Trigonométrie

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

19 octobre 2025

1 Le triangle rectangle

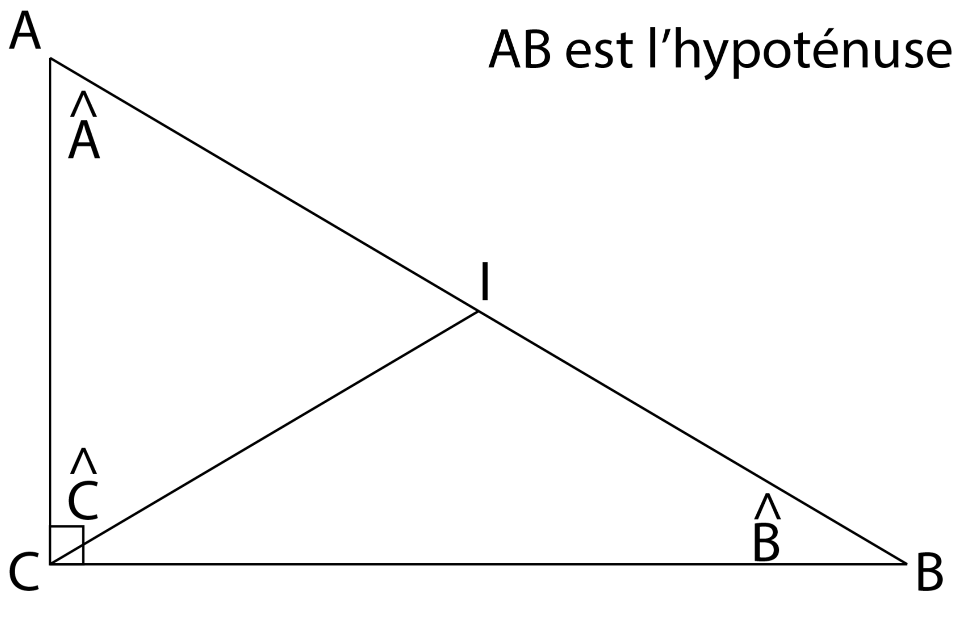

FIGURE 1 – Le triangle rectangle

1.0.1 Théorème de Pythagore

Pythagore (vers 580- vers 495 a.-C.)

Théorème Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse, c'est-à-dire le côté le plus long, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (Fig. 2). Si on prend la figure 1, on obtient :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \tag{1}$$

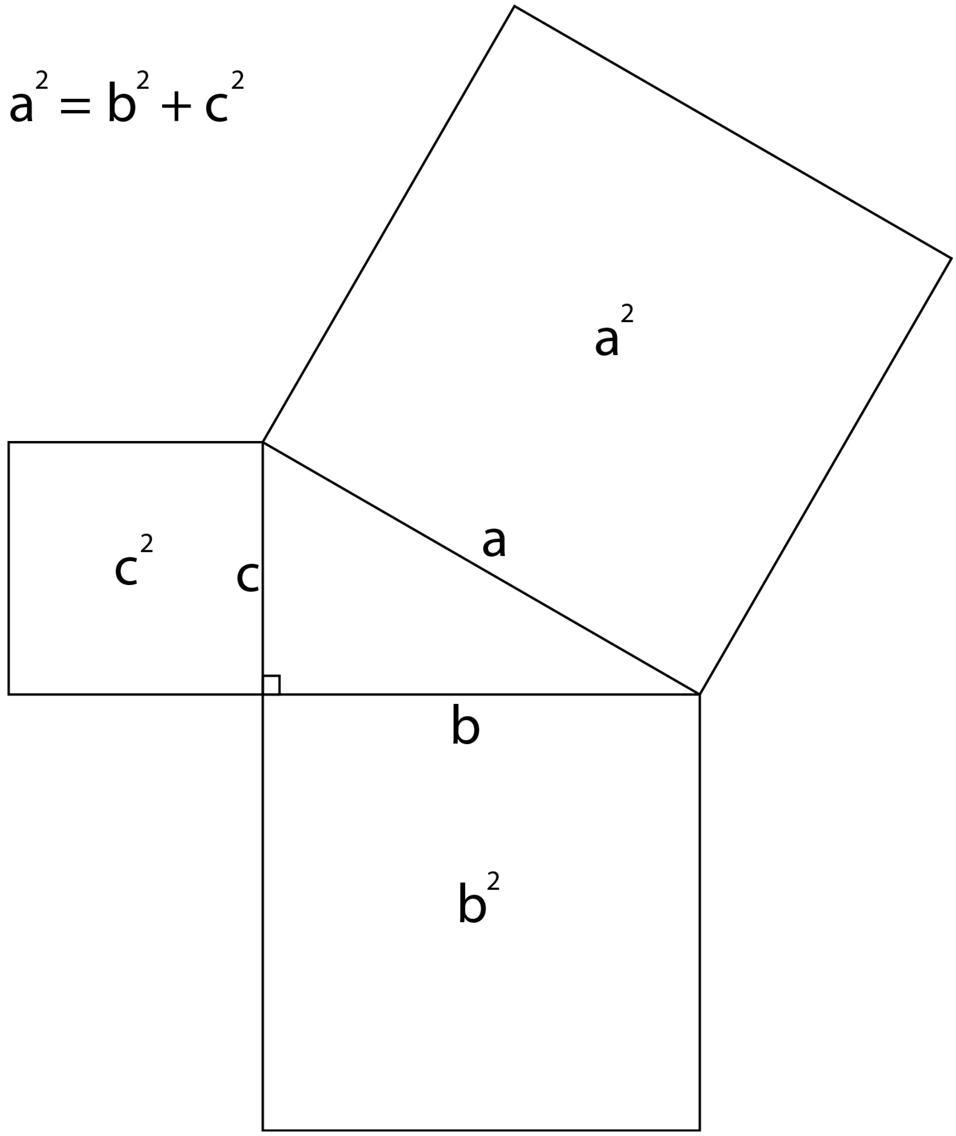

FIGURE 2 – Théorème de Pythagore

Réciproque du théorème Si, dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

1.0.2 La propriété de la médiane

Propriété Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de celui-ci. D'après la figure 1, on obtient :

$$CI = \frac{1}{2}AB \tag{2}$$

Réciproque de la propriété Si, dans un triangle, la médiane relative à un côté mesure la moitié de ce côté, alors ce triangle est rectangle.

1.0.3 Propriété du cercle circonscrit

Propriété Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

Réciproque de la propriété Si un triangle est inscrit dans un cercle et a un côté diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

1.0.4 Lignes trigonométriques dans un triangle rectangle

Les lignes trigonométriques sont présentées à partir de la figure 1.

1. Le cosinus des angles aigus du triangle est noté $\cos$. Il faut le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse.

$$\cos\hat{A} = \frac{AC}{AB} \tag{3}$$

et

$$\cos\hat{B} = \frac{BC}{AB} \tag{4}$$

2. Le sinus des angles aigus du triangle est noté $\sin$. Il faut le rapport entre le côté opposé et l'hypoténuse.

$$\sin\hat{A} = \frac{BC}{AB} \tag{5}$$

et

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} \tag{6}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \cos\hat{A} &= \sin\hat{B} \\ \cos\hat{B} &= \sin\hat{A} \end{aligned} \tag{7}$$

3. La tangente est le rapport entre le côté opposé et le côté adjacent.

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC} \tag{8}$$

et

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{BC} \tag{9}$$

On remarque que :

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{\sin hatA}{\cos hatA} \tag{10}$$

et

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{AB} \times \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{AC}{AB}}{\frac{BC}{AB}} = \frac{\sin hatB}{\cos hatB} \tag{11}$$

4.

$$\cot \hat{A} = \frac{AC}{BC} \tag{12}$$

et

$$\cot \hat{B} = \frac{BC}{AC} \tag{13}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \tan \hat{A} = \cot \hat{B} \\ \tan \hat{B} = \cot \hat{A} \end{aligned} \tag{14}$$

5. $\cos^2\hat{A} + \sin^2\hat{A} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{AC^2+BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$. De même, $\cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B} = 1$.
6. $\left(\sin\hat{A} + \cos\hat{A}\right)^2 + \left(\sin\hat{A} - \cos\hat{A}\right)^2 = \sin^2\hat{A} + 2\sin\hat{A}\cos\hat{A} + \cos^2\hat{A} + \sin^2\hat{A} - 2\sin\hat{A}\cos\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 2\sin^2\hat{A} + 2\cos^2\hat{A} = 2\left(\sin^2\hat{A} + \cos^2\right) = 2$. De même, $\left(\sin\hat{B} + \cos\hat{B}\right)^2 + \left(\sin\hat{B} - \cos\hat{B}\right)^2 = 2$.

2 Le radian

Le radian permet de mesurer un angle à partir d'un cercle ;

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \tag{15}$$

et

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \tag{16}$$

Degré	0°	15°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

TABLE 1 – Conversion entre les degrés et les radians

La mesure de l'angle en radians correspond à la longueur de l'arc de cercle formée par l'angle sur le cercle de centre O et de rayon 1.

Le radian permet d'orienter un angle.

- Si on l'oriente dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors l'angle a un **sens positif** ou **direct**.
- Dans le cas contraire, le **sens** est **négatif** ou **indirect**.

Tout couple de vecteurs $\alpha = \left(\vec{OM}, \vec{ON}\right)$ détermine un angle orienté.

$$\left|\left|\vec{OM}\right|\right| = \left|\left|\vec{ON}\right|\right| = 1 \tag{17}$$

$$\left(\vec{OM}, \vec{ON}\right) = -\left(\vec{ON}, \vec{OM}\right) \tag{18}$$

L'ensemble des mesures de l'angle α est $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Tous les angles sont égaux à 2π près.

La **mesure principale** d'un angle orienté est comprise entre $-\pi$ et π : $]-\pi, \pi]$ par convention.

3 Le cercle trigonométrique

Soient $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé tel que $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, et $\left|\left|\vec{i}\right|\right| = \left|\left|\vec{j}\right|\right| = 1$, alors l'unité u de longueur est le rayon r du cercle $\mathcal{C}$ (Fig. 3). Le périmètre p du cercle vaut $p = 2\pi r$. Comme $r = 1\ u$, $p = 2\pi\ u$ ou $p = 2\pi$. On enroule une droite réelle (D) sur le cercle $\mathcal{C}$. On définit une fonction $\mathbb{R} \to \mathcal{C}$. Un réel est associé à un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{C} \\ x \mapsto M \end{array}\right. \tag{19}$$

x a pour image M. La fonction associe des nombres réels et des points. Chaque point M a une infinité d'antécédents. Une infinité de valeur X a pour image le même point M du cercle. Chacun d'eux s'appelle une mesure de l'arc orienté $\hat{AM}$.

$$\hat{AM} = x + 2k\pi \tag{20}$$

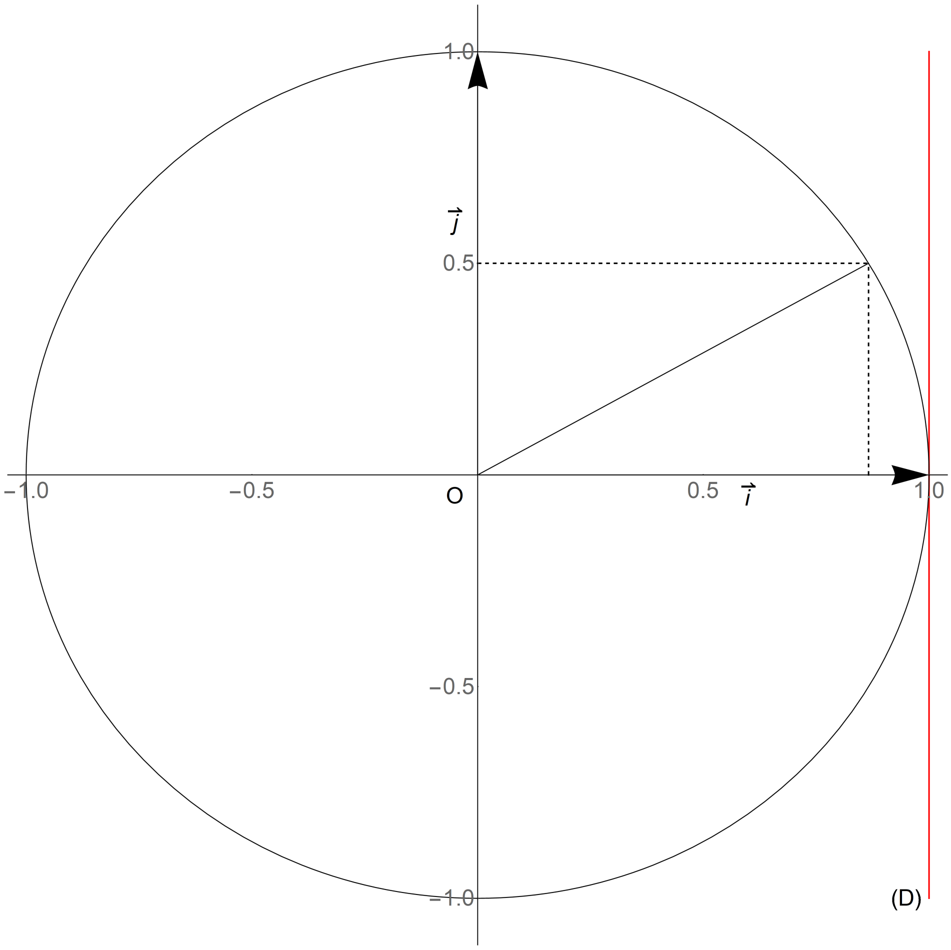

FIGURE 3 – Cercle trigonométrique

avec $k \in \mathbb{Z}$. L'arc orienté est une unité de longueur. L'écart est un multiple de 2π.

x est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{OA}, \vec{OM}\right)$.

D'après le théorème de Pythagore (Fig.4) :

$$\left|\left|\vec{OM}\right|\right|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \tag{21}$$

or $\left|\left|\vec{OM}\right|\right| = 1$, donc :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{22}$$

D'après le théorème de Thalès (Fig.4) :

Thalès (vers 625-620 – vers 548-545 a.-C.)

$$\frac{\cos(x)}{OM} = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} \Leftrightarrow \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{23}$$

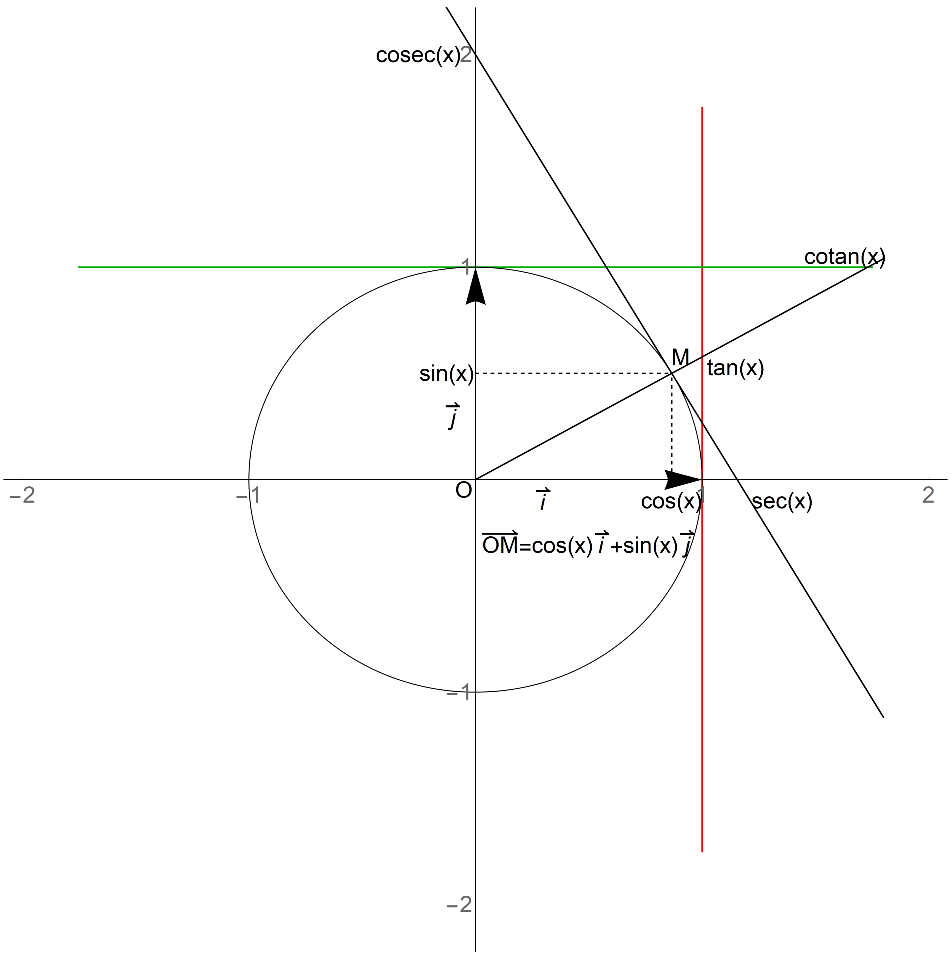

FIGURE 4 – Cercle trigonométrique avec la totalité des lignes trigonométriques

De même, pour la cotangente (Fig.4) :

$$\frac{\sin(x)}{OM} = \frac{\cos(x)}{\cot(x)} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\cos(x)}{\cot(x)} \Leftrightarrow \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \tag{24}$$

or $tan\,(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, donc :

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \tag{25}$$

ce qui explique que la cotangente soit peu utilisée.

La sécante est l'intersection entre la tangente en x et l'axe des abscisses (Fig.4).

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \tag{26}$$

La cosécante est l'intersection entre la tangente en x et l'axe des ordonnées (Fig.4).

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \tag{27}$$

On emploie peu la sécante et la cosécante pour les mêmes raisons que la cotangente.

Les lignes trigonométriques sont des fonctions (Fig. 4), dont les domaines de définition sont :

— pour $f(x) = \cos(x)$, $D_f = \mathbb{R}$;
— pour $f(x) = \sin(x)$, $D_f = \mathbb{R}$;
— pour $f(x) = \tan(x)$, $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
— pour $f(x) = \cot(x)$, $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
— pour $f(x) = \sec(x)$, $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
— pour $f(x) = \csc(x)$, $D_f = \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les lignes trigonométriques sont périodiques :

— pour $f(x) = \cos(x)$, $T = 2\pi$;

$$\cos(x) = x_M + 2k\pi \tag{28}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

— pour $f(x) = \sin(x)$, $T = 2\pi$;

$$\sin(x) = y_M + 2k\pi \tag{29}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

— pour $f(x) = \tan(x)$, $T = \pi$;

$$\tan(x) = t + k\pi \tag{30}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

— pour $f(x) = \cot(x)$, $T = \pi$;

$$\cot(x) = c + k\pi \tag{31}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

— pour $f(x) = \sec(x)$, $T = \pi$;

$$\sec(x) = s + k\pi \tag{32}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

— pour $f(x) = \csc(x)$, $T = \pi$.

$$\csc(x) = c' + k\pi \tag{33}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

4 L'algèbre trigonométrique

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)} = -\cot(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} = \cot(x)$
$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$
$\sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$
$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$
$\cos(3x) = \cos(x)\left(\cos^2(x) - 3\sin^2(x)\right)$
$\sin(3x) = \sin(x)\left(3\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$

5 Les valeurs exactes

Il est utile de connaître quelques valeurs exactes des lignes trigonométriques (Tab. 2 ; Tab. 3 ; Fig. 5 ; Fig. 6).

<table>
<tr><th>Valeur</th><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$-\frac{11\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$-\frac{7\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$-\frac{5\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$-\frac{3\pi}{2}$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>$-\frac{4\pi}{3}$</td><td>$\frac{3\pi}{4}$</td><td>$-\frac{5\pi}{4}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>$-\frac{7\pi}{6}$</td></tr>
<tr><th>Cosinus</th><td colspan="2">1</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$-\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{3}}{2}$</td></tr>
<tr><th>Sinus</th><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><th>Tangente</th><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">$\sqrt{3}$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$-\sqrt{3}$</td><td colspan="2">-1</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
</table>

TABLE 2 – Valeurs exactes des lignes trigonométriques de 0 à $\frac{5\pi}{6}$

<table>
<tr><th>Valeur</th><td>π</td><td>$-\pi$</td><td>$\frac{7\pi}{6}$</td><td>$\frac{-5\pi}{6}$</td><td>$\frac{5\pi}{4}$</td><td>$-\frac{3\pi}{4}$</td><td>$\frac{4\pi}{4}$</td><td>$-\frac{2\pi}{3}$</td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{5\pi}{3}$</td><td>$-\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{7\pi}{4}$</td><td>$-\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{11\pi}{6}$</td><td>$-\frac{\pi}{6}$</td></tr>
<tr><th>Cosinus</th><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><th>Sinus</th><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$-\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td colspan="2">-1</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td colspan="2">$-\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><th>Tangente</th><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">$\sqrt{3}$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$-\sqrt{3}$</td><td colspan="2">-1</td><td colspan="2">$-\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
</table>

TABLE 3 – Valeurs exactes des lignes trigonométriques de π à $\frac{11\pi}{6}$

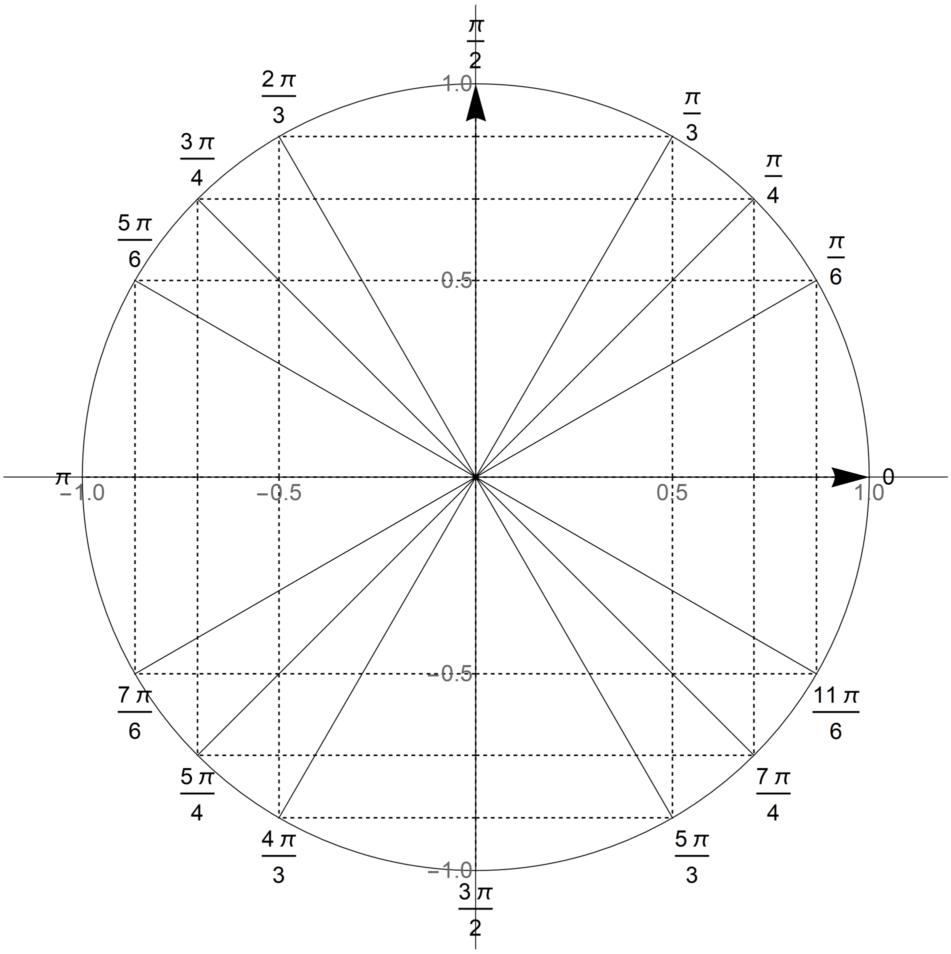

FIGURE 5 – Cercle trigonométrique de 0 à 2π

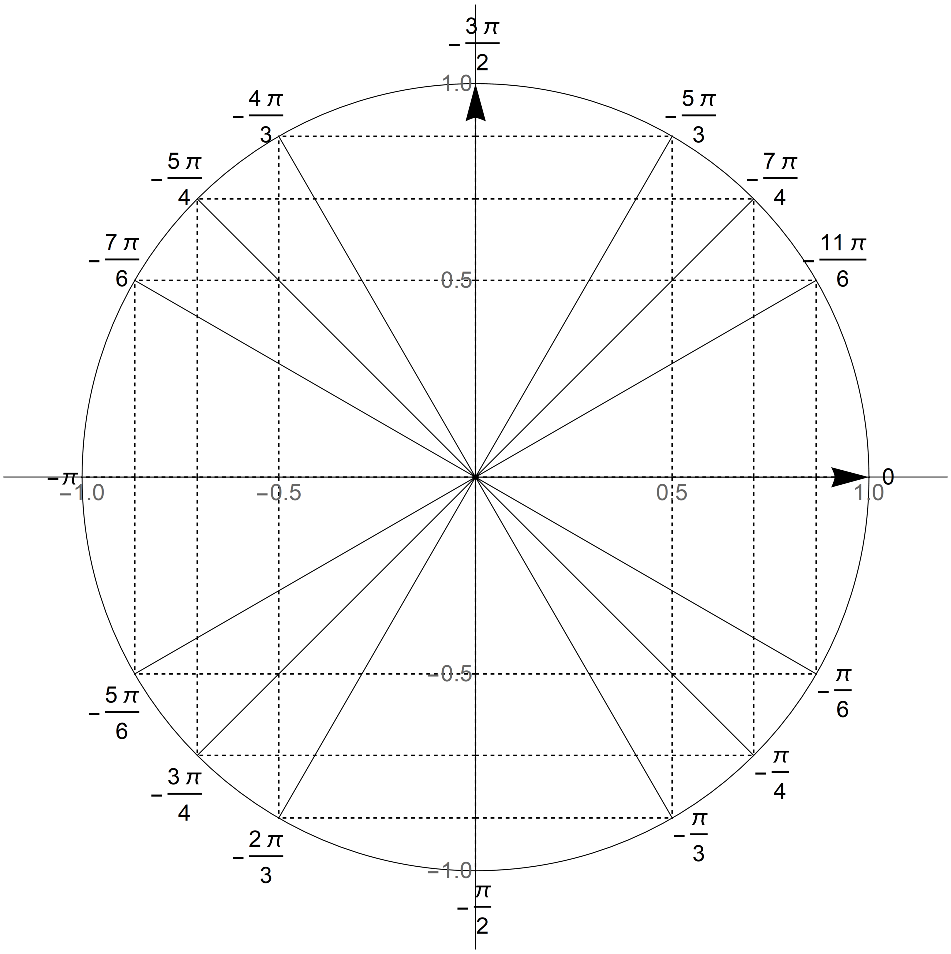

FIGURE 6 – Cercle trigonométrique de 0 à -2π

6 Les équations trigonométriques

La trigonométrie permet de définir des équations trigonométriques avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \tag{34}$$

$$\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \tag{35}$$

$$\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \tag{36}$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{37}$$

$$\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \tag{38}$$

$$\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \tag{39}$$

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = (\pi - a) + 2k\pi \end{cases} \tag{40}$$

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \tag{41}$$

$$\tan(x) = \tan(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k\pi \\ \text{ou} \\ x = (\pi + a) + 2k\pi \end{cases} \tag{42}$$

avec $\cos(x) \neq 0$ et $\cos(a) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.