# Calcul vectoriel dans un espace à trois dimensions

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

20 octobre 2025

## 1 Repère dans un espace en trois dimensions

Un repère dans l'espace est un quadruplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ avec $O$ un point dans l'espace et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout point $M$ de l'espace, on obtient l'égalité :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1}$$

dans laquelle $(x, y, z)$ est le triplet représentant les coordonnées du point $M$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\Leftrightarrow$ $M$ a pour coordonnées $(x, y, z)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

$\Leftrightarrow$ $\vec{OM}$ a pour pour coordonnées $(x, y, z)$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé si et seulement si $\left|\left|\vec{i}\right|\right| = \left|\left|\vec{j}\right|\right| = \left|\left|\vec{k}\right|\right|$ sont trois **vecteurs unitaires** orthogonaux entre eux.

## 1.1 Propriétés dans un repère quelconque

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$k\vec{u}\begin{pmatrix} kx_{\vec{u}} \\ ky_{\vec{u}} \\ kz_{\vec{u}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix} \tag{4}$$

$I$ milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$

## 1.2 Propriétés dans un repère orthonormé

$$||\vec{u}|| = \sqrt{{x_{\vec{u}}}^2+{y_{\vec{u}}}^2+{z_{\vec{u}}}^2} \tag{5}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = x_{\vec{u}}.x_{\vec{v}}+y_{\vec{u}}.y_{\vec{v}}+z_{\vec{u}}.z_{\vec{v}} \tag{6}$$

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \tag{7}$$

**N.B.** $\left|\left|\vec{AB}\right|\right| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

# 2 Plan dans l'espace

Soient trois points $A$, $B$, $C$, alors $A$, $B$, $C$ sont **toujours** coplanaires. Ils forment un plan $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}=(A,B,C)$.

$$M\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{AM} = x\vec{AB}+y\vec{AC} \tag{8}$$

De manière plus générale, soit $\mathcal{P}=(A,\vec{u},\vec{v})$, alors :

$$M\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{AM} = x\vec{u}+y\vec{v} \tag{9}$$

# 3 Géométrie dans l'espace à trois dimensions

## 3.1 Droites dans l'espace

Deux droites dans l'espace sont :

- soit coplanaires :
  - soit sécantes : elles ont un seul point commun ;
  - elles sont :
    - soit disjointes avec aucun point commun ;
    - soit confondues.
- soit non coplanaires : elles sont disjointes.

## 3.2 Plans dans l'espace

Deux plans dans l'espace sont :

- soit sécants : l'intersection est une droite ;
- soit parallèles :
  - soit disjoints s'ils n'ont aucun point commun ;
  - soit confondus.

## 3.3 Droite et plan dans l'espace

Une droite et un plan dans l'espace sont :

- soit sécants : l'intersection est un point ;
- soit parallèles :
  - soit disjoints ;
  - soit la droite est incluse dans le plan.

## 3.4 Propriétés

1. Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.
2. Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un d'eux contient deux droites sécantes parallèles à l'autre plan.
3. Si deux droites sont parallèles, alors :
   - toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre ;

  - tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre ;
  - tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.
4. Si deux plans sont parallèles, alors :
  - toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
  - toute droite de l'un est parallèle à l'autre ;
  - toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre ;
  - tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
  - tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
5. Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.
6. Si deux droites sont coplanaires, toute droite parallèle à l'une l'est à l'autre.

# 4 Orthogonalité dans l'espace

## 4.1 Droites orthogonales

Deux droits sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

**Propriété.** Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une l'est à l'autre.

## 4.2 Droite orthogonale à un plan

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

**Propriétés.**

1. Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
2. Si deux droites sont orthogonales, alors tout plan orthogonal à l'une l'est à l'autre.
3. Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
4. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un l'est à l'autre.
5. Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.
6. Si une droite est parallèle à un plan lui-même orthogonal à une autre droite, alors les droites sont orthogonales.

7. Si une droite est orthogonale à un plan, alors la droite est parallèle au plan.

**Conséquence.** Pour démontrer qu'une droite $(D_1)$ est orthogonale à une droite $(D_2)$, il suffit de trouver un plan $\mathcal{P}$ contenant $(D_2)$ **et** orthogonal à $(D_1)$.

### 4.3 Plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

**N.B.** On dit bien **deux plans perpendiculaires**, et non deux plans orthogonaux.

Si deux plans sont perpendiculaires, alors :

1. toute droite à l'un est orthogonale à l'autre ;
2. toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre ;
3. tout plan perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre ;
4. tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

### 4.4 Plan médiateur

Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à $[AB]$.

Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble de tous les points équidistants de $A$ et de $B$

## 5 Produit scalaire dans l'espace à trois dimensions

### 5.1 Définition

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$, alors on appelle le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le réel :

$$\vec{u}.\vec{v} = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = x_{\vec{u}}.x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}.y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}}.z_{\vec{v}} \tag{10}$$

### 5.2 Propriétés

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. $\vec{u}.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} = \left(\vec{v} + \vec{w}\right).\vec{u}$
3. $\left(\lambda.\vec{u}\right).\vec{v} = \lambda.\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\left(\lambda.\vec{v}\right)$

4. $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = {x_{\vec{u}}}^2 + {y_{\vec{u}}}^2 + {z_{\vec{u}}}^2$
5. $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{{x_{\vec{u}}}^2 + {y_{\vec{u}}}^2 + {z_{\vec{u}}}^2}$
6. $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}^2}$
7. $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
8. $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
9. $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
10. $||\lambda\vec{u}|| = |\lambda|\, ||\vec{u}||$
11. $AB^2 = \left|\left|\vec{AB}\right|\right|^2 = \vec{AB}^2$
12. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\right]$
13. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2\right]$
14. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left[\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 - \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2\right]$
15. $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\, ||\vec{v}|| \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$
16. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
17. Si $A$, $B$, $C$ sont trois points alignés tel que le propose la figure 1, alors :
    - si on est dans le cas 1, $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC$ ;
    - si on est dans le cas 1, $\vec{AB}.\vec{AC} = -AB \times AC$.

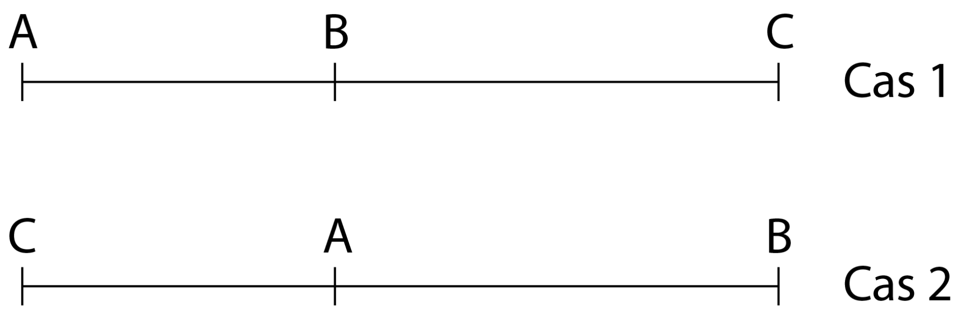


FIGURE 1 – Règle de trois points alignés

# 6 Vecteur normal à un plan

## 6.1 Définition d'un vecteur normal

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur à une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ (Fig. 2).

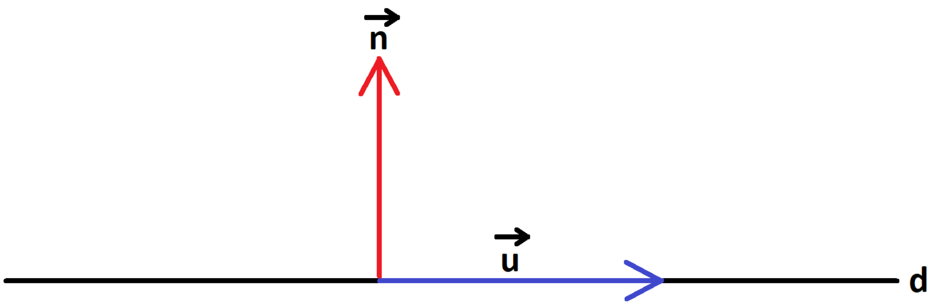


FIGURE 2 – Représentation du vecteur normal $\vec{n}$ de la droite $(d)$

## 6.2 Propriété d'un vecteur normal

Un plan est défini de façon unique par un point $A$ et un vecteur normal $\vec{n}$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.

— La droite $(d)$ passant par $A\left(x_A, y_A\right)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}\,(a,b)$ est l'ensemble des points $M\,(x,y)$ tels que $\vec{AM}.\vec{n}=0$. Elle a pour équation $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$.

— Une droite $(d)$ ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\,(a,b)$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$.

— Une droite $(d)$ ayant une équation de la forme $ax+by+c=0$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\,(a,b)$.

On appelle **vecteur normal** $\vec{n}$ une droite $(d)$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à un vecteur directeur de $(d)$.

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à un vecteur directeur de la droite $(d)$, alors l'ensemble des vecteurs normaux à $(d)$ est l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{n}$.

## 6.3 Caractéristique d'un plan passant par $A$ de vecteur normal $\vec{n}$

$$M\in\mathcal{P}\left(A,\vec{n}\right)\Leftrightarrow\vec{n}.\vec{AM}=0 \tag{11}$$

# 7 Lignes de niveau

Une **ligne de niveau** est une figure engendrée par le déplacement d'un point et pouvant être une droite, une courbe, un cercle, une sphère, un plan, *etc*.

Un **lieu géométrique** est une ligne, ou une surface, formée par l'ensemble des positions d'un point jouissant toutes des mêmes propriétés.

**Exemple d'une sphère.** Tout point de la sphère $\mathcal{S}$ est situé à la même distance du centre.

— $M \in \mathcal{S}$ de diamètre $[AB] \Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MB} = 0$

— Le plan passant par $I$ milieu de $[AB]$ et orthogonal à $(AB)$, est le plan médiateur de $[AB]$. C'est l'ensemble des points équidistants.

$$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow \vec{MA}^2 = \vec{MB}^2 \Leftrightarrow \dots \qquad (12)$$

# 8 Produit vectoriel

## 8.1 Orientation d'un repère dans l'espace

Soit un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on place un observateur sur l'axe $\vec{k}$ avec ses pieds en $O$ et ses yeux regardant vers $\vec{i}$ :

1. si $\vec{j}$ est à gauche de l'observateur, la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est **directe** (Fig. 3);
2. si $\vec{j}$ est à droite de l'observateur, la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est **indirecte** (Fig. 3).

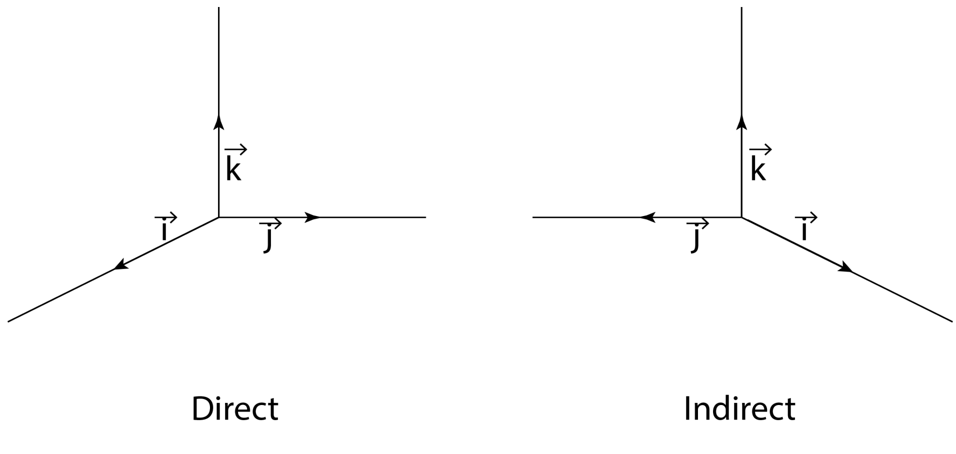


FIGURE 3 – Orientation directe et orientation indirecte

Il existe également la règle des trois doigts de la main…

— … droite avec : $\vec{i}$ au niveau du pouce, $\vec{j}$ au niveau de l'index, et $\vec{k}$ au niveau du majeur, pour obtenir un sens indirect;

— … gauche avec : $\vec{i}$ au niveau du pouce, $\vec{j}$ au niveau de l'index, et $\vec{k}$ au niveau du majeur, pour obtenir un sens direct

$\left|\left|\vec{i}\right|\right| = \left|\left|\vec{j}\right|\right| = \left|\left|\vec{k}\right|\right| = 1$ sont trois vecteurs unitaires. Il existe deux vecteurs normaux à $\mathcal{P}$ et normés.

On choisit l'un des deux vecteurs soit $\vec{k}$, soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, deux vecteurs normés et orthogonaux de $\mathcal{P}$ tels que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ soit une **base orthonormée directe**.

— On dit qu'il y a un **sens positif** dans $\mathcal{P}$ si le sens de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$.

— $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une **base directe** de $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ est orienté par $\vec{k}$.

**N.B.** Avec $-\vec{k}$, il faut échanger $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

## 8.2 Définition du produit vectoriel

Le produit vectoriel est un **vecteur**. Il est noté $\wedge$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :

— soit colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;

— soit non colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\sin(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{n}$

- $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs d'un plan $\mathcal{P}$.
- Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et normés, $\mathcal{P}$ est orienté par ce vecteur.
- Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{n}$, donc $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal, mais pas forcément normé.

## 8.3 Propriétés

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$
3. $\vec{0} = \vec{0}\vec{u}$
4. $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0} = \vec{u} \wedge \vec{0}$
5. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
6. $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
7. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
8. Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ sont normés et orthogonaux, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est une base orthonormée directe.
9. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
10. $a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$
11. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
12. $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$

## 8.4 Coordonnées du produit vectoriel

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe, donc $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, alors :

- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ ;
- $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ ;
- $\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = D_1\vec{i} + D_2\vec{j} + D_3\vec{k}$ avec :

$$\begin{cases} D_1 = y_{\vec{u}}z_{\vec{v}} - y_{\vec{v}}z_{\vec{u}} \\ D_2 = z_{\vec{u}}x_{\vec{v}} - z_{\vec{v}}x_{\vec{u}} \\ D_3 = x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} \end{cases} \tag{13}$$

Pour le retenir, on utilise la figure 4.

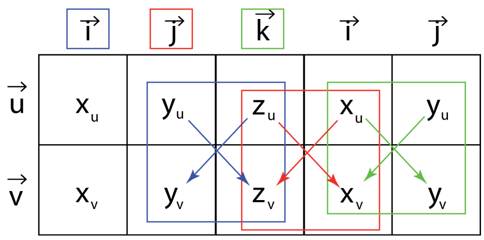


FIGURE 4 – Astuce mnémotechnique pour retenir le calcul

## 8.5 Applications

### 8.5.1 Équation d'un plan

Pour définir l'équation d'un plan $\mathcal{P}$, il suffit d'écrire :

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{n} \tag{14}$$

et $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \ldots$

### 8.5.2 Calcul d'aire

**L'aire d'un triangle** Soit le triangle $ABC$ (Fig. 5), alors son aire vaut :

$$2\mathcal{A} = AB \times AC \times \sin \hat{A} = \left|\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right|\right| \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right|\right| \tag{16}$$

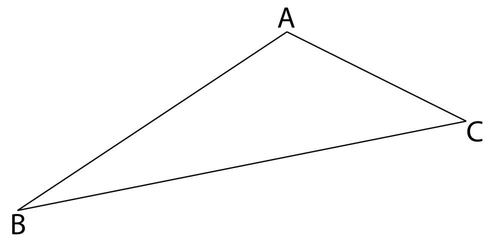


FIGURE 5 – Triangle quelconque

**L'aire d'un parallélogramme** Un parallélogramme $ABCD$ contient deux triangles identiques (Fig. 6).

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \left|\left|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\right|\right| \tag{17}$$

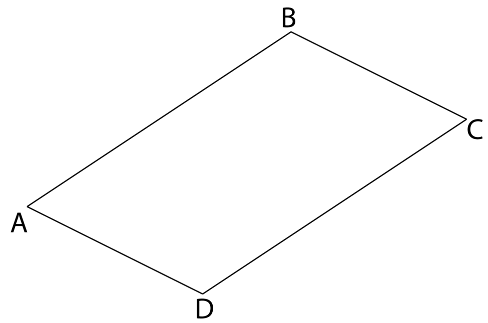


FIGURE 6 – Parallélogramme quelconque

**La distance d'un point par rapport à une droite** Soient $M$ un point qui n'appartient pas à $(D)$ $(A, \vec{u})$, et $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(D)$ (Fig. 7), alors :

$$MH = \frac{\left|\left|\vec{AM} \wedge \vec{u}\right|\right|}{||\vec{u}||} \tag{18}$$

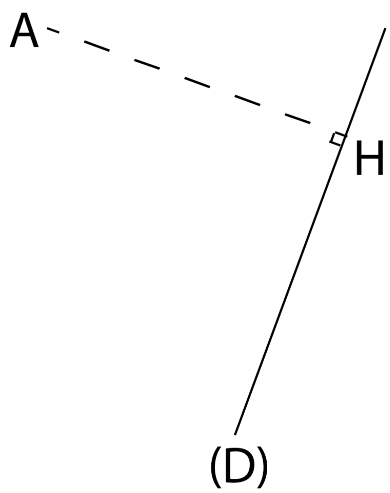


FIGURE 7 – Distance d'un point par rapport à une droite