

Annexe I

Théorème central limite

Le théorème central limite (ou théorème de la limite centrale) établit la convergence en loi de la somme de variables aléatoires indépendantes vers la loi normale sous des hypothèses faibles.

I.1 Théorème central limite (première forme)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, indépendantes, de même loi, d'espérance mathématique μ et d'écart type σ .

Lorsque n tend vers l'infini, la loi de la variable aléatoire :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(x_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (\text{I.1})$$

tend vers la loi normale, centrée, réduite $N(0, 1)$.

I.2 Théorème central limite ou théorème de Lindeberg (forme générale)

(X_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes, non nécessairement de même loi, d'espérance mathématique μ_i et d'écart type σ_i . Soit $F_i(x)$ la fonction de répartition de $X_i - \mu_i$.

On pose :

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (\text{I.2})$$

Jarl Waldemar
Lindeberg (1876-
1932)

Si la limite de $\frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > S_n} x^2 dF_i(n)$ est égale à zéro, lorsque n tend vers l'infini, alors la variable aléatoire $\frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)$ converge en loi vers une variable aléatoire U suivant la loi normale $N(0, 1)$. Les variables aléatoires qui figurent dans la somme sont uniformément petites.

Le théorème central limite possède de nombreuses applications en théorie de l'estimation.

Bibliographie