# Annexe A

# Les intégrales gaussiennes

## A.1 Formule n° 1

Soit une variable centrée réduite $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ avec $\mu$ la moyenne et $\sigma$ l'écart type.

$$\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-Z^2} \mathrm{d}Z = \sqrt{\pi} \tag{A.1}$$

d'où

$$\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \mathrm{d}Z = \sqrt{2\pi} \tag{A.2}$$

**Démonstration** Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ puisque $e^{-x^2}$ est une fonction paire.

On écrit le carr'e de cette intégrale :

$$I^2 = 4 \lim_{\gamma \to +\infty} \left[ \left( \int_0^R e^{-x^2} \mathrm{d}x \right) \left( \int_0^R e^{-y^2} \mathrm{d}y \right) \right] = 4 \lim_{\gamma \to +\infty} \left[ \int_0^R \int_0^R e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right] \tag{A.3}$$

On procède à un changement de variable en passant en coordonnées polaires. Dès lors, on écrira le Jacobien également dans ces mêmes coordonnées :

$$\begin{array}{l} I^2 = 4 \lim_{\gamma \to +\infty} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R e^{-\gamma^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \right] \\ I^2 = 4\frac{\pi}{2} \lim_{\gamma \to +\infty} \left[ \int_0^R e^{-\gamma^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \right] \\ I^2 = 2\pi \lim_{\gamma \to +\infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-\gamma^2} \right]_0^{+\infty} \\ I^2 = 2\pi \lim_{\gamma \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi \end{array} \tag{A.4}$$

donc :

$$I = \sqrt{\pi} \tag{A.5}$$

Par extension pour $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, on a $I = \sqrt{2\pi}$.

## A.2 Formule nº 2

Soit un polynôme $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$ avec $A, B, C \in \mathbb{C}$. Pour assurer une convergence, il faut nécessaire que $\Re(A) > 0$.

$$\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-Q(x)} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-C+\frac{B^2}{4A}} \tag{A.6}$$

**Remarque importante.** Si $A, B, C \in \mathbb{R}$, alors on obtient la formule de Robert Gibrat

Robert Gibrat (1904-1980)

Cette formule polynomiale se généralise de la manière suivante :

$$\int_{+\infty}^{-\infty} X^n e^{-Z^2} \mathrm{d}Z = \int_{+\infty}^{-\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \sigma^n \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^k Z^{n-k} \right) e^{-Z^2} \mathrm{d}Z \tag{A.7}$$

avec $Z$, une variable centrée réduite, $\mu$ la moyenne et $\sigma$ l'écart type.

# Bibliographie