,(z)$ dans le plan complexe. Il existe deux possibilités :

1. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\vec{u}|$
2. $AB = ||AB|| = ||z_B - z_A||$

Soient $\vec{OM}\,(z)$ et $\vec{MP}\,(z')$, alors :

$$z + z' \rightarrow \vec{OM} + \vec{MP} = \vec{OP} \tag{14}$$

$$|z + z'| = OP \tag{15}$$

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soient $\mathcal{P}$ le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \bar{e_1}, \bar{e_2})$, $z \in \mathbb{C}^*$ et le point M d'affixe z, on peut représenter ce plan par la figure 3.

$\forall z \in \mathbb{C}^*$, z peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \tag{16}$$

donc $|z| = OM$ et l'angle orienté $\theta = \left(\vec{e_1}, \vec{OM}\right)$.

L'**argument principal** de θ est compris dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

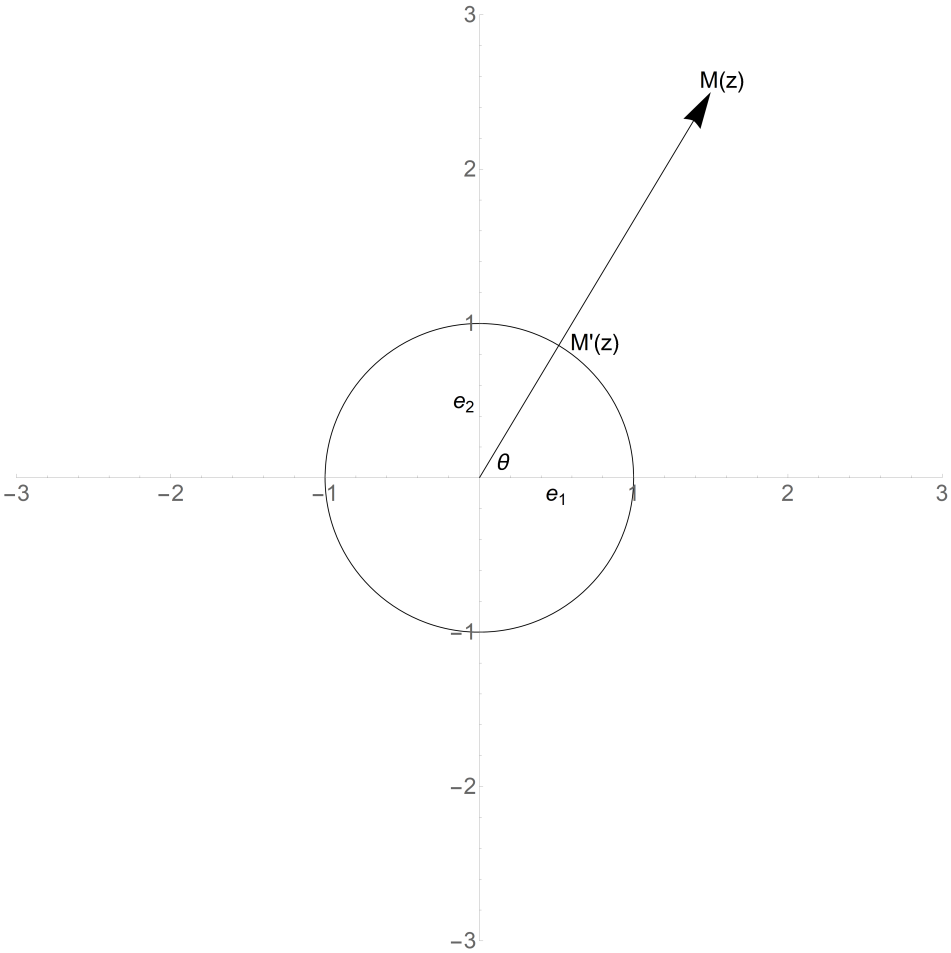

FIGURE 3 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe et cercle trigonométrique

5.1 Cas particuliers

Dans le plan complexe, 0 n'a pas d'angle.

— $z = 1$

— $|z| = 1$

— arg $z = 0$

Dans le plan complexe, i forme un angle de 90°.

— $z = i$

— $|z| = 1$

— arg $z = \frac{\pi}{2}$

Dans le plan complexe, -1 forme un angle de 270°.

— $z = -1$

— $|z| = 1$

— $\arg z = \pi$

Dans le plan complexe, $-i$ forme un angle de 360°.

— $z = -i$

— $|z| = 1$

— $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

5.2 Cas général

On appelle l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe la valeur :

$$z = a + ib = |z| \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right) \tag{17}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = |z| \cos(\theta) \\ b = |z| \sin(\theta) \end{array} \right. \tag{18}$$

Tout comme l'écriture algébrique, l'écriture trigonométrique est **unique**.

On remarque que :

— $z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi$;

— $z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

5.3 Propriétés

$z = z' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{array} \right.$

$\arg(\bar{z}) = \arg(z)$

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

$\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \arg(z)$

La formule d'A. de Moivre :

$$z^n = |z|^n \left(\cos^n(\theta) + i\sin^n(\theta)\right) \tag{19}$$

Abraham de Moivre (1667-1754)

5.4 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

La formule d'A. de Moivre permet de proposer une **écriture exponentielle** d'un nombre complexe. Soient $z \in \mathbb{C}$ $|z| = \tau$ et $\arg(\theta)$, alors il peut être noté :

$$z = \tau e^{i\theta} \tag{20}$$

5.4.1 Cas particuliers

$z = 1 = e^{i0}$
$z = -1 = e^{i\pi}$
$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
$z = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5.4.2 Cas général

$zz' = |zz'| \, e^{i(\theta+\theta')}$
$\frac{1}{z} = \left|\frac{1}{z}\right| e^{-i\theta}$
$\frac{z}{z'} = \left|\frac{z}{z'}\right| e^{i(\theta-\theta')}$
$z^n = |z|^n \, e^{ni\theta}$
$e^{\bar{i}\theta} = e^{-i\theta}$

5.5 Interprétation géométrique

L'interprétation géométrique de la forme trigonométrique est donnée par la figure 4.

Soit $\vec{v}(z) : \vec{v} = \vec{OM} : M(z)$, alors $\arg(z) = \left(\vec{e_1}, \vec{OM}\right) = (\vec{e_1}, \vec{v})$ et $|z| = ||\vec{v}||$.

Soit $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$, alors $\arg(z_b - z_A) = \left(\vec{e_1}, \vec{AB}\right)$.

$\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ avec $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$

5.6 Linéarisation

On sait que :
- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$;
- $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.

On en déduit les formules de linéarisation :
- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

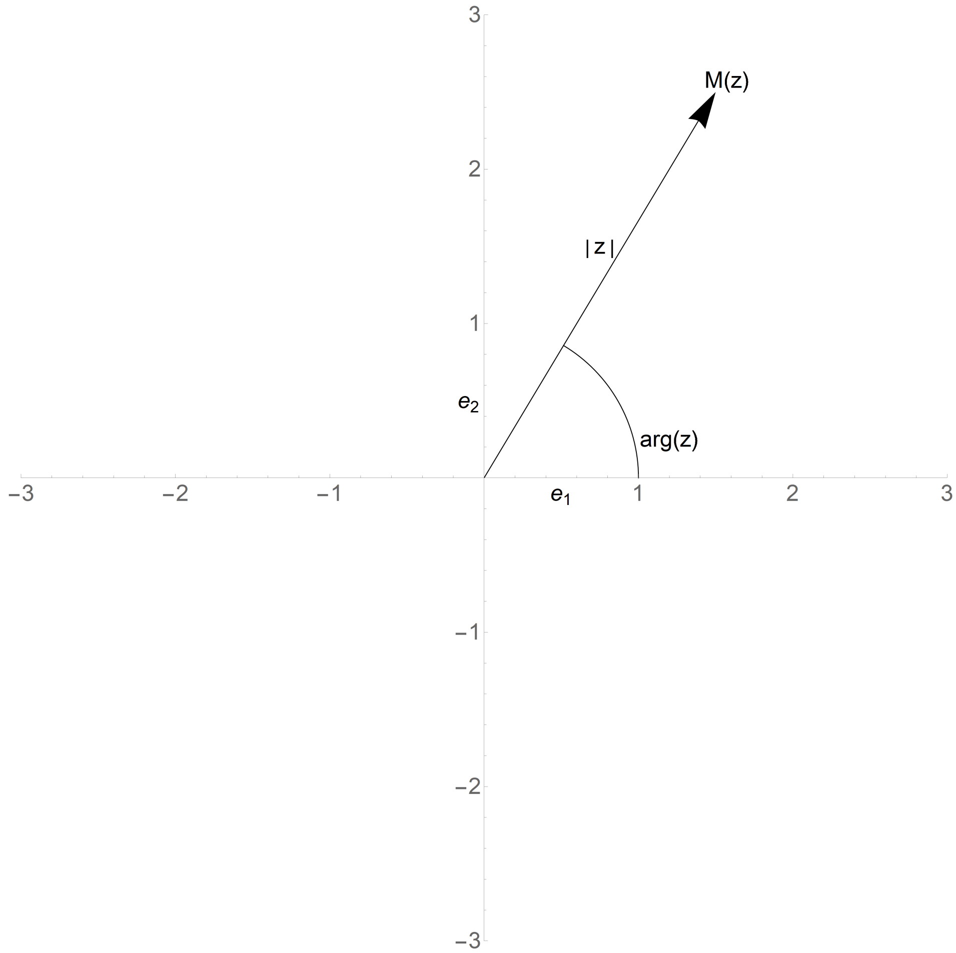

FIGURE 4 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe

6 Les transformations dans le plan et les nombres complexes

6.1 Les translations

Soient $f : M(z) \to M'(z')$ et $\vec{v}(b)$ avec $b \in \mathbb{C}$, alors f est une translation si et seulement si $z' = z + b$, c'est-à-dire $M\vec{M'} = \vec{v}$.

6.2 Les homothéties

Dans le plan complexe muni d'un repère, H est une homothétie si et seulement si $z' - z_A = k(z - z_A)$ avec $k \in \mathbb{R}$ et A le centre de l'homothétie $M(z) \xrightarrow{H_{A,k}}$

$M'(z')$.

6.2.1 Composées d'homothéties de même centre

La composée d'homothéties de même centre est l'application $M(z) \xrightarrow{H_{A,k}} M'(z') \xrightarrow{H_{A,k'}} M''(z'')$ avec $k \neq 0$ et $k' \neq 0$. On en déduit que :

$$z'' - z_A = kk'(z - z_A) \tag{21}$$

On note que, si $k = k'$, alors :

$$z'' - z_A = k^2(z - z_A) \tag{22}$$

6.2.2 Composées d'homothéties de centres différents et de rapports inverses

L'écriture complexe est :

$$z'' - z = \frac{k-1}{k}(z_B - z_A) \tag{23}$$

avec $\frac{k-1}{k} \in \mathbb{R}$ et A et B les centres des deux homothéties.

6.2.3 Composées d'homothétie de centres différents

Soit $M(z) \xrightarrow{H_{A,k}} M_1(z_1) \xrightarrow{H'_{B,k'}} M'(z')$, alors on a :

$$z_1 - z_A = k(z - z_A) \tag{24}$$

et

$$z' - z_B = k'(z_1 - z_B) \tag{25}$$

En combinant les deux équations, on obtient :

$$z' = kk'z + k'(1 - k')z_B \tag{26}$$

On distingue deux cas :

— si $kk' = 1$, c'est-à-dire le cas précédent pour lequel $k = \frac{1}{k'}$, alors $z' - z = \left(1 - \frac{1}{k}\right)(z_B - z_A)$ avec $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}$;

— si $kk' \neq 1$, alors :

1. on recherche d'éventuels points invariants tel que $(H' \circ H)(M) = M$

$$\Leftrightarrow z' = z \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow kk'z + k'(1-k)z_A + (1-k')z_B = z \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow (1-kk')z = k'(1-k)z_A + (1-k')z_B \quad (29)$$

   or $1 - kk' \neq 0$, donc :

$$\Leftrightarrow z = \frac{k'(1-k)z_A + (1-k')z_B}{1-kk'} \quad (30)$$

2. la composée $H' \circ H$ est l'homothétie de centre I d'affixe $z_I = \frac{k'(1-k)z_A+(1-k')z_B}{1-kk'}$, et de rapport kk'. En effet, si on pose $z_0 = k'(1-k)z_A + (1-k')z_B$, alors :

$$z' = kk'z + z_0 \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow z_I = kk'z_I + z_0 \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow z' - z_I = kk'z - kk'z_I + z_0 - z_0 \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow z' - z_I = kk'(z - z_I) \quad (34)$$

6.3 Les réflexions et les rotations

6.3.1 Réflexion

Dans le plan complexe, soient un repère orthonormé et une droite (Δ) d'équation $y = ax + b$, alors A est le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. De plus, on sait que : $\tan(\alpha) = a\,[\pi]$.

Soient deux axes de réflexion (Δ) et $[\,Ox\,)$, alors la rotation r de centre A et de d'angle 2α s'écrit :

$$R_{(\Delta)} \circ R_{[Ox)} = r_{A,2\alpha} \quad (35)$$

On déduit que :

$$\left(R_{(\Delta)} \circ R_{[Ox)}\right) \circ R_{[Ox)} = r_{A,2\alpha} \circ R_{[Ox)} \quad (36)$$

$$R_{(\Delta)} = r_{A,2\alpha} \circ R_{[Ox)} \quad (37)$$

Cela permet de proposer une écriture complexe d'une réflexion en prenant la composée obtenue :

$$M(z) \xrightarrow{R_{[Ox)}} M_1(z_1) \xrightarrow{r_{A,2\alpha}} M'(z) \quad (38)$$

avec $Z_1 = \bar{z}$.

$$z' - z_A = e^{2i\alpha} (z_1 - z_A) = e^{2i\alpha} (\bar{z} - z_A) \quad (39)$$

$$z' = \bar{z}e^{2i\alpha} + z_A \left(1 + e^{2i\alpha}\right) \quad (40)$$

or $e^{2i\alpha} = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$ et

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad (41)$$

et

$$\sin(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{2a}{1 + a^2} \quad (42)$$

Au final, on obtient l'écriture complexe d'une réflexion :

$$z' = \left[\frac{(1 - a^2) + 2ia}{1 + a^2}\right] \bar{z} - \frac{b}{a}\left[1 - \frac{(1 - a^2) + 2ia}{1 + a^2}\right] \quad (43)$$

6.3.2 Rotation

Rotation de centre O Soit $f : M(z) \to M'(z')$, alors f est une rotation de centre O, O étant l'origine du repère du plan complexe, et d'angle θ si et seulement si $z' = ze^{i\theta}$, c'est-à-dire $OM = OM'$.

Rotation de centre quelconque Soit $f : M(z) \to M'(z')$, alors f est une rotation de centre $O(z_O)$, et d'angle θ si et seulement si $z' - z_O = e^{i\theta}(z - z_O)$, c'est-à-dire $OM = OM'$.

6.4 Les isométries

6.4.1 Écriture complexe des déplacements

Soit la transformation : $M(z) \to M(z')$, alors :

— l'identité s'écrit :

$$z' = z \quad (44)$$

avec $|a| = 1$.

— la rotation de centre A et d'angle α s'écrit :

$$r_{A,\alpha} : z' - z_A = e^{i\alpha}(z - z_A) \quad (45)$$

avec $|a| = 1$.

N.B. $\arg(0)$ n'existe pas, car le vecteur nul n'a pas de sens propre, donc il est impossible de définir un angle.

— la translation de vecteur $\vec{u}$ s'écrit :

$$z' = z + z_{\vec{u}} \tag{46}$$

avec $|a| = 1$.

Théorème. Tout déplacement a comme écriture complexe $f : z \to z' = az+b$ avec $|a| = 1$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

La réciproque de ce théorème est-elle vraie ? Pour le démontrer, on pose $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \to \mathcal{P} \\ M(z) \mapsto M(az+b) \end{array} \right.$ avec $|a| = 1$. On sait que :

$$\begin{array}{l} A(z_A) \to A'(z_{A'}) \;\; z_{A'} = az_A + b \\ A(z_B) \to B'(z_{B'}) \;\; z_{B'} = az_B + b \end{array} \tag{47}$$

On en déduit que :

$$z_{\vec{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = az_B + b - (az_A + b) = a(z_B - z_A) = z_{\vec{AB}} \tag{48}$$

or $\left|z_{\vec{A'B'}}\right| = |az_{\vec{AB}}| = |a|\,|z_{\vec{AB}}|$ avec $|a| = 1$, donc $A'B' = AB$, donc f est une isométrie. De fait, si $|a| \neq 1$, alors f n'est pas une isométrie. Pour conclure, il est nécessaire de savoir s'il y a conservation des angles.

$$\begin{array}{l} A(z_A) \to A'(z_{A'}) \\ B(z_B) \to B'(z_{B'}) \\ C(z_C) \to C'(z_{C'}) \\ D(z_D) \to D'(z_{D'}) \end{array} \tag{49}$$

On en déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\vec{A'B'}, \vec{C'D'}\right) = \arg\left(\frac{z_{B'}-z_{A'}}{z_{D'}-z_{C'}}\right) \\ \left(\vec{AB}, \vec{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right) \end{array} \right. \tag{50}$$

On en déduit que :

$$\left. \begin{array}{l} z_{\vec{C'D'}} = az_{\vec{CD}} \\ z_{\vec{A'B'}} = az_{\vec{AB}} \end{array} \right\} \frac{z_{\vec{C'D'}}}{z_{\vec{A'B'}}} = \frac{az_{\vec{CD}}}{az_{\vec{AB}}} = \frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}} \tag{51}$$

donc :

$$\left(\vec{A'B'}, \vec{C'D'}\right) = \left(\vec{AB}, \vec{CD}\right) \tag{52}$$

Théorème réciproque. Tout transformation $f : M(z) \to M'(z')\;\; z' = az+b$ avec $|a| = 1$ est un déplacement. Il existe trois cas.

— Si $|a| = 1$, alors la transformation est une translation.

— Si $|a| = -1$, alors la transformation est une symétrie centrale.

— Si $|a| \neq 1$, alors la transformation est une rotation.

  — Méthode pour déterminer le centre de cette rotation : poser et résoudre $z = z'$.

  — Méthode pour déterminer l'angle de cette rotation : calculer l'argument de a.

6.4.2 Écriture complexe des antidéplacements

Théorème. Tout antidéplacement a comme écriture complexe la fonction f $z \to z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soient A un antidéplacement tel que :

$$A \left\{ \begin{array}{l} M \to M' \\ P \to P' \end{array} \right. \tag{53}$$

R la réflexion telle que :

$$R \left\{ \begin{array}{l} M \to M' \\ z \to z' = \bar{z} \end{array} \right. \tag{54}$$

et $D = A \circ R$ un antidéplacement, R étant un antidéplacement, on en déduit que D est un déplacement, donc D peut s'écrire sous la forme $z' = az + b$. De plus, $D \circ R = A \circ S \circ S = A$, donc $M(z) \xrightarrow{R} M_1(z_1) \xrightarrow{D} M'(z')$. Pour finir :

$$\bar{z} = z_1 \tag{55}$$

et

$$z' = az_1 + b \tag{56}$$

avec $|a| = 1$, d'où :

$$z' = a\bar{z} + b \tag{57}$$

Le théorème réciproque est-il vrai ? Soit F un antidéplacement tel que $M(z) \to M'(z')$ $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. $R \circ F$ est-il un déplacement ? On a $M(z) \xrightarrow{F} M_1(z_1) \xrightarrow{R} M'(z')$.

$$z_1 = a\bar{z} + b \tag{58}$$

avec $|a| = 1$. On en déduit que :

$$z' = \bar{z}_1 \tag{59}$$

donc :

$$z' = \overline{a\bar{z} + b} = \bar{a}z + \bar{b} \tag{60}$$

avec $|\bar{a}| = |a| = 1$, donc $D = R \circ F$ est un déplacement. De plus

$$R \circ D = R \circ R \circ F = R \circ D \tag{61}$$

On en déduit que :

1. F est une réflexion s'il existe une infinité de points invariants ;
2. F est $T \circ R$, T étant une translation et R une réflexion, s'il n'existe aucun point invariant.

On détermine le cas en résolvant $z = z' = a\bar{z} + b$, ce qui se résout par une double identification, d'une part, de la partie réelle, et d'autre part, de la partie imaginaire.

6.5 Les similitudes

6.5.1 Écriture complexe d'une similitude

Théorème 1. $f : M(z) \to M'(z')$ est une **similitude directe** si et seulement si :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 \; z' = az + b \tag{62}$$

avec $|a| = k$ et $|a| \neq 0/$

Théorème 2. $f : M(z) \to M'(z')$ est une **similitude indirecte** si et seulement si :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 \; z' = a\bar{z} + b \tag{63}$$

avec $|a| = k$ et $|a| \neq 0/$

Démonstration 1

Démonstration de la première implication. Soit une similitude s, on sait que s peut se décomposer en une homothétie de centre A et de rapport k, et une rotation de centre A et d'angle θ, soit $s = h_{\Omega,k} \circ r_{A,\theta}$ ou $M(z) \xrightarrow{r} M_1(z_1) \xrightarrow{h} M'(z')$.

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} z_1 &= e^{i\theta}(z - z_A) + z_A \\ z' &= k(z_1 - z_\Omega) + z_\Omega \end{aligned}\right\} \\ &\Rightarrow z' = k\left(e^{i\theta}(z_A - z_\Omega) + z_\Omega\right) z' = \underbrace{ke^{i\theta}}_{a} z \underbrace{-ke^{i\theta} z_A - kz_\Omega + z_\Omega}_{+b} \end{aligned} \tag{64}$$

donc : $z' = az + b$. Ainsi, une similitude directe s'écrit $z' = az + b$ sous sa forme complexe avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Démonstration de la seconde implication. Soit $M(z) \xrightarrow{F} M'(z')\ z' = az + b$

$$\left\{\begin{array}{l} F(M) = M' : z_{M'} = az_M + b \\ F(N) = M' : z_{N'} = az_N + b \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_{N'} = a(z_M - z_N)$$
$$\Leftrightarrow |z_{M'} - z_{N'}| = |a(z_M - z_N)| = |a|\,|z_M - z_N|$$
$$\Leftrightarrow M'N' = |a|\,MN$$
$$\Leftrightarrow \arg(z_{M'} - z_{N'}) = \arg(a) + \arg(z_M - z_N) \Rightarrow \arg\left(\tfrac{z_{M'}-z_{N'}}{z_M - z_N}\right)\arg(a)$$
$$\left(\tfrac{z_{M'}-z_{N'}}{z_M - z_N}\right)\arg(a) = \left(\vec{NM}, \vec{N'M'}\right) = \arg(a) \tag{65}$$

On en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} M'N' = |a|\,MN \\ \left(\vec{NM}, \vec{N'M'}\right) = \arg(a) \end{array}\right. \tag{66}$$

F est une similitude de rapport $|a|$ (pour le module de a).

Démonstration de la convergence des angles. Soient trois points A, B, C et leurs images par une similitude $A', B', C', \theta = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right)$, et $\theta' = \arg\left(\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{B'}}\right)$, alors :

$$\left.\begin{array}{r} z_{C'} - z_{A'} = a(z_C - z_A) \\ z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{B'}} = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \tag{67}$$

donc $\theta = \theta'$.

En conclusion, la similitude directe s'écrit sous la forme complexe :

$$z' = az + b \tag{68}$$

Démonstration 2 La démonstration avec une similitude indirecte est exactement la même, mais on trouverait comme résultat :

$$z' = a\bar{z} + b \tag{69}$$

avec $\left\{\begin{array}{l} |a| \neq 0 \\ |a| \text{ est le rapport de la similitude.} \end{array}\right.$, $a \in \mathbb{C}^*$, et $b \in \mathbb{C}$.

6.5.2 Forme réduite d'une similitude directe

Théorème. Soit s une similitude directe, différente d'une translation, alors s est la composée d'une homothétie et d'une rotation de centre Ω, appelé le **centre de la similitude**. L'homothétie définit le **rapport de similitude directe** k. La rotation de centre Ω définit un angle θ constant appelé **angle de la similitude directe**.

Démonstration Soit s une similitude s'écrivant sous la forme $z' = az + b$ avec $|a| \neq 0$, $|a| \neq 1$, $|a| = k$, $k > 0$, et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de la première implication. On cherche le point invariant :

$$z = az + b \Leftrightarrow z\left(1 - a\right) = b \Leftrightarrow z = \frac{b}{1-a} = z_\Omega \tag{70}$$

On en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} z' = az + b \\ z_\Omega = az_\Omega + b \end{array}\right. \Rightarrow z' - z_\Omega = a\left(z - z_\Omega\right) \tag{71}$$

d'où :

$$\left\{\begin{array}{l} \left|z' - z_\Omega\right| = \left|a\right|\left|z - z_\Omega\right| \Leftrightarrow M'\Omega = \left|a\right| M\Omega \\ \arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right) = \arg\left(a\right) = \left(\vec{M'\Omega}, \vec{M\Omega}\right) \end{array}\right. \tag{72}$$

Démonstration de la seconde implication. Soient la rotation $R_{\Omega,\theta}$ et l'homothétie $H_{\Omega,k}$, alors $M\left(z\right) \xrightarrow{R} M_1\left(z_1\right) \xrightarrow{H} M'\left(z'\right)$.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} z_1 - z_\Omega = e^{i\theta}\left(z - z_\Omega\right) \\ z' - z_\Omega = k\left(z_1 - z_\Omega\right) \end{array} \Rightarrow z' - z_\Omega = ke^{i\theta}\left(z - z_\Omega\right) \text{ avec } |a| = k \\ z' = az - az_\Omega + z_\Omega \\ z' = az + z_\Omega\left(1 - a\right) = az + \left(\frac{b}{1-a}\right)\left(1 - a\right) = az + b \end{array} \tag{73}$$

Méthode de détermination du rapport et de l'angle de la similitude Pour déterminer le rapport de la similitude, on peut utiliser :

— soit la méthode avec les nombres complexes : $|a| = k$;

— soit la méthode géométrique : $k = \frac{A'B'}{AB}$.

Pour déterminer l'angle de la similitude, on peut utiliser :

— soit la méthode avec les nombres complexes : $\theta = \arg\left(a\right)$;

— soit la méthode géométrique : $\theta = \left(\vec{A'B'}, \vec{AB}\right)$.