Projet de Simulation 2019 - Modèles Théoriques

Maxime Gonthier - Benjamin Guillot

29 mai 2019

Table des matières

1 Introduction

Ce Rapport à pour but de présenter les trois modèles théoriques étudié pour ce projet de Simulation.
Il sera composé de trois parties, chacune d'entre elles étant dédié à un modèle précis.

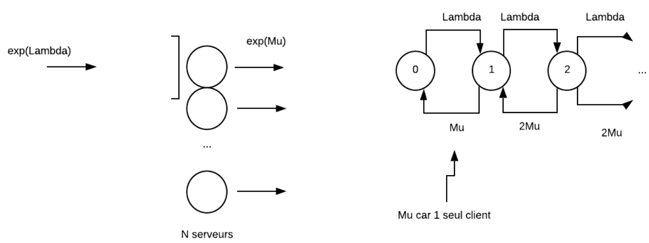
2 Modèles n°1 - File M/M/N

2.1 Description du modèle

Le premier modèle est décris de la façon suivante :
Le patron donne au client un ticket numéroté.
Dès qu'un ordinateur se libère, la personne en attente avec le plus petit numéro de ticket accède à l'ordinateur.

2.1.1 Représentation

Ce modèle a donc N ordinateurs qui représentent les serveurs. De plus les temps d'arrivés et de services suivent une loi exponentielle sans mémoire. Le modèle est donc une M/M/N.



Modélisation graphique de la file M/M/N.
Dans l'état i il y à i clients dans la file.
L'espace d'état est défini par $E = \mathbb{N}$
Les transitions peuvent s'exprimer de la façon suivante :
$\forall i \geq 0,$
$i^{\lambda} \to i + 1$
$i^{\mu} \to i - 1$

La condition de convergence pour ce modèle est :
$\rho > 1$

2.2 Données et formules

On a besoin pour ce modèles de définir certaines données :
λ : probabilité d'arrivée de client.

μ : le temps de service.
ρ : l'intensité du trafic.
N : le nombre de serveur, fixé à 10.

On calcule l'intensité du trafic de la façon suivante pour chaque λ :
$\rho = \frac{\lambda}{N*\mu}$

On à également besoin du nombre moyen de client théorique $Nmoyen$:
$Nmoyen = E[n] = \frac{\rho*\varrho}{1-\rho}$
ou $\varrho = Proba(\geq N) = \frac{(N*\rho)^N}{N!(1-\rho)^{\rho_0}}$.

Ici, ρ_0 représente la probabilité que la file soit vide et se calcule de la façon suivante :
$\rho_0 = 1 + (\frac{(N*\rho)^N}{N!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N*\rho)^N}{n!})$

2.2.1 Temps moyen d'attente et 90 percentile

Maintenant que l'on a toute ces données, on peut écrire une formule pour le temps moyen d'attente de ce modèle :
$E[A] = \frac{E[n_q]}{\lambda} = \frac{\varrho}{N*\mu(1-\rho)}$

On peut donc écrire une formule pour calculer de 90 percentile du temps d'attente de ce modèle :
$t_{90}[A] = \frac{E[A]}{\varrho} * ln(10\varrho)$

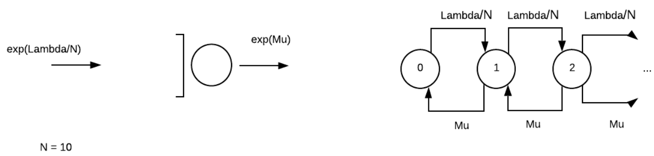
3 Modèle n°2 - File M/M/1

3.1 Description du modèle

Le deuxième modèle est décris de la façon suivante :
Le patron choisit au hasard, uniformément un ordinateur parmis les N puis il donne au client un ticket numéroté pour l'ordinateur choisi.
Dès que le client d'un ordinateur a fini, c'est le client qui a le plus petit numéro parmis ceux affecté à cet ordinateur qui prend la place.

3.1.1 Représentation

Il y a donc dans ce modèle une seule file représenté par le patron qui donne les tickets. C'est donc une M/M/1.



Modélisation graphique de la file M/M/1.
Les transitions peuvent s'exprimer de la façon suivante :

	0	1	2
0	$-\lambda$	λ	0
1	μ	$-(\lambda+\mu)$	λ
2	0	μ	$-(\lambda+\mu)$

$\forall i \epsilon \mathbb{N}$,
$Q_{i,i+1} = \lambda$
$Q_{i,i-1} = \mu$
La condition de convergence pour ce modèle est :
$\rho < 1$

3.2 Données et formules

Pour ce modèles, on utilise les même données que pour le modèles précédent soit :
λ : probabilité d'arrivée de client.
μ : le temps de service.
ρ : l'intensité du trafic.

Cependant on calcule ρ différemment :
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Le nombre moyen de client s'exprime ainsi :
$Nmoyen = \frac{\rho}{1-\rho}$

3.2.1 Temps moyen d'attente et 90 percentile

Le temps d'attente moyen est :
$E[A] = \rho * \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$
Le 90 percentile du temps d'attente s'exprime donc de la façon suivante :
$max(0, \frac{E[A]}{\rho} ln(10 * \rho))$

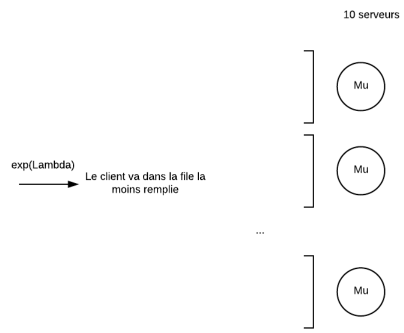
4 Modèle n°3 - "10 files M/M/1"

4.1 Description du modèle

Le troisième modèle est décris de la façon suivante :
Le patron choisit l'ordinateur avec le moins d'attente puis il donne au client un ticket numéroté pour l'ordinateur choisi.
Dès que le client d'un ordinateur a fini, c'est le client qui a le plus petit numéro parmi ceux affecté à cet ordinateur qui prend la place.

4.1.1 Représentation

Dans ce modèle puisque chaque ordinateur a une file d'attente, on peut considérer qu'il ressemble à 10 M/M/1. Mais ce n'est pas tout à fais 10 MM1 car on ne connait pas la loi d'arrivée des clients.



Modélisation graphique.

4.2 Données et formules

Pour ce modèle, une fois que la file avec le moins de client en attente à été identifié, le comportement est similaire à une M/M/1. On ne peux cependant pas supposer de valeurs théoriques pour ce modèle puisqu'on ne peut pas savoir sur quelle file va se diriger le client. On a donc pas de valeurs théoriques pour ce modèle. On ne peut pas prévoir le temps moyen d'attente, cependant une fois qu'un client à rejoint une des files, on sait que son temps moyen d'attente à partir de ce moment la sera :
$E[A] = \rho * \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$