Barycentre dans le plan et dans l'espace à trois dimensions

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

20 octobre 2025

1 Barycentre de deux points

Soient deux points A et B dans l'espace $\mathcal{E}$ et deux réels a et b tels que $a+b \neq 0$, alors le barycentre du **système de points** $[(A, a), (B, b)]$ est le point G tel que : $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$.

G est le barycentre de $[(A, a), (B, b)]$ si et seulement si $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$.

Propriétés

1. Si G est barycentre de $[(A, a), (B, b)]$, alors :
$$\forall M \in \mathcal{E}, \vec{MG} = \frac{a}{a+b}\vec{MA} + \frac{b}{a+b}\vec{MB} \tag{1}$$
ou
$$(a+b)\vec{MG} = a\vec{MA} + b\vec{MB} \tag{2}$$
2. Si $A = M$, alors $\vec{AG} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$. Dit autrement, si G est le barycentre de $[(A, a), (B, b)]$, alors $G \in (ABC)$ et les points A, B, G sont alignés.
3. Si $a = b$, alors G devient un **isobarycentre** de A et de B.

   N.B. Un milieu n'est qu'un barycentre particulier.
4. Si $k \in \mathbb{R}^*$, alors les systèmes $[(A, a), (B, b)]$ et $[(A, ka), (B, kb)]$ ont le **même** barycentre.
5. I isobarycentre de A et de $B \Leftrightarrow I$ milieu de $[AB] \Leftrightarrow [(A, 1), (B, 1)]$

2 Barycentre de trois points

Soient A, B et C trois points dans l'espace $\mathcal{E}$ et trois réels a, b et c non nuls, alors le barycentre de $[(A,a),(B,b),(C,c)]$ est le point tel que $a\vec{GA}+b\vec{GB}+c\vec{GC}=\vec{0}$

Propriétés

1. Si G est le barycentre de $[(A,a),(B,b),(C,c)]$, alors :
$$\forall M\in\mathcal{E},(a+b+c)\vec{MG}=a\vec{MA}+b\vec{MB}+c\vec{MC} \tag{3}$$
ou
$$\forall M\in\mathcal{E},\vec{MG}=\frac{a}{a+b+c}\vec{MA}+\frac{b}{a+b+c}\vec{MB}+\frac{c}{a+b+c}\vec{MC} \tag{4}$$
2. Si $A=M$, alors $\vec{AG}=\frac{b}{a+b+c}\vec{AB}+\frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$, donc $G\in(ABC)$. ou Si G est le barycentre de $[(A,a),(B,b),(C,c)]$, alors $G\in(ABC)$.
3. $[(A,a),(B,b),(C,c)]$ et $[(A,ka),(B,kb),(C,kc)]$ ont le même barycentre G.
4. Si $a=b=c$, alors G est un isobarycentre : $[(A,1),(B,1),(C,1)]$.
5. Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, $\vec{OG}=\frac{a}{a+b+c}\vec{OA}+\frac{b}{a+b+c}\vec{OB}+\frac{c}{a+b+c}\vec{OC}$ et :
$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \tag{5}$$
$$y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \tag{6}$$
$$z_G=\frac{az_A+bz_B+cz_C}{a+b+c} \tag{7}$$
6. Soient trois réels a, b, c tels que $a+b+c\neq 0$ et $a+b\neq 0$, alors les systèmes $[(A,a),(B,b),(C,c)]$ et $[(G_1,a+b),(C,c)]$ ont le même barycentre G.

N.B. En général, on pose le barycentre d'un système de points appelé G'. Puis, on démontre que le point G est également le barycentre de ce système de points en vérifiant que $G=G'$.

3 Fonctions vectorielles de G. W. Leibniz

Soient $A_1,A_2,\ldots,A_n$ points du plan ou de l'espace, $a_1,a_2,\ldots,a_n$, n réels, alors on appelle **système de points pondérés** l'ensemble $\{(A_1,a_1),(A_2,a_2),\ldots,(A_n,a_n)\}$

On appelle **fonction vectorielle de G. W. Leibniz** associée au système, la fonction qui a tout point M du plan ou de l'espace associe le vecteur $f(\vec{M}) = a_1 M\vec{A}_1 + a_2 M\vec{A}_2 + \ldots + a_n M\vec{A}_n$:

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

$$f(\vec{M}) = \sum_{i=1}^{n} a_i M\vec{A}_i \tag{8}$$

3.1 Propriété de réduction

Soi B un **point fixe** du plan ou de l'espace, alors :

$$f(\vec{M}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) M\vec{B} + f(\vec{B}) \tag{9}$$

3.2 Centre de gravité

Si G est un point fixe et si $f(\vec{G}) = \vec{0}$, alors G est le centre de gravité.

$$f(\vec{G}) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) G\vec{B} + f(\vec{B}) = \vec{0} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) B\vec{G} = f(\vec{B}) \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow B\vec{G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} f(\vec{B}) \tag{12}$$

Propriétés

1. Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, alors G existe et est unique. G est le barycentre du système de points pondérés.
2. Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors $0B\vec{G} = f(\vec{B}) = \vec{0}$.
3. Si $f(\vec{B}) \neq \vec{0}$, alors B n'existe pas.
4. Si $f(\vec{B}) = \vec{0}$, alors tout point est solution.
5. Si $f(\vec{B}) = f(\vec{M})$, alors f est constante.

3.3 Propriétés des barycentres

1. Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, alors G est l'**isobarycentre** des points $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$.
2. Si $k \in \mathbb{R}_*^+$, alors $ka_1 = ka_2 = \ldots = ka_n$ ont le même barycentre que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
3. La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
4. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
5. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients de même signe.
6. Les coordonnées d'un barycentre
   - dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:
   $$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{13}$$
   et
   $$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{14}$$
   - dans l'espace $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, et x_G et y_G se calculent pareil que dans le plan :
   $$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{15}$$
7. **L'associativité des barycentres.** Soient $G_1 \left\{(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_p, a_p), \ldots, (A_n, a_n)\right\}$ un barycentre, $G_2 \left\{(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_p, a_p)\right\}$ un barycentre, alors G_1 est le barycentre de :
$$\left\{\left(G_2, \sum_{i=1}^{n} a_i\right), (A_{p+1}, a_{p+1}), \ldots, (A_n, a_n)\right\} \tag{16}$$