Problème de Doudou le hamster

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

29 août 2025

Doudou le hamster ne connaît que trois endroits dans sa cage :

1. les copeaux ;
2. la mangeoire ;
3. la roue.

Toutes les minutes, il peut soit changer d'activités, soit continuer celle qu'il est en train de faire, mais on peut dresser les probabilités suivantes :

1. S'il est sur les copeaux, il a $\frac{9}{10}$ de chances de ne pas changer d'endroit.
2. S'il est sur les copeaux, il a $\frac{1}{2}$ de chances d'aller vers la mangeoire et $\frac{1}{2}$ d'aller sur la roue.
3. S'il est à la mangeoire, il va systématiquement ailleurs.
4. S'il est à la mangeoire, il a $\frac{3}{10}$ de chances qu'il aille vers la roue et $\frac{7}{10}$ qu'il aille vers les copeaux.
5. S'il est sur la roue, il a $\frac{8}{10}$ qu'il aille vers les copeaux ou qu'il y reste.

À partir des données, on établit le système des états : $\{c, m, r\}$ avec c être sur les copeaux, m être à la mangeoire, et r être dans la roue (Tab. 1).

On pose la matrice $\mathbf{P}$ synthétisant le système des états.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{10} & 0 & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Il existe trois états possibles.

	c	**m**	**r**
c	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
m	$\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
r	$\frac{8}{10}$	0	$\frac{2}{10}$

TABLE 1 – Système des états

1. Doudou est sur les copeaux (100).
2. Doudou est à sa mangeoire (010).
3. Doudou est sur sa roue (001).

Question 1. Où se trouver Doudou au bout de 24 heures, soit 1 440 min s'il commence sa journée par l'état 1, 2 ou 3 ?

1. $p^{(0)}P^{1440} \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$
2. $p^{(0)}P^{1440} \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$
3. $p^{(0)}P^{1440} \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$

On constate que les trois états possibles de départ convergent. Doudou a :

— 88,4 % de chances d'être sur les copeaux ;

— 4,4 % de chances d'être à sa mangeoire ;

— 7,2 % de chances d'être sur sa roue.

La journée de Doudou illustre un **processus sans mémoire**.

Question 2. Calculer et vérifier l'état stationnaire de P.

Il faut calculer :

$$(x, y, z)\, P = (x, y, z) \tag{2}$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc} (x,y,z)\begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} & (x,y,z)\begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (x,y,z)\begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{array} \right] = (x, y, z) \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{10}x + \frac{7}{10}y + \frac{4}{5}z & \frac{1}{20}x & \frac{1}{20}x + \frac{3}{10}y + \frac{1}{5}z \end{pmatrix} = (x, y, z) \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10}x + \frac{7}{10}y + \frac{4}{5}z \\ y = \frac{1}{20}x \\ z = \frac{1}{20}x + \frac{3}{10}y + \frac{1}{5}z \end{cases} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 9x + 7y + 8z \\ x = 20y \\ 20z = x + 6y + 4z \end{cases} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+7y+8z=0 \\ x=20y \\ x+6y-16z=0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=20y \\ 7y+8z=20y \\ x+6y-16z \end{cases} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-20y=0 \\ -13y+8z=0 \\ x+6y-16z=0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-20y=0 \\ -13y+8z=0 \\ 26y-16z=0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-20y=0 \\ -13y+8z=0 \\ 0+0=0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-20y=0 \\ -13y+8z=0 \end{cases} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=20y \\ z=\frac{13}{8}y \end{cases} \tag{13}$$

Le système obtenu est homogène.

On pose $y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ z=\frac{13}{8} \end{cases}$. On obtient le vecteur $\mathbf{u}$.

$$u = \begin{pmatrix} 20 & 1 & \frac{13}{8} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$x+y+z = 20+1+\frac{13}{8} = \frac{168+13}{8} = \frac{181}{8} \tag{15}$$

Cela permet de choisir une constante k, ici $k=\frac{8}{181}$, donc $K\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{160}{181} & \frac{8}{181} & \frac{13}{181} \end{pmatrix}$

On en déduit l'état stationnaire $t = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{8}{181} & \frac{13}{181} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,8889 & 0,0442 & 0,0718 \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'état obtenu au bout de 24 heures est très proche de l'état stationnaire.

On refait le calcul avec Doudou au bout de 1 heure, soit 60 min.

1. $p^{(0)}P^{60} \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$
2. $p^{(0)}P^{60} \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$
3. $p^{(0)}P^{60} \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$

On refait le calcul avec Doudou au bout de 4 min.

1. $p^{(0)}P^4 \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$
2. $p^{(0)}P^4 \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$
3. $p^{(0)}P^4 \approx \begin{pmatrix} 0,884 & 0,044 & 0,072 \end{pmatrix}$

On refait le calcul avec Doudou au bout de 2 min.

1. $p^{(0)}P^{1440} \approx \begin{pmatrix} 0,885 & 0,045 & 0,070 \end{pmatrix}$
2. $p^{(0)}P^{1440} \approx \begin{pmatrix} 0,870 & 0,035 & 0,095 \end{pmatrix}$
3. $p^{(0)}P^{1440} \approx \begin{pmatrix} 0,880 & 0,040 & 0,080 \end{pmatrix}$

Doudou est par conséquent relativement prévisible au bout de 4 min seulement. Peu importe l'état où on l'a vu à l'état initial, il a presque $\frac{9}{10}$ de chances d'être sur ces copeaux.