Les suites numériques

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

1 Définition

Une **suite numérique** est une fonction u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. De fait, on peut écrire toutes les images les unes à la suite des autres.

$$u : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto C_n \end{array} \right. \Leftrightarrow (u_n)_{n \in D_u} \tag{1}$$

Une suite numérique est définie si on connaît :

— soit son terme général, noté u_n ;

— soit sa relation de récurrence, notée u_{n+1}, et le premier terme de la suite, notée u_0.

Dans une suite, on remplace $f(x)$ par u_n.

1.1 Les variations

Une suite u_n est **croissante** sur $\mathbb{N}$, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$. De fait, il suffit de :

1. calculer $u_{n+1} - u_n$;
2. démontrer que le résultat est positif.

Par ailleurs, une suite u_n est croissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Une suite u_n est **décroissante** sur $\mathbb{N}$, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$. De fait, il suffit de :

1. calculer $u_{n+1} - u_n$;
2. démontrer que le résultat est négatif.

Par ailleurs, une suite u_n est décroissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

1.2 Les suites majorée, minorée et bornée

Une suite est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. M est appelé le **majorant** et est indépendant de n.

Une suite est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$. m est appelé le **minorant** et est indépendant de n.

Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

1.3 La convergence d'une suite

Une suite est **convergente** si u_n admet une **limite finie** lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \tag{2}$$

avec $l \in \mathbb{R}$.

Si u_n n'est pas convergente, elle est **divergente**.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \tag{3}$$

u_n n'a aucune limite.

Remarque. $\lim_{n \to -\infty} u_n$ et $\lim_{n \to l} u_n$ n'ont aucun sens puisque $n \in \mathbb{N}$ et que u_n est une suite.

1.4 L'étude d'une suite définie par récurrence

Pour illustrer l'étude, on utilise :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \tag{4}$$

1.4.1 Étude graphique d'une suite définie par récurrence

1. On cherche une fonction dont l'image u_n donne u_{n+1} tel que $f(x) = \sqrt{1 + u_n}$.
$$\forall x \in [-1, +\infty[\,, f(x) = \sqrt{1 + u_n} = u_{n+1} \tag{5}$$
On étudie les variations de la fonction.
2. On trace la courbe de la fonction f et on trace la droite d'équation $y = x$.

— Le point d'intersection, l, entre la droite et la courbe de f représente la limite lorsque x devient aussi grand que l'on veut.

$$f(u_0) = u_1 \tag{6}$$

— Par conséquent, $f(u_1) = u_2$. On passe des antécédents aux image par la droite $y = x$.

3. Ici, la suite est croissante, majorée et convergente en l.

1.4.2 Étude par le calcul d'une suite définie par récurrence

On commence par étudier les variations de u_{n+1}.

Méthode 1

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_{n-1}} \Leftrightarrow \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_{n-1}} \geq 0 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_{n-1}}\right)\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}\right)}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}} \geq 0 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}} \geq 0 \tag{9}$$

Le signe revient à étudier $u_n - u_{n-1} \geq 0$ qui est le même signe que $u_{n-1} - u_{n-2}$, ou $u_{n-2} - u_{n-3}$, ..., ou $u_1 - u_0$, or $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - 1$, donc $u_1 - u_0 \geq 0$, donc $u_n - u_{n-1} \geq 0$.

Méthode 2 : le raisonnement par récurrence

1. Initialisation : On sait que $u_1 \geq u_0$.
2. Hérédité : Soit N un entier naturel quelconque fixé. Si $u_{N+1} \geq u_N$, alors $1 + u_{N+1} \geq 1 + u_N$, alors $\sqrt{1+u_{N+1}} \geq \sqrt{1+u_N}$, car la fonction racine carrée est croissante, alors $u_{N+2} \geq u_{N+1}$.
3. Conclusion : D'après 1 et 2, $u_1 \geq u_0$ et $u_2 \geq u_1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{N+1} \geq u_N$.

Remarque. On peut utiliser le raisonnement par récurrence pour trouver un majorant, un minorant ou même déterminer s'il existe une convergence ou une divergente. Pour démontrer qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel n, il faut :

1. démontrer l'initialisation, c'est-à-dire P est vraie pour l'entier $n = 0$.
2. démontrer l'hérédité, c'est-à-dire si P est vraie pour un entier n, alors P est vraie pour l'entier suivant $n + 1$.
3. conclure que la propriété est vraie.

2 Suite arithmétique

2.1 Définition

Une suite u_n est **arithmétique** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$ et r est constant et indépendant par rapport à n. Par conséquent, r est l'écart entre deux termes. C'est la **raison** de la suite arithmétique.

2.2 Propriétés

Propriété 1. Les variations d'une suite arithmétique sont déterminées par la raison r.

— Si $r > 0$, alors la suite est croissante.

— Si $r < 0$, alors la suite est décroissante.

— Si $r = 0$, alors la suite est constante (ou stationnaire).

Propriété 2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

Propriété 3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p)\,r$

Propriété 4. La somme des termes S dépend du premier terme de la somme u_n, du second terme de la somme u_p, et du nombre de terme n.

$$S = \frac{(u_n + u_p)\,n}{2} \tag{10}$$

Propriété 5. Une suite u_n est arithmétique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.

Propriété 6. Les suites arithmétiques sont **toujours divergentes**.

3 Suite géométrique

3.1 Définition

Une suite u_n est **géométrique** si $\exists q \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$, avec q la **raison**, une constante indépendante de n.

3.2 Propriétés

Propriété 1. $\exists q\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$

Propriété 2. Si $u_0 = 0$ ou si $q = 0$, alors tous les termes sont égaux à 0.

Propriété 3. $\forall n \in \mathbb{N}, q \neq 0, u_n = u_0 + q^n$

Propriété 4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, u_n = u_p + q^{n-p}$ avec $q \neq 0$ et $u_n \neq 0$.

Propriété 5. La somme des termes S dépend une premier terme de la somme u_p et du nombre de terme n.

$$S = u_p \frac{q^{n+1}}{1-q} \tag{11}$$

Propriété 6. Une suite u_n est géométrique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = {u_{n+1}}^2$

Propriété 7. Une suite géometrique peut être convergente ou divergente. Le calcul de $\lim_{n\to+\infty} q^n$ peut donner quatre cas possibilités dépendant de la raison q.

— Si $q \leq 1$, alors la limite n'existe pas. La suite est divergente.

— Si $|q| < 1$, alors Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. La suite converge en 0.

— Si $q = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$. La suite converge en 1.

— Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. La suite est divergente.

4 Démonstrations par récurrence

4.1 Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 7^n - 1$ est divisible par 6

1. Initialisation :
   — Pour $n = 0$, $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
   — Pour $n = 0$, $7^n - 1|6$ est vraie.
2. Hérédité :
   — Pour $n + 1$, $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7\left(7^n - 1\right) + 6$, or $7^n - 1|6$ et $6|6$, donc la proposition est vraie au rang $n + 1$.
3. Conclusion :
   — La proposition $\forall n \in \mathbb{N}, 7^n - 1|6$ est vraie.

4.2 Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11

1. Initialisation :
   — Pour $n = 1$, $5^2 - 3^1 = 25 - 3 = 22$
   — $22|11$, donc pour $n = 1$, $5^{2n} - 3^n|11$ est vraie.
2. Hérédité :

— Pour $n+1$

$$5^{2(n+1)} - 3^{n+1} = 5^{2n+2} - 3^{n-1} = 25 \times 5^{2n} - 3 \times 3^{n} \qquad (12)$$

Pour factoriser l'équation obtenue, on la complète avec $25 \times 3^n - 25 \times 3^n$

$$25\times5^{2n}-3\times3^{n}+25\times3^{n}-25\times3^{n} = 25\left(5^{2n}-3^{n}\right)+3^{n}\left(-3+25\right) = 25\left(5^{2n}-3^{n}\right)+22\times3^{n} \qquad (13)$$

or $5^{2n} - 3^n|11$ et $22|11$, donc la proposition est vraie au rang $n+1$.

3. Conclusion :

— La proposition $\forall n \in \mathbb{N}^*, 5^{2n} - 3^n|11$ est vraie.