Notation indicielle

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

1 La notion d'indices

Pourquoi utiliser des indices ? Pour comprendre l'enjeu, on peut prendre l'exemple d'une suite de nombres ordonnées : $2, 6, 3, 1, 11, 25, 17, 5$. La manière naturelle d'appeler les nombres est de faire correspondre chaque nombre à une lettre de l'alphabet : $a = 2$, $b = 6$, $c = 3$, $d = 1$, $e = 11$, $f = 25$, $g = 17$ et $h = 5$. Cette solution est acceptable et envisageable si l'ensemble des nombres est fini, et possède un cardinal relativement petit, ici il vaut 8. Que faire si l'ensemble correspond à plus de 26 nombres ? Une solution serait de choisir les lettres majuscules, mais on ne fait que reculer le problème. Que faire au-delà de 52 ? On envisage de changer l'alphabet, et prendre l'alphabet grec, cyrillique, arabe, *etc*. Il est évident que cette solution ne convient pas à des ensembles de nombres finis dont le cardinal est grand, et que dire des ensembles infinis ? Par ailleurs, l'ensemble étudié est **ordonné** suivant une suite précise de nombres. Dit autrement, la position des nombres y est fondamental. Si on met en œuvre le système de plusieurs alphabets combinés, comment retrouver facilement le nombre à la position 33 ou 1 000 000, par exemple ? Ce n'est pas impossible, mais c'est compliqué. Que faire si on étudie deux ou n suites ? C'est là qu'entre en scène la notion d'**indice**.

On donne une lettre à l'ensemble étudié, par exemple U. On note avec un u minuscule un élément de cet ensemble. On associe à u un indice i correspondant à un nombre naturel ($i \in \mathbb{N}$) indiquant l'ordre par la position de l'élément dans la suite. Ainsi, si on reprend la liste utilisée, on peut écrire : $u_1 = 2$, $u_2 = 6$, $u_3 = 3$, $u_4 = 1$, $u_5 = 11$, $u_6 = 25$, $u_7 = 17$ et $u_8 = 5$.

Les avantages de la notation indicielle deviennent flagrants. Il est possible de compléter l'ensemble par un nouveau nombre u_9 par exemple, mais il est surtout possible d'appeler la suite avec une notation abrégée : u_i ou u^i. On remarque que, contrairement aux usages courants, en mathématiques, un indice peut être en position inférieure (indice inférieur), ou en position supérieure (indice supérieur). En fonction des outils mathématiques, la position de l'indice a plus ou moins d'importance. Il serait tentant de n'utiliser que l'indice inférieur, l'indice dans son sens courant, afin d'éviter la confusion avec une puissance. Malheureusement, cela n'est pas toujours possible, notamment dans le calcul tensoriel dans lequel la position des indices indique la manière même de procéder au calcul. Pour lever l'ambiguïté, on utilise simplement des parenthèses, et on précise bien quelle lettre correspond à un indice : $(u^i)^2$, par exemple, se lit u indice i puissance 2. C'est une habitude à prendre, tous les exposants ne sont pas des puissances.

Dans un système algébrique, La position de l'indice, lorsque celle-ci a une importance dans les calculs, informe sur la **covariance** ou sur la **contravariance** d'un vecteur. Une suite avec un indice inférieur est dite covariante. Une suite avec un indice supérieur est dite contravariante. Chacune d'elle correspond à un système de projection spécifique.

2 L'opérateur $\sum$

Dans les problèmes mathématiques, il est fréquent de devoir additionner tous les termes d'une suite. On aurait ainsi : $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8$, mais, une nouvelle fois, que faire si la suite contient énormément de terme ? La solution consiste à utiliser l'opérateur $\sum$. On peut écrire S de manière abrégée : $S = \sum_{i=1}^{i=7} u_i$.

Cet opérateur se lit de la manière suivante : i est l'indice ; sous l'opérateur, $i = 1$ indice par quel nombre on débute d'addition, ici le nombre à la position 1 ; au-dessus de l'opérateur, $i = 7$ indique le dernier nombre de l'addition. Il n'existe aucune rupture, aucune discontinuité entre 1 et 7 ; tous les indices compris dans cet intervalle ouvert sont pris en compte, à savoir $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ici

$$S = \sum_{i=1}^{i=7} u_i = u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8 = 2+6+3+1+11+25+17+5 = 65 \tag{1}$$

On note que u_8, pourtant existant dans l'exemple retenu, est exclu de cette somme.

Il faut bien lien les indices utilisés, car l'opérateur $\sum$ est faussement évident. On ajoute les indices j et k, qui sont fréquemment rencontrés. Leur combinaison avec i peut être source d'erreur de lecture. Si i, j et k, utilisés avec la variable u, sont dans des sommes différentes, il est possible d'écrire indistinctement :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{k=1}^{n} u_k \tag{2}$$

Dans ce cas, on opère simplement un changement d'indice appliqué à u. En revanche, si i et j sont utilisés dans un même opérateur la lecture est différente.

$$\sum_{j=1}^{n} a_i = na_i \tag{3}$$

En général, n est le nombre d'éléments d'un ensemble. j est placé sous l'opérateur, c'est par conséquent l'indice de sommation, or i est l'indice donné à la variable u. Comme $i \neq j$, la sommation s'effectue sur l'un des termes de la suite n fois, ce qui revient à la multiplication d'une constante. Par exemple, on veut multiplier par $a = 3$ le terme $i = 5$. On écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{3} u_5 = u_5 + u_5 + u_5 = 3u_5 = 3 \times 11 = 33 \tag{4}$$

Plus généralement, on utilise souvent :

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n \tag{5}$$

et, pour la somme d'une constante :

$$\sum_{j=1}^{n} i = ni \tag{6}$$

Bref, il faut faire très attention aux indices pour savoir le calcul à opérer.

L'opérateur $\sum$ possède quelques propriétés à connaître :

— $\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$

— $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

— $\sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{i=p}^{r-1} u_i + \sum_{i=r}^{q} u_i$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $p < r \leq q$

N.B. Contrairement à ce qui a été énoncé pour expliquer la notion, l'indice i peut démarrer à n'importe quel nombre entier relatif, même s'il est d'usage de n'utiliser que les entiers naturels. Par contre, il ne peut en aucun cas être un nombre réel ou complexe.

3 L'opérateur $\prod$

De manière analogue à l'opérateur $\sum$, l'expression

$$\prod_{i=1}^{n} u_i \tag{7}$$

se lit le produit des termes u indice i de $i = 1$ à $u = n$, c'est-à-dire :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 \times \ldots \times u_n \tag{8}$$

Il est à noter que :

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = n! \tag{9}$$

Il s'agit d'une autre écriture de la factorielle d'un nombre entier n.

L'opérateur $\prod$ possède quelques propriétés à connaître :

— $\prod_{i=p}^{q} u_i = \prod_{i=p}^{r-1} u_i \times \prod_{i=r}^{q} u_i$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $p < r \leq q$

— $\prod_{i=p}^{q} (u_i \times v_i) = \prod_{i=p}^{q} u_i \times \prod_{i=p}^{q} v_i$

— $\prod_{i=p}^{q} \frac{u_i}{v_i} = \frac{\prod_{i=p}^{q} u_i}{\prod_{i=p}^{q} v_i}$ avec $\prod_{i=p}^{q} v_i \neq 0$

— $\left(\prod_{i=p}^{q} u_i\right)^n = \prod_{i=p}^{q} u_i^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

N.B. L'opérateur $\prod$ possède davantage de contraintes que l'opérateur $\sum$.