Annexe F

Produit de convolution de deux variables aléatoires

Le **produit de convolution** répond au problème suivant : connaissant la loi des variables aléatoires X et Y, indépendantes ou non, quelle est la loi de la somme $Z = X + Y$ de ces deux variables.

F.1 Cas de deux variables aléatoires discrètes

Le théorème de probabilités totales donne la solution.

$$\begin{array}{l} \Pr(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} \Pr[(X = x_i) \text{ et } (Y = z_i - x_i)] \\ \Pr(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} \Pr[(Y = y_i) \text{ et } (X = z_i - y_i)] \end{array} \tag{F.1}$$

On note deux cas possibles :

1. Si X et Y sont indépendantes alors :

$$\begin{array}{l} \Pr(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(X = x_i) \Pr(Y = z_i - x_i) \\ \Pr(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(Y = y_i) \Pr(X = z_i - y_i) \end{array} \tag{F.2}$$

2. Si X et Y ne sont pas indépendantes alors :

$$\begin{array}{l} \Pr(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(X = x_i) \Pr(Y = z_i - x_i \setminus X = x_i) \\ \Pr(Z = z) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(Y = y_i) \Pr(Y = z_i - y_i \setminus Y = y_i) \end{array} \tag{F.3}$$

Remarque importante. Les limites des variables X et Y doivent être compatibles avec la condition $Z = z$.

Exemple. La loi de Poisson est stable pour l'addition de variables aléatoires indépendantes.

F.2 Cas de deux variables continues

La loi de probabilité de la variable $Z = X + Y$ est la mesure image Pr_{XY}, loi de probabilité du couple (X, Y) par l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \to x + y$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la loi de probabilité $\mathrm{Pr}\,(Z)$ de la variable aléatoire $Z = X + Y$ est la mesure image de $\mathrm{Pr}_X \otimes \mathrm{Pr}_Y$ par l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \to x + y$. Pr_Z est le produit de convolution de Pr_X et Pr_Y.

Pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2$, cette probabilité est définie par :

$$\mathrm{Pr}_z\,(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B\,(x + y)\,\mathrm{d}\mathrm{Pr}_X \otimes \mathrm{Pr}_Y \tag{F.4}$$

Les variables X et Y jouent des rôles symétriques.

Si les lois de probabilités des variables aléatoires indépendantes X et Y admettent des densités f et g, l'expression précédente s'écrit :

$$\mathrm{Pr}_z\,(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B\,(x + y)\,f\,(x)\,g\,(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{F.5}$$

Guido Fubini (1879-1943)

On pose $x + y = z$, $x = u$ et on applique le théorème de Fubini :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Pr}_z\,(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B\,(z)\,f\,(u)\,g\,(z-u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}z \\ \mathrm{Pr}_z\,(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B\,(z)\,\mathrm{d}z \int_{D_x} f\,(u)\,g\,(z-u)\,\mathrm{d}u \end{array} \tag{F.6}$$

d'où la densité de la variable aléatoire Z :

$$k\,(z) = \int_{D_x} f\,(x)\,g\,(z - x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_y} f\,(z - y)\,g\,(y)\,\mathrm{d}y \tag{F.7}$$

dans laquelle D_x et D_y désignent les domaines de variables des variables aléatoires X et Y, compatibles avec la condition $Z = z$.

Par intégration, on obtient la fonction de répartition de la variable Z :

$$K\,(z) = \mathrm{Pr}\,(Z < z) = \int_{D_x} f\,(x)\,G\,(z - x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_y} F\,(z - y)\,g\,(y)\,\mathrm{d}y \tag{F.8}$$

dans laquelle F et G désignent les fonctions de répartition des variables X et Y.

Exemple. La loi gamma est stable pour l'addition des variables aléatoires indépendantes.

Bibliographie