Cours d'analyse de données en géographie
Niveau Master 1 - GEANDO
Pour commencer avec de bonnes bases…
Probabilités

Maxime Forriez[1,a]

[1] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

1er juillet 2025

1 Probabilité dans le cas des tirages successifs

1.1 L'indépendance des événements : tirages successifs avec remise

1.1.1 Exercice 1

Dans un jeu traditionnel de 32 cartes, on tire une carte au hasard.

1. Calculer la probabilité de tirer un as. On définit cet événement par E. Calculer la probabilité de tirer une carte noire. On définit cet événement par F. E et F sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité de tirer une figure. On définit cet événement par E. Calculer la probabilité de tirer un valet. On définit cet événement par F. E et F sont-ils indépendants ?

1.1.2 Exercice 2

Soient deux événements E et F tels que :

1. $\Pr(E) = 0,4$
2. $\Pr(F) = 0,3$
3. $\Pr(E \bigcup F) = 0,58$

E et F sont-ils indépendants ?

1.1.3 Exercice 3

On lance deux fois de suite un dé bien équilibré. On note le premier événement E. On note le second événement F.

1. E : le 4 sort en premier sur deux jets. F : le 6 sort en second sur deux jets.
2. E : le 1 sort en premier. F : le 1 sort deux fois.
3. E : le 3 sort une seule fois. F : le 1 sort une seule fois.

1.2 Les tirages successifs sans ou avec remise

1.2.1 Exercice 1

Soit une urne contenant 5 boules noires et 2 boules blanches. On tire **successivement sans remise** trois boules.

1. Quels sont les cas possibles ?
2. Quelle est la probabilité E de tirer trois boules noires ?
3. Quelle est la probabilité F de tirer **au moins** deux boules noires ?

1.2.2 Exercice 2

Une urne contient 3 boules rouges et 1 boule blanche. On tire **successivement** deux boules de l'urne **avec remise**.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.
2. Calculer la probabilité F d'obtenir deux boules rouges ?
3. Calculer la probabilité G d'obtenir deux boules de couleur différente ?

1.2.3 Exercice 3

Une urne contient 3 boules noires et 1 boule blanche. On tire **simultanément** deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que les deux boules soient noires ?
2. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleur différente ?

1.2.4 Exercice 4

Une urne contient 3 boules noires et 1 boule blanche.On tire **successivement** deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité E que les deux boules soient noires ?
2. Quelle est la probabilité F que les deux boules soient de couleur différente ?

1.2.5 Exercice 5

On tire **successivement** et **sans remise** trois boules de l'urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.

1. Calculer la probabilité E de tirer les trois boules blanches ?
2. Quelle est la probabilité F de tirer **exactement** deux boules blanches ?
3. Quelle est la probabilité G de tirer **une** seule boule blanche ?
4. Quelle est la probabilité H de **ne pas tirer** de boule blanche ?

1.2.6 Exercice 6

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de trois boules, 2 blanches et 1 noire. On choisit au hasard une des deux urnes. On tire une boule de cette urne. Une urne doit contenir au moins une boule. Comment disposer les boules dans les urnes pour que la probabilité de tirer la boule noire soit la plus faible possible ?

1.3 Cas pratique 1

On relève deux défectuosités, notées h et s, affectant les pièces fabriquées par une usine grâce à une série de tests.

— Parmi les 80 % des pièces qui présentent le défaut h, 15 % ont le défaut s.

— 5 % des pièces sans le défaut h présentent le défaut s.

On définit les événements suivants.

— H : la pièce présente le défaut h.

— S : la pièce présente le défaut s.

1. Combien valent les probabilités $\Pr(S/H)$ et $\Pr\left(S/\bar{H}\right)$? En déduire la valeur de $\Pr\left(\bar{S}/H\right)$ et $\Pr\left(\bar{S}/\bar{H}\right)$.
2. Calculer la probabilité E qu'une pièce prise au hasard présente les deux défauts.
3. Calculer $\Pr\left(H \cap \bar{S}\right)$. En déduire la probabilité que la pièce présente le défaut s.
4. Une pièce présente le défaut s. Quelle est la probabilité qu'elle présente le défaut h ?
5. Réaliser l'arbre pondéré à partir de $\Pr(S)$ et $\Pr\left(\bar{S}\right)$.

1.4 Cas pratique 2

75 % des destinations de vacances au bord de l'eau concernent la mer.

25 % des destinations de vacances au bord de l'eau concernant le lac.

On constate que les $\frac{9}{10}$ qui passent leurs vacances près d'un lac sont équipés d'une planche à voile et $\frac{1}{10}$ de baigneurs.

À la mer, 60 % sont des baigneurs et 40 % sont des véliplanchistes.

On interroge au hasard une personne qui part au bord de l'eau.

On note :

— M l'événement « Partir à la mer » ;
— L l'événement « Partir au bord d'un lac » ;
— B l'événement « Baigneur » ;
— V l'événement « Véliplanchiste ».

Il faut remarquer que L est l'événement contraire de M, et *vice versa*, et que V est l'événement contraire de B, et *vice versa*

1. Quelle est la probabilité qu'elle aille à proximité d'un lac ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle soit équipée d'une planche à voile en sachant qu'elle passe ses vacances au bord de la mer ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle parte en vacances près de la mer et qu'elle soit équipée d'une planche à voile ?
4. Quelle est la probabilité qu'elle passe ses vacances au bord d'un lac et qu'elle fasse de la planche à voile ?
5. Quelle est la probabilité qu'elle fasse de la planche à voile ?
6. Quelle est la probabilité qu'elle passe ses vacances au bord d'un lac en sachant qu'elle pratique la planche à voile ?
7. Construire l'arbre pondéré à partir de $\Pr(V)$ et $\Pr(B)$?

2 Probabilité dans le cas des tirages simultanés

De manière assez classique, les exercices proposent d'étudier de tirage au sein d'un jeu de cartes. Pour bien comprendre les exercices, il faut rappeler que :

— les couleurs des cartes sont le cœur (rouge), le carreau (rouge), le pique (noir) et le trèfle (noir) ;
— les valeurs des cartes sont as, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi ;
— un jeu de 32 cartes contient toutes les couleurs, mais les valeurs sont limitées à sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi, as ;
— les deux jokers ne sont jamais utilisés dans les exercices.

2.1 Exercice 1

On tire **simultanément** quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de tirages différents peut-on effectuer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre valets ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre trèfles ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir le valet de pique ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes de couleurs différentes ?

2.2 Exercice 2

On tire **simultanément** quatre cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω désigne l'ensemble des tirages différents possibles.

1. Calculer le cardinal de Ω.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes de différente couleur ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes de la même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes noires ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une carte rouge ?

2.3 Exercice 3

On tire **simultanément** huit cartes dans un jeu de 32 cartes. L'univers Ω désigne l'ensemble des tirages différents possibles.

1. Calculer le cardinal de Ω.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir huit cartes de cœur ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir toutes les cartes d'une même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre cartes noires ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre dames et quatre valets ?

2.4 Exercice 4

On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir **exactement** deux fois « pile » ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois « face » ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » ?

2.5 Exercice 5

Un cadenas est constitué de deux molettes comportant les chiffres de 0 à 9. Quelle est la probabilité d'obtenir le bon code au hasard ?

2.6 Exercice 6

Un cadenas est constitué de trois molettes comportant les chiffres de 0 à 9.

1. Quelle est la probabilité en faisant le code au hasard de trouver la combinaison qui ouvre le cadenas ?
2. Quelle est la probabilité pour que les chiffres du code soient corrects, mais dans un mauvais ordre ?

2.7 Exercice 7

Un mot de passe n'ayant pas forcément de signification est formé de cinq lettres prises au hasard dans l'alphabet français (26 lettres).

1. Quelle est la probabilité de trouver le bon code en formulant un mot de passe au hasard ?
2. Quelle est la probabilité que les lettres soient correctes, mais pas dans le bon ordre ?
3. Quelle est la probabilité que le mot de passe ait une signification en admettant qu'il existe 10 000 mots constitués de cinq lettres rapportés dans les dictionnaires ?

3 Lois de probabilité d'une variable aléatoire

3.1 Exercice 1

Une urne contient trois boules noires et une boule rouge. On tire **successivement** et **sans remise** les quatre boules de l'urne.

On pose X la variable aléatoire associée au rang de la boule rouge.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer la variance et l'écart type de X.

3.2 Exercice 2. Manipuler une loi de probabilité

1. Recopier et compléter le tableau suivant (tab. 1) en donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

k	-2	-1	0	1	2
$\Pr(x=k)$	$\frac{1}{3}$	?	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

TABLE 1 – Loi de probabilité de la variable X

2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'écart type de la variable aléatoire X.
4. Dessiner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

3.3 Exercice 3

Soit X une variable aléatoire de la loi de probabilité suivante (tab. 2).

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{1}{12}$ et sa variance est $V(X) = \frac{107}{144}$.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c.
2. Dessiner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

k	-1	0	1
$\Pr(x=k)$	a	b	c

TABLE 2 – Loi de probabilité de la variable X

4 Loi de probabilité binomiale. Expérience à deux issues

La loi de probabilité binomiale doit vous servir de modèle afin de comprendre les autres lois de probabilité. Il faut être très attentif à ces exercices types.

4.1 Exercice 1

1. On lance un dé bien équilibré cinq fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois le chiffre 6 ?
2. On lance le dé n fois.

   a Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois le chiffre 6 ?

   b Combien faut-il lancer de fois le dé pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois le chiffre 6 soit supérieure à 0,99 ?

4.2 Exercice 2

On lance une pièce de monnaie **non truqué** quatre fois de suite.

1. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir « pile » au cours de ces quatre lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » ?
3. Combien de fois faut-il lancer la pièce de monnaie pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » soit supérieure à 0,99 ?

4.3 Exercice 3

On lance une pièce de monnaie **truquée** dix fois de suite. La probabilité d'obtenir « pile » au cours d'un lancer est 0,68.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement...

   a ... 4 fois « pile » ;

   b ... 7 fois « face ».
2. Quelle est la probabilité de **ne pas** obtenir « face » ? En déduire la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « face ».
3. Combien de fois faut-il lancer la pièce pour que la probabilité d'obtenir **au moins** une fois « pile » soit supérieure à 0,99 ?

Table des figures

Liste des tableaux

1 Loi de probabilité de la variable X 6
2 Loi de probabilité de la variable X 7

Table des matières

1 Probabilité dans le cas des tirages successifs 1

1.1 L'indépendance des événements : tirages successifs avec remise 1

1.1.1 Exercice 1 1

1.1.2 Exercice 2 1

1.1.3 Exercice 3 2

1.2 Les tirages successifs sans ou avec remise 2

1.2.1 Exercice 1 2

1.2.2 Exercice 2 2

1.2.3 Exercice 3 2

1.2.4 Exercice 4 2

1.2.5 Exercice 5 3

1.2.6 Exercice 6 3

1.3 Cas pratique 1 3

1.4 Cas pratique 2 3

2 Probabilité dans le cas des tirages simultanés 4

2.1 Exercice 1 4

2.2 Exercice 2 5

2.3 Exercice 3 5

2.4 Exercice 4 5

2.5 Exercice 5 5

2.6 Exercice 6 5

2.7 Exercice 7 6

3 Lois de probabilité d'une variable aléatoire 6

3.1 Exercice 1 6

3.2 Exercice 2. Manipuler une loi de probabilité 6

3.3 Exercice 3 6

4 Loi de probabilité binomiale. Expérience à deux issues 7

4.1 Exercice 1 7

4.2 Exercice 2 7

4.3 Exercice 3 7