

Cours d'analyse de données en géographie

Niveau Master 1 - GEANDO

Approfondissement

Les chaînes de Markov

Maxime Forriez^{1,a}

¹ Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
^amaxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 septembre 2025

Exercice 1

Soit la matrice stochastique régulière $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Chercher un vecteur de probabilité à deux composantes, noté $t = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ tel que $t.P = t$.
2. Vers quelle matrice T converge la suite P, P^2, P^3, \dots ?

Exercice 2

Déterminer l'unique vecteur de probabilité constant de la matrice stochastique régulière :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Exercice 3

Un ouvrier se rend chaque matin à son travail soit en voiture, soit en train. On suppose qu'il ne prend jamais le train deux jours consécutifs, mais s'il se rend à son travail en voiture, il peut le jour suivant tout aussi bien prendre sa voiture, ou prendre le train.

1. Définir l'espace des états du système. On pose v pour la voiture et t pour le train.
2. Justifier pourquoi il s'agit d'une chaîne de Markov.
3. Établir la matrice de transition.
4. Quelle est la matrice de transition matérialisant le choix du mode de transport de l'ouvrier le quatrième jour ?
5. Si le premier jour, l'ouvrier jette un dé bien équilibré et décide de ne partir travailler en voiture que si et seulement s'il obtient un 6, calculer l'état dans quatre jour.
6. Calculer l'état stationnaire à n itérations.

Exercice 4

Trois garçons A, B, C jouent au ballon.

- A lance **toujours** le ballon à B.
- B lance **toujours** le ballon à C.
- C peut lancer **tout aussi bien** le ballon à A ou B.

1. Quel est l'espace des états ?
2. Justifier pourquoi il s'agit d'une chaîne de Markov.
3. Calculer la matrice de transition.
4. Si C est le premier à avoir le ballon, quelle est la probabilité pour que A ait le ballon après trois lancers ?
5. Calculer l'état stationnaire à n itérations.