Les vecteurs

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

Un vecteur $\vec{AB}$ est défini par :

1. sa direction (AB) ;
2. son sens A vers B ;
3. sa norme, notée $\left|\left|\vec{AB}\right|\right| = AB$

On représente un vecteur par une flèche (Fig. 1). Soient deux points A et B, le vecteur de A vers B est noté $\vec{AB}$. On dit que A est l'**origine**, et B est l'**extrémité**.

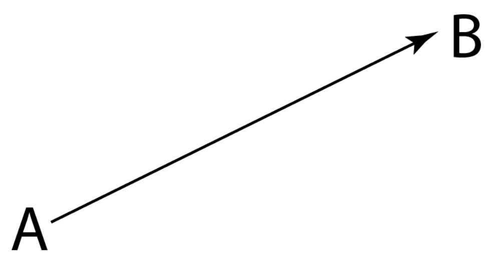

FIGURE 1 – Représentation du vecteur $\vec{AB}$

La distance AB est la norme du vecteur. Elle est notée $\left|\left|\vec{AB}\right|\right|$.

1 Égalité vectorielle

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme (Fig. 2).

$$\vec{AB} = \vec{CD} \tag{1}$$

et

$$\left|\left|\vec{AB}\right|\right| = \left|\left|\vec{CD}\right|\right| \tag{2}$$

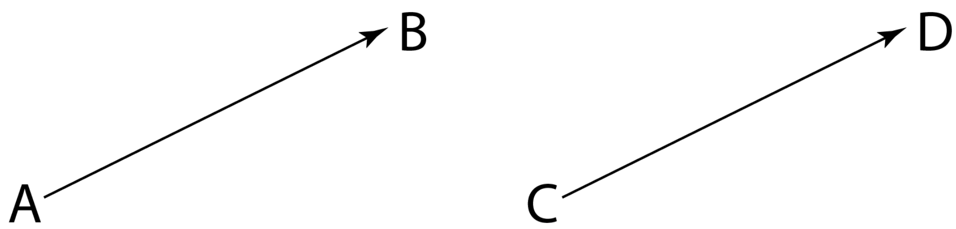

FIGURE 2 – Deux vecteurs égaux

On obtient le vecteur $\vec{CD}$ par la **translation** de $\vec{AB}$.

1. C a pour image D par la translation du vecteur $\vec{AB}$.
2. A a pour image B par la translation du vecteur $\vec{CD}$.

$ABCD$ forme un **parallélogramme**.

2 Addition de deux vecteurs : la relation de M. Chasles

Michel Chasles (1793-1880)

La relation de M. Chasles (Fig. 3)

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \tag{3}$$

Si deux vecteurs ont la même origine, alors leur sonne est la diagonale d'un parallélogramme (Fig. 4)

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{BD} \text{ et } \vec{AB} = \vec{CD} \tag{6}$$

L'opposé d'un vecteur (Fig. 5)

$$\vec{AB} = -\vec{BA} \tag{7}$$

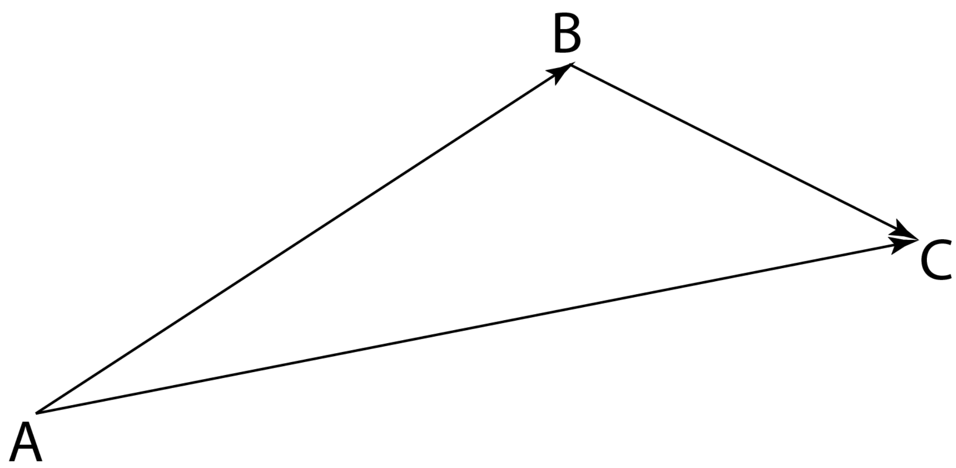

FIGURE 3 – Relation de M. Chasles 1

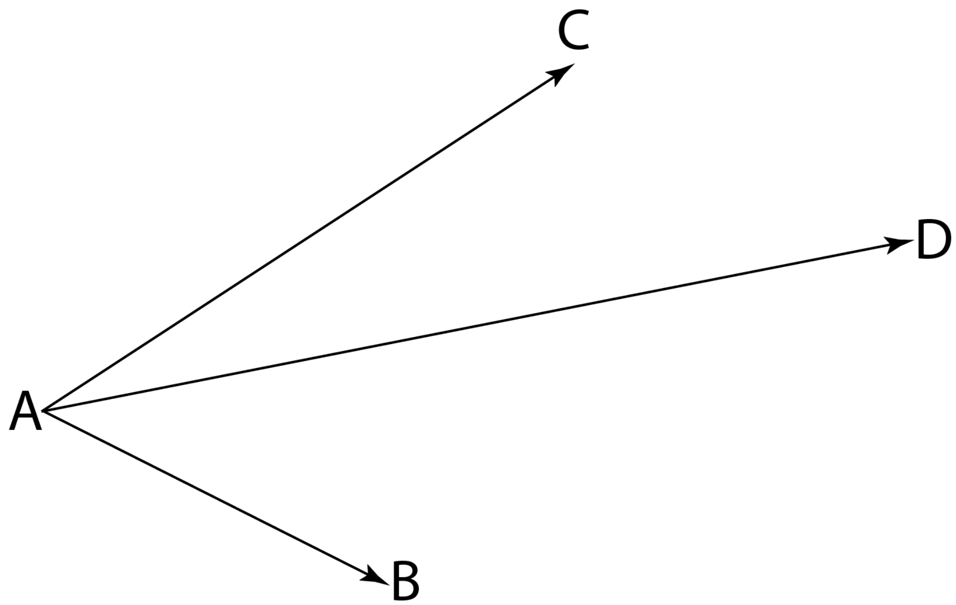

FIGURE 4 – Relation de M. Chasles 2

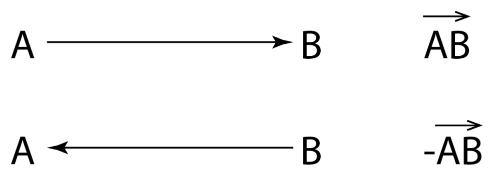

FIGURE 5 – Relation de M. Chasles 3

ou

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0} \qquad (8)$$

Le vecteur nul dans le plan est noté $\vec{0}$ et a pour coordonnées $(0, 0)$ dans le plan.

L'addition a quatre propriétés.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
2. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
3. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

N.B. $||\vec{u}|| = 1$ est un **vecteur unitaire**.

3 Coordonnées d'un vecteur dans le plan

Soit un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ **quelconque**, alors le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad (9)$$

On peut caractériser un vecteur quelconque $\vec{u}$ par ses coordonnées.

N.B. $\vec{u}$ se place n'importe où dans le plan.

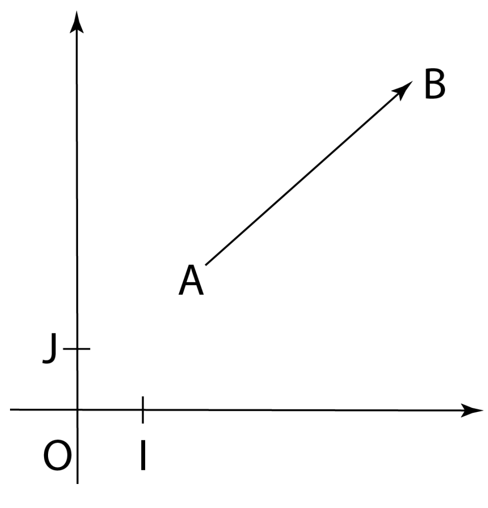

FIGURE 6 – Coordonnées d'un vecteur dans le plan

3.1 Égalité entre deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, alors leurs coordonnées sont égales (et réciproquement).

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}} \end{cases} \tag{10}$$

3.2 Milieu et vecteur

M est le milieu de $[AB]$

$$\vec{AM} = \vec{MB} \text{ et } \vec{BM} = \vec{MA} \tag{11}$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0} \tag{12}$$

$$\vec{AM}\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

3.3 Addition de deux vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

4 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Le produit d'un vecteur par un nombre réel est un vecteur.
Soient trois points A, B, C alignés, alors $\vec{AB} = k\vec{AC}$

1. Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ont la même direction et si $k > 0$, alors les deux vecteurs ont le même sens et leurs normes sont liées telles que :

$$\left|\left|\vec{AB}\right|\right| = k\left|\left|\vec{AC}\right|\right| \tag{15}$$

2. Si $\vec{AB}$ et $\vec{AB}$ ont la même direction et si $k < 0$, alors les deux vecteurs sont de sens contraire et leurs normes sont liées telles que :

$$\left|\left|\vec{AB}\right|\right| = -k\left|\left|\vec{AC}\right|\right| \tag{16}$$

En combinant les deux propriétés, on peut écrire :

$$\left|\left|\vec{AB}\right|\right| = |k|\left|\left|\vec{AC}\right|\right| \tag{17}$$

Soient deux points A et B alignés et deux autres points C et D alignés, alors $\vec{AB} = k\vec{CD}$ signifie que :

— (AB) et (CD) sont parallèles ;

— si $k < 0$, alors $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont de sens contraire ;

— si $k > 0$, alors $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont de même sens ;

— on dit que $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont **colinéaires**.

N.B. Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

N.B. $\vec{AB} = k\vec{AC}$ est une **homothétie**.
Propriétés

1. Soient $\vec{v} = k\vec{u}$ et $\vec{w} = m\vec{v}$, alors $\vec{w} = (km)\,\vec{u}$
2. $k\,(m\vec{u}) = (km)\,\vec{u}$
3. Si $\vec{w} = k\,(\vec{u} + \vec{v})$, alors $\vec{w} = k\vec{u} + k\vec{v}$.
4. Si $\vec{w} = (k + m)\,\vec{u}$, alors $\vec{w} = k\vec{u} + m\vec{u}$.
5. $1\vec{u} = \vec{u}$
6. $0\vec{u} = \vec{0}$
7. $k\vec{0} = \vec{0}$
8. $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$

avec $k \neq 0$, $m \neq 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, et $\vec{w} \neq \vec{0}$.