Ensembles finis

Maxime Forriez[1,2, a] and Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

24 septembre 2025

1 Les ensembles

Un **ensemble** est une collection de choses que l'on appelle**éléments**. Si un ensemble ne contient rien, on appelle d'**ensemble vide**, noté $\varnothing$.

Un ensemble peut être fini, comme le nombre de cas possibles, ou infini, comme l'ensemble des nombres, Si l'élément e_i appartient à l'ensemble E, on le note : $e_i \in E$.

2 Les ensembles finis

Un ensemble est **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E vers l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

3 Le cardinal d'un ensemble fini

Le **cardinal** est le nombre d'éléments n d'un ensemble fini E. Il est noté $\mathrm{card}E$, ou $|E|$, ou $\#E$.

N.B. $\mathrm{card}\varnothing = 0$

Si E est un ensemble fini, et $B \subset A$ alors :

1. B est fini et $\mathrm{card}B \leq \mathrm{card}A$
2. $\mathrm{card}\left(\complement_A^B\right) = \mathrm{card}A - \mathrm{card}B$

4 L'ensemble dénombrable

Soit E un ensemble, on dit que E est un ensemble (infini) dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.

— $2\mathbb{Z}$ est dénombrable.
— $\mathbb{R}$ est non dénombrable.
— $\mathbb{C}$ est non dénombrable.

5 L'ensemble des parties

L'**ensemble des parties** $\mathscr{P}(E)$ de l'ensemble fini E correspond à la totalité des combinaisons possibles.

Exemple Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Grâce à l'établissement d'un arbre, il est facile, dans ce cas, de connaître la totalité de l'ensemble des parties (Fig. 1). L'arbre reconstitue les étapes en commençant par le premier élément. a est retenu à la branche de droite et non retenu à la branche de gauche. On poursuit avec le deuxième élément b. La logique est la même : à droite l'élément est retenu, à gauche, il ne l'est pas.

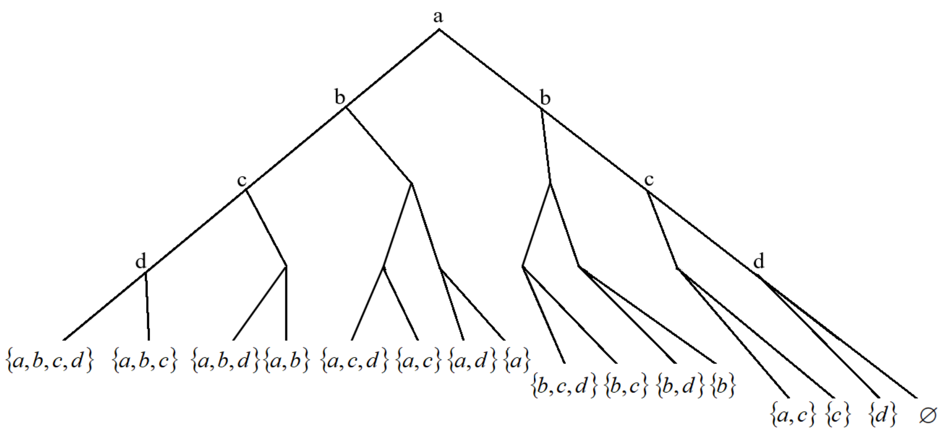

FIGURE 1 – Arbre de dénombrement de l'ensemble des parties $\mathscr{P}(E)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \ldots, \{a, b, c, d\}\} \quad (1)$$

Il est fastidieux d'établir un arbre pour chaque ensemble. Il existe une formule permettant de calculer le cardinal de l'ensemble des parties $\mathscr{P}(E)$.

$$\mathrm{card}\mathscr{P}(E) = 2^{\mathrm{card}E} \tag{2}$$

Il ne faut jamais oublier.

N.B. 1. L'ensemble vide est toujours du partie.

N.B. 2. L'ensemble en entier est toujours inclus dans lui-même.

N.B. 3. $a \in E$, mais $\{a\} \subset E$, mais $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$.

Les opérations dans l'ensemble des parties Soient $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(E)$ sont ensemblistes.

L'**intersection** est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** B (Fig. 2). Elle est notée $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ et } x \in B\} \tag{3}$$

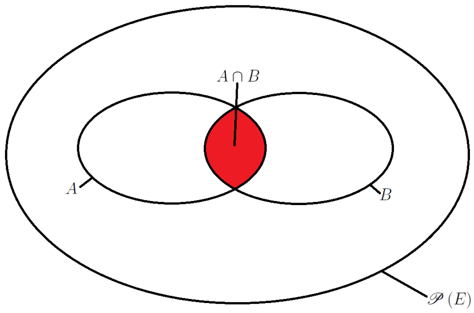

FIGURE 2 – Modèle d'une intersection

L'**union** est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** B, **ou** les deux (Fig 3). Elle est notée $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ ou } x \in B\} \tag{4}$$

N.B. Lorsque l'intersection est vide, les ensembles A et B sont **disjoints**.

La **différence** de A moins B est l'ensemble des éléments qui sont dans A, mais pas dans B. L'opérateur utilisé est $\setminus$.

La **différence symétrique** de A et B est l'ensemble des éléments qui sont soit dans A soit dans B, mais pas dans $A \cup B$. L'opérateur utilisé est $\triangle$.

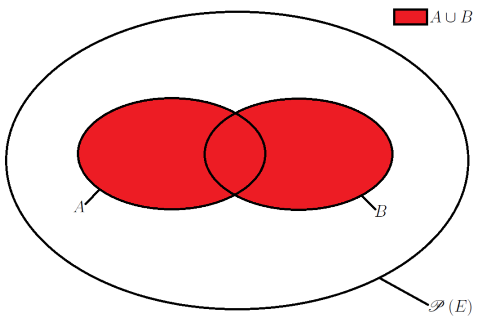

FIGURE 3 – Modèle d'une union

6 Le complémentaire d'un ensemble

On appelle le **complémentaire de** A **dans l'ensemble** E des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Il est noté $\complement_E^A$, ou $\bar{A}$, ou A^c, ou $C_E(A)$.

$$\complement_E^A = \{x \notin E, x \notin A\} \tag{5}$$

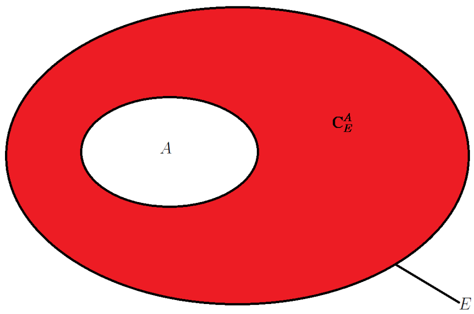

FIGURE 4 – Modèle d'un complémentaire de A dans E

Propriétés :

— $\complement_{A\cap B}^{A\cup B} = \{x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$

— $\text{card}A + \text{card}\complement_E^A = \text{card}E$

— $\text{card}\complement_E^A = \text{card}E - \text{card}A$

7 Le représentation des ensembles

Les figures 2 et 3 sont des **diagrammes de J. Venn** (ou logiques). Ils montrent toutes les relations logiques possibles dans une collection finie de différents ensembles.

John Venn (1834-1923)

8 Les relations algébriques des ensembles

Soient A, B, C trois ensembles.

- $E \cap A = A$
- $E \cap \varnothing = \varnothing$
- $E \cup A = E$
- $E \cup \varnothing = \varnothing$

8.1 La commutativité

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

8.2 L'associativité

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8.3 La distributivité

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$

8.4 Les règles de A. de Morgan

Augustus de Morgan (1806-1871)

- $(\cup_{i=1}^{n} A_i) \cap B = \cup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$
- $(\cap_{i=1}^{n} A_i) \cup B = \cap_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$
- $\bar{\cup}_{i=1}^{n} A_i = \cap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$
- $\bar{\cap}_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$

8.5 Le produit cartésien

8.5.1 Le produit cartésien de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles, on appelle **produit cartésien de** A **par** B, l'ensemble des couples (x, y) tels que x soit élément de A, et y soit un élément de B, ce qui définit l'ensemble $C = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Il est noté $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) \setminus x \in A \text{ et } y \in B\} \tag{6}$$

Propriété. Le nombre d'éléments d'un produit cartésien vaut :

$$\mathrm{card}\,(A \times B) = \mathrm{card}A \times \mathrm{card}B \tag{7}$$

N.B. Dans le membre gauche de l'équation n° 7, $\times$ se lit « croix », et non comme le symbole de la multiplication, tandis que, dans le membre droit de l'équation n° 7, $\times$ se lit « multiplié ».

8.5.2 Le produit cartésien de n ensembles

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$, un élément de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est une **liste ordonnée** : le premier appartenant à A_1, le deuxième appartenant à A_2, $\ldots$, le dernier appartenant à A_n. Il est noté A^n.

Propriété. Le nombre d'éléments d'un produit cartésien à n ensembles vaut :

$$\mathrm{card}\,(A^n) = (\mathrm{card}A)^n \tag{8}$$

8.6 L'inclusion

L'opérateur $\subset$ est celui de l'inclusion.

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, n ensembles inclus dans Ω. La famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition de Ω si elle vérifie deux conditions :

1. $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i \neq j$;
2. $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Soit $A \subset \Omega$, on définit sur Ω la fonction indicatrice de A, 1_A, par :

$$\forall \omega \in \Omega, 1_A\,(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{9}$$

9 Les relations entre les cardinaux

9.1 L'additivité

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire avec $A \cap B = \varnothing$, alors :

$$\mathrm{card}A + \mathrm{card}B = \mathrm{card}\,(A \cap B) \tag{10}$$

N.B. Si A et B sont deux ensembles finis non disjoints, alors on obtient la formule des quatre cardinaux ou crible de H. Poincaré :

Henri Poincaré (1854-1912)

$$\mathrm{card}A \cup B = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}A \cap B \tag{11}$$

ou

$$\mathrm{card}A \cap B = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}\,(A \cup B) \tag{12}$$

Si on ajoute un ensemble C, la formule devient :

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}\,(A \cup B \cup C) = \mathrm{card}\,((A \cup B) \cup C)\\&= \mathrm{card}A + \mathrm{card}B + \mathrm{card}C - \mathrm{card}\,(A \cap B) - \mathrm{card}\,(A \cap C) - \mathrm{card}\,(B \cap C)\\&+\mathrm{card}\,(A \cap B \cap C)\end{aligned} \tag{13}$$

ce qui correspond au dénombrement d'un sous-ensemble.

9.2 La multiplicativité

Soient A et B deux ensembles finis et $C = A \times B$; alors :

$$\mathrm{card}C = \mathrm{card}A \times \mathrm{card}B \tag{14}$$

9.3 Le principe du dénombrement

Le **dénombrement** consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble fini non vide et soit F un ensemble, s'il existe une bijection de E sur F alors F est fini et de même cardinal que E.

Lorsque l'on réalise deux expériences qui peuvent produire respectivement n et m résultats différents. Au total, pour les deux expériences prises ensemble, il existe $n \times m$ résultats possibles.

9.4 Le nombre de suites

Soit A un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de suites de longueur r constituées d'éléments de A est :

$$n^r \tag{15}$$

9.5 L'inclusion-exclusion

Soient A et B deux ensembles finis, alors :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}\,(A \cap B) \tag{16}$$

Pour n ensembles finis $A_1, \ldots, A_n$,

$$\begin{aligned}&\text{card}\,(A_1, \cup A_2, \cup \ldots \cup A_n) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \text{card}A_i - \sum_{i<j}^{n} \text{card}\,(A_i \cap A_j) + \ldots\\ &+ (-1)^{n+1}\,\text{card}\,(A_1 \cap A_2, \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned} \tag{17}$$