Problème du chevalier de Méré

Maxime Forriez[1,2, a] and Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

30 juillet 2025

« Deux joueurs, Primus et Secondus, engagent chacun 32 pistoles dans un jeu de pile ou face ; empochera les 64 pistoles, celui d'entre eux qui, le premier, aura obtenu trois succès, consécutifs ou non. Ils jouent une première manche, Primus gagne ; ils sont à ce moment obligés de se séparer, la partie ne sera jamais terminée. Comment partager équitablement l'enjeu entre eux ? »

Antoine Gombaud (1607-1684) dit le chevalier de Méré

En effet, si Primus gagne la première manche, il a davantage de chances de gagner les trois manches. De fait, il serait injuste de rendre les mises initiales à Primus et Secondus. **Comment traduire l'espérance de chacun ?**

Pierre de Fermat écrivit une lettre à Blaise Pascal qu'il reçut le 28 juillet 1654. Elle contenait sa solution au problème. Le lendemain, le 29 juillet 1654, Blaise Pascal la contesta en proposant sa propre solution au problème.

Pierre de Fermat (fin du XVII[e] siècle-1665)

Blaise Pascal (1623-1662)

« Le 29 juillet 1654.

« Monsieur,

« L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carvavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse ; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. [. . .]

« Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche ; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait tant que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

« Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

« Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est en jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

« Considérez donc, Monsieur que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

« Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

« Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 ; donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

« Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partout, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc, il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56, ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui avec 32, font 44. [...] »

En résumé, Blaise Pascal établit que la partie se joue entre trois et cinq manches qu'il est possible de synthétiser sous la forme d'un arbre (Fig. 1).

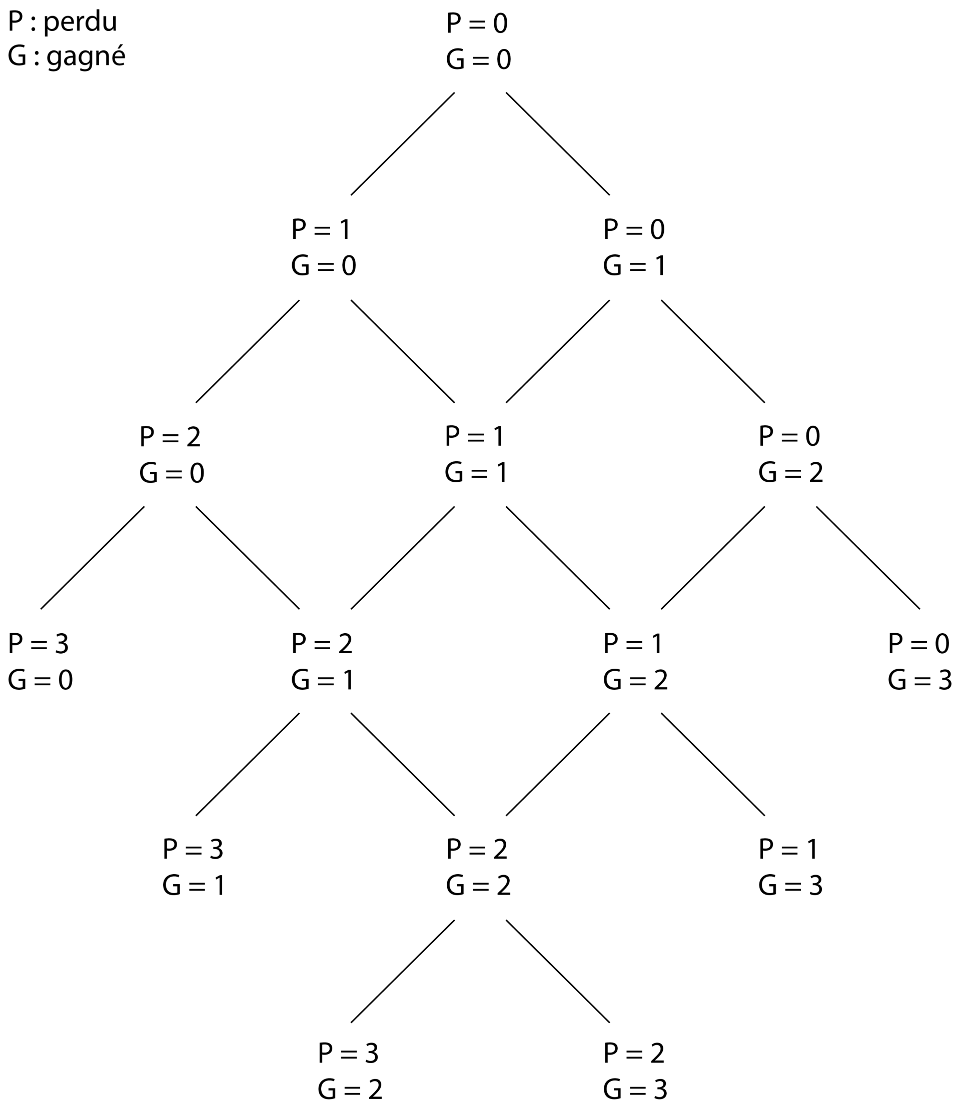

FIGURE 1 – Arbre d'éventualités pour l'un des joueurs

Pour répartir les gains, il faut partir de la dernière étape (Fig. 2), c'est-à-dire comme si l'un des joueurs avaient eu trois victoires, en trois, quatre ou cinq manches. Lors de la victoire, le gagnant empoche 64 pistoles, tandis que le perdant en empoche 0. La probabilité de gagner ou de perdre chaque manche est de $\frac{1}{2}$. Pour déterminer le gain du gagnant à une branche donnée, il suffit d'additionner les deux cas possibles, et de les multiplier par la probabilité de gagner. Par exemple, pour les branches $(P = 2, G = 3)$ et $(P = 3, G = 2)$, elles se croisent en $(P = 2, G = 2)$. Le gain de la première branche est 64, celui de la seconde est 0, donc le gain de la branche mère vaut $(64 + 0)\,\frac{1}{2} = 32$. De même, pour les branches $(P = 1, G = 3)$ et $(P = 2, G = 2)$, elles se croisent en $(P = 1, G = 2)$. Le gain de la première branche est 64, celui de la seconde est 32, donc le gain de la branche mère vaut $(64 + 32)\,\frac{1}{2} = 48$. L'intégralité de l'arbre (Fig. 3) s'obtient par le même algorithme de calcul, jusqu'à la première partie, pour laquelle le gain de départ est 64 pistoles.

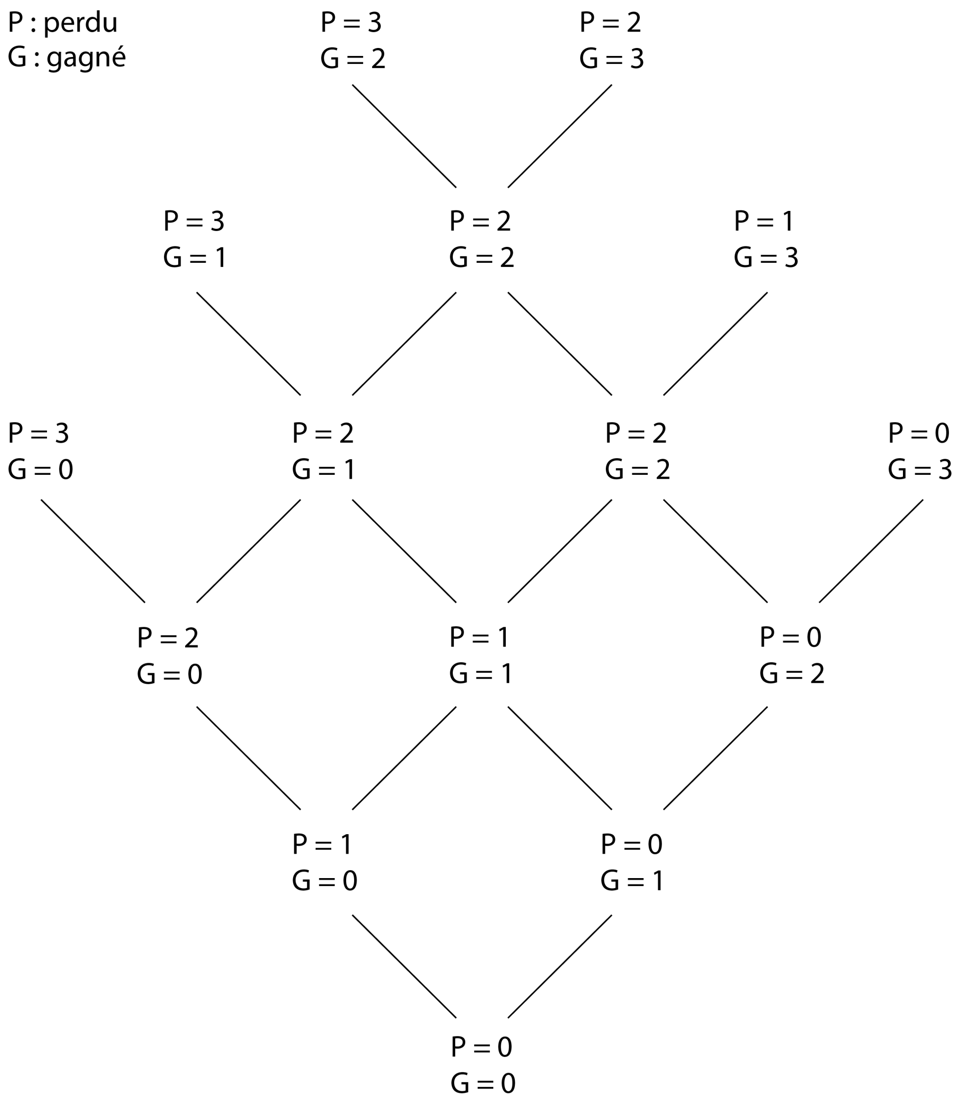

FIGURE 2 – Arbre d'éventualités inversé pour l'un des joueurs

Pour répartir équitablement le gain de Primus par rapport à Secondus, Primus empoche 44 pistoles. Il réalise un gain de 12 pistoles, tandis que Secondus

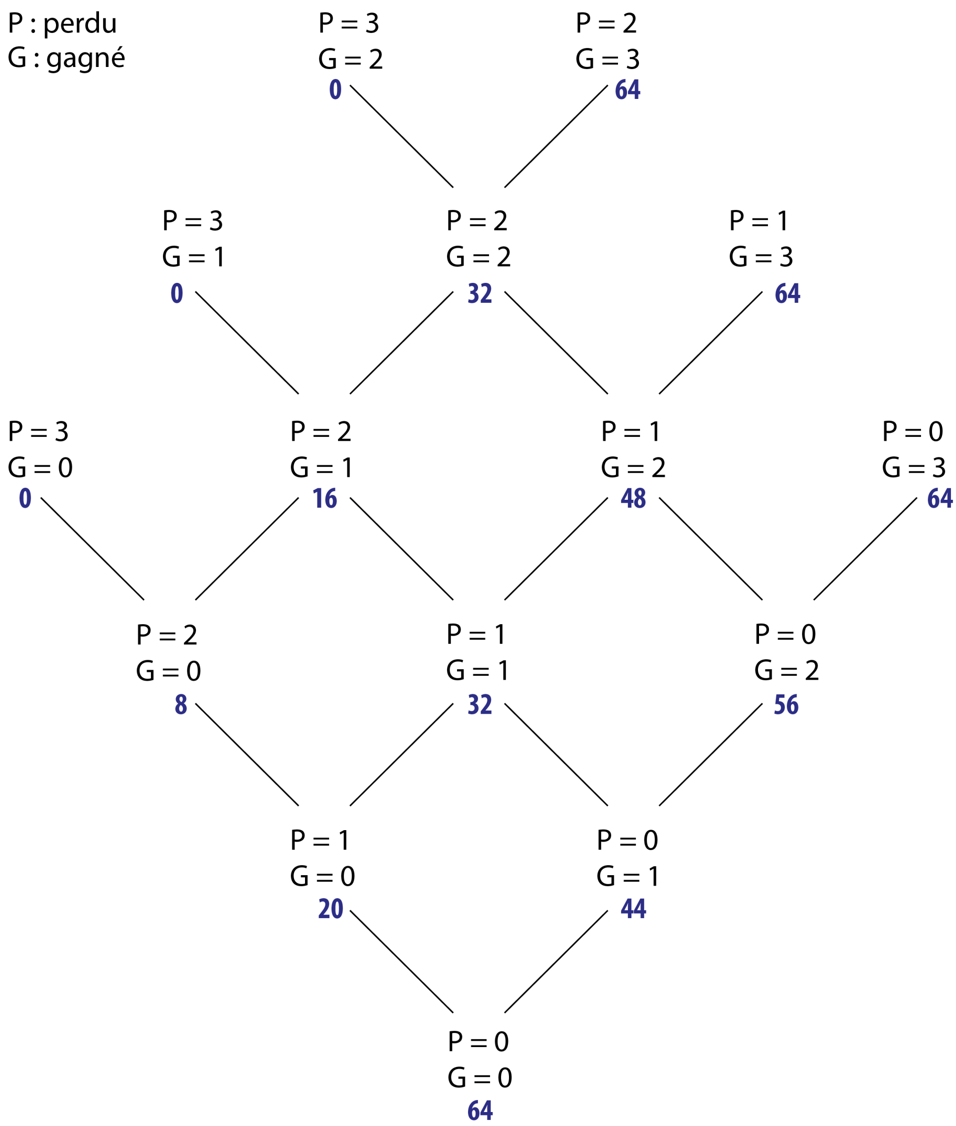

FIGURE 3 – Arbre d'éventualités inversé pour l'un des joueurs avec les gains

empoche 20 pistoles. Il réalisé une perte de 12 pistoles.

Par la résolution de ce problème, Blaise Pascal introduisit les notions d'**espérance** (le gain espéré par les joueurs) et la notion de **probabilité**.

Afin d'éviter toute confusion avec les termes utilisés en probabilités modernes, les définitions de Blaise Pascal ne doivent pas être reprises dans vos propres études. Il s'agit juste d'illustrer que les probabilités, et surtout les statistiques, permettent de répondre à n'importe quelle question de la vie courante, vie courante qui est le cœur des sciences humaines, dont fait partie la géographie.