Projet de Simulation 2019 - Modèles Théoriques

Maxime Gonthier - Benjamin Guillot

27 mai 2019

Table des matières

1 Introduction

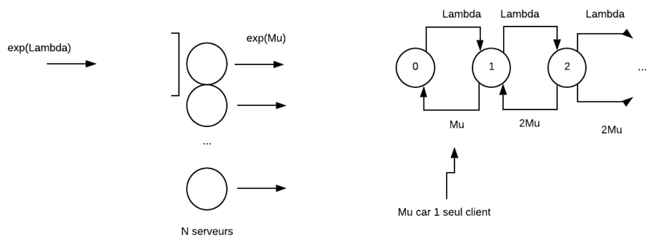
Ce Rapport à pour but de présenter les trois modèles théoriques étudié pour ce projet de Simulation.
Il sera composé de trois parties, chacune d'entre elles étant dédié à un modèle précis.

2 Modèles n°1 - File M/M/N

2.1 description du modèle

Le premier modèle est décris de la façon suivante :
Le patron donne au client un ticket numéroté.
Dès qu'un ordinateur se libère, la personne en attente avec le plus petit numéro de ticket accède à l'ordinateur.

2.1.1 représentation



Modélisation graphique de la file M/M/N.
Dans l'état i il y à i clients dans la file.
L'espace d'état est défini par $E = \mathbb{N}$
Les transitions peuvent s'exprimer de la façon suivante :
$\forall i \geq 0$,
$i^{\lambda} \rightarrow i + 1$
$i^{\mu} \rightarrow i - 1$

La condition de convergence pour ce modèle est :
$\rho > 1$

2.2 Données et Formules

On à besoin pour ce modèles de définir certaines données :
λ : probabilité d'arrivée de client.
μ : le temps de service.
ρ : l'intensité du trafic.
N : le nombre de serveur, fixé à 10.

On calcule l'intensité du trafic de la façon suivante pour chaque λ :
$\rho = \frac{\lambda}{N*\mu}$

On à également besoin du nombre moyen de client théorique $Nmoyen$:
$Nmoyen = E[n] = \frac{\rho*\varrho}{1-\rho}$
ou $\varrho = Proba(\geq N) = \frac{(N*\rho)^N}{N!(1-\rho)^{\rho_0}}$.

Ici, ρ_0 représente la probabilité que la file soit vide et se calcule de la façon suivante :
$\rho_0 = 1 + (\frac{(N*\rho)^N}{N!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N*\rho)^N}{n!})$

2.2.1 Temps moyen d'attente et 90 percentile

Maintenant que l'on a toute ces données, on peut écrire une formule pour le temps moyen d'attente de ce modèle :
$E[A] = \frac{E[n_q]}{\lambda} = \frac{\varrho}{N*\mu(1-\rho)}$

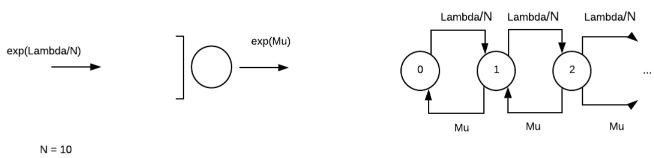
On peut donc écrire une formule pour calculer de 90 percentile du temps d'attente de ce modèle :
$t_{90}[A] = \frac{E[A]}{\varrho} * ln(10\varrho)$

3 Modèle n°2 - File M/M/1

3.1 description du modèle

Le second modèle est décris de la façon suivante :
Le patron choisit au hasard, uniformément un ordinateur parmis les N puis il donne au client un ticket numéroté pour l'ordinateur choisi.
Dès que le client d'un ordinateur a fini, c'est le client qui a le plus petit numéro parmis ceux affecté à cet ordinateur qui prend la place.

3.1.1 représentation



Modélisation graphique de la file M/M/1.
Les transitions peuvent s'exprimer de la façon suivante :

	0	1	2
0	$-\lambda$	λ	0
1	μ	$-(\lambda+\mu)$	λ
2	0	μ	$-(\lambda+\mu)$

$\forall i \epsilon \mathbf{N}$,
$Q_{i,i+1} = \lambda$
$Q_{i,i-1} = \mu$
La condition de convergence pour ce modèle est :
$\rho < 1$

3.2 Données et Formules

Pour ce modèles, on utilise les même données que pour le modèles précédent soit :
λ : probabilité d'arrivée de client.
μ : le temps de service.
ρ : l'intensité du trafic.

Cependant on calcule ρ différemment :
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Le nombre moyen de client s'exprime ainsi :
$Nmoyen = \frac{\rho}{1-\rho}$

3.2.1 Temps moyen d'attente et 90 percentile

Le temps d'attente moyen est :
$E[A] = \rho * \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$
Le 90 percentile du temps d'attente s'exprime donc de la façon suivante :
$max(0, \frac{E[A]}{\rho} ln(10 * \rho))$