# Calcul vectoriel dans le plan

Maxime Forriez[1,2,a]

[1] Sorbonne université, 2, rue Francis de Croisset, 75 018 Paris
[2] Institut de géographie, 191, rue Saint-Jacques, Bureau 105, 75 005 Paris,
[a]maxime.forriez@sorbonne-universite.fr

20 octobre 2025

# 1 Définition géométrique d'un vecteur dans le plan

Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan, alors le vecteur $\vec{AB}$ a 1. pour **direction** la droite $(AB)$ et 2. pour **sens** : $A$ vers $B$. La norme du vecteur $\vec{AB}$ est une longueur $AB$. Elle est notée $\left|\left|\vec{AB}\right|\right|$.

Propriétés.

1. Si le vecteur $\vec{u}$ a une norme $||\vec{u}|| = 1$, alors $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.
2. Si $A = B$, alors les points sont confondus.

$$\vec{AB} = \vec{AA} = \vec{0} \tag{1}$$

3. Si $A \neq B \neq C \neq D$, alors $\vec{AB} = \vec{CD}$ (Fig. 1) équivaut à :
   — $ABCD$ est un parallélogramme ;
   — $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu $I$ ;
   — $\vec{AC} = \vec{BD}$.

# 2 Algèbre des vecteurs dans le plan

## 2.1 Dans le plan

On applique la relation de M. Chasles.

Michel Chasles (1793-1880)

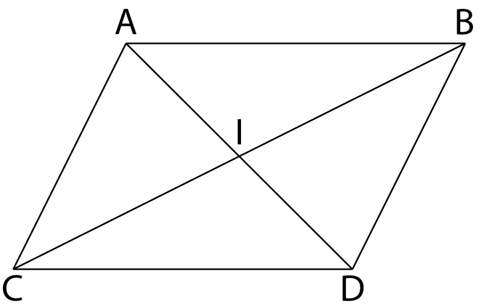


FIGURE 1 – Représentation des vecteurs $\vec{AB} = \vec{CD}$

$$\vec{AB} = -\vec{BA} \tag{2}$$
$$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC} \tag{3}$$
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \tag{4}$$

En pratique, tout vecteur $\vec{AC}$ peut être décomposé pour tout point $B$ dans le plan en une somme.

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

## 2.2 Généralisation

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors :

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ;
3. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ ;
4. $\vec{u} + \vec{-u} = \vec{0}$.

Tout vecteur peut être multiplié par un **scalaire**, c'est-à-dire un nombre appartenant à un corps. Ici, on choisit $\mathbb{R}$.

1. $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \in \mathbb{R}^*$, alors $k\vec{u}$ est un vecteur ayant :
   — pour direction $\vec{u}$ ;
   **N.B.** $k\vec{u}$ est dit **colinéaire** à $\vec{u}$.
   — pour le sens de $\vec{u}$ si $k > 0$, ou le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$ ;
   — pour norme $|k| \, ||\vec{u}||$.
2. $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$.
3. $a\,(b\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$.
4. $(a + b)\,\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$.
5. $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

# 3 Interprétation géométriques des calculs vectoriels

1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \ \vec{v} = k\vec{u}$.

   **N.B.** $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.
2. Deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ de **vecteurs directeurs** respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \ \vec{v} = k\vec{u}$.
3. Trois points $A$, $B$, et $C$ sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \ \vec{AC} = k\vec{AB}$.
4. $I$ est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.
5. Si $I$ est le milieu de $[AB]$, alors $\forall M \in \mathcal{P}, \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ avec $_mathcalP$ le plan.
6. $G$ est un centre de gravité d'un triangle $ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (cf. barycentres).

# 4 Géométrie analytique

On définit une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$

1. Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}}$.
2. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.
3. Soit $k \in \mathbb{R}^*$, alors $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx_{\vec{u}} \\ ky_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow$
   (a) $\exists k \in \mathbb{R}^* \ x_{\vec{v}} = k\vec{u}$ et $y_{\vec{v}} = ky_{\vec{u}}$
   (b) le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$, est nul. On calcule en suivant le schéma de la figure 2.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0 \tag{5}$$

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et deux points $A$ et $B$ dont les coordonnées sont respectivement $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$.

1. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ est :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \tag{6}$$

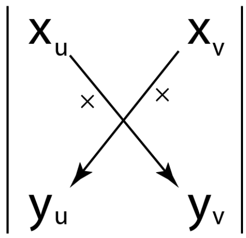


FIGURE 2 – Schéma de calcul du déterminant

2. $I$ est le milieu de $[AB]$

$$\Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right. \tag{8}$$

3. Plus généralement, $G$ le centre de gravité d'un triangle $ABC$

$$\Leftrightarrow \vec{OG} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right) \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{array} \right. \tag{10}$$

# 5 Équations de droites

1. Une droite peut être définie par :
   — deux points : $A$ et $B$, formant la droite $(AB)$ ;
   — un point $A$ et un vecteur $\vec{u}$ **non nul** : $(D)\ (A, \vec{u})$.
2. Un point $M$ du plan appartient à la droite $(D)\ (A, \vec{u})$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont **colinéaires**.

$$\vec{AM} = k\vec{u} \tag{11}$$

   $k \in \mathbb{R}^*$.
3. Soit un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   — Toute droite $(D)$ a une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0 \tag{12}$$

   Dans ce cas, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de $(D)$.

— Soient $(D_1)$ ayant l'équation $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $(D_2)$ ayant l'équation $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. $(D_1) \,//\, (D_2) \Leftrightarrow \det(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

— Toute droite $(D)$ **non parallèle** à l'axe des ordonnées $\vec{j}$ a une équation de la forme : $y = mp + p$ avec $m$ le coefficient directeur de la droite $(D)$ et $p$ l'ordonnée à l'origine de la droite $(D)$.

- Soient $(D_1)$ d'équation $y = m_1x + p_1$ et $(D_2)$ d'équation $y = m_2x + p_2$, alors $(D_1) \,//\, (D_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2 = m$
- Le coefficient directeur $m$ de $(D)$ vaut :

$$m = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \tag{13}$$

avec $M$ et $N$ deux points de la droite $(D)$, et $\vec{u}$ le vecteur directeur de la droite $(D)$.

— Dans un **repère orthonormé** $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, c'est-à-dire avec $\left|\left|\vec{i}\right|\right| = \left|\left|\vec{j}\right|\right| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$.

- Soient deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $(D_1) \perp (D_2)$

$$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \tag{14}$$

- Soit une droite $(D)$ d'équation $ax + by + c = 0$, alors la norme du vecteur directeur $\vec{u}$ vaut :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{15}$$

ou, si on connaît deux points $A$ et $B$ appartenant à $(D)$ :

$$\left|\left|\vec{AB}\right|\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} \tag{16}$$

(cf. théorème de Pythagore).

- Soient deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ d'équations réduites respectives : $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$, $(D_1) \perp (D_2)$.

$$\Leftrightarrow m_1m_2 = -1 \tag{17}$$

# 6 Produit scalaire dans le plan

## 6.1 Définition

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ dans un plan muni d'une unité de longueur et d'une base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, alors on appelle le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel : $x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}}$. On l'écrit $\vec{u}.\vec{v}$ ou $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$, ce qui se dit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$.

**N.B.** Le produit scalaire ne dépend pas de la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ retenue. Il est **identique** dans **toutes** les bases $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormées.

## 6.2 Propriétés

1. $\vec{u}.\vec{v} = \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \in \mathbb{R}$
2. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
3. $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
4. $k\left(\vec{u}.\vec{v}\right) = \left(k\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(k\vec{v}\right)$
5. $\vec{0}.\vec{u} = \vec{0}$

Le produit scalaire établit la **relation d'orthogonalité** entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si :

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \tag{18}$$

avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

## 6.3 Carré scalaire

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$

$$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 \tag{19}$$

Un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ vérifie :

1. $\vec{u}^2 = x^2 + y^2 = ||\vec{u}||^2$
2. $\vec{u}^2 \geq 0$
3. $||\vec{u}|| \geq 0$
4. $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}^2 = 0$
5. $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\vec{u}^2}$

6. $(k\vec{u})^2 = k^2\vec{u}^2$
7. $||k\vec{u}|| = |k|\,||\vec{u}||$
8. $\left|\left|\frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}\right|\right| = 1$
9. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$
10. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$
11. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
12. $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$
13. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right]$
14. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right]$
15. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left[||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right]$

Soient deux points $A$ et $B$ dans une base orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, alors :

$$\vec{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left|\left|\vec{AB}\right|\right|^2 = AB^2 \tag{20}$$

d'où :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{21}$$

## 6.4 Propriétés d'orthogonalité

### 6.4.1 Rappel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, alors $\vec{u}\perp\vec{v}$

$$\Leftrightarrow x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = 0 \tag{22}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \tag{23}$$

### 6.4.2 Projection 1

Soient $C'$ le projeté orthogonal de $C$ sur $\vec{AB}$ et $D'$ le projeté orthogonal de $D$ sur $\vec{AB}$ (Fig. 3), alors :

$$\vec{AB}.\vec{CD} = \vec{AB}.\vec{C'D'} \tag{24}$$

### 6.4.3 Projection 2

Soient $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $\vec{AB}$ et $K$ le projeté orthogonal de $B$ sur $\vec{AC}$ (Fig. 4), alors :

$$\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH} = \vec{AC}.\vec{AK} \tag{25}$$

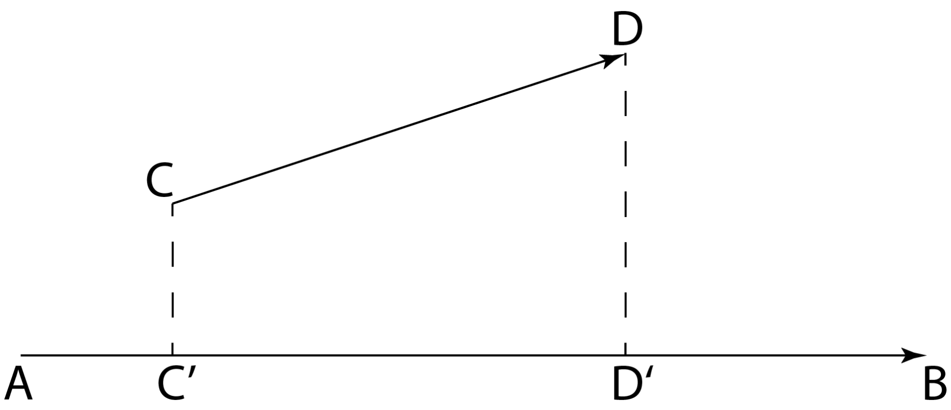


FIGURE 3 – Projection orthogonale sur un vecteur

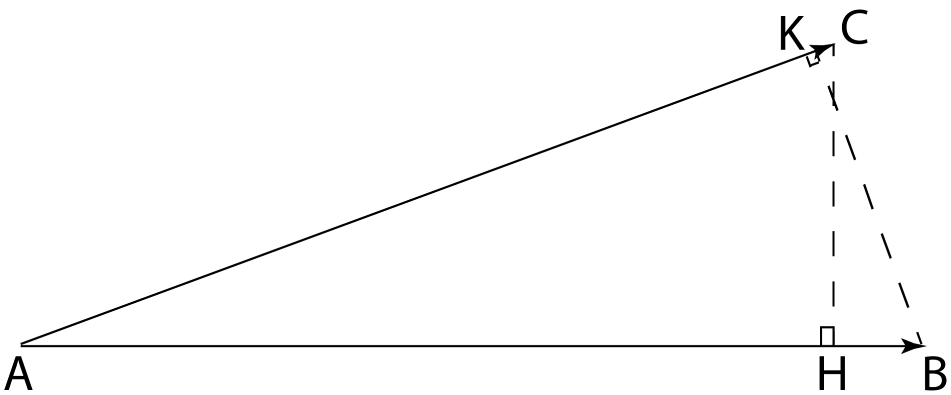


FIGURE 4 – Projections orthogonales sur deux vecteurs

# 7 Angles

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u}, \vec{v})$

— Plus l'angle augmente, plus le produit scalaire diminue.

— L'orientation de l'angle n'a aucune importance.

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **et** de sens identique, alors $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$.

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **et** de sens contraire, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\,||\vec{u}||\,||\vec{v}||$.

## 7.1 Produit scalaire et relations métriques dans un triangle

### 7.1.1 Triangle quelconque $ABC$

Soit $i$ le milieu de $[BC]$ (Fig. 5), alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\left(\hat{A}\right) \tag{26}$$

$$AI^2 = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right] \tag{27}$$

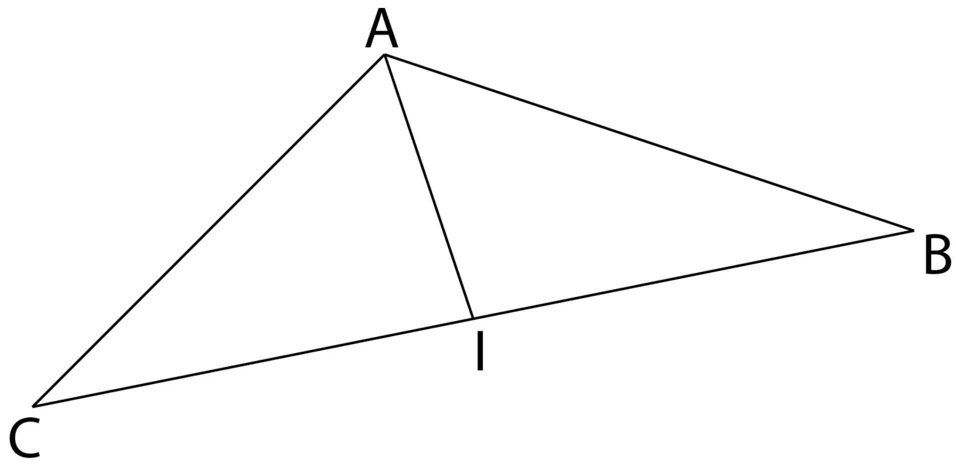


FIGURE 5 – Triangle quelconque $ABC$

Le produit scalaire permet de généraliser le théorème de Pythagore à un triangle quelconque.

### 7.1.2 Triangle $ABC$ rectangle en $A$

Soit $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$ (Fig. 6), alors :

$$BC^2 = AB^2 + BC^2 \tag{28}$$

$$BA^2 = BH.BC \tag{29}$$

$$CA^2 = CH.CB \tag{30}$$

$$HA^2 = HB.HC \tag{31}$$

$$AH.BC = AB.AC \tag{32}$$

**N.B.** Il est plus simple de démontrer ces égalités avec les relations trigonométriques d'un triangle rectangle.

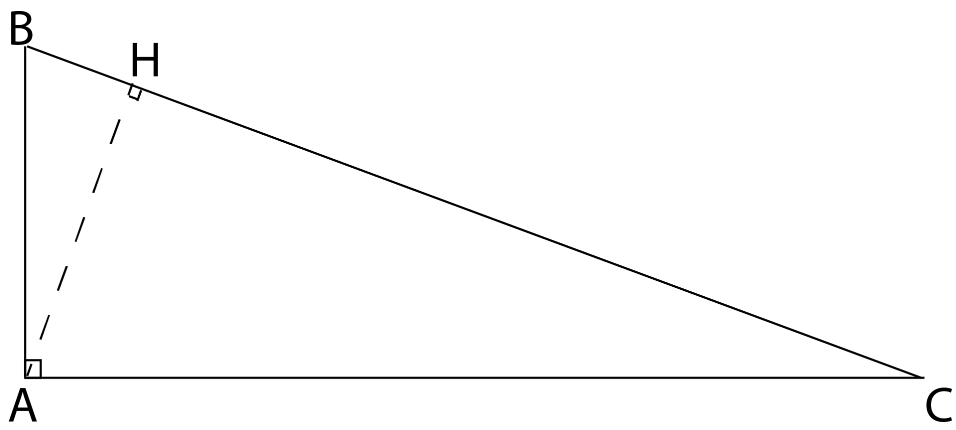


FIGURE 6 – Triangle $ABC$ rectangle en $A$

## 7.2 Distance d'un point par rapport à une droite

Soient la droite $(D)$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $A$ un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, et $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(D)$ (Fig. 7), alors :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{33}$$

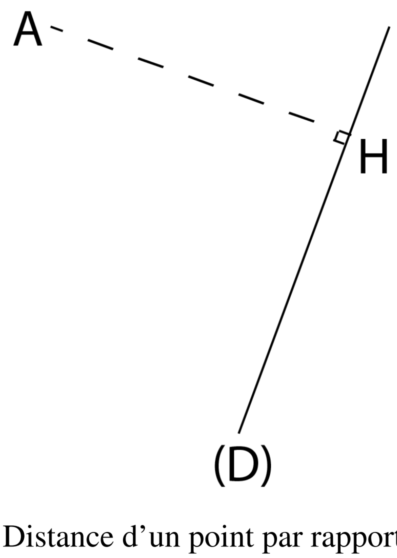


FIGURE 7 – Distance d'un point par rapport à une droite