Équations cartésiennes

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

1 Repères cartésiens

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et non colinéaires, un vecteur $\vec{AB}$, H tel que ABH soit un triangle quelconque et tel que $\vec{AH}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires et $\vec{HB}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, alors on vérifie la relation de M. Chasles (Fig. 1) :

Michel Chasles (1793-1880)

$$\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HB} \tag{1}$$

De plus

$$\begin{cases} \vec{AH} = x\vec{u} \\ \vec{HB} = y\vec{v} \end{cases} \tag{2}$$

$(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base**. (x, y) sont les **coordonnées** dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Munir le plan d'une origine O et d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est noté $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. $\vec{i}$ correspond aux **abscisses**, $\vec{j}$, aux **ordonnées**.

Un **repère orthonormal** (ou orthonormé) $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (Fig. 2) vérifie :

$$\vec{i} \perp \vec{j} \tag{3}$$

et

$$\left|\left|\vec{i}\right|\right| = \left|\left|\vec{j}\right|\right| = 1 \tag{4}$$

Un repère est orienté. Un repère orthonormal est **direct** si $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, sinon il est **indirect**.

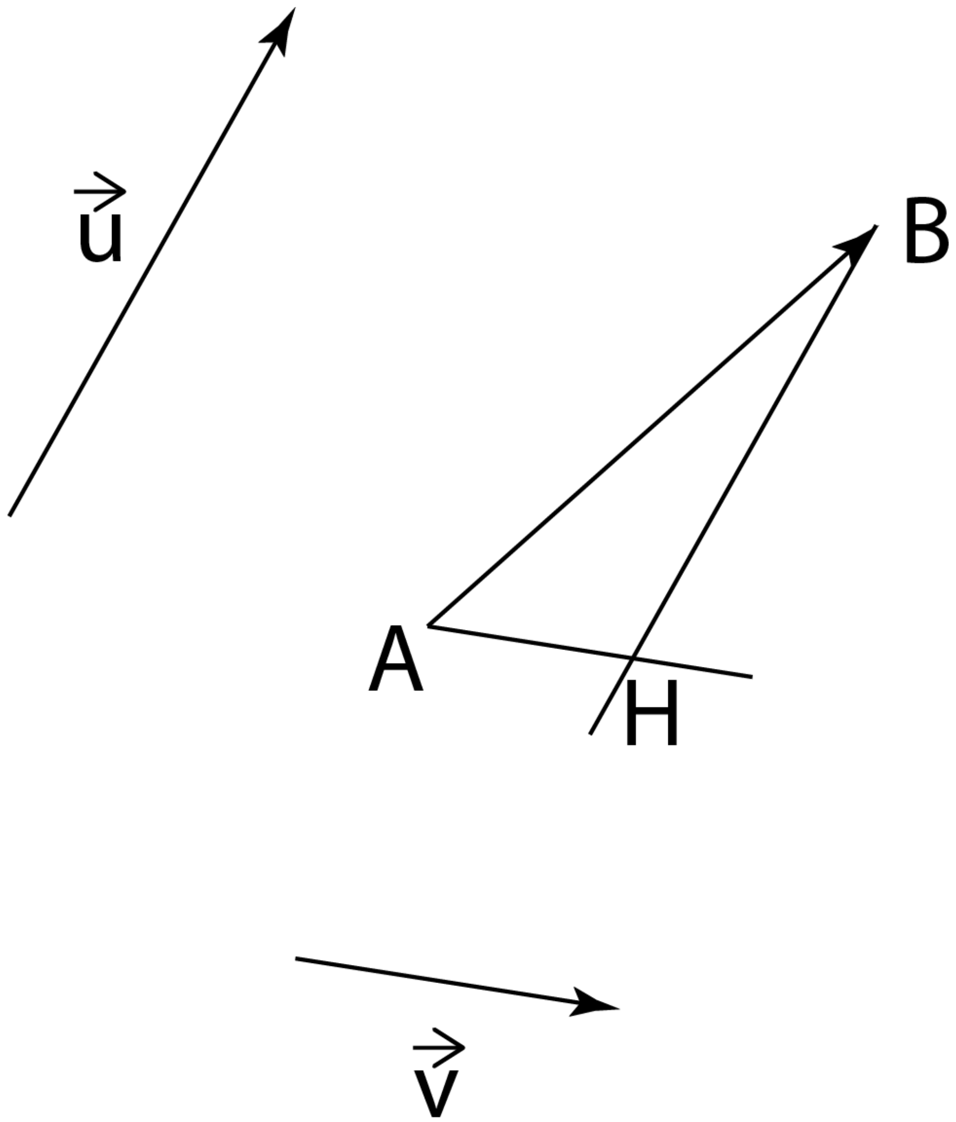

FIGURE 1 – Base d'un repère cartésien

1.1 Propriétés

1. Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, le point M de coordonnées (x, y) définit par le vecteur $\vec{OM}$. M et $\vec{OM}$ ont les mêmes coordonnées.

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{6}$$

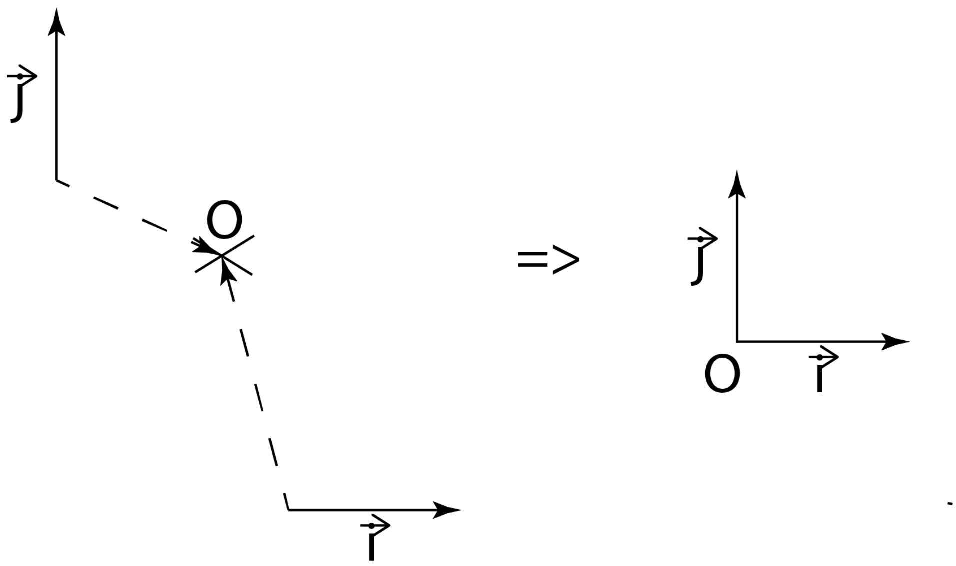

FIGURE 2 – Repère orthonormal

2. La **relation de colinéarité** entre deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ vérifie :
$$x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0 \tag{7}$$
3. Dans une repère orthonormé, la **relation d'orthogonalité** entre deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ vérifie :
$$x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0 \tag{8}$$

1.2 Norme d'un vecteur dans un repère orthonormé

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors la norme de $\vec{u}$, notée $||u||$ vaut :
$$||u|| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9}$$

1.3 Vecteur unitaire

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est **unitaire** si $||u|| = 1$, c'est-à-dire :
$$||u|| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \tag{10}$$

2 Équation cartésienne d'une droite dans le plan

Soient un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, un vecteur $\vec{u}$, et un point M, alors la droite (d) passant par M colinéaire à $\vec{u}$ est unique (Fig. 3).

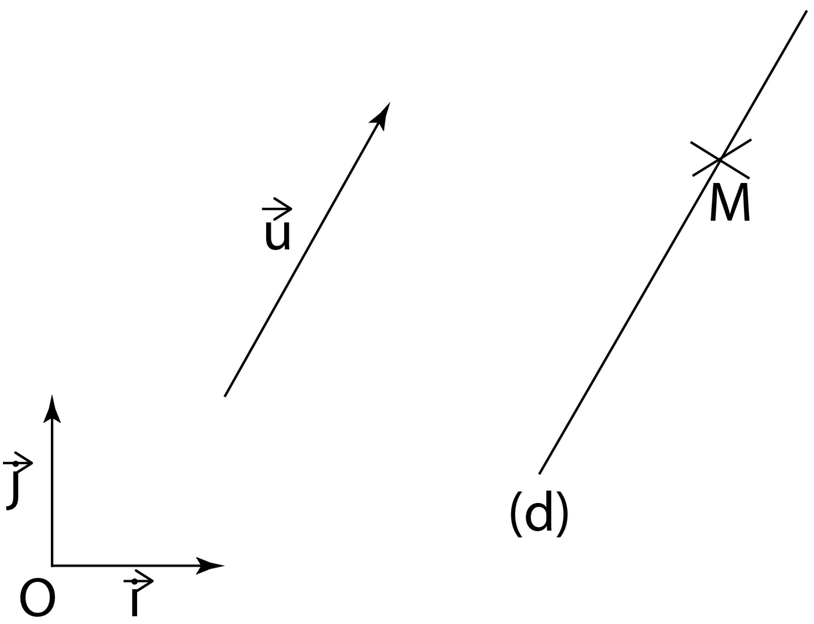

FIGURE 3 – Droite et vecteur directeur dans un repère cartésien

Toute équation de droite (d) a une **forme cartésienne** telle que :

$$ax + by + c = 0 \tag{11}$$

de **vecteur directeur** $\vec{u}$ (Fig. 3).

N.B. L'équation de droite écrite $y = mx + p$ est appelée **forme réduite** :

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \tag{12}$$

ou

$$y = mx + p \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \tag{13}$$

2.1 Droites parallèles

Soient (D_1) d'équation $a_1x+b_1y+c_1=0$ et (D_2) d'équation $a_2x+b_2y+c_2=0$, alors $(D_1)\,//\,(D_2)$, si $a_1b_2-a_2b_1=0$

N.B. On peut utiliser la relation de colinéarité.

2.2 Droites perpendiculaires dans un repère orthonormé

Soient (D_1) d'équation $a_1x+b_1y+c_1=0$ et (D_2) d'équation $a_2x+b_2y+c_2=0$, alors (D_1)´(D_2), si $a_1a_2+b_1b_2=0$.

N.B. On peut utiliser la relation d'orthogonalité.

3 Équation cartésienne d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r, alors le point $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$.

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow (x_M-a)^2+(y_M-b)^2=r^2 \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow {x_M}^2-2ax_M+a^2+{y_M}^2-2by_M+b^2=r^2 \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2-2ax_M-2by_M+a^2+b^2=r^2 \tag{17}$$

(x_M, y_M) est solution de l'**équation cartésienne** :

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta x+\delta=0 \tag{18}$$

avec $\begin{cases} \alpha=-2a \\ \beta=-2b \\ \delta=a^2+b^2-r^2 \end{cases}$

Pour démontrer qu'un **ensemble** E est un cercle, on pose E un ensemble de points dont les coordonnées sont solutions de l'équation $x^2+y^2+\alpha x+\beta x+\delta=0$, alors le point $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ appartient à E si :

$$M \in E \Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2+\alpha x_M+\beta x_M+\delta=0 \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_M+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}+\left(y_M+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}+\delta=0 \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_M+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y_M+\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}-\delta \tag{21}$$

Cas 1. Si $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta < 0$, alors $E = \varnothing$.

Cas 2. Si $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta = 0$, alors $E = \left\{ \Omega \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \right\}$, c'est-à-dire le point Ω.

Cas 3. Si $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta > 0$, alors :

$$M \in E \Leftrightarrow \left(x_M + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y_M + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta}^2 \tag{22}$$

$$\Leftrightarrow (x_M + x_\Omega)^2 + (y_M + y_\Omega)^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta}^2 \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta}^2 \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta} \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}\left[\Omega \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, r = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \delta}\right] \tag{26}$$

donc :

$$E = \mathcal{C}\left[\Omega, r\right] \tag{27}$$

4 Équation cartésienne d'une ellipse

Soient $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne d'une ellipse est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{28}$$

ou

$$\frac{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}{a^2b^2} = 0 \tag{29}$$

ou

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{30}$$

5 Équation cartésienne d'une parabole

Soit $c \neq 0$, alors l'équation cartésienne d'une parabole est de la forme :

$$y = cx^2 + bx + a \tag{31}$$

Le sommet S de la parabole est le point où la tangente est normale à l'axe de la parabole.

$$S\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \tag{32}$$

Si $a=b=0$, on peut écrire la parabole plus simplement :

$$y=cx^2=\frac{x^2}{2p} \tag{33}$$

Le sommet S de cette parabole est confondu avec l'origine O. p est le **paramètre** de la parabole. Le point $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ est le **foyer** de la parabole. La **directrice** est la droite $y=-\frac{p}{2}$. La parabole est le lieu dont la distance au point F est égale à la distance à la directrice, c'est-à-dire $PF=PH$.

6 Équation cartésienne d'une hyperbole

Soient $a\neq 0$ et $b\neq 0$, alors l'équation cartésienne d'une hyperbole est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{34}$$

a est le demi-grand axe (OA). b est le demi-axe OB. Dans un repère, les coordonnées des **foyers** sont $(-c,0)$ et $(c,0)$ avec $c=\sqrt{a^2+b^2}$. c est la demi-distance focale OF.

Si P est un point de l'hyperbole, alors $PF'=PF=2a$.

L'**excentricité** de l'hyperbole $e=\frac{c}{a}$ est supérieure à 1.

L'hyperbole possède des asymptotes d'équations $y=-\frac{b}{a}x$ et $y=\frac{b}{a}x$.

L'**hyperbole équilatère** est une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales.

7 Équation cartésienne d'une droite dans l'espace

Soient une droite (D) $(A,\vec{u})$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ alors le point $M\in(D)$

$\Leftrightarrow$ $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ;

$$\Leftrightarrow \vec{AM}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_A=ka\\y-y_A=kb\\z-z_A=kc\end{cases}$$

8 Équation cartésienne d'un plan

L'ensemble de points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax + by + cz = d$ avec $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

9 Équation cartésienne d'une sphère

Soit un sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un rayon r, alors le point $M_in\mathcal{S}$

$$\Leftrightarrow \Omega M = r \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z \tag{37}$$

Comme l'équation d'un cercle, lorsque l'on a une équation pouvant correspondre à une sphère $\mathcal{S}$, il existe trois cas. On part d'un ensemble E.

Cas 1. Si $\Omega M > 0$, alors l'ensemble E est une sphère.

Cas 2. Si $\Omega M = 0$, alors l'ensemble E est un point.

Cas 3. Si $\Omega M < 0$, alors l'ensemble E est vide, c'est-à-dire $E = \varnothing$.