Annexe L

Valeurs et vecteurs propres dans $\mathbb{R}^n$

L.1 Pré-requis

Le déterminant d'ordre n d'une matrice carrée vaut :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} D_{i1} \tag{L.1}$$

avec D_{i1} l'un des déterminants d'ordre $n-1$.

La matrice identité I_n d'ordre n est une matrice carrée $n \times n$ telle que :

$$I_n = \begin{bmatrix} 10\ldots & 0 \\ 01\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 00\ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{L.2}$$

Valeurs propres et vecteurs propres ne peuvent se calculer qu'á partir d'une matrice carrée.

L.2 Valeurs propres

Les valeurs propres λ_n de la matrice A sont déterminées par la relation de colinéarité suivante :

$$\det(A - \lambda_n I_n) = 0 \tag{L.3}$$

avec I_n la matrice identité d'ordre n et $\det$ le déterminant :

$$\det(A - \lambda_n I_n) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \tag{L.4}$$

Exemple. Calculer les vecteurs propres de $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

1. Calculer $A - \lambda_n I_n$

$$A - \lambda_n I_n = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda_n & -3 \\ 6 & -4\lambda_n \end{bmatrix} \tag{L.5}$$

2. Calculer $\det(A - \lambda_n I_n)$

$$\det(A - \lambda_n I_n) = (5 - \lambda_n)(-4 - \lambda_n) + 18 = {\lambda_n}^2 - \lambda_n - 2 \tag{L.6}$$

3. Résoudre $\det(A - \lambda_n I_n) = 0$

$${\lambda_n}^2 - \lambda_n - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1 \end{cases} \tag{L.7}$$

L.3 Vecteurs propres

À chaque valeur propre, on associe un vecteur x_n tel que $A.X = \lambda_n.X$

$$A.X = \lambda_n.X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{L.8}$$

Si l'on reprendre l'exemple précédent, il existe deux cas possibles.

Cas n° 1. $\lambda_1 = 2$

$$\begin{aligned} & (A - \lambda_1 I_2) X_1 = 0 \\ & \Leftrightarrow (A - 2I_2) X_1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) .X_1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow x_{11} = x_{12} \\ & X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{L.9}$$

Cas n° 1. $\lambda_2 = -1$

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda_2 I_2)\, X_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (A + I_2)\, X_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) .X_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x_{21} = \tfrac{1}{2} x_{22} \\
&\Leftrightarrow \text{Il existe une infinité de vecteurs propres.} \\
&X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ par exemple}
\end{aligned} \tag{L.10}$$

On obtient la matrice finale F des vecteurs propres :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{L.11}$$

Il faut calculer le déterminant de F

$$\det(F) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2 - 1 = 1 \tag{L.12}$$

Comme $\det(F) \neq 0$, les vecteurs propres sont bien non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$.

De manière plus générale, soit A une matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et soit X un vecteur propre x dans $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{L.13}$$

et

$$\begin{aligned}
&f(x) = \lambda_n x \\
&\Leftrightarrow A.X = \lambda_n.X \\
&\Leftrightarrow (A - \lambda_n I_n)\, .X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda_n)\, x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda_n)\, x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_n)\, x_n = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{L.14}$$

Les valeurs propres sont les scalaires λ_n. Ils permettent d'écrire l'**équation caractéristique de degré** n **en** λ_n.

$$\det(A - \lambda_n . I_n) = 0 \tag{L.15}$$

L.4 Diagonalisation d'une matrice carrée

La diagonalisation par la matrice D de la matrice A s'effectue par l'intermédiaire d'une **matrice de passage** P correspondant aux vecteurs propres, c'est-à-dire F.

$$D = P^{-1}.A.P \tag{L.16}$$

Si l'on reprend l'exemple précédent la matrice de passage correspond aux vecteurs propres calculés, d'où :

$$\begin{aligned}
&P = F \\
&P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{L.17}$$

Remarque. $A^n = (P.D.P^{-1})\,(P.D.P^{-1}) \ldots\, (P.D.P^{-1}) = P.D^n.P^{-1}$

L.5 Matrices orthogonales

Lorsque la matrice carrée U est réelle, on dit que U est orthogonal si :

$$^tU.U = I_n \tag{L.18}$$

U appartient à l'espace vectoriel $E^{m\times n}$ avec $m \geq n$.

Propriété. $^tU = U^{-1}$

L.6 Changement de coordonnées

Soit E un **espace vectoriel** muni d'une base $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ que l'on qualifie d'ancienne base. On choisit dans E une autre base $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ appelée nouvelle base.

On appelle **matrice de passage** de la base e à la base f, la matrice carrée P d'ordre n, dont les colonnes expriment les coordonnées des vecteurs de f dans la base e. Cette matrice est régulière. La matrice de passage de f à e est la matrice P^{-1}.

Soit x un élément de E dont les coordonnées dans les deux bases e et f sont stockées dans des matrices colonnes X et Y, alors :

$$X = P.X \tag{L.19}$$

et

$$Y = P^{-1}.X \tag{L.20}$$

Bibliographie