

Etude théorique et simulation informatique d'un trou noir de Schwarzschild et de son disque d'accrétion

Maxime Soncin

L'objectif de ce projet est de simuler informatiquement l'observation d'un trou noir de Schwarzschild et son disque d'accrétion. Il se fonde sur l'étude théorique des phénomènes physiques mis en jeu par de tels objets puis sur leur implémentation en Python.

La première partie est consacrée à l'étude de la déviation de la trajectoire des photons par des objets massifs tels que les trous noirs et à la résolution numérique de l'apparence de ces orbites. La seconde partie présente la simulation de l'observation d'un trou noir et de son disque d'accrétion en basant leur représentation sur le rayonnement d'un corps noir. La troisième partie propose une étude semi-quantitative de la distribution de température du disque et implémentée à la simulation. Enfin, la quatrième partie propose l'étude théorique et l'implémentation des différents effets Doppler mis en jeu par ces objets astrophysiques.

1 Déviation de la trajectoire des photons

1.1 Phénomène physique étudié et outils de la relativité générale

En mécanique newtonienne, deux objets massifs exercent une force l'un sur l'autre selon la célèbre formule

$$\vec{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

avec m_1 , m_2 la masse des objets et \vec{u}_r le vecteur directeur unitaire colinéaire et r la distance les séparant. Cette équation a longtemps décrit de manière précise les mouvements des astres mais s'est confrontée à quelques anomalies.

En effet, pour un photon de masse m_{ph} nulle, aucune force d'origine gravitationnelle ne semble dévier la trajectoire de celui-ci. En pratique, une déviation de la lumière à proximité des objets massifs est observée et se décrit théoriquement à l'aide de la relativité générale.

En relativité, on définit l'intervalle d'espace-temps ds tel que ds^2 correspond à la distance entre deux évènements. Cette quantité permet, en relativité générale, de définir l'équation de la métrique qui décrit la courbure de l'espace-temps autour d'un objet considéré.

En 1916, K. Swchartzschild proposa une métrique décrivant la courbure de l'espace-temps autour d'un objet à symétrie sphérique n'étant pas en rotation [1], elle s'écrit en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Nous admettrons l'expression de cette métrique dans cette étude. Nous utiliserons également dans la suite de la première partie le système d'unités géométriques selon lequel $G = c = 1$. L'équation de la métrique se réécrit donc :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Nous nous intéressons dans la suite à la trajectoire de photons dans un espace-temps dont la métrique est celle de Schwartzschild. On repère la position du photon dans cet espace temps par un vecteur $x = (t, x, y, z)$ (en unités géométriques) ou encore (t, r, θ, ϕ) . On définit la vitesse du photon par le vecteur $u = \frac{dx}{d\lambda}$ avec λ une variable que l'on introduit afin de paramétrer la trajectoire dans l'espace-temps courbe.

Les symétries de cette métrique par rapport au temps t et par rotation selon ϕ amènent à la conservation de deux quantités [2] que nous admettrons :

L'énergie par unité de masse au repos :

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}$$

Le moment cinétique par unité de masse :

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda}$$

L'expression de la métrique provient d'une résolution de l'équation des champs d'Einstein et la conservation des quantités de l'invariance de la métrique selon certains vecteurs appelés vecteurs de Killing. Elles constituent les seules formules admises qui ne sont pas du programme de MP de ce projet.

1.2 Equation de déviation des photons

En relativité générale, les photons suivent les lignes d'univers de type lumière, c'est-à-dire telles que $ds^2 = 0$. En divisant par $d\lambda^2$, la métrique se réécrit donc :

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\lambda^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{d\lambda^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi^2}{d\lambda^2}$$

On cherche à trouver une équation résolvable numériquement permettant de trouver la trajectoire complète du photon.

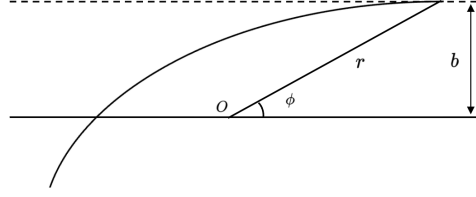


Fig. 1 Schématisation de la déviation du photon et définition du paramètre d'impact b

Or, par symétrie selon θ , on se place en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et on considère $d\theta = 0$. L'expression devient :

$$-(1 - \frac{2M}{r})(\frac{dt}{d\lambda})^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}(\frac{dr}{d\lambda})^2 + r^2(\frac{d\phi}{d\lambda})^2 = 0$$

En remplaçant les expressions de $\frac{dt}{d\lambda}$ et de $\frac{d\phi}{d\lambda}$ grâce aux équations de conservation de e et l , il vient :

$$-(1 - \frac{2M}{r})^{-1}e^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}(\frac{dr}{d\lambda})^2 + \frac{l^2}{r^2} = 0$$

En divisant par l^2 et en multipliant par $(1 - \frac{2M}{r})$,

$$-\frac{e^2}{l^2} + \frac{1}{l^2}(\frac{dr}{d\lambda})^2 + \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2M}{r}) = 0$$

Ou encore

$$\frac{1}{l^2}(\frac{dr}{d\lambda})^2 = \frac{e^2}{l^2} - \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2M}{r})$$

On prend la racine carrée de cette expression et on ne s'intéresse ici qu'à la solution positive

$$\frac{1}{l} \frac{dr}{d\lambda} = (\frac{e^2}{l^2} - \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2M}{r}))^{\frac{1}{2}}$$

Et comme $l = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$

$$\frac{dr}{d\phi} = r^2 (\frac{e^2}{l^2} - \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2M}{r}))^{\frac{1}{2}}$$

Or, en faisant tendre r vers l'infini, $|\frac{l}{e}| \sim r^2 \frac{d\phi}{dt} = r^2 \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dt}$.

Et, à grande distance du trou noir, $\frac{dr}{dt} \sim 1$ (en unités géométriques) et comme, par schéma, $b = r \sin \phi$, $\phi \sim \frac{b}{r}$ donc

$$|\frac{l}{e}| \sim r^2 \frac{d\phi}{dr} \sim r^2 \frac{d(\frac{b}{r})}{dr} = b$$

On obtient finalement :

$$\frac{dr}{d\phi} = r^2 (\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2M}{r}))^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

1.3 Approximation numérique de la trajectoire des photons

La résolution numérique de l'équation 1 permet d'obtenir la trajectoire polaire $(r(\phi), \phi)$ d'un photon donné. Nous implémentons le schéma de résolution numérique par une méthode d'Euler d'ordre 1 qui fournit des résultats intuitifs et suffisamment rapidement pour la suite de l'implémentation. En fixant un angle initial ϕ_0 , on obtient alors la représentation graphique des trajectoires. On représente l'horizon du trou noir par une tâche noire de rayon $R_s = 2M$

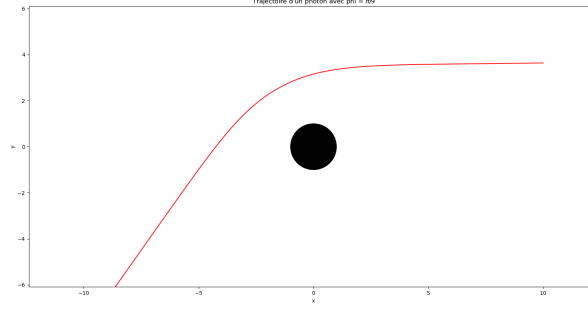


Fig. 2 Simulation de la déviation d'un photon avec un angle initial $\phi_0 = \frac{\pi}{9}$

Commentaires : La déviation obtenue est en adéquation le résultat qui pouvait être attendu illustré en figure 1 : le trou noir "attire" le photon (bien que celui-ci n'ait pas de masse) donc la trajectoire est centripète. Nous représentons en figure 3 différentes trajectoires intéressantes faisant notamment apparaître un paramètre d'impact limite b_c pour $b_c = x_0 \tan\left(\frac{\pi}{12.35933}\right) \sim 2.598$ u.a.

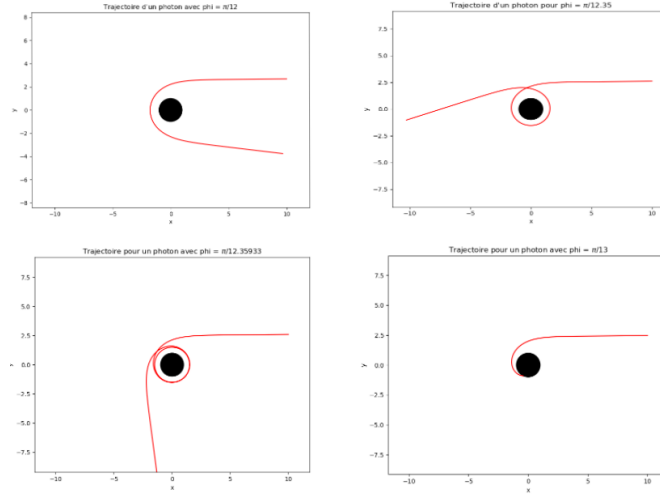


Fig. 3 Simulation de la déviation d'un photon avec des angles initiaux $\phi_0 = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12.35}, \frac{\pi}{12.35933}, \frac{\pi}{13}$

Au voisinage de cette valeur b_c , le photon peut effectuer un demi-tour, une ou même plusieurs orbites autour du trou noir avant de s'en échapper. Ce phénomène était impossible en théorie newtonienne. On peut montrer que la valeur théorique de b_c est $b_c = \sqrt{27}M \sim 2.598$ u.a. La valeur trouvée par notre simulation est donc très proche de la valeur théorique (écart relatif de l'ordre de 10^{-7}).

On peut alors simuler simultanément la trajectoire d'un nombre n quelconque de photons pour mieux se représenter l'influence du choix de l'angle initial sur la déviation obtenue.

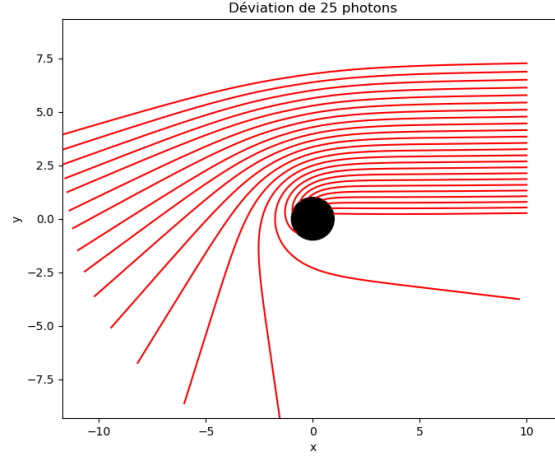


Fig. 4 Simulation de la déviation de 25 photons avec des angle initiaux variant de $\phi_0 = 0$ à $\phi_0 = \frac{\pi}{5}$

1.4 Représentation en 3D par raytracing

Afin de simuler l'observation réelle d'un trou noir et de son disque d'accrétion, il est possible d'utiliser une méthode de "raytracing" afin de les représenter.

L'objectif étant d'obtenir une image de ces objets astrophysiques, le principe du raytracing est d'associer à chaque pixel de cette image un photon et de les "envoyer" dans la direction du trou noir et du disque, puis de leur associer une couleur en fonction de la zone de l'objet avec laquelle ils sont entrés en collision.

Cette méthode revient à faire remonter le temps aux photons initialement sur l'objectif de la caméra pour déterminer par quels objets ils ont été émis et de leur associer la couleur adéquate.

Nous ajoutons alors à notre modèle un disque d'accrétion. Dans cette partie, nous donnerons la couleur arbitraire gris clair aux photons qui sont émis par le disque d'accrétion et qui sont reçus par la caméra et de représenter en noir ceux qui ont été absorbés par l'horizon du trou noir. L'épaisseur, le rayon et la couleur du disque sont donc choisis arbitrairement dans cette partie.

On représente alors en figure 5 l'observation simulée obtenue par raytracing avec une résolution de 128×128 pixels-photons pour différentes valeurs d'épaisseur du disque e , en unité arbitraire.

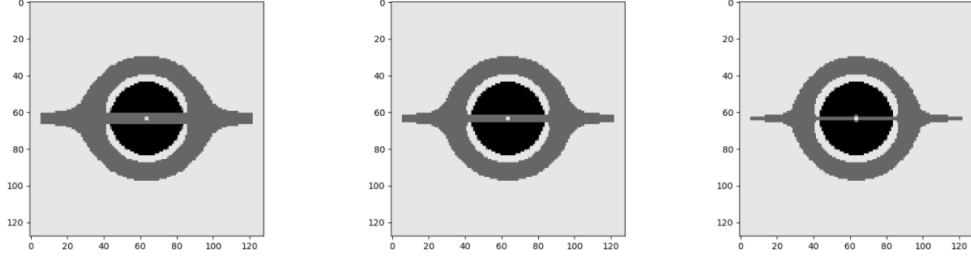


Fig. 5 Simulation de l'observation du trou noir et de son disque pour différentes épaisseur de disque $e = 0.7, 0.5, 0.3$ en unités arbitraires

Les résultats obtenus ressemblent à la représentation classique de ces objets. On peut néanmoins remarquer une aberration de simulation au centre de la figure qui est due au choix du pas de résolution. Cette aberration sera corrigée en partie 4.

On peut alors augmenter la résolution de l'image pour obtenir des résultats plus satisfaisants. La figure 6 présente une simulation avec une résolution de 512×512 pixels-photons pour une épaisseur de disque $e = 0.3$.

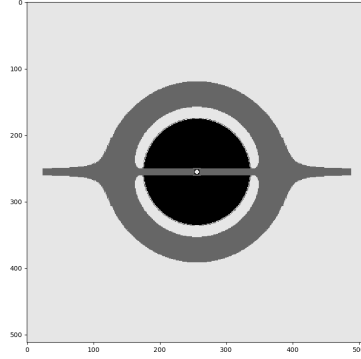


Fig. 6 Simulation de l'observation du trou noir et de son disque pour différentes épaisseur de disque $e = 0.3$ en unités arbitraires avec une meilleure résolution

Les simulations obtenues semblent correspondre aux résultats attendus. Néanmoins, beaucoup de paramètres ont été choisis arbitrairement : le rayon du disque, son épaisseur et sa couleur.

Les parties suivantes ont pour objectif de palier cela en proposant des modèles plus quantitatifs pour le rayon et la couleur du disque d'accrétion.

2 Représentation réaliste de la couleur du disque

2.1 Le disque comme un corps noir

Une idée raisonnable pour donner une couleur réaliste au disque d'accrétion précédemment représenté est de le considérer comme un corps noir. Dès lors, si l'on suppose sa distribution de température connue, en approximant le disque à un corps noir, on peut convertir son rayonnement théorique en valeurs RGB et donc en image.

Nous supposons ainsi dans la suite que le disque rayonne comme un corps noir, c'est-à-dire que son rayonnement suit la loi de Planck [3] :

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}$$

Avec $u_\lambda(\lambda, T)$ densité spectrale d'énergie : c'est l'énergie rayonnée par unité de volume de corps noir dans l'intervalle $[\lambda, \lambda + d\lambda[$

Ce résultat n'est pas au programme de MP mais est accessible avec les outils introduit par ce dernier. On se propose de le démontrer dans ce qui suit.

On considère une cavité cubique de côté L dont les parois sont parfaitement réfléchissantes. En faisant un trou de taille petite devant L^2 , cette cavité rayonnante se présente comme un corps noir.

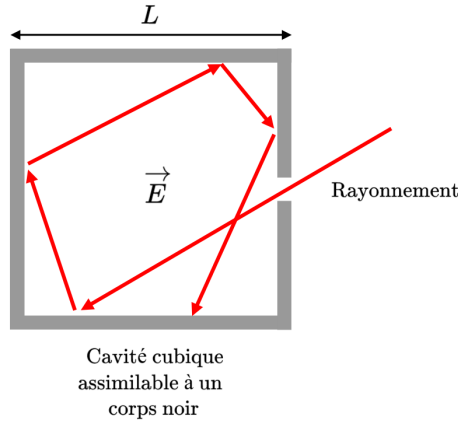


Fig. 7 Schématisation de la cavité cubique dont le rayonnement est assimilé à celui d'un corps noir

Planck postule dans sa démonstration que l'énergie émise par le corps noir est quantifiée. L'énergie associée à un mode d'indice n des ondes électromagnétiques présentes dans la cavité est celle d'un oscillateur harmonique et s'écrit :

$$U_n(m) = m\hbar\omega_n$$

avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$

La probabilité qu'un mode n ait une énergie de $U_n(m)$ s'écrit alors :

$$p_{n,m} = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{-m\hbar\omega_n}{k_B T}\right)$$

avec $Z_n = \frac{1}{\sum_{m=0}^{+\infty} \exp\left(\frac{-m\hbar\omega_n}{k_B T}\right)}$ L'onde rayonnée par le corps noir dans un mode n donné peut avoir deux polarisations distinctes, l'état d'énergie associé à chaque mode n est donc dégénéré à l'ordre 2. On en déduit que pour ce mode, l'énergie moyenne s'écrit

$$\langle U_n \rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} 2U_n(m)p_{n,m} = 2\hbar\omega_n \frac{\sum_{m=0}^{+\infty} m \exp\left(\frac{-m\hbar\omega_n}{k_B T}\right)}{\sum_{m=0}^{+\infty} \exp\left(\frac{-m\hbar\omega_n}{k_B T}\right)}$$

On simplifie l'expression de $\langle U_n \rangle$ en introduisant la variable t telle que :

$$\langle U_n \rangle = 2\hbar\omega_n \left. \frac{\partial}{\partial t} - \ln\left(\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-mt}\right) \right|_{t=\frac{\hbar\omega_n}{k_B T}}$$

D'où

$$\langle U_n \rangle = 2\hbar\omega_n \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(-\ln\left(\frac{1}{1-e^{-t}}\right)\right) \right|_{t=\frac{\hbar\omega_n}{k_B T}} = 2\hbar\omega_n \left. \frac{\partial}{\partial t} \ln(1-e^{-t}) \right|_{t=\frac{\hbar\omega_n}{k_B T}}$$

On obtient finalement :

$$\langle U_n \rangle = 2\hbar\omega_n \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_n}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega_n}{k_B T}}} = \frac{2\hbar\omega_n}{e^{\frac{\hbar\omega_n}{k_B T}} - 1}$$

On peut alors noter la densité spectrale d'énergie, c'est-à-dire l'énergie par unité de volume du corps noir et par unité de longueur d'onde :

$$u_\lambda(\lambda, T) = G(\lambda) \frac{\langle U_n \rangle}{L^3}$$

Avec $G(\lambda)$ le nombre de modes par unité de longueur d'onde. On cherche à déterminer cette grandeur. Pour cela, on détermine $G(k)$, nombre de modes par unité de vecteur d'onde.

Les conditions aux limites imposées par les miroirs réfléchissants impliquent une quantification des modes des ondes électromagnétiques présentes à l'intérieur de la cavité. Le vecteur d'onde \vec{k}_n associé au mode n s'écrit :

$$\vec{k}_n = 2\pi\left(\frac{n_x}{L}\vec{u}_x + \frac{n_y}{L}\vec{u}_y + \frac{n_z}{L}\vec{u}_z\right)$$

Dans l'espace des vecteurs d'onde, chaque mode n occupe donc un "volume" qui s'écrit :

$$\delta^3 k = \frac{2\pi}{L} \times \frac{2\pi}{L} \times \frac{2\pi}{L} = \frac{8\pi^3}{L^3}$$

Lorsque k varie de k à $k + dk$, le nombre de mode par unité de volume s'écrit donc :

$$n(k) = \frac{\text{volume infinitésimal entre } k \text{ et } k + dk}{\text{volume occupé par un mode}} = \frac{4\pi k^2 dk}{\delta^3 k} = \frac{L^3 k^2 dk}{2\pi^2}$$

Or, comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, et en prenant $n(\lambda) > 0$,

$$n(\lambda) = \frac{L^3 4\pi^2}{2\pi^2 \lambda^2} \times 2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{4\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda$$

D'où, $G(\lambda) = \frac{4\pi L^3}{\lambda^4}$

En réinjectant dans l'expression, et comme $\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda}$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, il vient :

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{4\pi L^3}{\lambda^4} \times \frac{2hc}{\lambda} \times \frac{1}{L^3} \times \frac{1}{e^{\frac{\hbar c}{k_B T \lambda}} - 1}$$

Finalement :

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\hbar c}{k_B T \lambda}} - 1} \quad (2)$$

En supposant un rayonnement isotrope dans tout l'espace du corps noir, entre t et $t + dt$, l'intégralité de la puissance rayonnée se trouve dans une sphère de rayon cdt . La puissance énergétique spectrale par unité d'angle solide s'écrit donc :

$$L_\lambda(\lambda, T) dt = \underbrace{\frac{cdt}{4\pi}}_{\text{par unité d'angle solide}} u_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{dt}{e^{\frac{\hbar c}{k_B T \lambda}} - 1}$$

En pratique, pour l'implémentation numérique, on utilise l'exitance énergétique spectrale, c'est-à-dire la puissance spectrale rayonnée par unité de surface du corps noir. Elle est définie, ici, par :

$$M_\lambda(\lambda, T) = \int_{\text{demi-espace}} L_\lambda(\lambda, T) \vec{u}_z \cdot \vec{\Omega} d\Omega = \int_{\text{demi-espace}} L_\lambda(\lambda, T) \cos \theta d\Omega$$

Le rayonnement étant supposé isotrope, on en déduit que :

$$M_\lambda(\lambda, T) = L_\lambda(\lambda, T) \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi L_\lambda(\lambda, T)$$

D'où :

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\hbar c}{k_B T \lambda}} - 1}$$

2.2 Représentation numérique du spectre émis

On trace alors numériquement l'exitance spectrale en fonction de la longueur d'onde pour des corps noirs de températures différentes : on retrouve ainsi la courbe classique du rayonnement d'un corps noir.

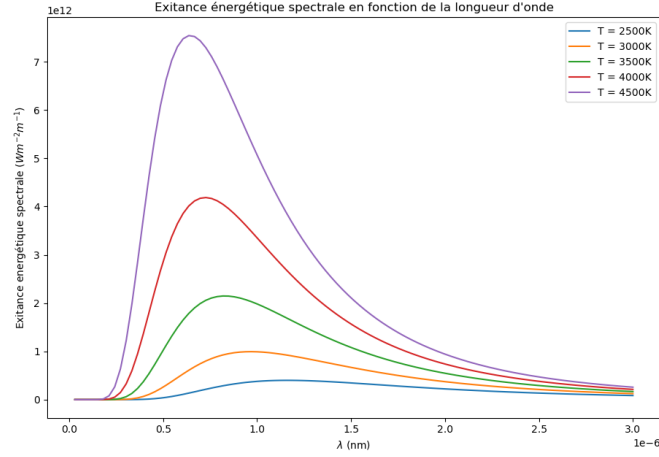


Fig. 8 Exitance énergétique spectrale en fonction de la longueur d'onde pour $T = 2500K, 3000K, 3500K, 4000K, 4500K$

Dès lors, on associe à un objet ayant une température supposée connue une couleur dans le système informatique RGB en faisant la somme des contributions énergétiques dans le domaine visible et en convertissant en canaux rouge, vert et bleu.

On trace en figure 9 la couleur associée en fonction de la température du corps noir considéré.

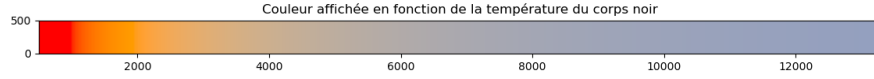


Fig. 9 Gradient de la couleur associée au rayonnement d'un corps noir en fonction de la température pour $T \in [500K, 13300K]$

Cette représentation de la couleur en fonction de la température est alors implémentée au programme de raytracing et permet de donner au disque d'accrétion une couleur caractéristique d'une température donnée. On représente ainsi en figure 10 la simulation de l'observation d'un trou noir pour différentes températures.

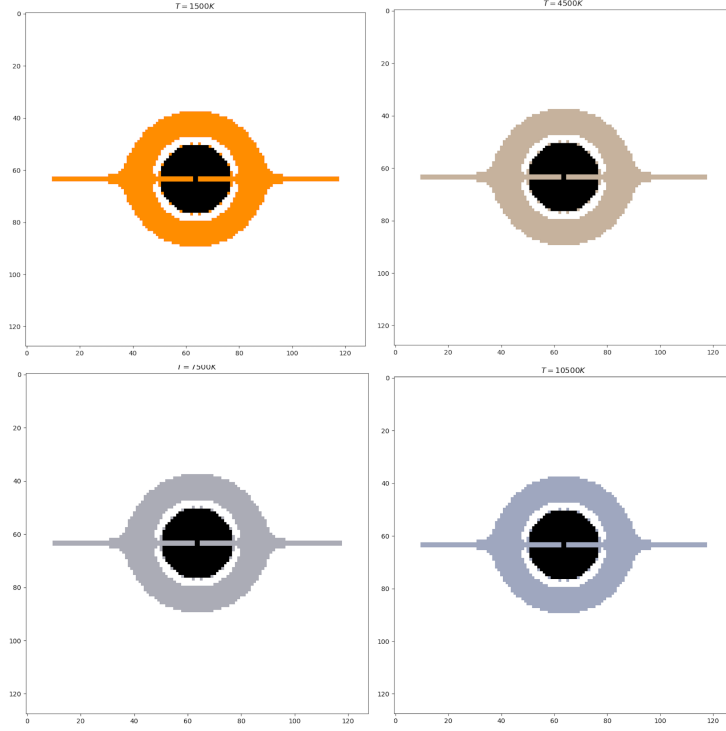


Fig. 10 Simulation de l'observation du trou noir et de son disque en donnant au disque une température uniforme avec (de haut en bas et de droite à gauche) $T = 1500K, 4500K, 7500K, 10500K$

Notons que pour le film *Interstellar*, Kip Thorne et son équipe ont utilisé ce modèle de rayonnement uniforme de corps noir pour créer le disque d'accrétion du trou noir Gargantua [4]. La température utilisée était de $4500K$, comme représenté sur la figure 10, en haut à droite. On retrouve une couleur similaire à celle du film.

2.3 Variation affine de la température avec le rayon

En réalité, la vitesse de la matière composant le disque d'accrétion dépend de la distance au centre du trou noir. Une particule plus proche de l'horizon ayant une orbite stable aura une vitesse plus élevée et donc une température plus élevée qu'une particule se situant à plus grande distance. On modélise ce phénomène dans un premier temps par une température qui dépend de manière affine de la distance au centre du trou noir. Ce modèle est purement qualitatif et l'implémentation d'un modèle plus quantitatif fait l'objet de la partie 3.

Pour ce modèle qualitatif, on simule alors l'observation du trou noir et de son disque d'accrétion ayant une loi de distribution de température suivant :

$$T(r) = T_0 - \Gamma r$$

On choisit, ici arbitrairement, $T_0 = 4500K$ et $\Gamma = 350K.ud^{-1}$ avec ud l'unité de distance arbitraire choisie pour la simulation. La couleur de l'arrière-plan est choisie noire par souci de visibilité. Le résultat de cette simulation sur une grille de 1024×1024 pixels est présenté en figure 11

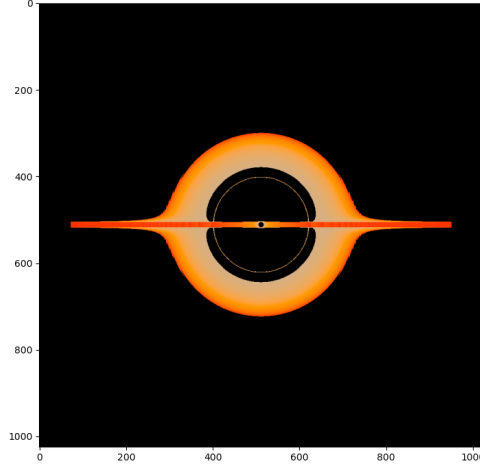


Fig. 11 Simulation d'observation avec variation affine de la température en fonction de r avec $T_0 = 4500K$ et $\Gamma = 350K.ud^{-1}$

Commentaire : En augmentant le nombre de pixels de l'image, on observe que l'horizon du trou noir semble entouré d'un halo de photons parvenus à l'observateur, mis en avant en figure 12. Ce phénomène s'observe car, aux abords de l'horizon, la trajectoire des photons est extrêmement déviée si bien qu'un photon ayant été émis par le disque et passant proche de l'horizon peut atterrir dans l'œil de l'observateur.

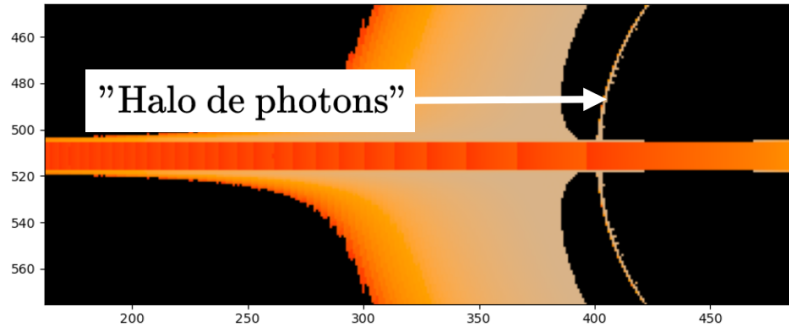


Fig. 12 Observation du "halo de photon" autour de l'horizon du trou noir

3 Distribution de la température du disque

3.1 Approximation dimensionnelle de la distribution de température

L'objectif de cette partie est d'approcher une expression pour la distribution de la température au sein du disque. Obtenir une solution analytique de cette température dans un cadre général est encore aujourd'hui le sujet de nombreuses recherches. La résolution complète, même dans les modèles les moins complexes, font intervenir des notions de mécanique des fluides avancées qui s'éloignent du programme de MP.

Nous proposons dans ce qui suit de retrouver la dépendance radiale de la température grâce à un raisonnement dimensionnel. Les résultats obtenus seront donc définis à une constante multiplicative près.

Nous supposons dans ce qui suit, en première approximation, que les particules à l'intérieur du disque sont sur des orbites circulaires qui suivent les lois de Kepler.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le repère de Frénet à l'une de ces particules dans le référentiel du trou noir supposé galiléen, il vient :

$$\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

D'où :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\text{Et comme } \omega = \frac{2\pi}{T_{\text{orbite}}} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_\phi,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

3.2 Loi de Stefan-Boltzmann

En assimilant le disque à un corps noir comme précédemment, la puissance surfacique émise, c'est-à-dire l'exitance énergétique totale s'écrit :

$$I_{\text{tot}} = \int_{\lambda=0}^{+\infty} M_\lambda d\lambda = \int_{\lambda=0}^{+\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}$$

En faisant le changement de variables : $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, c'est-à-dire, $d\lambda = -\frac{1}{x^2} \frac{hc}{k_B T} dx$, il vient

$$I_{\text{tot}} = \frac{2\pi h^2 c^3}{k_B T (\frac{hc}{k_B T})^5} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \underbrace{\left(\frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \right)}_{=\sigma \approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}} T^4$$

On en déduit la loi de Stefan-Boltzmann :

$$I_{tot} = \sigma T^4$$

3.3 Raisonnement dimensionnel

On modélise à nouveau le disque d'accrétion comme un corps noir qui vérifie cette loi. On cherche à exprimer la température T du disque. Par symétrie cylindrique (le trou noir n'est pas en rotation donc elle est bien vérifiée) et en supposant le disque suffisamment fin pour pouvoir considérer que la température est la même sur toute l'épaisseur du disque, la température ne dépend que de la distance au centre r .

On cherche une expression pour I_{tot} en fonction des paramètres décrivant le disque d'accrétion. Un des paramètres principaux est celui du taux d'accrétion $\dot{M} = \frac{dM}{dt}$, c'est-à-dire à la masse accrétée dans le trou noir par unité de temps. En outre, la puissance surfacique émise semble également dépendre de la vitesse des particules à r fixé (des vitesses différentes entraînent de la friction et est convertie en énergie thermique par rayonnement). Il semble donc judicieux de rechercher une expression de I_{tot} sous la forme

$$I_{tot} \propto \dot{M}^a \omega^b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ à trouver

I_{tot} est en $W.m^{-2}$ donc en $kg.s^{-3}$. Comme ω est en s^{-1} et \dot{M} en $kg.s^{-1}$, il vient : $b = 1$ et $a = 2$.

D'où :

$$I_{tot} = \sigma T^4 \propto \dot{M} \omega^2$$

Mais comme $\omega \propto r^{-3/2}$, on en déduit que

$$T(r) \propto r^{-\frac{3}{4}}$$

Ce raisonnement semi-quantitatif ne prend pas en compte la complexité des phénomènes mis en jeu : dans des modèles plus élaborés, le gaz composant le disque est dans un écoulement turbulent et les champs magnétiques présents complexifient la résolution. En 1973, N. I. Shakura et R. A. Sunyaev ont proposé un modèle nommé disque α [5] qui modélise ces phénomènes en introduisant une viscosité $\nu = \alpha c_s^2 H$ avec H hauteur caractéristique du disque, c_s la vitesse du son dans le disque et α coefficient dans $[0, 1]$ qui rend compte des phénomènes de magnétisme et de turbulence mis en jeu.

Pour un disque fin, optiquement épais et à grande distance du centre du disque ($r \gg R_s$ avec R_s rayon de Swartzschild), le modèle de Shakura et Sunyaev propose une distribution de température de la forme

$$T_{\text{disque } \alpha}(r) \propto (\alpha M)^{-\frac{1}{4}} r^{-\frac{3}{4}}$$

Ainsi, avec des analogies newtoniennes et un raisonnement dimensionnel, on approche les solutions de modèles plus élaborés. On utilisera cette dépendance en $r^{-\frac{3}{4}}$ pour les simulations futures.

3.4 Simulation avec la dépendance en $r^{-\frac{3}{4}}$

On modélise ainsi la température suivant une loi de la forme $T(r) = Kr^{-\frac{3}{4}}$. La constante K reste à choisir en définissant une condition limite de la température pour la dernière orbite circulaire stable à $r = 3R_s$ (l'expression du rayon de cette orbite est montrée en annexe). La figure 13 présente quatre simulations d'observation pour différentes températures limites.

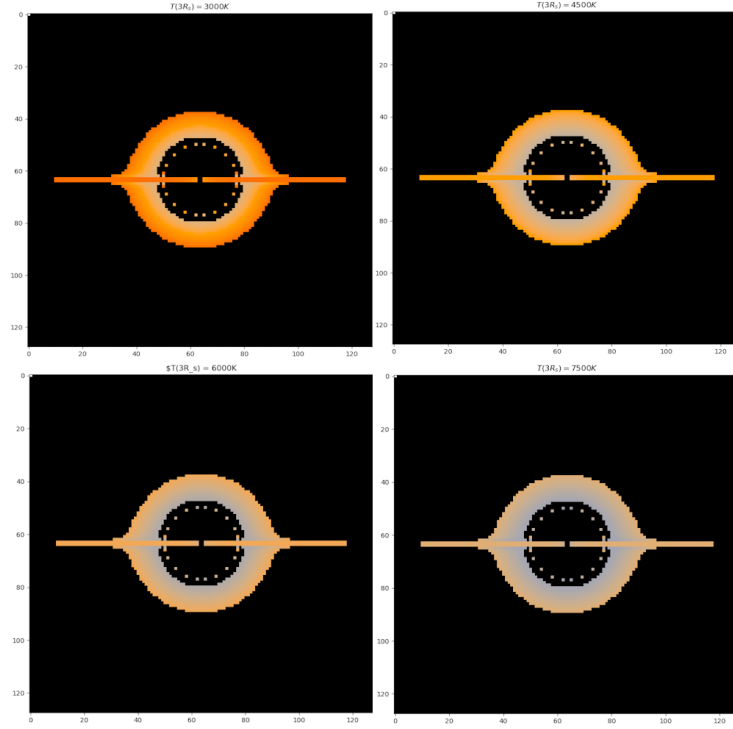


Fig. 13 Simulation de l'observation du trou noir et de son disque en donnant au disque une température dépendante en $r^{-\frac{3}{4}}$ avec une condition limite (de haut en bas et de droite à gauche) $T = 3000K, 4500K, 6000K, 7500K$ sur une grille de résolution 128×128 pixels

La distribution de température ainsi obtenue apporte des résultats différents comparés à ceux obtenus par la première loi qualitative d'une température affine en r . Bien que le choix de la température limite reste arbitraire, la modélisation obtenue a gagné en réalisme par rapport à l'ancien modèle.

On imposera dans la suite la condition limite $T(3R_s) \sim 3000K$. En utilisant cette loi pour la température pour une image de 2048×2048 pixels, on obtient l'observation simulée en figure 14.

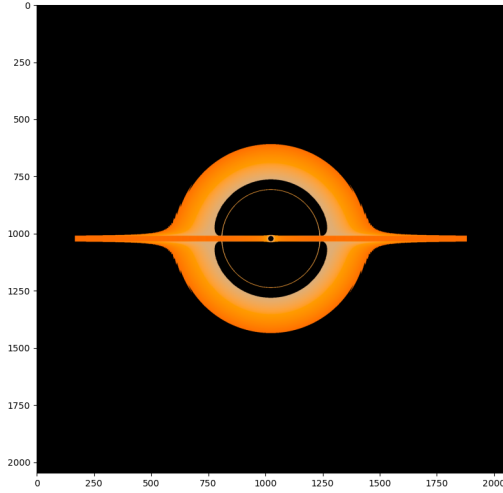


Fig. 14 Simulation de l’observation du trou noir et de son disque d’accrétion pour une température limite $T(3R_s) \sim 3000K$ sur une image de 2048×2048 pixels

Bien que le modèle adopté dans cette partie repose sur un raisonnement dimensionnel, il nous a permis d’approcher une modélisation d’un disque d’accrétion plus réaliste et ainsi, d’obtenir une meilleure représentation numérique de celui-ci.

4 Implémentation des effets Doppler

4.1 Effet Doppler-Fizeau classique

On s’intéresse dans cette dernière partie à l’étude et l’implémentation dans la simulation des différents effets Doppler mis en jeu par le trou noir et son disque. Le premier effet étudié est analogue à l’effet Doppler relatif aux ondes acoustiques mais il affecte la fréquence d’ondes électromagnétiques.

La matière constituant le disque d’accrétion est en rotation autour de celui-ci à des vitesses pouvant s’approcher de celle de la lumière. En effet, comme $v_{\text{orbite}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, la vitesse d’une particule à la dernière orbite stable s’écrit :

$$v_{ISCO} = \sqrt{\frac{GM}{3 \times \frac{2GM}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{6}} \sim 1.2 \times 10^8 m.s^{-1}$$

Les vitesses mises en jeu sont donc relativistes et le décalage en longueur d’onde doit prendre cela en compte. L’effet mis en jeu est donc l’effet Doppler-Fizeau [6] pour des vitesses relativistes.

On suppose qu'une onde lumineuse monochromatique plane est émise du disque. Elle se note :

$$\phi(\vec{r}, t) = A \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t))$$

Avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ et \vec{k} vecteur d'onde associé.

Or, on définit, en relativité restreinte, le produit scalaire entre quadri-vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} par :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A^t B^t + A^x B^x + A^y B^y + A^z B^z$$

Dès lors, la quantité $k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$ peut-être interprétée comme l'opposé du produit scalaire des deux quadri-vecteurs : $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$ et $\mathbf{k} = (\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z$$

On associe à l'observateur et à la particule émettant cette onde lumineuse des référentiels notés respectivement \mathcal{R} et \mathcal{R}' . On note alors $(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z)$ et $(\frac{\omega'}{c}, k'_x, k'_y, k'_z)$ l'expression du quadri-vecteur \mathbf{k} dans chacun de ces référentiels. On choisit l'axe x pour direction entre l'observateur et le centre du trou noir comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

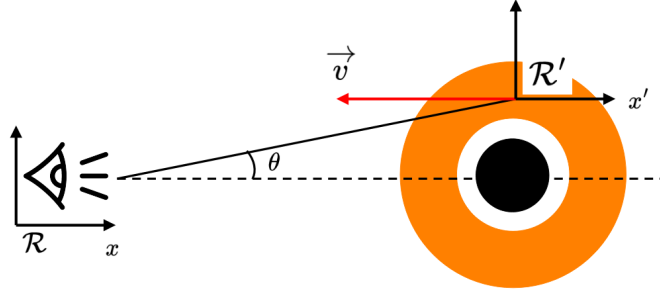


Fig. 15 Schéma effet Doppler-Fizeau (vue de dessus)

Dès lors, la transformation de Lorentz entre le référentiel de l'émission de l'onde \mathcal{R}' et le référentiel de réception \mathcal{R} s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } \beta = \frac{v}{c} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

La démonstration de l'expression de cette transformation de Lorentz pour un quadrivecteur est faite en annexe.

On obtient donc, en notant que $k'_x = -k' \cos \theta$ avec θ défini comme sur la figure 15 :

$$\frac{\omega}{c} = \gamma \left(\frac{\omega'}{c} + \beta k' \cos \theta \right)$$

Et comme $k' = \frac{2\pi}{\lambda_{emis}}$ et $\omega' = \frac{2\pi c}{\lambda_{emis}}$

$$\frac{2\pi}{\lambda_{recu}} = \frac{2\pi\gamma}{\lambda_{emis}} (1 + \beta \cos \theta)$$

D'où

$$\lambda_{recu} = \frac{\lambda_{emis}}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}$$

Or, en supposant que l'observation du disque s'effectue à très grande distance devant la taille de ce dernier, on peut estimer, en première approximation que $\theta \sim 0$. Si bien que l'expression précédente se réécrit :

$$\lambda_{recu} = \lambda_{emis} \frac{\sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)}}{(1 + \beta)}$$

C'est-à-dire :

$$\lambda_{recu} = \lambda_{emis} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

C'est la formule de l'effet Doppler-Fizeau longitudinal.

4.2 Simulation avec l'ajout de l'effet Doppler-Fizeau

On implémente cet effet à la simulation en donnant comme valeur pour v apparaissant dans $\beta = \frac{v}{c}$, la vitesse radiale par rapport à l'axe x , c'est-à-dire, la vitesse apparente d'une particule du disque aux yeux de l'observateur.

En notant ϕ l'angle entre le centre du trou noir et la particule à un instant t , cette vitesse est donc donnée par

$$v_r = v_{orbite} \cos \phi$$

On simule alors l'observation du trou noir et de son disque sur une image de résolution 2048×2048 pixels en attribuant à v_{orbite} la valeur numérique de la vitesse d'orbite Képlérienne en unités géométriques : $v_{orbite} = \sqrt{\frac{M}{r}}$.

Le résultat de la simulation est présenté en figures 16 et 17.

Commentaires : L'effet Doppler implémenté modifie légèrement la couleur du disque dans les régions où les vitesses relatives par rapport à l'observateur sont les plus élevées. Le résultat semble alors cohérent : la lumière émise par la matière se dirigeant vers l'observateur est décalée vers le bleu tandis que celle se dirigeant dans la direction opposée est décalée vers le rouge (redshift).

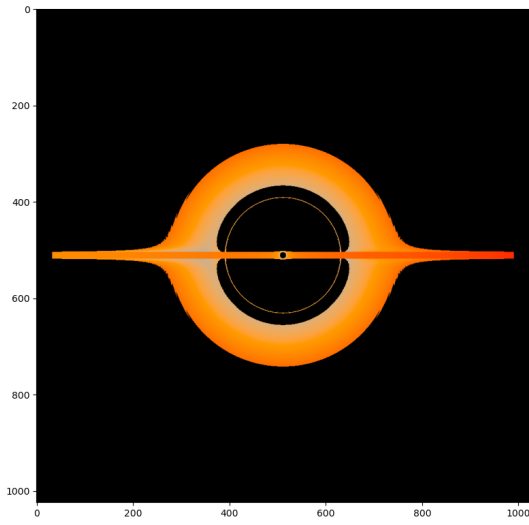


Fig. 16 Simulation de l'observation du trou noir et de son disque d'accrétion avec l'implémentation de l'effet Doppler-Fizeau

Le décalage vers le rouge de la lumière émise par un objet s'éloignant de l'observateur est observé en pratique pour les galaxies lointaines, s'éloignant de la Terre à grandes vitesses. On retrouve un effet similaire ici.

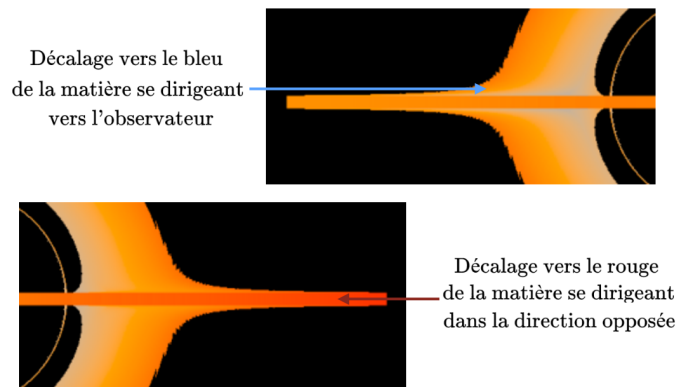


Fig. 17 Mise en évidence de l'effet Doppler-Fizeau à proximité du plan du disque

4.3 Décalage d'Einstein

Le dernier phénomène physique que nous proposons d'implémenter à notre simulation est le décalage d'Einstein ou décalage vers le rouge gravitationnel. Cet effet a pour origine la dilatation du temps dans la géométrie de Schwarzschild et repose donc sur un raisonnement purement relativiste.

Comme en partie 1, nous admettons l'expression de la métrique de Schwarzschild. En unités géométriques, elle se note :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

On définit également le temps propre lié à un référentiel galiléen par

$$d\tau^2 = -ds^2$$

(unité géométrique). C'est le temps "vécu" par un observateur à l'intérieur d'un tel référentiel.

On considère une source d'onde lumineuse située à une distance r_{emis} du trou noir qui émet une onde supposée périodique de période "absolue", c'est-à-dire pour un observateur situé à l'infini, Δt .

L'horloge associée à un référentiel immobile lié à la source mesure la période de cette onde dans ce référentiel, notée $\Delta\tau_{emis}$. L'onde se propageant à la vitesse de la lumière c , en unités géométriques, la longueur d'onde associée se renote :

$$\lambda_{emis} = c \times \Delta\tau_{emis} = \Delta\tau_{emis}$$

Un observateur se situe alors à une distance r_{recu} du trou noir dans un référentiel supposé fixe. L'horloge associée à ce référentiel mesure la période de l'onde notée $\Delta\tau_{recu}$. De même, $\lambda_{recu} = \Delta\tau_{recu}$. Or, l'expression de la métrique pour un référentiel immobile devient :

$$\Delta s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 = -\Delta\tau^2$$

On en déduit que, pour la source et l'observateur :

$$\begin{aligned}\lambda_{emis} &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r_{emis}}}\Delta t \\ \lambda_{recu} &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r_{recu}}}\Delta t\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda_{recu} = \lambda_{emis} \sqrt{\frac{1 - 2M/r_{recu}}{1 - 2M/r_{emis}}}$$

Et comme $r_R > r_{emis}$, $\sqrt{\frac{1 - 2M/r_{recu}}{1 - 2M/r_{emis}}} > 1$

La lumière est donc décalée vers le rouge.

4.4 Simulation avec l'ajout du décalage vers le rouge gravitationnel

Le décalage vers le rouge gravitationnel est implémenté à la simulation en unités géométriques, comme précédemment. On choisit la même distance au trou noir que celle utilisée pour les simulations précédentes.

Le résultat d'une simulation sur une image de résolution 1024×1024 pixels pour laquelle tous les phénomènes physiques précédemment discutés sont pris en compte est présenté figure 18.

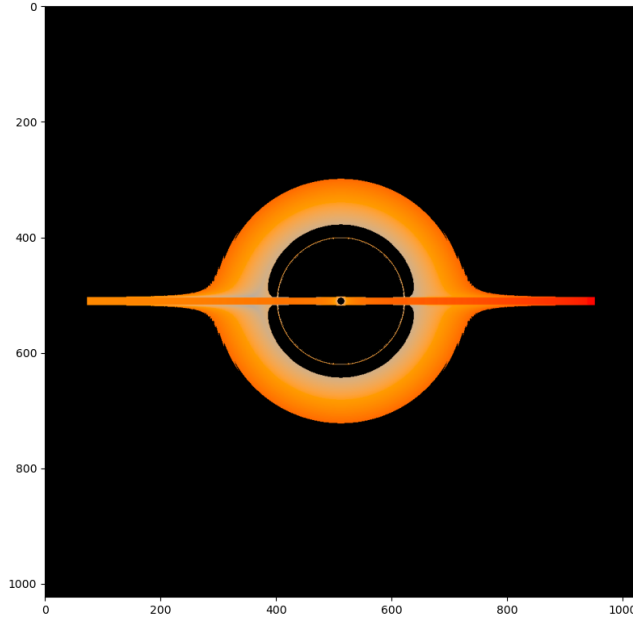


Fig. 18 Simulation de l'observation du trou noir et de son disque d'accrétion avec décalage d'Einstein

Commentaires : L'implémentation de ce dernier effet n'a pas d'effet particulièrement notable. Les orbites stables les plus proches du trou noir ont subi un léger décalage vers le rouge mais ce n'est pas considérablement visible.

Cette simulation prend néanmoins en compte tous les effets précédemment étudiés. Elle est la première illustration du modèle final du trou noir et de son disque. Les parties suivantes n'ont plus pour objectif d'ajouter de nouveaux phénomènes au modèle mais d'apporter une meilleure précision à la simulation.

4.5 Corrections finales

La méthode de résolution numérique adoptée dans ce projet est une méthode d'Euler explicite d'ordre 1. Elle permet de réduire considérablement le temps de calcul de la simulation mais conduit parfois à des approximations relativement imprécises comparées à celles d'autres méthodes numériques de résolution.

Nous avons déjà évoqué en partie 1 une aberration due au pas de résolution choisi dans la méthode d'Euler d'ordre 1, à savoir le "rond" central à l'intérieur du disque représenté en figure 19 et qui n'a pas de réalité physique.



Fig. 19 Mise en valeur de l'aberration due au pas de résolution

Pour pallier cette aberration, on divise par 10 le pas de résolution de la simulation. De plus, pour la dernière simulation, on augmente la taille de l'image de résolution à 2048×2048 pixels. Elle est présentée sur les figures 20 et 21

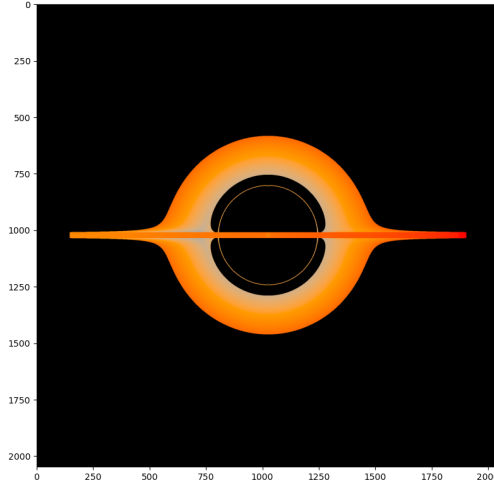


Fig. 20 Simulation de l'observation du trou noir et de son disque en réduisant de 10 le pas de la simulation

Commentaires : On remarque qu'en réduisant le pas de résolution de la simulation, le "rond" central disparaît. Le choix du pas de la simulation était donc bien la cause de cette aberration. De plus, on peut remarquer qu'un second "halo" de photons semble se dessiner autour de l'horizon et plus proche de celui-ci. Les photons constituant ce halo ont probablement réalisé plusieurs orbites autour du trou noir avant d'arriver sur la caméra.

Ces dernières figures constituent la dernière étape de la simulation développée dans ce projet : tous les effets de déviation de photons, de distribution de couleur et de décalages fréquentiels entrent en jeu. En l'état, notre simulation nous fournit donc une représentation semi-réaliste d'un trou noir et de son disque d'accrétion.

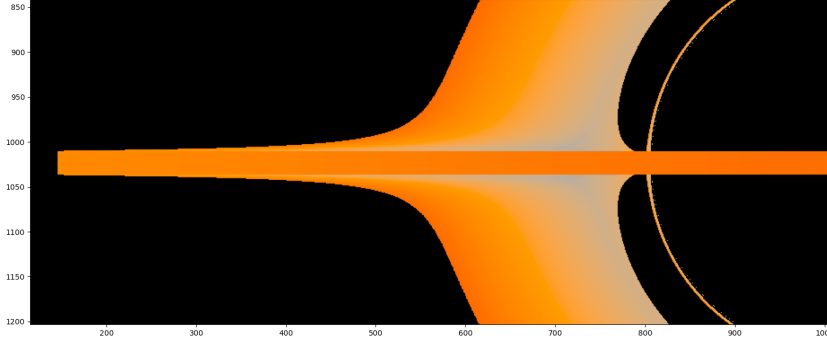


Fig. 21 Zoom sur la dernière simulation

4.6 Discussion et améliorations envisageables

Plusieurs aspects du modèle du trou noir et de son disque d'accrétion que l'on a développé au cours de ce projet sont discutables et pourraient conduire à des améliorations.

- Comme abordé précédemment, la méthode de résolution numérique choisie est celle d'Euler explicite d'ordre 1. Si cette méthode a été choisie pour sa rapidité d'exécution et sa facilité d'implémentation, elle peut conduire à des imprécisions et à une représentation erronée des objets. Nous pourrions envisager de la remplacer par un schéma numérique plus coûteux mais plus précis comme par exemple une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

- Nous avons modélisé en partie 2 le rayonnement du disque d'accrétion comme celui d'un corps noir. Cette hypothèse est relativement courante pour modéliser le rayonnement d'objet astrophysique tels que les étoiles. Néanmoins, en convertissant le spectre visible d'un corps noir en couleur RGB, nous ne représentons pas les rayonnements X et gamma qui sont pourtant émis en grand nombre par les disques d'accrétions réels [5]. Nous pourrions imaginer prendre ces phénomènes en compte et les représenter en fausse couleur en parallèle.

- Si la modélisation de la température du disque, réalisée en partie 3, concordait avec la dépendance en $r^{-\frac{3}{4}}$ du modèle de disque α de Shakura et Sunyaev, le résultat n'était valable qu'à une constante multiplicative près, qu'il a fallu choisir arbitrairement pour la simulation. Pour une représentation plus réaliste, nous pourrions implémenter des lois de distribution de températures issues de modèles plus élaborés comme celui de Shakura et Sunyaev [5] ou encore Novikov et Thorne [7]. Il existe actuellement de nombreux modèles de disques d'accrétion et c'est encore aujourd'hui un riche sujet de recherches.

- Outre la distribution de température, plusieurs autres phénomènes physiques interviennent dans la description réaliste d'un véritable disque d'accrétion comme les forces magnétiques mises en jeu, l'écoulement turbulent du "gaz" dans le disque, la diffusion Compton et la pression de radiation due au rayonnement. Une simulation numérique plus poussée du disque en lui-même pourrait faire intervenir ces effets et décrire de manière plus réaliste le disque d'accrétion.

• Finalement, nous avons choisi pour notre modèle un trou noir de Schwarzschild, c'est-à-dire avec un moment cinétique et une charge nuls. Si ce choix a permis d'obtenir des expressions plus simples à résoudre numériquement, il pourrait être envisagé d'étendre l'étude de la déviation des photons pour un trou noir en rotation [8] (trou noir de Kerr) ou chargé (trou noir de Reissner-Nordström ou Kerr-Newman).

5 Annexe

5.1 Dernière orbite circulaire stable

En mécanique céleste newtonienne, on peut toujours trouver une orbite circulaire stable à une distance quelconque de l'astre attracteur à condition de donner la bonne vitesse à l'objet en orbite.

En relativité générale, dans la métrique de Schwarzschild, il existe cependant un rayon minimal en dessous duquel il est impossible pour un objet matériel d'avoir une orbite stable [2].

Dans la métrique de Schwarzschild, une particule matérielle vérifie (en unités géométriques et avec $\theta = \frac{\pi}{2} = cste$:

$$-1 = -(1 - \frac{2M}{r})(\frac{dt}{d\tau})^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}(\frac{dr}{d\tau})^2 + r^2(\frac{d\phi}{d\tau})^2$$

D'où, comme $e = (1 - \frac{2M}{r})\frac{dt}{d\tau}$ et $l = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$:

$$1 = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}e^2 - (1 - \frac{2M}{r})^{-1}(\frac{dr}{d\tau})^2 - \frac{l^2}{r^2}$$

En multipliant ce qui précède par $(1 - \frac{2M}{r})$, il vient :

$$(1 - \frac{2M}{r}) = e^2 - (\frac{dr}{d\tau})^2 - (1 - \frac{2M}{r})\frac{l^2}{r^2}$$

D'où, en réarrangeant les termes et en divisant par 2 :

$$\frac{1}{2}(\frac{dr}{d\tau})^2 - \frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} = \frac{1}{2}(e^2 - 1) = E$$

Cette expression peut être interprétée comme une conservation de l'énergie E . On définit, de manière analogue à la mécanique newtonienne, le potentiel effectif :

$$V_{eff} = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}$$

Dès lors, une orbite circulaire stable vérifierait : $\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$ et $\frac{d^2V_{eff}}{dr^2} > 0$ C'est-à-dire :

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{M}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{3Ml^2}{r^4} = 0$$

$$\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = -\frac{2M}{r^3} + \frac{3l^2}{r^4} - \frac{12Ml^2}{r^5} > 0$$

En multipliant la première équation par $\frac{2}{r}$ et en sommant les deux expressions, il vient :

$$\frac{l^2}{r^4} - \frac{6Ml^2}{r^5} > 0$$

C'est-à-dire : $r > 6M = r_{ISCO}$: c'est l'orbite circulaire stable la plus petite.

5.2 Démonstration de la transformée de Lorentz-Poincaré

On considère deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre dans la direction $Ox = Ox'$. On cherche les relations entre un évènement (x', y', z', t') vu dans le référentiel \mathcal{R}' et le même évènement (x, y, z, t) vu dans le référentiel \mathcal{R} .

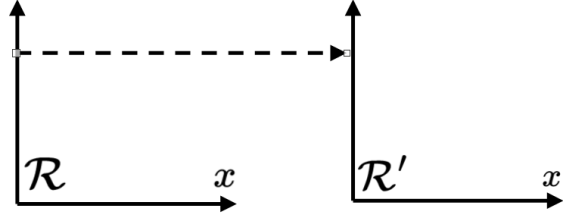


Fig. 22 Schéma de la situation

Postulat 1 : On suppose que la vitesse de la lumière c dans le vide est invariante par changement de référentiel galiléen.

Dans un espace à quatre dimensions, un MRU est représenté par une droite. On postule donc que x, x' et t, t' sont liés par une relation linéaire de la forme :

$$\begin{cases} x' = Ax \\ t' = Bt \end{cases}$$

Pour un objet se déplaçant à la vitesse c dans le sens des x croissant, d'après le postulat 1, la vitesse est la même dans les deux référentiels donc :

$$\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases}$$

Donc, d'après ce qui précède,

$$x' - ct' = Ax - Bct = ct(A - B) = 0$$

C'est vrai pour tout t donc $A = B$

Ainsi, $x' - ct' = A(x - ct)$

De même, pour un objet se déplaçant à la vitesse c dans le sens des x décroissants, on obtient $x' + ct' = C(x + ct)$ (avec C constante). Par demi-somme et demi-différence des équations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} x' = \frac{A+C}{2}x - \frac{A-C}{2}ct \\ ct' = \frac{A+C}{2}ct - \frac{A-C}{2}x \end{cases}$$

On note $\gamma = \frac{A+C}{2}$ et $b = \frac{A-C}{2}$. On cherche donc à déterminer γ et b .

On se place à l'origine de \mathcal{R}' : $x' = 0$ donc $x = \frac{b}{\gamma}ct$

Or, $v = \frac{x}{t} = \frac{b}{a}c$ donc $b = \frac{av}{c}$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}t) \end{cases}$$

Postulat 2 : (Principe de relativité) L'expression des lois de la physique est la même dans tous les référentiels galiléens. Il n'y a pas de référentiel privilégié.

Le calcul réalisé pour \mathcal{R}' se déplaçant à la vitesse v par rapport à \mathcal{R} est également valable pour le référentiel \mathcal{R} se déplaçant à la vitesse $-v$ par rapport à \mathcal{R}' .

Dès lors :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}t') \end{cases}$$

D'où

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(\gamma(x - vt) + \frac{v}{c}\gamma(ct - \frac{v}{c}x)) = \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})x$$

Ainsi, $\gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$

Donc

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

D'où, comme la translation se fait dans le sens $Ox = Ox'$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}t') \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

On peut réécrire ce système de manière matricielle en notant $\beta = \frac{v}{c}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Cette transformation reste vraie pour tout quadrivecteur évoluant comme (ct, x, y, z) [6], ce qui était le cas dans notre étude.

References

- [1] Schwarzschild, K.: On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) (1916) <https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/9905030>
- [2] Taillet, R., Moore, T.A.: Relativité Générale. Editions deboeck supérieur (2014)
- [3] Guiselin, B.: Agrégation de chimie : Mécanique quantique. Cours de l'ENS Lyon années 2023-2024
- [4] James, O., Tunzelmann, E.v., Franklin, P., Thorne, K.S.: Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie interstellar. Classical and Quantum Gravity 32 (2015) <https://doi.org/10.48550/arXiv.1502.03808>
- [5] Shakura, N.I., Sunyaev, R.A.: Black holes in binary systems. observational appearance. Astronomy and Astrophysics (1973) https://doi.org/10.1007/978-94-010-2585-0_13
- [6] Pérez, J.P.: Relativité et Invariance – Fondements et Applications. Editions Dunod, ISBN : 978-2100491735
- [7] Page, D.N., Thorne, K.S.: Disk-accretion onto a black hole. time-averaged structure of accretion disk. The Astrophysical Journal (1974) <https://doi.org/10.1086/152990>
- [8] Carter, B.: Global structure of the kerr family of gravitational fields. Phys. Rev. **174**, 1559–1571 (1968) <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559>