

Ensembles finis

Maxime Forriez^{1,2,a}

¹ Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris

² Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105,
75 005 Paris,

^amaxime.forriez@sorbonne-universite.fr

1^{er} octobre 2025

1 Les ensembles

Un **ensemble** est une collection de choses que l'on appelle **éléments**. Si un ensemble ne contient rien, on appelle d'**ensemble vide**, noté \emptyset .

Un ensemble peut être fini, comme le nombre de cas possibles, ou infini, comme l'ensemble des nombres. Si l'élément e_i appartient à l'ensemble E , on le note : $e_i \in E$.

2 Les ensembles finis

Un ensemble est **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E vers l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

3 Le cardinal d'un ensemble fini

Le **cardinal** est le nombre d'éléments n d'un ensemble fini E . Il est noté $\text{card}E$, ou $|E|$, ou $\#E$.

N.B. $\text{card}\emptyset = 0$

Si E est un ensemble fini, et $B \subset A$ alors :

1. B est fini et $\text{card}B \leq \text{card}A$
2. $\text{card}(C_A^B) = \text{card}A - \text{card}B$

4 L'ensemble dénombrable

Soit E un ensemble, on dit que E est un ensemble (infini) dénombrable s'il est équipotent à \mathbb{N} , c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre E et \mathbb{N} .

- $2\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- \mathbb{R} est non dénombrable.
- \mathbb{C} est non dénombrable.

5 L'ensemble des parties

L'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ de l'ensemble fini E correspond à la totalité des combinaisons possibles.

Exemple Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Grâce à l'établissement d'un arbre, il est facile, dans ce cas, de connaître la totalité de l'ensemble des parties (Fig. 1). L'arbre reconstitue les étapes en commençant par le premier élément. a est retenu à la branche de droite et non retenu à la branche de gauche. On poursuit avec le deuxième élément b . La logique est la même : à droite l'élément est retenu, à gauche, il ne l'est pas.

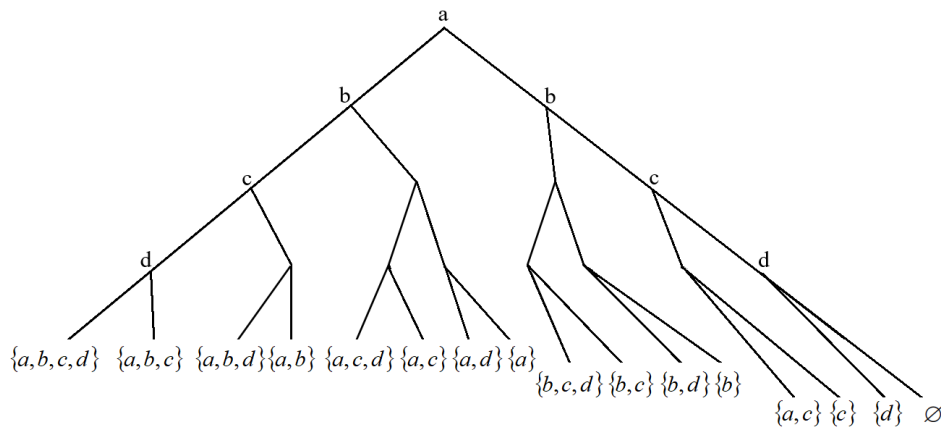


FIGURE 1 – Arbre de dénombrement de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \dots, \{a, b, c, d\}\} \quad (1)$$

Il est fastidieux d'établir un arbre pour chaque ensemble. Il existe une formule permettant de calculer le cardinal de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$.

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card} E} \quad (2)$$

Il ne faut jamais oublier.

N.B. 1. L'ensemble vide est toujours du partie.

N.B. 2. L'ensemble en entier est toujours inclus dans lui-même.

N.B. 3. $a \in E$, mais $\{a\} \subset E$, mais $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

Les opérations dans l'ensemble des parties Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$ sont ensemblistes.

L'**intersection** est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et B (Fig. 2). Elle est notée $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \quad (3)$$

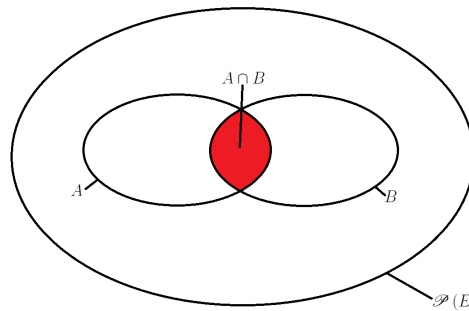


FIGURE 2 – Modèle d'une intersection

L'**union** est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou B , ou les deux (Fig 3). Elle est notée $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (4)$$

N.B. Lorsque l'intersection est vide, les ensembles A et B sont **disjoints**.

La **différence** de A moins B est l'ensemble des éléments qui sont dans A , mais pas dans B . L'opérateur utilisé est \setminus .

La **différence symétrique** de A et B est l'ensemble des éléments qui sont soit dans A soit dans B , mais pas dans $A \cap B$. L'opérateur utilisé est Δ .

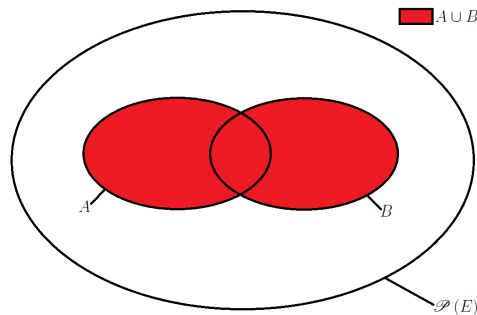


FIGURE 3 – Modèle d'une union

6 Le complémentaire d'un ensemble

On appelle le **complémentaire de A dans l'ensemble E** des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . Il est noté C_E^A , ou \bar{A} , ou A^c , ou $C_E(A)$.

$$C_E^A = \{x \notin A, x \in E\} \quad (5)$$

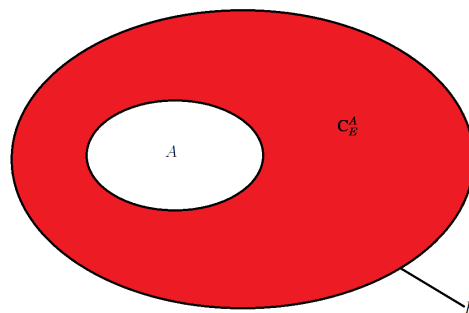


FIGURE 4 – Modèle d'un complémentaire de A dans E

Propriétés :

- $C_{A \cap B}^{A \cup B} = \{x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$
- $\text{card}A + \text{card}C_E^A = \text{card}E$
- $\text{card}C_E^A = \text{card}E - \text{card}A$

7 Le représentation des ensembles

Les figures 2 et 3 sont des **diagrammes de J. Venn** (ou logiques). Ils montrent toutes les relations logiques possibles dans une collection finie de différents ensembles.

John
Venn
(1834-
1923)

8 Les relations algébriques des ensembles

Soient A, B, C trois ensembles.

- $E \cap A = A$
- $E \cap \emptyset = \emptyset$
- $E \cup A = E$
- $E \cup \emptyset = E$

8.1 La commutativité

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

8.2 L'associativité

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8.3 La distributivité

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $A \bar{\cup} B = \bar{A} \cup \bar{B}$

8.4 Les règles de A. de Morgan

- $(\cup_{i=1}^n A_i) \cap B = \cup_{i=1}^n (A_i \cap B)$
- $(\cap_{i=1}^n A_i) \cup B = \cap_{i=1}^n (A_i \cup B)$
- $\cup_{i=1}^n \bar{A}_i = \bar{\cap_{i=1}^n A_i}$
- $\cap_{i=1}^n \bar{A}_i = \bar{\cup_{i=1}^n A_i}$

Augustus
de
Mor-
gan
(1806-
1871)

8.5 Le produit cartésien

8.5.1 Le produit cartésien de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles, on appelle **produit cartésien de A par B** , l'ensemble des couples (x, y) tels que x soit élément de A , et y soit un élément de B , ce qui définit l'ensemble $C = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Il est noté $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\} \quad (6)$$

Propriété. Le nombre d'éléments d'un produit cartésien vaut :

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B \quad (7)$$

N.B. Dans le membre gauche de l'équation n° 7, \times se lit « croix », et non comme le symbole de la multiplication, tandis que, dans le membre droit de l'équation n° 7, \times se lit « multiplié ».

8.5.2 Le produit cartésien de n ensembles

Soient A_1, A_2, \dots, A_n , un élément de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est une **liste ordonnée** : le premier appartenant à A_1 , le deuxième appartenant à A_2 , ..., le dernier appartenant à A_n . Il est noté A^n .

Propriété. Le nombre d'éléments d'un produit cartésien à n ensembles vaut :

$$\text{card}(A^n) = (\text{card}A)^n \quad (8)$$

8.6 L'inclusion

L'opérateur \subset est celui de l'inclusion.

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, n ensembles inclus dans Ω . La famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition de Ω si elle vérifie deux conditions :

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$;
2. $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Soit $A \subset \Omega$, on définit sur Ω la fonction indicatrice de A , 1_A , par :

$$\forall \omega \in \Omega, 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

9 Les relations entre les cardinaux

9.1 L'additivité

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire avec $A \cap B = \emptyset$, alors :

$$\text{card}A + \text{card}B = \text{card}(A \cup B) \quad (10)$$

N.B. Si A et B sont deux ensembles finis non disjoints, alors on obtient la formule des quatre cardinaux ou crible de H. Poincaré :

$$\text{card}A \cup B = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}A \cap B \quad (11)$$

ou

$$\text{card}A \cap B = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cup B) \quad (12)$$

Henri
Poin-
caré
(1854-
1912)

Si on ajoute un ensemble C , la formule devient :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}((A \cup B) \cup C) \\ &= \text{card}A + \text{card}B + \text{card}C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) \\ &\quad + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (13)$$

ce qui correspond au dénombrement d'un sous-ensemble.

9.2 La multiplicativité

Soient A et B deux ensembles finis et $C = A \times B$; alors :

$$\text{card}C = \text{card}A \times \text{card}B \quad (14)$$

9.3 Le principe du dénombrement

Le **dénombrement** consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble fini non vide et soit F un ensemble, s'il existe une bijection de E sur F alors F est fini et de même cardinal que E .

Lorsque l'on réalise deux expériences qui peuvent produire respectivement n et m résultats différents. Au total, pour les deux expériences prises ensemble, il existe $n \times m$ résultats possibles.

9.4 Le nombre de suites

Soit A un ensemble fini de cardinal n . Le nombre de suites de longueur r constituées d'éléments de A est :

$$n^r \quad (15)$$

9.5 L'inclusion-exclusion

Soient A et B deux ensembles finis, alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B) \quad (16)$$

Pour n ensembles finis A_1, \dots, A_n ,

$$\begin{aligned} \text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n \text{card}A_i - \sum_{i < j}^n \text{card}(A_i \cap A_j) + \dots \\ &+ (-1)^{n+1} \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned} \quad (17)$$