Cours d'analyse de données en géographie
Niveau Master 1 - GEANDO
Pour commencer avec de bonnes bases…
Probabilités

Maxime Forriez[1,a]

[1] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

29 août 2025

Savoir faire sans effort la totalité des exercices proposés est capital pour comprendre le cours. En statistique, les probabilités servent de modèle, de référence. En général, la méthode consiste à comparer la distribution théorique, celle des probabilités, et la distribution observée, celle des fréquences. Cette comparaison conduit à prendre une ou plusieurs décisions sur les données observées. Il faut faire attention énoncer de cette manière la méthode peut sembler faussement simple. En fonction des cas, la comparaison est plus ou moins complexe, d'où la nécessité de maîtriser les fondamentaux pour comprendre tous les cas.

De fait, de manière exceptionnelle, l'ensemble des exercices propose une correction très détaillée.

1 Probabilité dans le cas des tirages successifs

1.1 L'indépendance des événements : tirages successifs avec remise

1.1.1 Exercice 1

Dans un jeu traditionnel de 32 cartes, on tire une carte au hasard.

1. Calculer la probabilité de tirer un as. On définit cet événement par E. Calculer la probabilité de tirer une carte noire. On définit cet événement par F. E et F sont-ils indépendants ?
   — On calcule les probabilités de E et de F.

$$\Pr\left(E\right) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \tag{1}$$

$$\Pr(F) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

— $E \cap F$ est l'événement « tirer un as noir ». Il existe deux as noirs.

$$\Pr(E \cap F) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} \tag{3}$$

— E et F sont deux événements indépendants si $\Pr(E \cap F) = \Pr(E) \times \Pr(F)$.

$$\Pr(E) \times \Pr(F) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \tag{4}$$

$$\Pr(E \cap F) = \frac{1}{16} \tag{5}$$

— E et F sont indépendants.

2. Calculer la probabilité de tirer une figure. On définit cet événement par E. Calculer la probabilité de tirer un valet. On définit cet événement par F. E et F sont-ils indépendants ?
   — On calcule les probabilités de E et de F.

$$\Pr(E) = \frac{3 \times 4}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \tag{6}$$

$$\Pr(F) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \tag{7}$$

   — $E \cap F$ est l'événement « tirer un valet ». Il existe quatre valets.

$$\Pr(E \cap F) = \frac{1}{8} \tag{8}$$

   — E et F sont deux événements indépendants si $\Pr(E \cap F) = \Pr(E) \times \Pr(F)$.

$$\Pr(E) \times \Pr(F) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{64} \tag{9}$$

$$\Pr(E \cap F) = \frac{1}{8} \tag{10}$$

   — E et F sont dépendants.

1.1.2 Exercice 2

Soient deux événements E et F tels que :

1. $\Pr(E) = 0,4$
2. $\Pr(F) = 0,3$
3. $\Pr(E \bigcup F) = 0,58$

E et F sont-ils indépendants ?

En utilisant le théorème des probabilités totales, on sait que :

$$\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \cap F) \tag{11}$$

donc :

$$\Pr(E \cap F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \cup F) = 0,4 + 0,7 - 0,58 = 0,12 \tag{12}$$

E et F sont indépendants si $\Pr(E \cap F) = \Pr(E) \times \Pr(F)$.

$$\Pr(E \cap F) = \Pr(E) \times \Pr(F) = 0,4 \times 0,7 = 0,12 \tag{13}$$

Comme $\Pr(E \cap F) = \Pr(E) \times \Pr(F)$, E et F sont indépendants.

1.1.3 Exercice 3

On lance deux fois de suite un dé bien équilibré. On note le premier événement E. On note le second événement F.

1. E : le 4 sort en premier sur deux jets. F : le 6 sort en second sur deux jets.
   - Le nombre de cas possibles est $6 \times 6 = 36$.

     N.B. La liste des 36 cas possibles est : $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)$. Lorsque le cas d'étude comporte peu de possibilités, pour que l'exercice soit plus clair, il ne faut jamais hésiter à les lister.
   - Pour E, le nombre de cas favorables est 6, soit $\Pr(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
   - Pour F, le nombre de cas favorables est 6, soit $\Pr(F) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
   - $E \cap F$ correspond au cas $(4,6)$. Le nombre de cas favorables est 1, soit $\Pr(E \cap F) = \frac{1}{36}$.
   - Comme $\Pr(E) \times \Pr(F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \Pr(E \cap F)$, E et F sont indépendants.
2. E : le 1 sort en premier. F : le 1 sort deux fois.
   - Le nombre de cas possibles est $6 \times 6 = 36$.
   - Pour E, le nombre de cas favorables est 6, soit $\Pr(E) = \frac{1}{6}$.
   - Pour F, le nombre de cas favorables est 1, soit $\Pr(F) = \frac{1}{36}$.
   - $E \cap F$ correspond au cas $(1,1)$. Le nombre de cas favorables est 1, soit $\Pr(E \cap F) = \frac{1}{36}$.
   - Comme $\Pr(E) \times \Pr(F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{216} \neq \Pr(E \cap F)$, E et F sont dépendants.
3. E : le 3 sort une seule fois. F : le 1 sort une seule fois.
   - Le nombre de cas possibles est $6 \times 6 = 36$.

— Pour E, le nombre de cas favorables est 10, soit $\Pr(E) = \frac{10}{36}$.

N.B. Le dix cas sont : $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(5,3)$ et $(6,3)$.

— Pour F, le nombre de cas favorables est 10, soit $\Pr(F) = \frac{10}{36}$.

N.B. Le dix cas sont : $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$ et $(6,1)$.

— $E \cap F$ correspond au cas $(1,3)$ ou $(3,1)$. Le nombre de cas favorables est 2, soit $\Pr(E \cap F) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

— Comme $\Pr(E) \times \Pr(F) = \frac{10}{36} \times \frac{10}{36} = \frac{25}{324} \neq \Pr(E \cap F)$, E et F sont dépendants.

1.2 Les tirages successifs sans ou avec remise

1.2.1 Exercice 1

Soit une urne contenant 5 boules noires et 2 boules blanches. On tire **successivement** et **sans remise** trois boules.

1. Quels sont les cas possibles ? On tire 3 boules parmi 7 successivement. Il s'agit d'un arrangement.
$$A_7^3 = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840 \tag{14}$$
2. Quelle est la probabilité E de tirer trois boules noires ? Le tirage est successif et sans remise. Il s'agit de probabilités conditionnelles. Il faut dessiner un arbre pondéré (Fig. 1). À chaque étape de l'arbre, la somme des branches vérifie le théorème de la probabilité

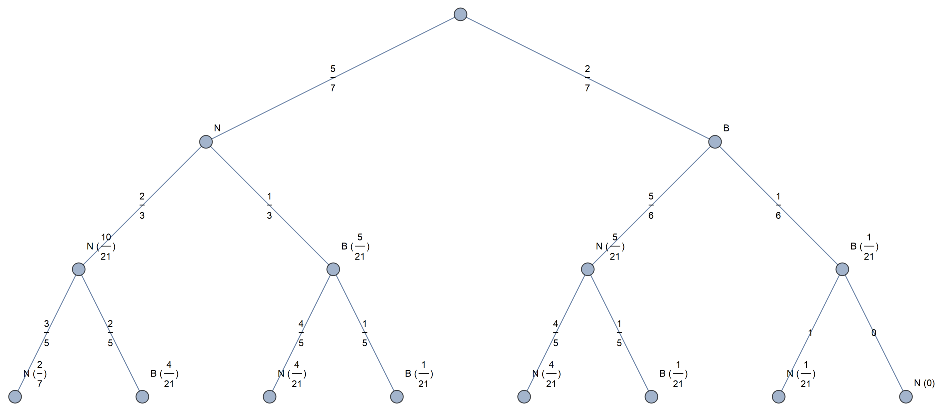

FIGURE 1 – Arbre pondéré

totale. Au premier tirage :
$$\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1 \tag{15}$$
Au deuxième tirage :
$$\frac{4}{6} + \frac{2}{6} = 1 \tag{16}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 \tag{17}$$

Au troisième tirage :

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \tag{18}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \tag{19}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \tag{20}$$

$$\frac{5}{5} + \frac{0}{5} = 1 \tag{21}$$

Avec l'arbre, il est facile d'établir que :

$$\Pr(E) = \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{60}{210} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \approx 0,286 \tag{22}$$

3. Quelle est la probabilité F de tirer **au moins** deux boules noires ? Grâce à l'arbre pondéré, on établit que :

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{21} \times 3 = \frac{6+12}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7} \approx 0,857 \tag{23}$$

1.2.2 Exercice 2

Une urne contient 3 boules rouges et 1 boule blanche. On tire **successivement** deux boules de l'urne **avec remise**.

1. Calculer la probabilité E d'obtenir deux boules blanches. On dresse l'arbre pondéré (Fig. 2) On en déduit que $\Pr(E) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \approx 0,063$.
2. Calculer la probabilité F d'obtenir deux boules rouges ? De même, $\Pr(F) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \approx 0,563$.
3. Calculer la probabilité G d'obtenir deux boules de couleur différente ? $\Pr(G) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \approx 0,375$.

1.2.3 Exercice 3

Une urne contient 3 boules noires et 1 boule blanche. On tire **simultanément** deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que les deux boules soient noires ?
   — On calcule le nombre de cas favorables.

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3 \tag{24}$$

   — On calcule le nombre de cas possibles.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \tag{25}$$

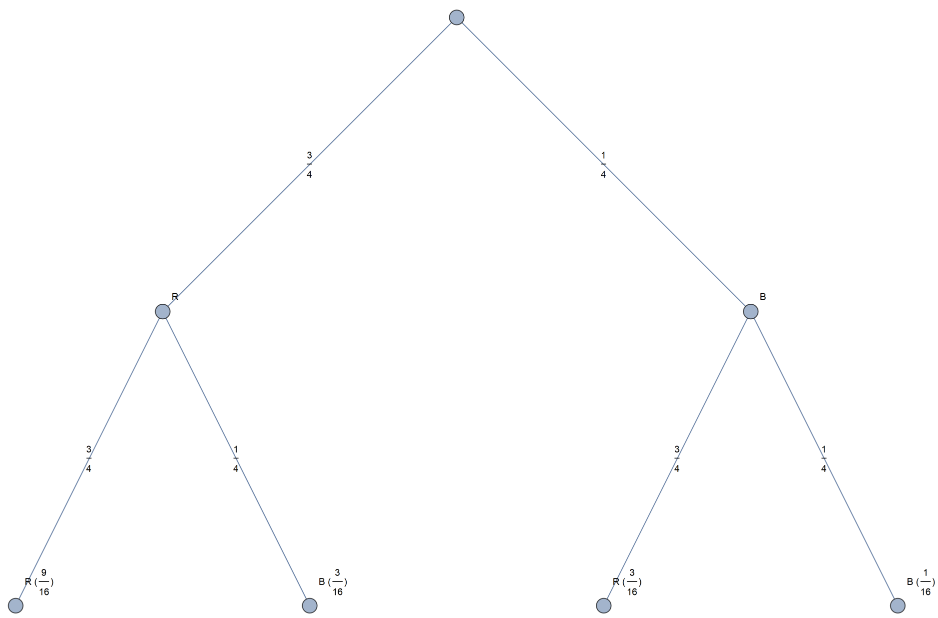

FIGURE 2 – Arbre pondéré

— La probabilité que les deux boules soient noires est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \tag{26}$$

2. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleur différente ?
   — On calcule le nombre de cas favorables.

$$C_3^1 \times C_1^1 = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{1!}{1!0!} = 3 \tag{27}$$

   — Le nombre de cas possibles est le même que la question précédente.
   — La probabilité que les deux boules soient de couleur différente est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \tag{28}$$

1.2.4 Exercice 4

Une urne contient 3 boules noires et 1 boule blanche.On tire **successivement** deux boules de l'urne.

Avant de répondre aux questions, on dresse l'arbre pondéré (Fig. 3).

1. Quelle est la probabilité E que les deux boules soient noires ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 3), on établit que $\Pr(E) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.
2. Quelle est la probabilité F que les deux boules soient de couleur différente ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 3), on établit que $\Pr(F) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

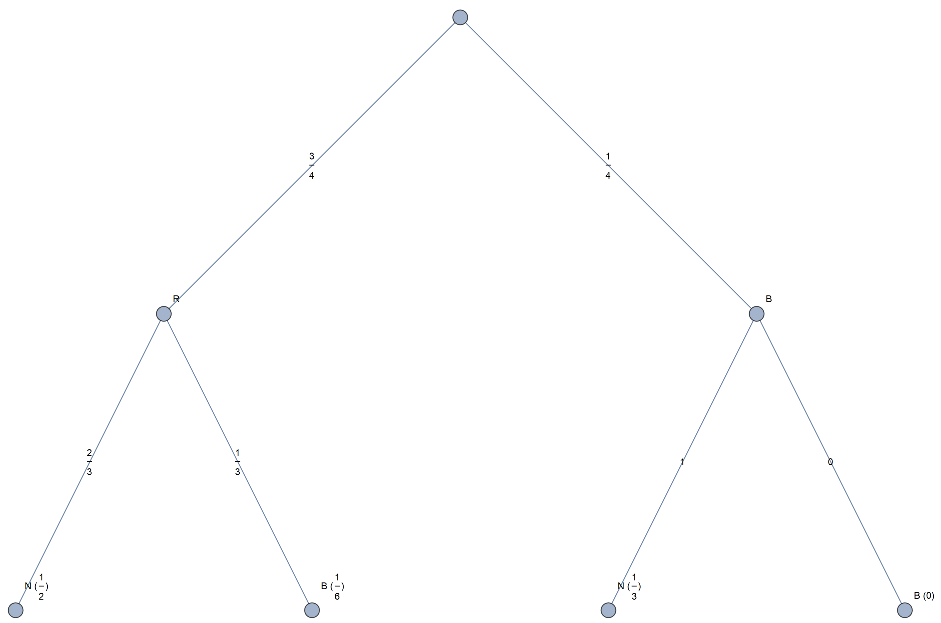

FIGURE 3 – Arbre pondéré

1.2.5 Exercice 5

On tire **successivement** et **sans remise** trois boules de l'urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.

Avant de répondre aux questions, on dresse l'arbre pondéré (Fig. 4).

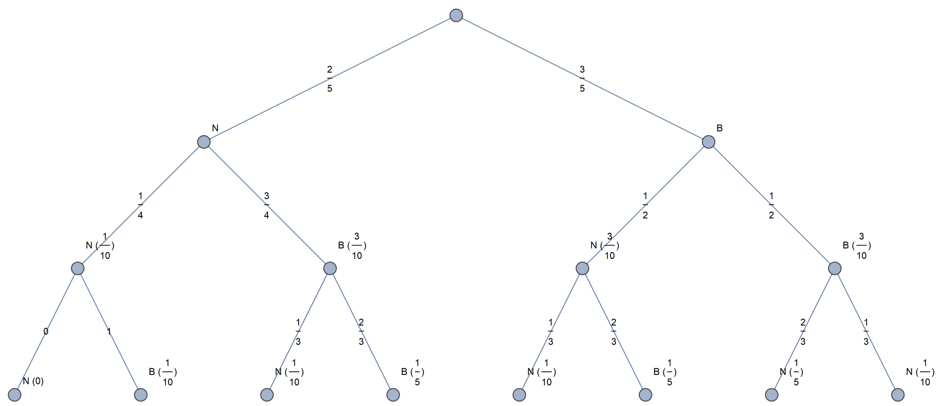

FIGURE 4 – Arbre pondéré

1. Quelle est la probabilité E de tirer les trois boules blanches ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 4), on établit que $\Pr(E) = \frac{1}{10} = 0,100$.
2. Quelle est la probabilité F de tirer **exactement** deux boules blanches ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 4), on établit que $\Pr(F) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0,600$.

3. Quelle est la probabilité G de tirer **une** seule boule blanche ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 4), on établit que $\Pr(G) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0,300$.
4. Quelle est la probabilité H de **ne pas tirer** de boule blanche ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 4), on établit que $\Pr(H) = 0,000$.

1.2.6 Exercice 6

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de trois boules, 2 blanches et 1 noire. On choisit au hasard une des deux urnes. On tire une boule de cette urne. Une urne doit contenir au moins une boule. Comment disposer les boules dans les urnes pour que la probabilité de tirer la boule noire soit la plus faible possible ?

Il est possible d'opérer deux répartitions des trois boules dans U_1 et U_2.

Répartition 1. U_1 contient une boule noire et une boule blanche. U_2 contient une boule blanche.

Répartition 2. U_1 contient deux boules blanches. U_2 contient une boule noire.

Avec la première répartition, on obtient l'arbre pondéré suivant (Fig. 5)

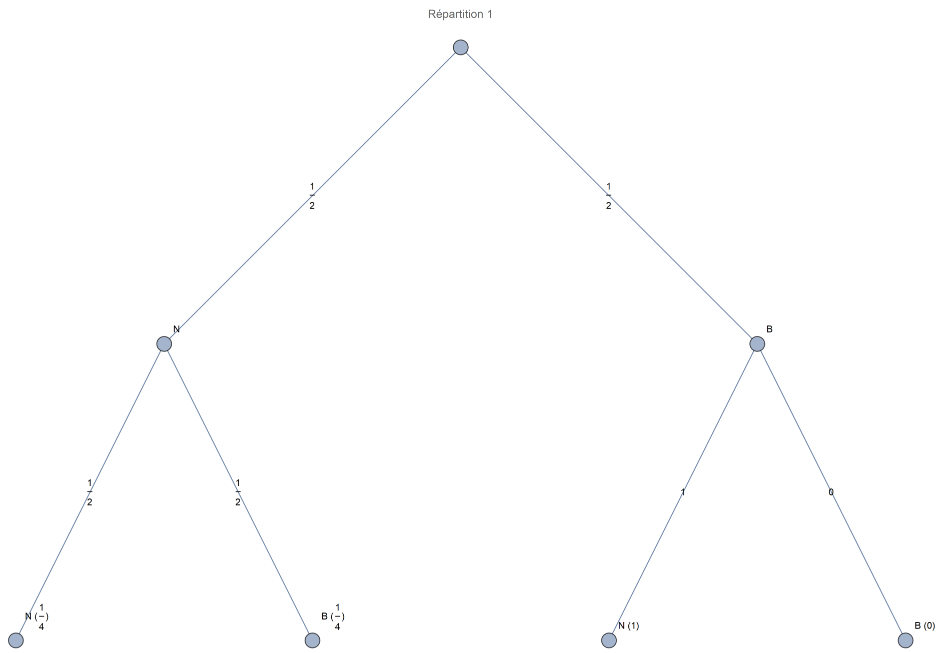

FIGURE 5 – Arbre pondéré

Avec la seconde répartition, on obtient l'arbre pondéré suivant (Fig. 6)

La première répartition établit que la probabilité de tirer la boule noire vaut $\frac{1}{4} = 0,250$, tandis que la seconde répartition établit que la probabilité de tirer la boule noire vaut $\frac{1}{2} = 0,500$.

La répartition pour laquelle la probabilité de tirer la boule noire est la plus faible est la première répartition.

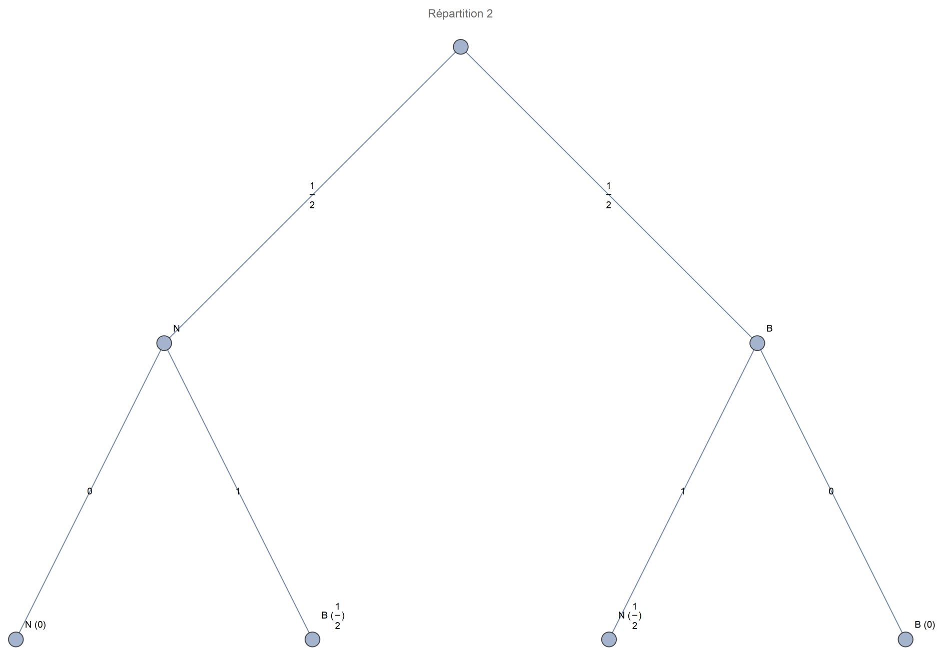

FIGURE 6 – Arbre pondéré

1.3 Cas pratique 1

On relève deux défectuosités, notées h et s, affectant les pièces fabriquées par une usine grâce à une série de tests.

— Parmi les 80 % des pièces qui présentent le défaut h, 15 % ont le défaut s.

— 5 % des pièces sans le défaut h présentent le défaut s.

On définit les événements suivants.

— H : la pièce présente le défaut h.

— S : la pièce présente le défaut s.

Avant de répondre aux questions, on dresse l'arbre pondéré à partir des données du problème (Fig. 7).

1. Combien valent les probabilités $\Pr(S/H)$ et $\Pr\left(S/\bar{H}\right)$? En déduire la valeur de $\Pr\left(\bar{S}/H\right)$ et $\Pr\left(\bar{S}/\bar{H}\right)$.
   - Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 7), on établit que $\Pr(S/H) = \frac{15}{100} = 0,150$ et $\Pr\left(S/\bar{H}\right) = \frac{5}{100} = 0,050$.
   - On en déduit que $\Pr\left(\bar{S}/H\right) = \frac{85}{100} = 0,850$ et $\Pr\left(\bar{S}/\bar{H}\right) = \frac{95}{100} = 0,950$.
2. Calculer la probabilité E qu'une pièce prise au hasard présente les deux défauts. Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 7), on établit que :

$$\Pr(E) = \frac{120}{10000} = \frac{3}{250} = 0,012 \tag{29}$$

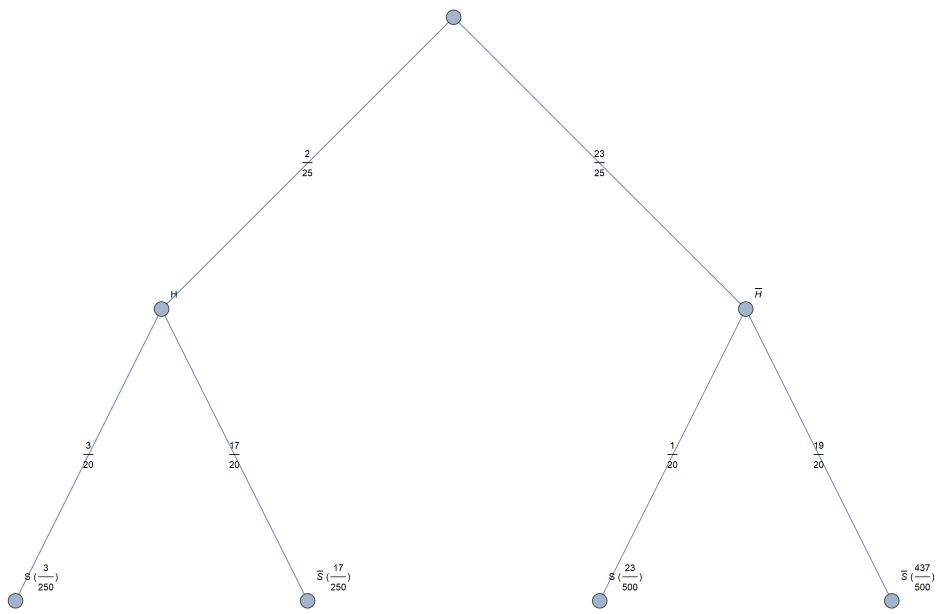

FIGURE 7 – Arbre pondéré

3. Calculer $\Pr\left(H \cap \bar{S}\right)$. En déduire la probabilité que la pièce présente le défaut s.
   — Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 7), on établit que $\Pr\left(H \cap \bar{S}\right) = \frac{680}{10000} = \frac{17}{250} = 0,068$.
   — De plus, Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 7), on établit que $\Pr\left(\bar{H} \cap S\right) = \frac{460}{10000} = \frac{23}{500} = 0,046$ et on sait déjà que $\Pr\left(H \cap S\right) = \frac{3}{250}0,012$. Cela permet de déduire que $\Pr\left(S\right) = \frac{120}{10000} + \frac{460}{10000} = \frac{580}{10000} = 0,058$.
4. Une pièce présente le défaut s. Quelle est la probabilité qu'elle présente le défaut h ? On connaît $\Pr\left(H \cap S\right)$ et $\Pr\left(S\right)$. On en déduit $\Pr\left(H/S\right) = \frac{\Pr(H \cap S)}{\Pr(S)} = \frac{\frac{120}{10000}}{\frac{580}{10000}} = \frac{120}{580} = \frac{6}{29} \approx 0,207$.
5. Réaliser l'arbre pondéré à partir de $\Pr\left(S\right)$ et $\Pr\left(\bar{S}\right)$.
   — On calcule $\Pr\left(\bar{S}\right)$.

$$\Pr\left(\bar{S}\right) = \frac{680}{10000} + \frac{8740}{10000} = \frac{9420}{10000} = \frac{471}{500} \approx 0,942 \tag{30}$$

   — On sait déjà que $\Pr\left(H/S\right) = \frac{6}{29}$. On calcule $\Pr\left(H/\bar{S}\right)$, $\Pr\left(\bar{H}/S\right)$ et $\Pr\left(\bar{H}/\bar{S}\right)$.

$$\Pr\left(H/\bar{S}\right) = \frac{\Pr\left(H \cap \bar{S}\right)}{\Pr\left(\bar{S}\right)} = \frac{\frac{680}{10000}}{\frac{9420}{10000}} = \frac{680}{9420} = \frac{34}{471} \approx 0,072 \tag{31}$$

$$\Pr\left(\bar{H}/S\right) = \frac{\Pr\left(\bar{H} \cap S\right)}{\Pr\left(S\right)} = \frac{\frac{460}{10000}}{\frac{580}{10000}} = \frac{460}{580} = \frac{23}{29} \approx 0,793 \tag{32}$$

$$\Pr\left(\bar{H}/\bar{S}\right) = \frac{\Pr\left(\bar{H} \cap \bar{S}\right)}{\Pr\left(\bar{S}\right)} = \frac{\frac{8740}{10000}}{\frac{9420}{10000}} = \frac{8740}{9420} = \frac{437}{471} \approx 0,928 \tag{33}$$

— Avant de construire l'arbre, on vérifie l'application du théorème des probabilités totales.

- Au premier niveau, $\frac{580}{10000} + \frac{9420}{10000} = \frac{10000}{10000} = 1$.
- Au second niveau, $\frac{6}{29} + \frac{23}{29} = \frac{29}{29} = 1$ et $\frac{34}{471} + \frac{437}{471} = \frac{471}{471} = 1$.
- Au troisième niveau, $\frac{3}{250} + \frac{23}{500} + \frac{17}{250} + \frac{437}{500} = \frac{12+92+68+437}{500} = \frac{500}{500} = 1$.

— Il est possible de construire nouvel arbre pondéré (Fig. 8).

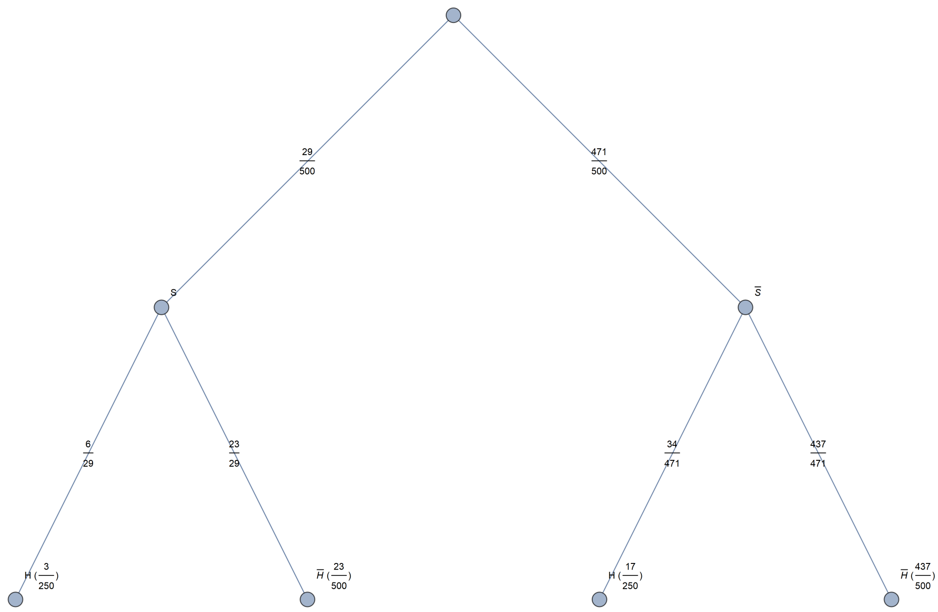

FIGURE 8 – Arbre pondéré

1.4 Cas pratique 2

75 % des destinations de vacances au bord de l'eau concernent la mer.

25 % des destinations de vacances au bord de l'eau concernant le lac.

On constate que les $\frac{9}{10}$ qui passent leurs vacances près d'un lac sont équipés d'une planche à voile et $\frac{1}{10}$ de baigneurs.

À la mer, 60 % sont des baigneurs et 40 % sont des véliplanchistes.

On interroge au hasard une personne qui part au bord de l'eau.

On note :

— M l'événement « Partir à la mer » ;

— L l'événement « Partir au bord d'un lac » ;

— B l'événement « Baigneur » ;

— V l'événement « Véliplanchiste ».

Il faut remarquer que L est l'événement contraire de M, et *vice versa*, et que V est l'événement contraire de B, et *vice versa*

Avant de répondre aux questions, on dresse l'arbre pondéré à partir des données du problème (Fig. 9).

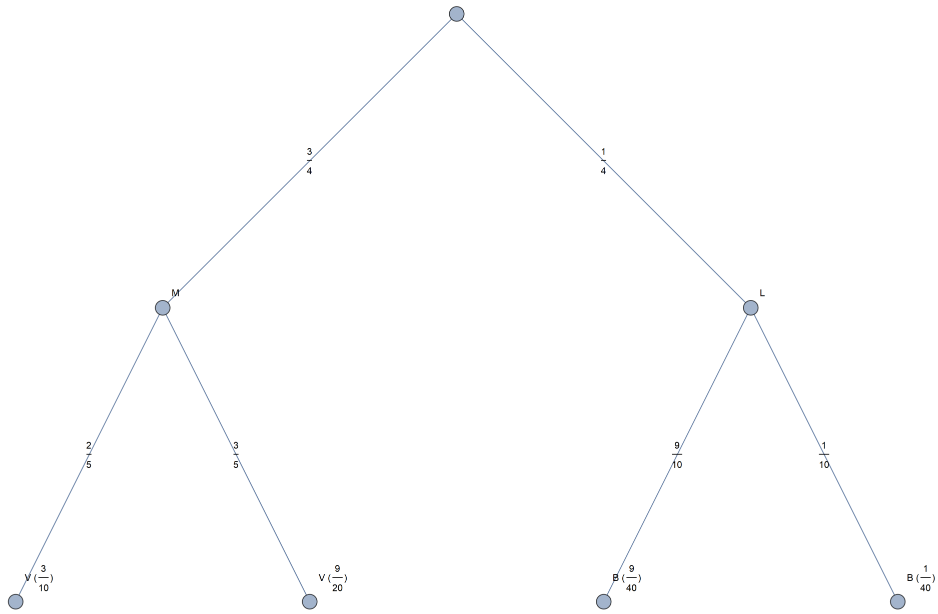

FIGURE 9 – Arbre pondéré

1. Quelle est la probabilité qu'elle aille à proximité d'un lac ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 9), on établit que $\Pr(L) = \frac{25}{100} = 0,250$
2. Quelle est la probabilité qu'elle soit équipée d'une planche à voile en sachant qu'elle passe ses vacances au bord de la mer ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 9), on établit que $\Pr(V/M) = \frac{40}{100} = 0,400$.
3. Quelle est la probabilité qu'elle parte en vacances près de la mer et qu'elle soit équipée d'une planche à voile ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 9), on établit que $\Pr(M \cap V) = \frac{3000}{10000} = \frac{3}{10} = 0,300$.
4. Quelle est la probabilité qu'elle passe ses vacances au bord d'un lac et qu'elle fasse de la planche à voile ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 9), on établit que $\Pr(L \cap V) = \frac{2250}{10000} = \frac{8}{40} = 0,225$.
5. Quelle est la probabilité qu'elle fasse de la planche à voile ? Grâce à l'arbre pondéré (Fig. 9), on établit que $\Pr(V) = \frac{3000}{10000} + \frac{2250}{10000} = \frac{21}{40} = 0,525$.
6. Quelle est la probabilité qu'elle passe ses vacances au bord d'un lac en sachant qu'elle pratique la planche à voile ? Grâce aux deux réponses précédentes, on peut calculer $\Pr(L/V) = \frac{\Pr(L \cap V)}{\Pr(V)} = \frac{\frac{2250}{10000}}{\frac{5250}{10000}} = \frac{2250}{5250} = \frac{3}{7} \approx 0,429$
7. Construire l'arbre pondéré à partir de $\Pr(V)$ et $\Pr(B)$?

— On sait déjà que $\Pr\left(L/V\right) = \frac{3}{7}$. On calcule $\Pr\left(L/B\right)$, $\Pr\left(M/V\right)$ et $\Pr\left(M/B\right)$.

$$\Pr\left(L/B\right) = \frac{\Pr\left(L \cap B\right)}{\Pr\left(B\right)} = \frac{\frac{250}{10000}}{\frac{4750}{10000}} = \frac{250}{4750} = \frac{1}{19} \approx 0,053 \tag{34}$$

$$\Pr\left(M/V\right) = \frac{\Pr\left(M \cap V\right)}{\Pr\left(V\right)} = \frac{\frac{3000}{10000}}{\frac{5250}{10000}} = \frac{3000}{5250} = \frac{4}{7} \approx 0,571 \tag{35}$$

$$\Pr\left(M/B\right) = \frac{\Pr\left(M \cap B\right)}{\Pr\left(B\right)} = \frac{\frac{4500}{10000}}{\frac{4750}{10000}} = \frac{4500}{4750} = \frac{18}{19} \approx 0,947 \tag{36}$$

— Avant de construire l'arbre, on vérifie l'application du théorème des probabilités totales.

- Au premier niveau, $\frac{19}{40} + \frac{21}{40} = \frac{40}{40} = 1$.
- Au second niveau, $\frac{18}{19} + \frac{1}{19} = \frac{19}{19} = 1$ et $\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{7}{7} = 1$.
- Au troisième niveau, $\frac{9}{20} + \frac{1}{40} + \frac{3}{10} + \frac{9}{40} = \frac{18+1+12+9}{40} = \frac{40}{40} = 1$.

— Il est possible de construire nouvel arbre pondéré (Fig. 10).

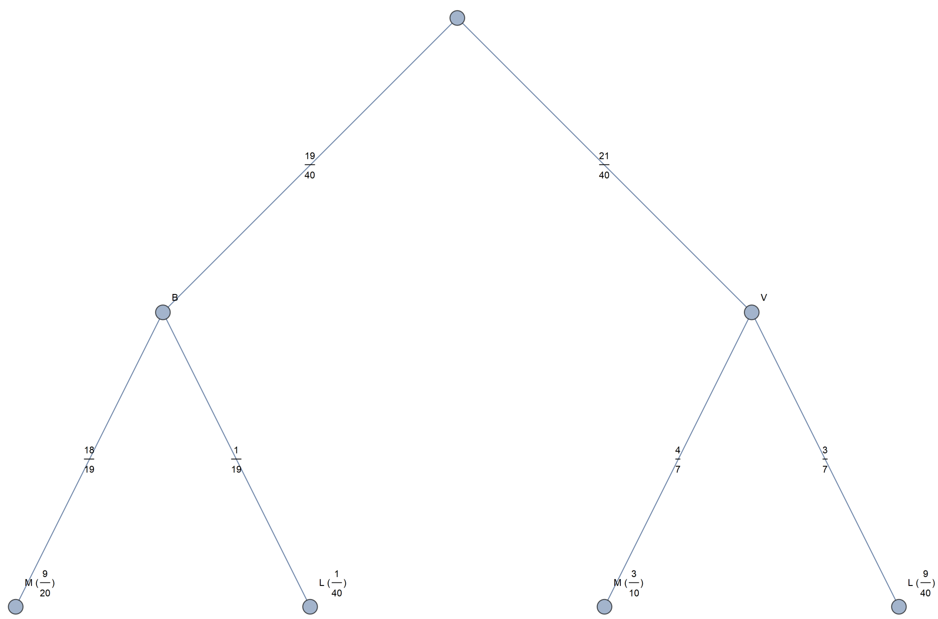

FIGURE 10 – Arbre pondéré

Conclusion - Remarque

La technique de l'arbre pondéré se généralise à N événements.

En statistique, il est utilisé grâce au tableau de fréquences en analyse bivariée ou multivariée.

2 Probabilité dans le cas des tirages simultanés

De manière assez classique, certains exercices proposent d'étudier le tirage au sein d'un jeu de cartes. Pour bien comprendre ces exercices, il faut rappeler que :

— les couleurs des cartes sont le cœur (rouge), le carreau (rouge), le pique (noir) et le trèfle (noir) ;

— les valeurs des cartes sont as, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi ;

— un jeu de 32 cartes contient toutes les couleurs, mais les valeurs sont limitées à sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi, as ;

— les deux jokers ne sont jamais utilisés dans les exercices.

2.1 Exercice 1

On tire **simultanément** quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de tirages différents peut-on effectuer ? On tire 4 cartes parmi 32. Il s'agit d'une combinaison.

$$C_{32}^4 = \frac{32!}{4!28!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2} = 4 \times 31 \times 10 \times 29 = 35960 \qquad (37)$$

   Le nombre de tirages possible est 35960.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre valets ?
   — Dans un premier temps, on établit le nombre de cas favorables : on tire 4 cartes parmi 4 valets.

$$C_4^4 = 1 \qquad (38)$$

   — Dans un second temps, on effectue le rapport entre le nombre de tirages favorable et le nombre de cas possible, soit $\frac{1}{35960} \approx 0.0000278$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre trèfles ?
   — Dans un premier temps, on établit le nombre de cas favorables : on tire 4 trèfles parmi 8 possibles.

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 2 \times 7 \times 5 = 70 \qquad (39)$$

   — Dans un second temps, on effectue le rapport entre le nombre de tirages favorable et le nombre de cas possible, soit $\frac{70}{35960} = \frac{7}{3596} \approx 0,002$.

4. Quelle est la probabilité d'obtenir le valet de pique ?
   — Dans un premier temps, on établit le nombre de cas favorables : on tire 1 carte parmi 1 valet de pique **et** 3 cartes parmi 31.

$$C_1^1 C_{31}^3 = 1 \times \frac{31!}{3!28!} = \frac{31 \times 30 \times 29}{3} = 31 \times 10 \times 29 = 4495 \qquad (40)$$

— Dans un second temps, on effectue le rapport entre le nombre de tirages favorable et le nombre de cas possible, soit $\frac{4495}{35960} = \frac{1}{4} = 0,250$.

5. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes de couleurs différentes ?

   — Dans un premier temps, on établit le nombre de cas favorables : on tire 1 carte parmi 8 cœurs **et** 1 carte parmi 8 carreaux **et** 1 carte parmi 8 piques **et** 1 carte parmi 8 trèfles.
$$C_8^1 C_8^1 C_8^1 C_8^1 = \left(\frac{8!}{1!7!}\right)^4 = 8^4 = 4096 \tag{41}$$

   — Dans un second temps, on effectue le rapport entre le nombre de tirages favorable et le nombre de cas possible, soit $\frac{4096}{35960} = \frac{512}{4495} \approx 0,114$.

2.2 Exercice 2

On tire **simultanément** quatre cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω désigne l'ensemble des tirages différents possibles.

1. Calculer le cardinal de Ω. On tire 4 cartes parmi 52. Il s'agit d'une combinaison.
$$C_{52}^4 = \frac{52!}{4!48!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2} = 13 \times 17 \times 25 \times 49 = 270725 \tag{42}$$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes de différente couleur ?

   — On établit le nombre de cas favorables. On tire 1 carte parmi 13 cœurs **et** 1 carte parmi 13 carreaux **et** 1 carte parmi 13 piques **et** 1 carte parmi 13 trèfles.
$$C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^1 = \left(C_{13}^1\right)^4 = \left(\frac{13!}{1!12!}\right)^4 = 13^4 = 28561 \tag{43}$$

   — La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{28561}{270725} = \frac{2197}{20285} \approx 0,108$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes de la même couleur ?

   — On établit le nombre de cas favorables. On tire 4 cartes parmi 13 cœurs **ou** 4 cartes parmi 13 carreaux **ou** 4 cartes parmi 13 piques **ou** 4 cartes parmi 13 trèfles.
$$C_{13}^4 + C_{13}^4 + C_{13}^4 + C_{13}^4 = 4\left(C_{13}^4\right) = 4\left(\frac{13!}{4!9!}\right) = 4\left(\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2}\right) \tag{44}$$
$$= 13 \times 4 \times 11 \times 5 = 2860 \tag{45}$$

   — La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{2860}{270725} = \frac{44}{4165} \approx 0,011$.

4. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes noires ?

— On établit le nombre de cas favorables. On tire 4 cartes parmi 26 cartes noires.

$$C_{26}^{4} = \left(\frac{26!}{4!22!}\right) = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23}{4 \times 3 \times 2} = \frac{13 \times 25 \times 8 \times 23}{4} = \frac{59800}{4} = 14950 \tag{46}$$

— La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{14950}{270725} = \frac{46}{833} \approx 0,055$.

5. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une carte rouge ?

— On établit le nombre de cas favorables. On cherche l'événement contraire : « pas de cartes rouges ». On tire 4 cartes parmi 26 cartes noires.

$$C_{26}^{4} = 14950 \tag{47}$$

— La probabilité est la différence entre 1 et le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{46}{833}$.

$$1 - \frac{46}{833} = \frac{787}{833} \approx 0,945 \tag{48}$$

2.3 Exercice 3

On tire **simultanément** huit cartes dans un jeu de 32 cartes. L'univers Ω désigne l'ensemble des tirages différents possibles.

1. Calculer le cardinal de Ω. Cela revient à tirer 8 cartes parmi 32.

$$\text{card}\,(\Omega) = C_{32}^{8} = \frac{32!}{8!24!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 10518300 \tag{49}$$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir huit cartes de cœur ?

— On établit le nombre de cas favorables.On tire 8 cartes parmi 8 cartes cœurs.

$$C_{8}^{8} = 1 \tag{50}$$

— La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{1}{10518300} \approx 0,0000000951$

3. Quelle est la probabilité d'obtenir toutes les cartes d'une même couleur ?

— On établit le nombre de cas favorables. On tire 8 cartes parmi 8 cœurs **ou** 8 cartes parmi 8 carreaux **ou** 8 cartes parmi 8 piques **ou** 8 cartes parmi 8 trèfles.

$$C_{8}^{8} + C_{8}^{8} + C_{8}^{8} + C_{8}^{8} = 4C_{8}^{8} = 4 \times 1 = 4 \tag{51}$$

— La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{4}{10518300} = \frac{1}{2629575} \approx 0,000000380$.

4. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes noires ?

— On établit le nombre de cas favorables. On tire 4 cartes parmi 16 cartes noires et 4 cartes parmi 16 cartes rouges.

$$C_{16}^4 C_{16}^4 = \left(C_{16}^4\right)^2 = \left(\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2}\right)^2 = (4 \times 5 \times 7 \times 13)^2 = 1820^2 = 3312400 \quad (52)$$

— La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{3312400}{10518300} = \frac{2548}{8091} \approx 0,315$.

5. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre dames et quatre valets ?

— On établit le nombre de cas favorables. On tire 4 cartes parmi 4 dames et 4 cartes parmi 4 valets.

$$C_4^4 C_4^4 = 1 \times 1 = 1 \quad (53)$$

— La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{1}{10518300} \approx 0,0000000951$.

2.4 Exercice 4

On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir **exactement** deux fois « pile » ?

— On établit le nombre de cas possibles : $2^3 = 8$.

— On établit le nombre de cas favorables. On tire 2 pièces parmi 3 **et** 1 pièces parmi 1.

$$C_3^2 C_1^1 = \frac{3!}{2!1!} = 3 \quad (54)$$

— La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{3}{8} = 0,375$.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois « face » ?

— On établit le nombre de cas favorables. On tire 3 pièces parmi 3.

$$C_3^3 = 1 \quad (55)$$

— La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles : $\frac{1}{8} = 0,125$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » ?

— On établit le nombre de cas contraires. On tire aucun « pile ».

$$C_3^3 = 1 \quad (56)$$

— La probabilité est la différence entre 1 et le rapport entre le nombre de cas contraires et le nombre de cas possibles : $\frac{1}{8}$.

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875 \quad (57)$$

N.B. Il est facile ici d'établir que : on tire 3 fois « pile » parmi 3 **ou** 2 fois « pile » parmi 3 **ou** 1 fois « pile » parmi 3, c'est-à-dire :

$$C_3^3 + C_3^2 + C_3^1 = 1 + \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!} = 1 + 3 + 3 = 7 \tag{58}$$

Toutefois, la plupart du temps, on oubliera un cas, et le résultat sera faux. C'est pour cela qu'on utilise l'événement contraire et le théorème des probabilités totales.

2.5 Exercice 5

Un cadenas est constitué de deux molettes comportant les chiffres de 0 à 9. Quelle est la probabilité d'obtenir le bon code au hasard ?

On établit le nombre de cas possibles. On choisit 1 chiffre parmi 10 **et** 1 chiffre parmi 10.

$$C_{10}^1 C_{10}^1 = \frac{10!}{1!9!} \times \frac{10!}{1!9!} = 10 \times 10 = 100 \tag{59}$$

La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables, ici 1 combinaison, et le nombre de cas possibles : $\frac{1}{100}$.

2.6 Exercice 6

Un cadenas est constitué de trois molettes comportant les chiffres de 0 à 9.

1. Quelle est la probabilité en faisant le code au hasard de trouver la combinaison qui ouvre le cadenas ?
   - On établit le nombre de cas possibles. On choisit 1 chiffre parmi 10 **et** 1 chiffre parmi 10 **et** 1 chiffre parmi 10.

   $$C_{10}^1 C_{10}^1 C_{10}^1 = \frac{10!}{1!9!} \times \frac{10!}{1!9!} \times \frac{10!}{1!9!} = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \tag{60}$$

   - La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables, ici 1 combinaison, et le nombre de cas possibles : $\frac{1}{1000}$.
2. Quelle est la probabilité pour que les chiffres du code soient corrects, mais dans un mauvais ordre ? Dans ce cas, l'ordre est important et on prend en compte la totalité des cas. C'est une permutation. Les cas sont 3!. Toutefois, il faut ôter la bonne combinaison. Les cas favorables sont $3! - 1 = 6 - 1 = 5$. La probabilité est le rapport entre les cas favorables et les cas possibles : $\frac{5}{1000} = \frac{1}{200} = 0,005$

2.7 Exercice 7

Un mot de passe n'ayant pas forcément de signification est formé de cinq lettres prises au hasard dans l'alphabet français (26 lettres).

1. Quelle est la probabilité de trouver le bon code en formulant un mot de passe au hasard ?
   — On établit le nombre de cas possibles. On choisit 1 lettre parmi 26 **et** 1 lettre parmi 26 **et** 1 lettre parmi 26 **et** 1 lettre parmi 26 **et** 1 lettre parmi 26.

$$C_{26}^{1}C_{26}^{1}C_{26}^{1}C_{26}^{1}C_{26}^{1} = \left(C_{26}^{1}\right)^{5} = \left(\frac{26!}{1!25!}\right)^{5} = 11881376 \tag{61}$$

   — La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables, ici 1 combinaison, et le nombre de cas possibles : $\frac{1}{11881376} \approx 0,0000000842$.
2. Quelle est la probabilité que les lettres soient correctes, mais pas dans le bon ordre ?
   — On établit le nombre de cas favorables. On recherche la permutation de l'ensemble des lettres et on lui ôte la bonne combinaison.

$$5! - 1 = 120 - 1 = 119 \tag{62}$$

   — La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables, ici 1 combinaison, et le nombre de cas possibles : $\frac{119}{11881376} \approx 0,0000100$.
3. Quelle est la probabilité que le mot de passe ait une signification en admettant qu'il existe 10 000 mots constitués de cinq lettres rapportés dans les dictionnaires ? La probabilité est le rapport entre le nombre de cas favorables, ici 10 000 mots, et le nombre de cas possibles : $\frac{10000}{11881376} \approx 0,000841$.

3 Lois de probabilité d'une variable aléatoire

3.1 Exercice 1

Une urne contient trois boules noires et une boule rouge. On tire **successivement** et **sans remise** les quatre boules de l'urne.

On pose X la variable aléatoire associée au rang de la boule rouge.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   — On établit un arbre pondéré (Fig. 11), permettant d'établir que :

$$\Pr\left(X = 1\right) = \frac{1}{4} \tag{63}$$

$$\Pr\left(X = 2\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \tag{64}$$

$$\Pr\left(X = 3\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \tag{65}$$

$$\Pr\left(X = 4\right) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \tag{66}$$

   — On peut établir la fonction de répartition (Tab. 1 ; Fig. 12).

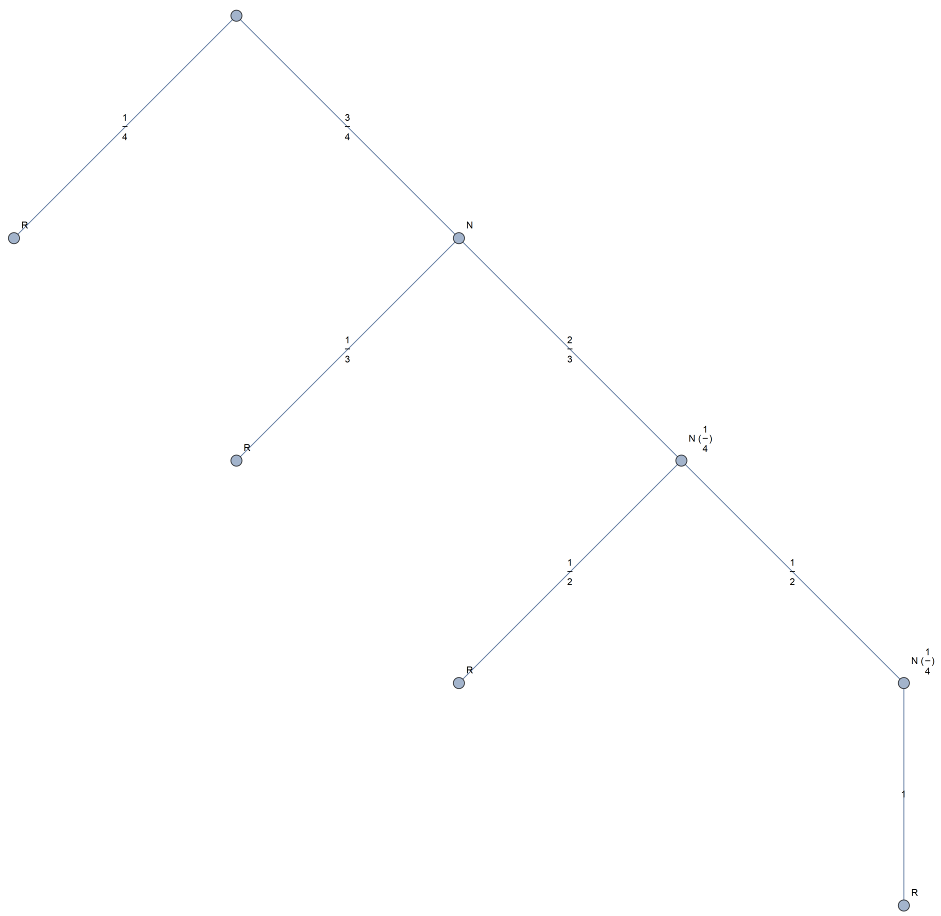

FIGURE 11 – Arbre pondéré

$X \in$	$]\infty, 1]$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	$[4, \infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

TABLE 1 – Fonction de répartition de la variable X

2. Calculer l'espérance de X.

$$E(X) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \tag{67}$$

3. Calculer la variance et l'écart type de X.

$$V(X) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) \tag{68}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{20}{4} = \frac{5}{4} \tag{69}$$

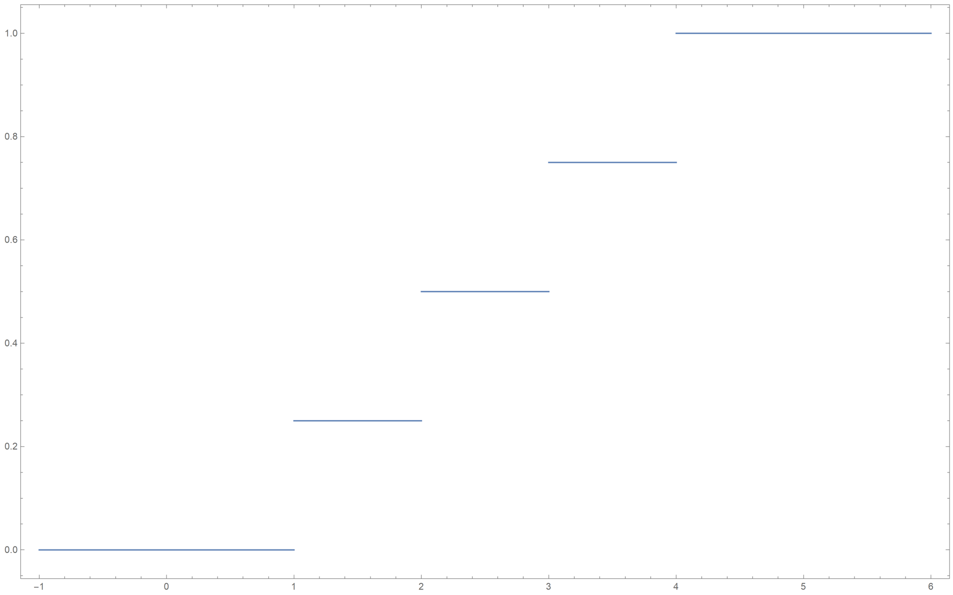

FIGURE 12 – Fonction de répartition

N.B. On peut également utiliser la formule de König-Huygens.

$$V(X) = \left(\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{4}\times 9+\frac{1}{4}\times 16\right)-\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}+\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{4}\right)-\frac{25}{4} \tag{70}$$

$$= \frac{30}{4}-\frac{25}{4}=\frac{5}{4} \tag{71}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \tag{72}$$

3.2 Exercice 2. Manipuler une loi de probabilité

1. Recopier et compléter le tableau suivant (tab. 2) en donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

k	-2	-1	0	1	2
$\Pr(x=k)$	$\frac{1}{3}$	?	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

TABLE 2 – Loi de probabilité de la variable X

$$\Pr(X=-1) = 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right) = 1-\left(\frac{4+2+2+1}{12}\right) = 1-\frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \tag{73}$$

2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

$$E(X) = \frac{1}{3}\times(-2)+\frac{1}{4}\times(-1)+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{12}\times 2 = -\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{-8-3+4}{12} = -\frac{7}{12} \tag{74}$$

3. Calculer l'écart type de la variable aléatoire X.

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{3}\times(-2)^2+\frac{1}{4}\times(-1)^2+\frac{1}{6}\times 0^2+\frac{1}{6}\times 1^2+\frac{1}{12}\times 2^2 = \frac{4}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{16+3+2+4}{12} = \frac{25}{12} \tag{75}$$

$$V\left(X\right) = E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2 = \frac{25}{12}-\left(-\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{25}{12}-\frac{49}{144} = \frac{300-49}{144} = \frac{251}{144} \approx 1,743 \tag{76}$$

$$\sigma\left(X\right) = \sqrt{V\left(X\right)} = \sqrt{\frac{251}{144}} = \frac{\sqrt{251}}{12} \approx 1,320 \tag{77}$$

4. Dessiner la fonction de répartition de la variable aléatoire X. On établit la fonction de répartition (Tab 3 ; Fig. 13).

$X \in$	$]\infty,-2]$	$[-2,-1[$	$[-1,0[$	$[0,1[$	$[1,2[$	$[2,\infty[$
$F\left(X\right)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}$	1

TABLE 3 – Fonction de répartition de la variable X

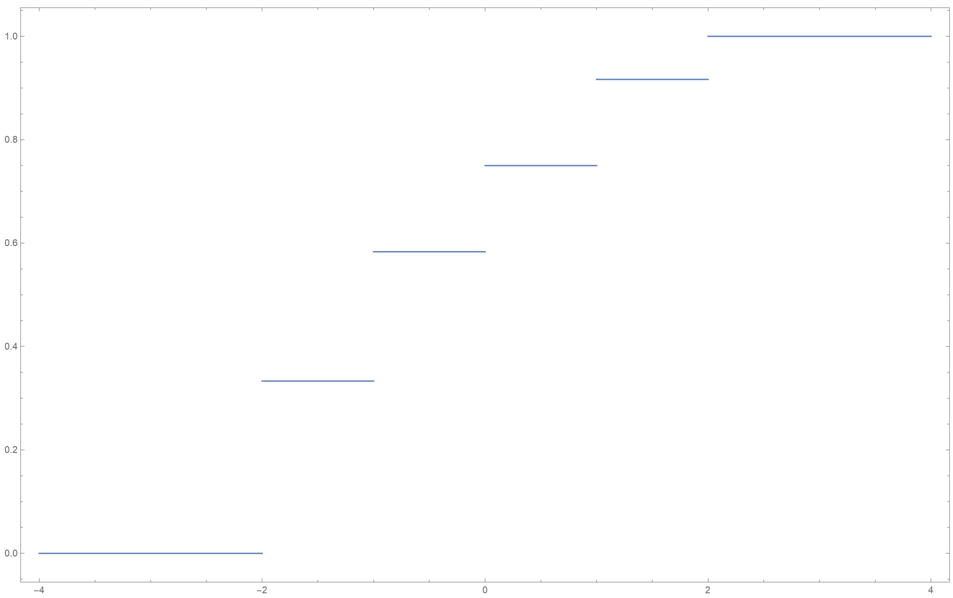

FIGURE 13 – Fonction de répartition

3.3 Exercice 3

Soit X une variable aléatoire de la loi de probabilité suivante (tab. 4).

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E\left(X\right) = \frac{1}{12}$ et sa variance est $V\left(X\right) = \frac{107}{144}$.

k	-1	0	1
$\Pr(x=k)$	a	b	c

TABLE 4 – Loi de probabilité de la variable X

1. Déterminer les nombres réels a, b et c. Comme on connaît $E(X)$ et $V(X)$, il suffit d'écrire leur calcul respectif en incluant a, b et c.

$$E(X) = a \times (-1) + b \times 0 + c \times 1 = -a + c = \frac{1}{12} \tag{78}$$

et

$$V(X) = a \times (-1)^2 + b \times 0^2 + c \times 1^2 - (E(X))^2 = a + c = \frac{107}{144} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{108}{144} \tag{79}$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -a + c = \frac{1}{12} a + c = \frac{108}{144} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = \frac{1}{12} 2c = \frac{108}{144} + \frac{12}{144} \end{cases} \tag{80}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = \frac{1}{12} 2c = \frac{120}{144} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = \frac{1}{12} c = \frac{120}{288} = \frac{5}{12} \end{cases} \tag{81}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + \frac{5}{12} = \frac{1}{12} c = \frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} c = \frac{5}{12} \end{cases} \tag{82}$$

On détermine b avec le théorème des probabilités totales.

$$b = 1 - a - c = 1 - \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \tag{83}$$

2. Dessiner la fonction de répartition de la variable aléatoire X. La fonction de répartition peut être directement calculées (Tab. 5; Fig. 14).

$X \in$	$]\infty, -1]$	$[-1, 0[$	$[0, 1[$	$[1, \infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	1

TABLE 5 – Fonction de répartition de la variable X

4 Loi de probabilité binomiale. Expérience à deux issues

La loi de probabilité binomiale doit vous servir de modèle afin de comprendre les autres lois de probabilité. Il faut être très attentif à ces exercices types.

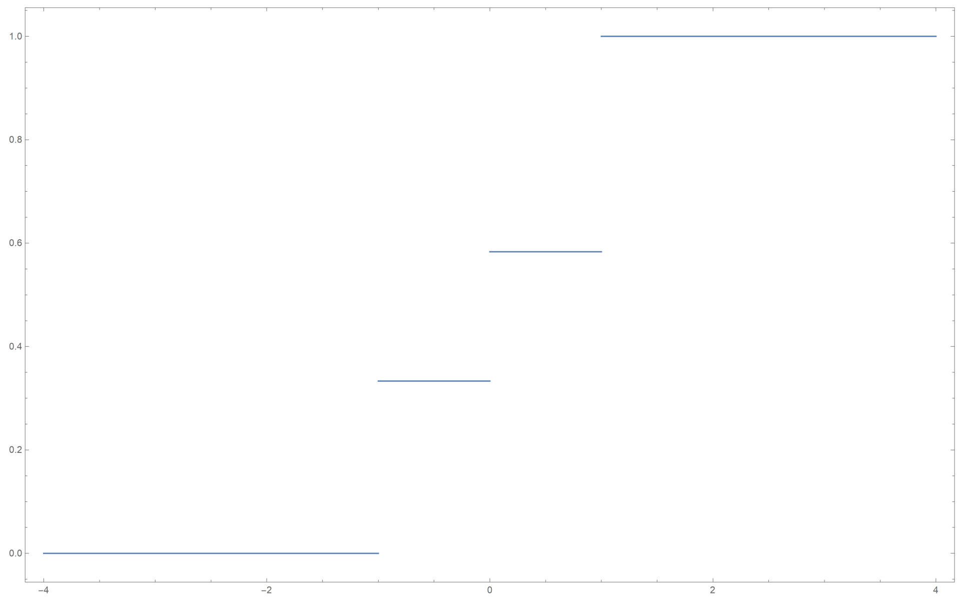

FIGURE 14 – Fonction de répartition

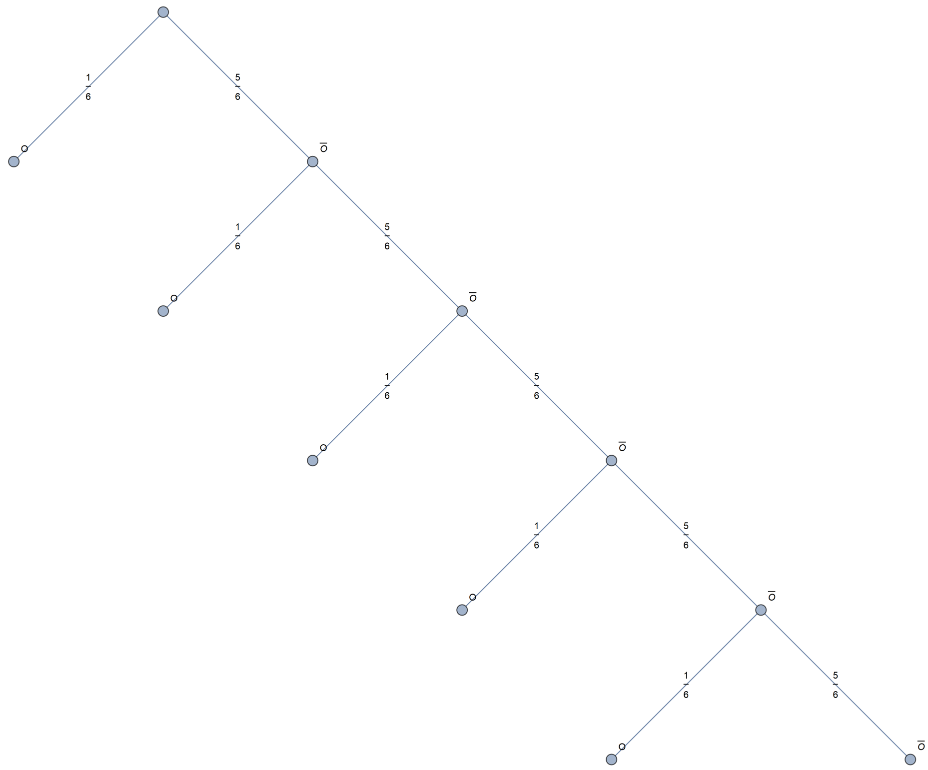

FIGURE 15 – Arbre pondéré

4.1 Exercice 1

1. On lance un dé bien équilibré cinq fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois le chiffre 6 ? Pour l'établir, on dresse l'arbre pondéré (Fig. 15). Cela

revient à chercher la probabilité de l'événement contraire $\bar{O}$ avec 5 tirages :

$$\Pr\left(\bar{O}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 0,402 \tag{84}$$

avec lequel on déduit la probabilité de tirer une fois 6 en 5 lancers :

$$\Pr\left(O\right) = 1 - \frac{3125}{7776} = \frac{4651}{7776} \approx 0,598 \tag{85}$$

2. On lance le dé n fois.

a Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois le chiffre 6 ? On généralise l'équation précédente :

$$\Pr\left(X = 6\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \tag{86}$$

b Combien faut-il lancer de fois le dé pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois le chiffre 6 soit supérieure à 0,99 ? 0,99 est un **événement quasi-certain**. On reprend l'équation générale et on pose l'inégalité suivante :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99 \tag{87}$$

$$-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -0,01 \tag{88}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01 \tag{89}$$

$$n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln\left(0,01\right) \tag{90}$$

or $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$

$$n \geq \frac{\ln\left(0,01\right)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \tag{91}$$

$$n \gtrsim 25,26 \tag{92}$$

Il suffit de lancer 26 fois le dé pour obtenir au moins un 6 avec une probabilité de 0,99.

4.2 Exercice 2

On lance une pièce de monnaie **non truqué** quatre fois de suite.

1. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir « pile » au cours de ces quatre lancers ? Pour la déterminer, on utilise un arbre pondéré (Fig. 16).

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \tag{93}$$

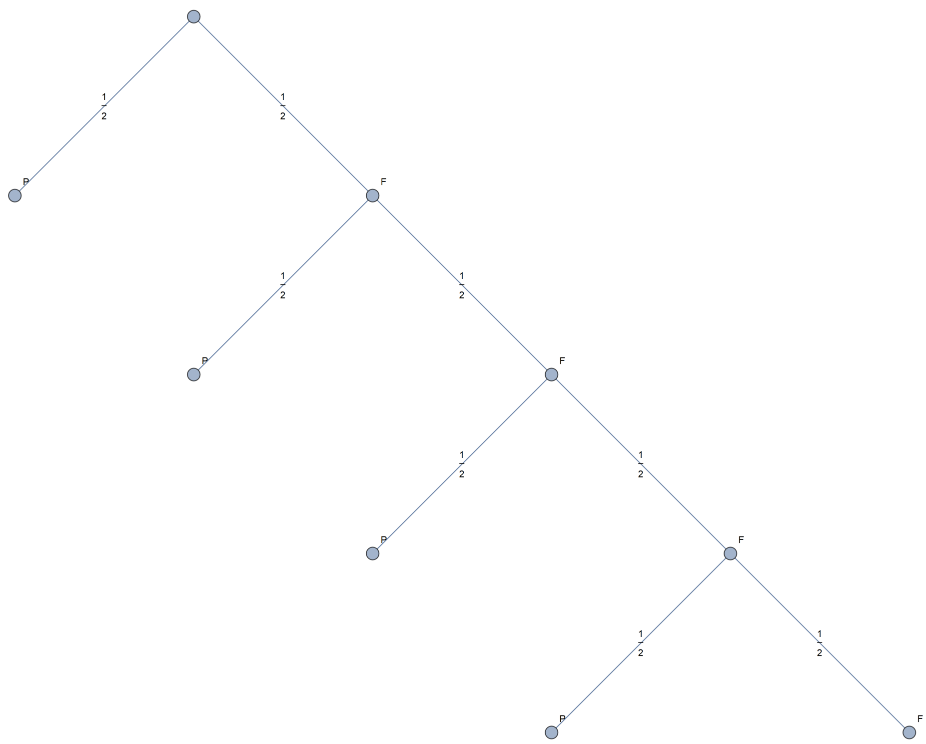

FIGURE 16 – Arbre pondéré

2. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » ? Pour la déterminer, il faut utiliser le cas contraire, c'est-à-dire la probabilité calculée lors de la question précédente, soit $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
3. Combien de fois faut-il lancer la pièce de monnaie pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » soit supérieure à 0,99 ?
   — On utilise le cas contraire. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir « pile » ? $\frac{1}{2}$. On opère l'opération n fois, donc la probabilité vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La probabilité d'obtenir au moins une fois « pile » est $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   — On souhaite que cette probabilité soit supérieure à 0,99, donc :

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,99 \tag{94}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,99 - 1 \tag{95}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,01 \tag{96}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(0,01) \tag{97}$$

$$n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln\left(0,01\right) \tag{98}$$

or $\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$

$$n \leq \frac{\ln\left(0,01\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{99}$$

$$n \gtrsim 6,644 \tag{100}$$

donc $N \geq 7$. Il faut sept lancers pour obtenir au moins une probabilité supérieure à 0,99 d'obtenir « pile ».

4.3 Exercice 3

On lance une pièce de monnaie **truquée** dix fois de suite. La probabilité d'obtenir « pile » au cours d'un lancer est 0,68.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement…

   a … 4 fois « pile » ;

   — On commence par visualiser le problème avec un arbre pondéré (Fig. 17).

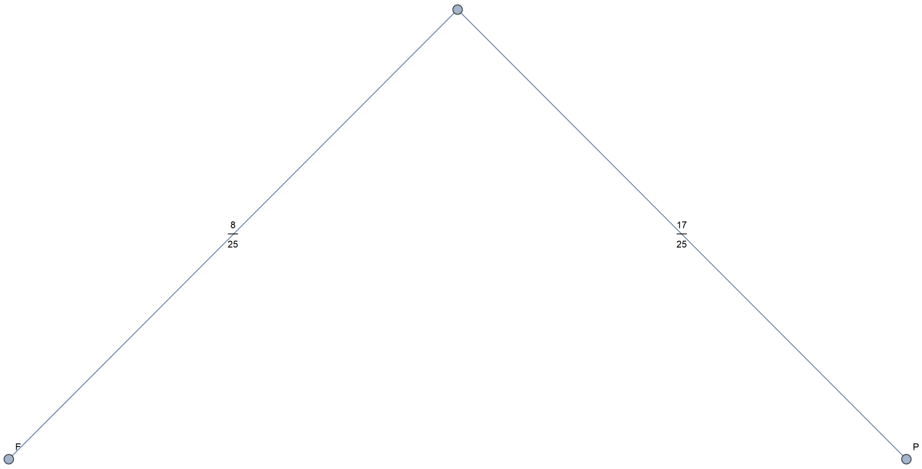

FIGURE 17 – Arbre pondéré

   — On applique la loi binomiale.

$$C_{10}^{4}\left(0,68\right)^{4}\left(0,32\right)^{6} \approx 0,048 \tag{101}$$

   b … 7 fois « face ». On applique la loi binomiale.

$$C_{10}^{7}\left(0,32\right)^{7}\left(0,64\right)^{3} \approx 0,013 \tag{102}$$

2. Quelle est la probabilité de **ne pas** obtenir « face » ? En déduire la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « face ».

— Par application de la loi binomiale, la probabilité de **ne pas** obtenir « face » est :

$$C_{10}^{10}\,(0,32)^0\,(0,68)^1\,0 = (0,68)^1\,0 \approx 0,021 \tag{103}$$

— La probabilité d'obtenir **au moins** une fois « face » se déduit par la probabilité de **ne pas** obtenir « face », car c'est son cas contraire. Par application du théorème des probabilités totales, la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « face » vaut :

$$1 - (0,68)^1\,0 = 0,979 \tag{104}$$

3. Combien de fois faut-il lancer la pièce pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » soit supérieure à 0,99 ? On utilise le cas contraire obtenu avec n tirages : $(0,32)^n$. On applique le théorème des probabilités totales pour établir la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » : $1-(0,32)^n$. Il suffit d'établir l'inégalité suivante :

$$1 - (0,32)^n \geq 0,99 \tag{105}$$

pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » soit supérieure à 0,99.

$$-\,(0,32)^n \geq 0,99 - 1 \tag{106}$$

$$(0,32)^n \leq 0,01 \tag{107}$$

$$\ln(0,32)^n \leq \ln(0,01) \tag{108}$$

$$n\ln(0,32) \leq \ln(0,01) \tag{109}$$

or $\ln(0,32) \leq 0$

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,32)} \tag{110}$$

$$n \gtrsim 4,042 \tag{111}$$

donc $n \geq 5$.Il faut lancer la pièce cinq fois pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » soit supérieure à 0,99.

5 Loi de probabilité. La distribution de Poisson

5.1 Exercice 1

On suppose que, dans un livre de 500 pages, il y a 300 fautes d'impression distribuées au hasard. Calculer la probabilité $\mathcal{P}$ pour qu'une page donnée contienne :

1. exactement 2 fautes d'impression ;

— On considère que le nombre de fautes d'impression sur une page est le **nombre de succès** $n = 300$ dans une suite d'épreuves de Bernoulli.

— La probabilité p pour qu'une faute apparaisse sur la page donnée vaut : $p = \frac{1}{500}$.

— Puisque p est petit, on peut utiliser l'approximation de Poisson pour la loi binomiale avec $\lambda = np = \frac{300}{500} = \frac{3}{5} = 0,6$.

— Trouver exactement deux fautes signifie que $k = 2$

$$\mathcal{P}\left(2, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{e^{-\frac{3}{5}}}{2!} = \frac{9}{50} e^{-\frac{3}{5}} \approx 0,099 \tag{112}$$

2. 2 fautes d'impression ou plus. Cela revient à utiliser le complémentaire. « 2 ou pls » signifie ni 0, ni 1. Il faut calculer la probabilité d'obtenir 0 faute, puis 1 faute. Pour ce, on utilise la loi de Poisson.

$$\mathcal{P}\left(0, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^0 \frac{e^{-\frac{3}{5}}}{0!} = e^{-\frac{3}{5}} \approx 0,549 \tag{113}$$

et

$$\mathcal{P}\left(1, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \frac{e^{-\frac{3}{5}}}{1!} = e^{-\frac{3}{5}} \approx 0,329 \tag{114}$$

On finit par calculer l'événement contraire.

$$\Pr\,(\text{ 2 ou plus }) \approx 1 - (0,549 + 0,329) \approx 0,122 \tag{115}$$

5.2 Exercice 2

On suppose que 2 % des articles produits par une usine sont défectueux. Calculer la probabilité $\mathcal{P}$ pour que, dans un échantillon de 100 articles, il y ait 3 articles défectueux.

Les articles constituent le nombre de succès $n = 100$ dans une suite d'épreuves de Bernoulli.

La probabilité p pour qu'un article soit défectueux est :

$$p = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0,02 \tag{116}$$

Puisque p est petit, on peut utiliser l'approximation de Poisson pour la loi binomiale avec $\lambda = 100 \times \frac{1}{50} = \frac{100}{50} = 2$

$$\mathcal{P} = 2^3 \frac{e^{-2}}{3!} = 8 \times \frac{e^{-2}}{6} = \frac{4}{3} e^{-2} \approx 0,180 \tag{117}$$

donc $k = 3$ articles défectueux.

6 Loi de probabilité. La distribution multinomiale

6.1 Exercice 1

On alourdit un dé pour que il ait un 6 dans la proportion de 0,3 du temps, pour que la face opposée 1 apparaisse dans la proportion 0,1 du temps, et pour que chacune des autres faces apparaisse 0,15 du temps. On jette le dé 6 fois.

1. Calculer la probabilité p_1 pour que chaque face apparaisse une fois.
   — On établit les probabilités de chaque face.

$$\Pr(6) = 0,3 \tag{118}$$

$$\Pr(1) = 0,1 \tag{119}$$

$$\Pr(2) = \Pr(3) = \Pr(4) = \Pr(5) = 15 \tag{120}$$

   — On vérifie que :

$$\Pr(1) + \Pr(2) = \Pr(3) = \Pr(4) = \Pr(5) + \Pr(6) = 1 \tag{121}$$

   — Le nombre d'épreuves répétées n vaut $n = 6$.
   — On veut que chaque face apparaisse une fois, donc :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 1 \tag{122}$$

   — On en déduit que :

$$p_1 = \frac{6!}{1!1!1!1!1!1!} 0,1^1 \times 0,15^4 \times 0,3^1 = 720 \times 0,0000151875\ldots \approx 0,011 \tag{123}$$

2. Calculer la probabilité p_2 pour que les faces 4, 5 et 6 apparaissent chacune deux fois.
   — On veut que les faces 4, 5 et 6 apparaissent chacune deux fois, donc :

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \tag{124}$$

   et

$$k_4 = k_5 = k_6 = 2 \tag{125}$$

   — On en déduit que :

$$p_2 = \frac{6!}{0!0!0!2!2!2!} 0,1^0 \times 0,15^0 \times 0,15^0 \times 0,15^2 \times 0,15^2 \times 0,3^2 = \frac{720}{8} \times 0,0000455625\ldots \approx 90 \times 0, \tag{126}$$

6.2 Exercice 2

Une boîte contient 5 billes rouges, 3 billes blanches, et 2 billes bleues. On tire un échantillon non exhaustif de 6 billes, c'est-à-dire que l'on remet chaque bille dans la boîte avant de tirer la suivante.

1. Calculer la probabilité que l'on ait 3 billes rouges, 2 billes blanches et 1 bille bleue.
   — On établit les probabilités pour $n = 6$ épreuves.

$$\Pr(\text{rouge}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5 \tag{127}$$

$$\Pr(\text{blanche}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2 \tag{128}$$

$$\Pr(\text{bleue}) = \quad = \quad = 0,3 \tag{129}$$

— On peut faire le calcul.

$$p = \frac{5!}{3!2!1!} \times 0,5^3 \times 0,2^2 \times 0,3^1 = \frac{120}{10} \times 0,0015 = 0,015 \quad (130)$$

2. Calculer la probabilité que l'on ait 2 billes rouges, 3 billes blanches et 1 bille bleue.

$$p = \frac{5!}{2!3!1!} \times 0,5^2 \times 0,2^3 \times 0,3^1 = \frac{120}{10} \times 0,0006 = 0,006 \quad (131)$$

3. Calculer la probabilité que l'on ait 2 billes de chaque couleur.

$$p = \frac{5!}{2!2!2!} \times 0,5^3 \times 0,2^2 \times 0,3^1 = \frac{120}{8} \times 0,0009 = 15 \times 0,0009 = 0,0135 \quad (132)$$

Table des figures

Liste des tableaux

Table des matières