

TD3
Méthodes de surclassement

Exercice 1. Où l'on voit que l'optimalité de Pareto est parfois inutile.

Lors d'un projet d'installation d'usine hydro-électrique, six projets sont déposés, évalués selon six critères :

- C1 : effectif du personnel nécessaire au fonctionnement.
- C2 : puissance électrique en MW.
- C3 : coût de construction en M€.
- C4 : coût annuel de maintenance en M€.
- C5 : nombre de villages à évacuer pour permettre la retenue d'eau.
- C6 : mesure du degré de sécurité.

| | C1 (min) | C2 (max) | C3 (min) | C4 (min) | C5 (min) | C6 (max) |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| A1 | 80 | 90 | 600 | 5.4 | 8 | 5 |
| A2 | 65 | 58 | 200 | 9.7 | 1 | 1 |
| A3 | 83 | 60 | 400 | 7.2 | 4 | 7 |
| A4 | 40 | 80 | 1000 | 7.5 | 7 | 10 |
| A5 | 52 | 72 | 600 | 2.0 | 3 | 8 |
| A6 | 94 | 96 | 700 | 3.6 | 5 | 6 |

1. Trouver les solutions de Pareto pour les critères C2 et C6 seulement.

A2, A3 et A5 sont dominées par A4 ; A1 est dominée par A6.

A6 et A4 ne sont pas dominées et sont donc des solutions Pareto optimales pour les critères C2 et C6.

2. Même question pour C1, C2 et C6.

A2, A3 et A5 sont dominées par A4

A1, A4 et A6 ne sont pas dominées et sont donc des solutions Pareto optimales pour les critères C1, C2 et C6

3. Même question pour C1, C2, C4 et C6.

A2 est dominée par A4 et A3 est dominée par A5

A1, A4, A5 et A6 ne sont pas dominées et sont donc des solutions Pareto optimales pour les critères C1, C2, C4 et C6

4. Que peut-on en conclure ?

Dans les problèmes discrets, quand le nombre de critères est important, le concept d'optimalité de Pareto perd de son intérêt pour sélectionner les meilleurs candidats. En effet, il devient de moins en moins sélectif. Une possibilité pour remédier à cela est d'utiliser des méthodes de surclassement (Promethee, Electre, ...) ou d'agrégation (somme pondérée, méthode de compromis,...)

Exercice 2. Méthode Promethee

On applique maintenant la méthode Promethee au cas précédent. On fournit l'importance des différents critères :

| | C1 (min) | C2 (max) | C3 (min) | C4 (min) | C5 (min) | C6 (max) |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Poids | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |

1. Calculer le degré de préférence multicritère pour chaque couple de candidats. Afin que les calculs restent simples, on utilisera la fonction de préférence usuelle.

Quelques exemples de calcul

- couple (A1, A2) :
 - A1 est strictement meilleur que A2 pour les critères C2, C4 et C6. La somme des poids de ces critères vaut $0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$.
Ainsi $\pi(A1, A2) = 0.5/1 = 0.5$ (ici, la somme des poids des critères vaut 1) et cette valeur est portée dans la ligne A1 colonne A2
 - A2 est strictement meilleur que A1 pour les critères C1, C3 et C5. La somme des poids de ces critères vaut $0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.5$
Ainsi $\pi(A2, A1) = 0.5/1 = 0.5$ (ici, la somme des poids des critères vaut 1) et cette valeur est portée dans la ligne A2 colonne A1.
- couple (A1, A5) :
 - A1 est strictement meilleur que A5 pour le critère C2. La somme des poids de ces critères vaut 0.2.
Ainsi $\pi(A1, A5) = 0.2/1 = 0.2$ et cette valeur est portée dans la ligne A1 et colonne A5.
 - A5 est strictement meilleur que A1 pour les critères C1, C4, C5 and C6. La somme des poids de ces critères vaut $0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.6$
Ainsi $\pi(A5, A1) = 0.6/1 = 0.6$ et cette valeur est portée dans la ligne A5 colonne A1.
 - A1 et A5 ont la même valeur pour le critère C3. Le poids de ce critère n'est donc pas pris en compte pour ce couple d'action (ni dans un sens ni dans l'autre).

Tous les degrés de préférence multicritère ainsi calculés sont rassemblés dans la table suivante :

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | Φ^+ |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| A1 | — | 0.5 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 1.9 |
| A2 | 0.5 | — | 0.5 | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 2.3 |
| A3 | 0.6 | 0.5 | — | 0.5 | 0.2 | 0.7 | 2.5 |
| A4 | 0.5 | 0.6 | 0.5 | — | 0.5 | 0.3 | 2.4 |
| A5 | 0.6 | 0.6 | 0.8 | 0.5 | — | 0.8 | 3.3 |
| A6 | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.7 | 0.2 | — | 2.4 |
| Φ^- | 2.9 | 2.7 | 2.5 | 2.6 | 1.5 | 2.6 | |

2. Dédurre les flux multicritères positifs et négatifs de chaque action.

Dans la table précédente, la somme des lignes correspond aux flux positifs Φ^+ et la somme des colonnes aux flux négatifs Φ^- .

3. Classer les actions selon la méthode Promethee I.

Classement selon Φ^+ : A5 – A3 – A4 et A6 – A2 – A1 (dans l'ordre décroissant)

Classement selon Φ^- : A5 – A3 – A4 et A6 – A2 – A1 (dans l'ordre croissant)

Les deux classements sont similaires, on obtient donc le même classement Promethee I

Classement Promethee I : A5 – A3 – A4 et A6 – A2 – A1

Remarque : la fonction de préférence usuelle utilisée ici est assez susceptible de donner des classements identiques pour les flux positifs et négatifs. On verra dans la suite qu'une autre fonction de préférence (linéaire en l'occurrence) donnera des classements différents.

4. Calculer les flux nets multicritères.

Le flux net est défini par $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, ce qui donne

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|--------|----|------|----|------|-----|------|
| Φ | -1 | -0.4 | 0 | -0.2 | 1.8 | -0.2 |

5. Classer les actions selon la méthode Promethee II.

Classement Promethee II : A5 – A3 – A4 et A6 – A2 – A1

Le classement est le même qu'avec Promethee I ce qui est toujours le cas lorsque les classements des flux positifs et négatifs sont identiques.

Nous allons maintenant utiliser la fonction de préférence linéaire. Le seuil d'indifférence est fixé à 0 pour tous les critères, les seuils de préférence se trouvent ci-dessous :

| | C1 (min) | C2 (max) | C3 (min) | C4 (min) | C5 (min) | C6 (max) |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Preference Threshold | 20 | 10 | 200 | 4 | 2 | 2 |

6. Quelle est l'avantage de cette nouvelle façon de faire ?

Cette nouvelle façon de calculer permet, pour chaque critère, de récompenser de façon plus faible les petits avantages d'un candidat par rapport à un autre par rapport aux grands avantages. Par exemple, A5 est meilleur que A6 pour le critère C3, mais la différence entre les deux candidats est seulement égale à 100 (600 pour A5 et 700 pour A6). Comme le seuil de préférence pour ce critère est de 200, cette différence n'est pas jugée suffisante pour compter tout le poids du critère C3 en faveur de A5 dans le calcul de $\pi(A5, A6)$. Seule une partie de ce poids sera prise en compte. Pour un calcul exact, voir la question suivante.

7. Répéter l'analyse effectuée aux questions 1 à 5 avec cette nouvelle fonction de préférence.

Un exemple de calcul

- couple (A1, A2) :
 - A1 est strictement meilleur que A2 pour les critères C2, C4 et C6. Pour chacun de ces critères, la différence entre A1 et A2 est supérieure au seuil de préférence. Par conséquent les poids de ces critères sont comptés comme dans la question 1. Ainsi $\pi(A1, A2) = (0.2 + 0.1 + 0.2) / 1 = 0.5$.
 - A2 Ainsi π est strictement meilleur que A1 pour les critères C1, C3 et C5. Pour les critères C3 et C5, la différence entre A1 et A2 est supérieure au seuil de préférence. Par conséquent les poids de ces critères sont comptés comme dans la question 1. Mais pour C1, la différence vaut 15 et le seuil de préférence est de 20. Donc le poids de C1 est compté avec un coefficient multiplicatif de $15/20 = 0.75$. Ainsi $\pi(A2, A1) = (0.75 \times 0.1 + 0.2 + 0.2) / 1 = 0.475$.

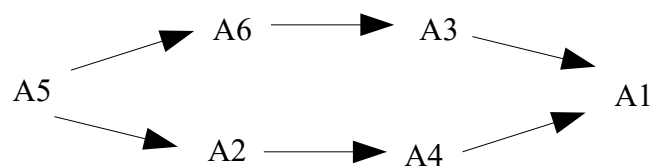
En résumé, on obtient maintenant le tableau suivant :

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | Φ^+ |
|----------|-------|--------|------|--------|------|-------|----------|
| A1 | — | 0.5 | 0.26 | 0.4525 | 0.2 | 0.17 | 1.5825 |
| A2 | 0.475 | — | 0.49 | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 2.265 |
| A3 | 0.6 | 0.3025 | — | 0.4075 | 0.2 | 0.455 | 1.965 |
| A4 | 0.4 | 0.555 | 0.5 | — | 0.42 | 0.3 | 2.175 |
| A5 | 0.585 | 0.565 | 0.6 | 0.5 | — | 0.64 | 2.89 |
| A6 | 0.465 | 0.5 | 0.29 | 0.6975 | 0.2 | — | 2.1525 |
| Φ^- | 2.525 | 2.4225 | 2.14 | 2.4575 | 1.42 | 2.065 | |

Classement pour Φ^+ : A5 – A2 – A4 – A6 – A3 – A1 (ordre décroissant)

Classement pour Φ^- : A5 – A6 – A3 – A2 – A4 – A1 (ordre croissant)

Maintenant, Promethee I fournit seulement un ordre partiel, qui peut être illustré par ce graphe :



Certains candidats ne sont pas comparables, par exemple A6 et A2. Les flux positif et négatif de A2 sont plus élevés que ceux de A6. On en déduit que A2 a plus le profil d'avoir de bonnes performances sur certains critères et de mauvaises sur d'autres et que A6 est plus proche en général des valeurs médianes.

Exercice 3. Méthodes Electre Iv et Electre Is.

On applique la méthode Electre Iv au même exemple. Pour cela, on utilise les mêmes poids qu'à l'exercice 2. Dans la table suivante, on trouve les seuils de veto pour chaque critère :

| | C1 (min) | C2 (max) | C3 (min) | C4 (min) | C5 (min) | C6 (max) |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Veto | 45 | 29 | 550 | 6 | 4,5 | 4,5 |

1. Calculer l'indice de concordance pour chaque couple d'actions. Sont-ils différents des valeurs trouvées à la question 1 de l'exercice 2 ?

Il n'y a aucune différence excepté le fait que lorsque deux candidats sont ex-aequo sur un critère, le poids d'un critère est maintenant compté en faveur des deux candidats au lieu de n'être compté pour aucun des deux. Par exemple,

- couple (A1, A5) :
 - A1 est meilleur que ou égal à A5 pour les critères C2 et C3. La somme des poids de ces critères vaut $0.2 + 0.2 = 0.4$.
Ainsi $c(A1, A5) = 0.4/1 = 0.4$ et cette valeur est reportée dans la table de concordance à la ligne A1 et à la colonne A5.
 - A5 est meilleur que ou égal à A1 pour les critères C1, C3, C4, C5 et C6. La somme des poids de ces critères vaut $0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.8$
Ainsi $c(A5, A1) = 0.8/1 = 0.8$ et cette valeur est reportée dans la table de concordance à la ligne A5 et à la colonne A1.

Voici le tableau dans son intégralité :

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A1 | — | 0.5 | 0.4 | 0.5 | 0.4 | 0.3 |
| A2 | 0.5 | — | 0.5 | 0.4 | 0.4 | 0.5 |
| A3 | 0.6 | 0.5 | — | 0.5 | 0.2 | 0.7 |
| A4 | 0.5 | 0.6 | 0.5 | — | 0.5 | 0.3 |
| A5 | 0.8 | 0.6 | 0.8 | 0.5 | — | 0.8 |
| A6 | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.7 | 0.2 | — |

2. Evaluer la condition de non-discordance (ou non-veto) pour chaque couple d'action.

Rappelons que pour qu'une action A surclasse une action B, il faut qu'elle soit meilleure sur une majorité des critères (ceci est quantifié par la réponse à la question 1) et que sur les autres critères, A ne soit pas trop inférieure à B. Ceci s'évalue par la notion de veto. Dans cette question, on dira qu'il y a veto sur la relation A S B, s'il existe un critère pour lequel A est trop mauvais par rapport à B.

On peut évaluer ceci critère par critère ou par couple d'actions. Faisons-le critère par critère ;

Critère 1 : il y a un veto sur la relation A6 S A4 car A6 est moins bon que A4 pour ce critère et que la différence entre ces deux candidats ($94 - 40 = 54$) est supérieure au seuil de veto de ce critère (qui est égal à 45).

Criterion 2 : veto sur les relations A2 S A1 et A2 S A6. De même pour A3 S A1 et A3 S A6.

Criterion 3 : veto sur les relations $A4 \succ A2$ et $A4 \succ A3$.

Criterion 4 : veto sur les relations $A2 \succ A5$ et $A2 \succ A6$.

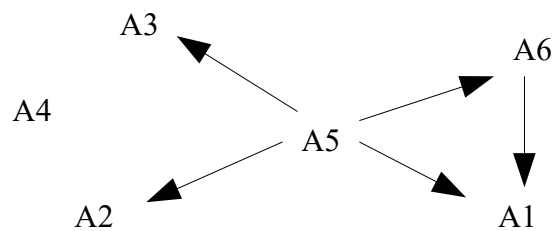
Criterion 5 : veto sur les relations $A1 \succ A2$ et $A1 \succ A5$. De même pour $A4 \succ A2$.

Criterion 6 : veto sur les relations $A2 \succ A3$, $A2 \succ A4$, $A2 \succ A5$, $A2 \succ A6$ et $A1 \succ A4$.

On obtient ainsi la table suivante de non discordance ou non veto (un 1 colonne A_i ligne A_j indique qu'il n'y a pas de veto sur la relation $A_i \succ A_j$) :

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|----|----|----|----|----|----|----|
| A1 | — | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| A2 | 0 | — | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A3 | 0 | 1 | — | 1 | 1 | 0 |
| A4 | 1 | 0 | 0 | — | 1 | 1 |
| A5 | 1 | 1 | 1 | 1 | — | 1 |
| A6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | — |

3. Construire le graphe de surclassement en prenant un niveau de concordance $s = 0.6$.



Ce graphe est construit en prenant en compte les couples pour lesquels on a à la fois un indice de concordance supérieur à 0,6 (tableau question 1) et une absence de veto (1 dans le tableau de la question 2)

4. Trouver le noyau du graphe, c'est-à-dire l'ensemble des meilleures actions selon la méthode Electre IV.

Le noyau du graphe est $N = \{A4, A5\}$, formé des actions non dominées. Les actions dominées par des actions du noyau ne sont pas dans le noyau. Les autres sont dans le noyau. Il s'agit des meilleurs candidats selon Electre IV.

On voit ici la philosophie différente par rapport à Promethee : A5 est le meilleur (ou dans le noyau) dans les deux cas, mais Electre IV sélectionne également A4, car c'est le seul qui ne soit pas dominé par A5 sur une majorité de critères. C'est en quelque sorte le seul à pouvoir apporter quelque chose de différent.

5. Effectuer une analyse de robustesse relative à la valeur de s .

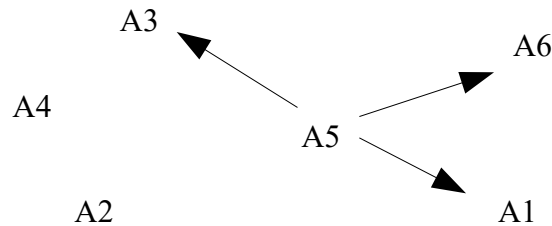
Cette question signifie qu'on veut regarder comment évolue le noyau en fonction du seuil de concordance choisi. Ce seuil étant relativement arbitraire, il est logique de le faire varier afin

de voir si certains candidats sont dans le noyau quel que soit le seuil. Ces candidats font alors figures de meilleurs candidats pour la méthode Electre I.

s doit être pris supérieur ou égal à 0,5, afin qu'au moins la moitié des poids soit en concordance avec la relation de surclassement.

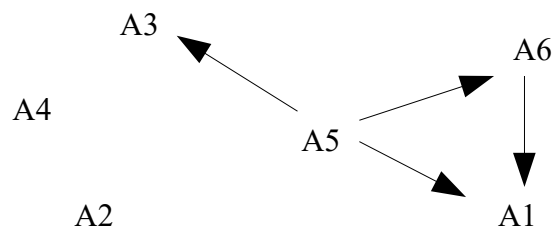
Lorsque la valeur de s est supérieure strictement à 0,8, il n'existe aucune relation de surclassement dans le graphe. Tous les candidats sont donc dans le noyau (cas peu intéressant!).

Lorsque $0,7 < s \leq 0,8$ est compris, le graphe devient :



Le noyau est alors $N = \{A2, A4, A5\}$

Lorsque $0,6 < s \leq 0,7$ est compris, on obtient le graphe :



Le noyau est alors encore $N = \{A2, A4, A5\}$

Le cas $0,5 < s \leq 0,6$ est le même que le cas $s = 0,6$ traité en premier lieu, $N = \{A4, A5\}$

En conclusion les meilleurs candidats selon la méthode Electre Iv sont A4 et A5, puis A2. La solution est robuste car elle varie peu avec le choix de s .

Nous utilisons maintenant la méthode Electre Is, avec les mêmes seuils que dans l'exercice 2 questions 6 et 7 (attention dans Electre, les seuils fonctionnent dans le sens opposé à celui de Promethee).

6. Répéter l'analyse effectuée dans les questions 1 à 5 avec cette nouvelle méthode.

La table de non discordance est inchangée mais la table de concordance est ici calculée de manière différente :

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|----|--------|-------|--------|-------|-------|--------|
| A1 | — | 0.525 | 0.4 | 0.6 | 0.415 | 0.535 |
| A2 | 0.5 | — | 0.6975 | 0.445 | 0.435 | 0.5 |
| A3 | 0.74 | 0.51 | — | 0.5 | 0.4 | 0.71 |
| A4 | 0.5475 | 0.6 | 0.5925 | — | 0.5 | 0.3025 |
| A5 | 0.8 | 0.6 | 0.8 | 0.58 | — | 0.80 |
| A6 | 0.83 | 0.5 | 0.545 | 0.7 | 0.36 | — |

Un exemple de calcul

- couple (A1, A2) :
 - A1 est meilleur ou égal à A2 pour les critères C2, C4 et C6. Les poids de ces critères sont donc comptés comme dans la question 1. A1 est moins bon que A2 pour le critère C1 mais la différence (15) est inférieure au seuil de préférence (20). Par conséquent le poids du critère C1 est partiellement pris en compte dans $c(A1, A2)$. La proportion correspondante est $1 - \text{différence}/\text{seuil de préférence} = 1 - 15 / 20 = 0.25$. Pour C3 et C5, A1 est moins bon que A2 et la différence est plus grande que le seuil de préférence. Ainsi les poids de ces critères ne sont pas comptés dans $c(A1, A2)$. On obtient $c(A1, A2) = (0.25 \times 0.1 + 0.2 + 0 + 0.1 + 0 + 0.2) / 1 = 0.525$.

D'autres exemples sans commentaires :

$$c(A2, A1) = 0,1 + 0 + 0,2 + 0 + 0,2 + 0 = 0,5$$

$$c(A1, A6) = 0,1 + (1-6/10) \times 0,2 + 0,2 + (1-1,8/4) \times 0,1 + 0 + (1-1/2) \times 0,2 = 0,535$$

$$c(A6, A1) = (1-14/20) \times 0,1 + 0,2 + (1-100/200) \times 0,2 + 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,83$$

Avec cette nouvelle table de concordance, A5 surclasse toutes les autres actions lorsque s est inférieur ou égal à 0.58. Dans ce cas $N = \{A5\}$.

Lorsque $0.58 < s \leq 0.6$, $N = \{A4, A5\}$.

Lorsque $0.6 < s \leq 0.8$, $N = \{A2, A4, A5\}$.

Lorsque $0.8 < s \leq 0.83$, $N = \{A2, A3, A4, A5, A6\}$.

On voit que A5 est la seule action à être dans le noyau pour tout choix de s. A4 et A2 sont aussi des candidats intéressants.