

Etude de l'abrasion d'une météorite lors de son entrée dans l'atmosphère

Maxime Soncin

Cette étude est inspirée de la partie IV du sujet Physique-Chimie 1 Centrale TSI 2015 [1] et d'un exercice donné en cours de physique qui s'intéressent à l'abrasion de la météorite de Tcheliabinsk.

La première partie reprend le modèle simplifié de l'abrasion de la météorite proposé dans le sujet et dans l'exercice qui s'appuie sur de fortes hypothèses. La seconde partie a pour objectif de proposer un modèle qui allège ces hypothèses que j'ai pu élaborer en échangeant avec mes professeurs de physique. Enfin, la troisième partie est consacrée à la modélisation de l'abrasion sous Python et d'une discussion sur l'influence des différents paramètres qui interviennent dans le problème, ainsi que de la validité des hypothèses retenues.

1 Modèle proposé dans le sujet Centrale ($m = \text{cste}$)

1.1 Position du problème

La météorite de Tcheliabinsk est modélisée par une sphère homogène de rayon $R = 8.5 \text{ m}$ et de masse $m = 1.3 \times 10^7 \text{ kg}$ qui pénètre dans l'atmosphère avec une vitesse \vec{v}_0 de norme $\|\vec{v}_0\| = 19 \text{ km/s}$ et un angle $\theta_0 = 70^\circ$.

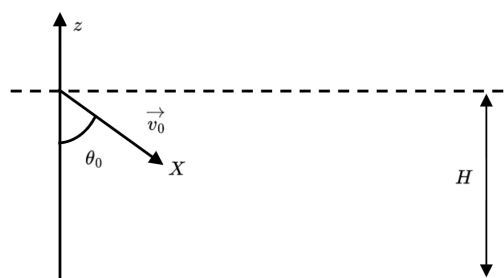


Fig. 1 Schéma du problème

On modélisera l'atmosphère par une couche homogène d'épaisseur H et on supposera que H est assez petit pour négliger les variations du champ de pesanteur terrestre \vec{g} .

La météorite est alors soumise à deux forces : son poids \vec{P} et la force de traînée

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho_{air}SC_Dv\vec{v}$$

avec C_D : coefficient de traînée

ρ_{air} : masse volumique de l'air

S surface transverse de la météorite

Le rapport $\left\|\frac{\vec{f}}{\vec{P}}\right\| \gg 1$ si et seulement si $v_0 \gg v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_{air}SC_D}}$. On supposera cette hypothèse vérifiée dans la suite de la résolution, si bien que le mouvement de la météorite pourra être considéré comme unidimensionnel selon le vecteur \vec{X} .

Le sujet et l'exercice nous invitent également à travailler avec l'hypothèse selon laquelle la masse m de la météorite reste constante durant la traversée de l'atmosphère. L'étude réalisée en partie 1 conserve cette condition et le cas m non constante fait l'objet de la partie 2.

1.2 Equation du mouvement

Le référentiel terrestre est ici supposé galiléen. L'application de la relation fondamentale de la dynamique à la météorite sphérique de masse m constante donne:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_{air}SC_Dv\vec{v}$$

Or, projeté sur \vec{u}_X et comme $\vec{v} = \frac{dX}{dt}\vec{u}_X$,

$$m\frac{dX}{dt}\frac{dv}{dX} = -\frac{1}{2}\rho_{air}SC_D\frac{dX}{dt}v$$

D'où

$$\frac{dv}{dX} = -\frac{\rho_{air}SC_D}{2m}v$$

En notant $D = \frac{2m}{\rho_{air}SC_D}$, distance caractéristique de décroissance de v . Il vient finalement:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{X}{D}}$$

Or, par schéma, $X_{impact} = \frac{H}{\cos(\theta_0)}$. On obtient finalement la vitesse à l'impact :

$$v_{impact} = v_0 e^{-\frac{H}{D \cos(\theta_0)}}$$

1.3 Estimation de la masse perdue au cours de la traversée de l'atmosphère

Le sujet suppose alors que la moitié de l'énergie cinétique perdue par la météorite lors de sa traversée de l'atmosphère sert à sublimer la surface de la météorite. L'enthalpie de sublimation $\Delta_{sub}H$ est donnée égale à $\Delta_{sub}H = 10^4 \text{ kJ/kg}$.

Sous l'hypothèse d'une transformation isobare, on obtient alors une estimation de la masse perdue m_{perdue} par la météorite lors de sa traversée de l'atmosphère :

$$m_{perdue} = \frac{|\Delta E_c|}{2\Delta_{sub}H} = \frac{\frac{1}{2}m(v_0^2 - v_{impact}^2)}{2\Delta_{sub}H}$$

Application numérique : Pour $C_D = 0.3$ et $H = 20 \text{ km}$, on obtient

$$m_{perdue} = 3 \times 10^7 \text{ kg}$$

Ainsi, $m_{perdue} > m = 1,3 \times 10^7 \text{ kg}$: l'hypothèse selon laquelle la masse de la météorite ne varie pas significativement lors de la traversée de l'atmosphère n'est donc pas pertinente.

2 Tentative de correction du modèle : météorite sphérique à masse variable

L'étude de cette deuxième partie propose une correction du modèle présenté dans le sujet en ne considérant plus la masse de la météorite comme constante.

2.1 Variation de la quantité de mouvement de la météorite

On modélise la météorite par une sphère homogène de masse variable qui éjecte la même quantité de gaz, à même vitesse, dans toutes les directions.

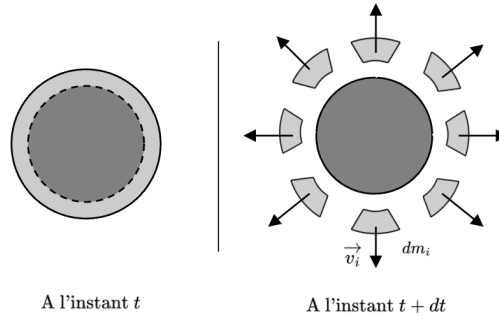


Fig. 2 Météorite sphérique, homogène à masse variable émettant du gaz par sublimation dans toutes les directions

On suppose donc les \vec{v}_i constants en norme ainsi que les variations dm_i de masse constantes dans toutes les directions, si bien que

$$\sum_i dm_i = dm$$

$$\sum_i dm_i \vec{v}_i = dm_i \sum_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

(par hypothèse, $dm_i = \text{cste}$ et par isotropie, les vecteurs vitesses se compensent deux à deux)

Calculons la variation de la quantité de mouvement entre les instants t et $t + dt$:

$$\vec{p}(t + dt) = (m(t) - dm)(\vec{v}(t) + d\vec{v}) + \sum_i dm_i(\vec{v}(t) + \vec{v}_i)$$

$$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}$$

D'où, à l'ordre 1, en faisant la différence $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)$

$$\begin{aligned} d\vec{p}(t) &= m(t)d\vec{v}(t) - dm \vec{v}(t) + \underbrace{\left(\sum_i dm_i\right) \vec{v}(t)}_{=dm \vec{v}(t)} + \underbrace{\sum_i dm_i \vec{v}_i}_{=\vec{0}} \\ &= m(t)d\vec{v}(t) \end{aligned}$$

2.2 Equations de variations de vitesse et de masse

A partir de ce qui précède, on applique la relation fondamentale de la dynamique à la météorite sphérique projeté sur \vec{u}_X .

$$\frac{dp}{dt} = \vec{f}$$

D'après ce qui précède, $dp = m(t)v(t)$ donc

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_{air} S(t) C_D v^2$$

D'où

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho_{air} C_D}{2m(t)} S(t) v^2$$

Or, $S(t) = \pi r(t)^2$ et $m(t) = \rho_m \times \frac{4\pi}{3} r(t)^3$ avec ρ_m masse volumique de la météorite.

Donc $S(t) = \pi \left(\frac{3m(t)}{4\pi\rho_m}\right)^{\frac{2}{3}}$. Finalement :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho_{air} C_D \pi}{2m(t)} \left(\frac{3m(t)}{4\pi\rho_m}\right)^{\frac{2}{3}} v^2$$

De plus, l'hypothèse de l'énoncé selon laquelle la moitié de l'énergie cinétique sert à abraser la météorite est conservée. On en déduit que:

$$dm = \frac{dE_c}{2\Delta_{sub}H} < 0$$

Or, par définition intrinsèque, $dE_c = \vec{v} \cdot d\vec{p} = mv dv$ Ainsi

$$dm = \frac{mv dv}{2\Delta_{sub}H} = -\frac{m C_D \pi \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \rho_{air}}{4\Delta_{sub}H m^{\frac{1}{3}} \rho_m^{\frac{2}{3}}} v^2 dX$$

Finalement, en notant $A = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{C_D A \rho_{air}}{m^{\frac{1}{3}} \rho_m^{\frac{2}{3}}} v^2 \quad (1)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{C_D A \rho_{air}}{2\Delta_{sub}H} \left(\frac{m}{\rho_m}\right)^{\frac{2}{3}} v^3 \quad (2)$$

Ces équations constituent le modèle de la théorie classique de l'abrasion des météorites dans le cas d'une météorite sphérique homogène. [2]

3 Modélisation de la météorite de Tcheliabinsk sous Python

L'objectif de cette troisième partie est d'utiliser les équations (1) et (2) afin de calculer numériquement la masse et la vitesse de la météorite en fonction de la position. L'influence des différents paramètres de l'étude est également étudiée.

3.1 Implémentation Python

Sous Python, on applique une méthode d'Euler pour calculer X , v et m à chaque instant t jusqu'à impact en définissant un pas temporel de l'ordre de 10^{-3} s et en calculant les valeurs de dX , dv et dm à chaque instant t . Nous voulons cependant toujours être sous l'hypothèse d'une étude unidimensionnelle, c'est-à-dire d'un poids négligeable devant la force de traînée. Le programme s'arrête donc si l'on a atteint la position d'impact ou bien si la vitesse v de la météorite est inférieure ou égale à $10 \times v_{lim}$ (calculée en partie 1).

On utilise d'abord les valeurs numériques fournies dans l'énoncé : $H = 20 \text{ km}$, $\rho_{air} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ et $C_D = 0.3$ donc $X_{impact} = 58 \text{ km}$. On obtient alors les représentations graphiques de la vitesse et de la masse en fonction de la position de la figure 3.

La valeur finale de m au moment de l'impact pour $C_D = 0.3$ et $H = 20 \text{ km}$ est de $m_{impact} = 6,3 \times 10^4 \text{ kg}$ soit $m = 63 \text{ tonnes}$. C'est 0.5% de la masse m initiale.

La valeur théorique fournie dans l'exercice est de l'ordre de 0.05% de la masse initiale de la météorite. Le rapport entre la valeur théorique et la valeur réelle est

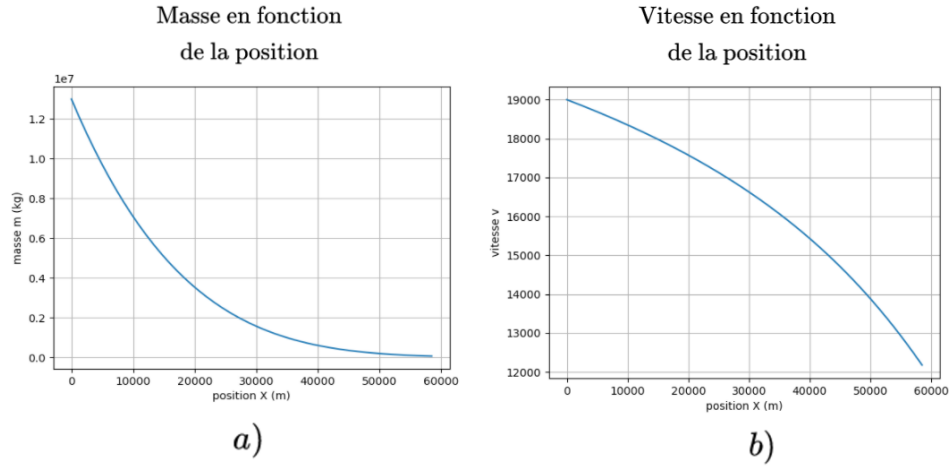


Fig. 3 Masse et vitesse en fonction de la position pour $C_D = 0.3$ et $H = 20$ km

donc de 10. Les différents facteurs pouvant expliquer cet écart seront discutés dans la sous-partie 3.4.

Nous vérifions également que le programme s'est arrêté parce que la météorite a atteint le point d'impact et non parce que l'hypothèse unidimensionnelle n'était plus valable.

3.2 Influence du coefficient de traînée

La valeur du coefficient de traînée choisie dans l'énoncé était arbitraire. En pratique, le coefficient de traînée d'une sphère homogène peut varier. Dans notre cas, nous étudions l'influence de ces variations sur un intervalle $C_D \in [0.25, 0.45]$. La simulation de l'abrasion de la météorite pour différentes valeurs de C_D est présentée en figure 4.

Table 1 Masse restante au moment de l'impact en fonction de C_D

C_D	Masse restante au moment de l'impact (tonnes)	Pourcentage de la masse initiale
0.25	230	1.7%
0.30	64	0.49%
0.35	16	0.13%
0.40	5.0	0.04%
0.45	2.4	0.02%

On remarque alors que le coefficient de traînée possède une influence non négligeable sur la variation de masse et de vitesse de la météorite. On retrouve un

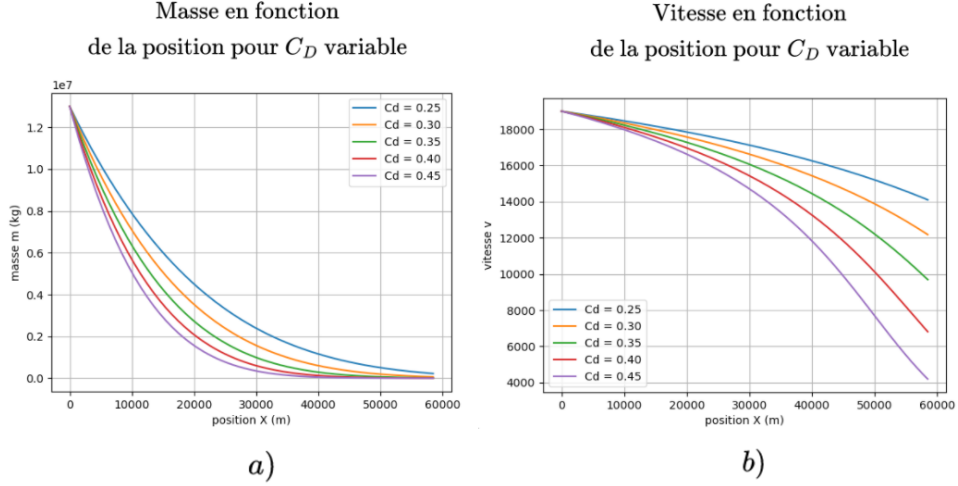


Fig. 4 Masse et vitesse en fonction de la position pour $C_D \in [0.25, 0.45]$ et $H = 20 \text{ km}$

comportement que l'on pouvait déjà déduire des équations (1) et (2) : plus le coefficient de traînée C_D est élevé, plus la masse et la vitesse auront tendance à décroître rapidement.

De plus, pour toutes les valeurs de C_D étudiées ici, la météorite a pu atteindre la position d'impact sans contredire l'hypothèse de poids négligeable devant la force de traînée.

3.3 Influence de l'épaisseur de l'atmosphère

De la même manière, l'épaisseur H de l'atmosphère traversée par la météorite a été fixée en début d'énoncé. On reprend ici la valeur numérique $C_D = 0.3$ et on s'intéresse à l'évolution de notre système pour différentes valeurs de $H \in [5 \text{ km}, 30 \text{ km}]$.

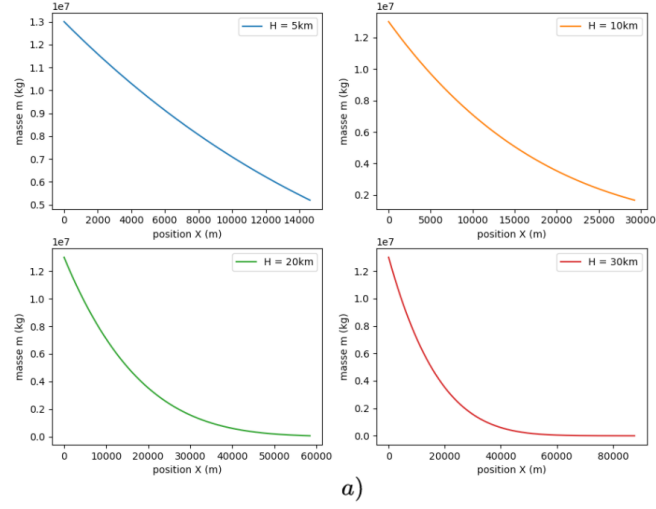
La simulation de l'abrasion pour différentes valeurs de H est présentée en figures 5 et 6.

Table 2 Masse restante au moment de l'impact en fonction de H

H	Masse restante au moment de l'impact (tonnes)	Pourcentage de la masse initiale
5 km	5200	40%
10 km	1700	13%
20 km	64	0.49%
30 km	Hypothèse $v \gg v_{lim}$ non validée	Hypothèse $v \gg v_{lim}$ non validée

On remarque alors que l'épaisseur de l'atmosphère a également une influence sur les résultats de l'étude. D'abord, en restant dans l'hypothèse unidimensionnelle, la position d'impact de la météorite augmente lorsque H augmente (pour θ_0 fixé, on a

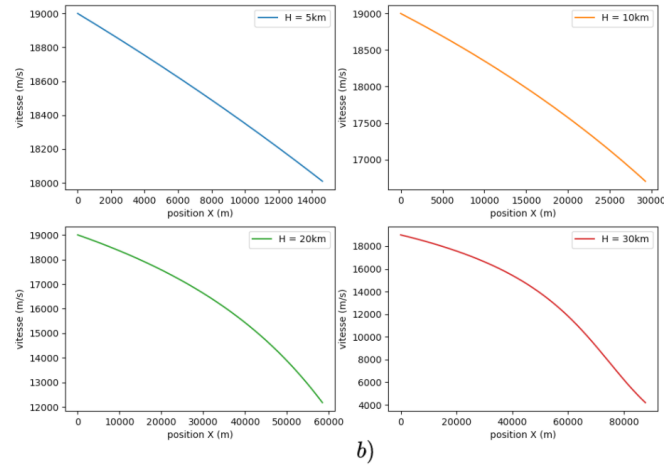
Masse en fonction
de la position pour H variable



a)

Fig. 5 Variation de la masse en fonction de la position pour $H = 5, 10, 20$ et 30 km

Vitesse en fonction
de la position pour H variable



b)

Fig. 6 Variation de la vitesse en fonction de la position pour $H = 5, 10, 20$ et 30 km

vu en partie 1 que $X_{impact} = \frac{H}{\cos \theta_0}$). On observe alors que la forme de la courbe est modifiée (davantage convexe pour la masse et concave pour la vitesse).

De plus, pour une épaisseur H trop élevée, l'hypothèse $v \gg v_{lim}$ que l'on avait supposée vraie dès que $v \geq 10 \times v_{lim}$ n'est plus vérifiée. C'est le cas pour $H = 30$ km. Notre modèle ne conviendrait plus pour des atmosphères "trop épaisses".

3.4 Discussion de la validité du modèle

La proposition de modèle étudiée en partie 2 apporte une description quantitative plus réaliste de la situation que celle proposée dans le sujet Centrale TSI 2015. En effet, la masse de la météorite n'est plus constante et on se rapproche, pour certaines valeurs du coefficient de traînée ou d'épaisseur de l'atmosphère, de la valeur expérimentale de masse de la météorite en fin de traversée.

Néanmoins, plusieurs aspects du modèle sont discutables et pourraient conduire à des améliorations :

- La modélisation de l'atmosphère comme une couche plane d'épaisseur constante au sein de laquelle la masse volumique de l'air ρ_{air} est constante n'est pas très réaliste. On pourrait envisager de la modéliser de manière isotherme selon la statistique de Maxwell-Boltzmann ou bien encore par un modèle à trois bandes affines comme proposé dans le chapitre "Thermodynamique statistique" du *Questions ouvertes de physique* aux éditions Ellipses. [3]

- Négliger le poids tout au long de l'étude devant la force de traînée peut amener à de mauvaises estimations comme cela aurait pu être le cas dans la sous-partie 3.3. Si le poids n'est plus négligé, on peut se demander si l'hypothèse d'un champ de pesanteur constant reste valable.

- Nous avons supposé que la moitié de l'énergie cinétique était utilisée pour abraser la météorite en surface. Cette estimation n'est qu'un ordre de grandeur sous hypothèse isobare: en pratique, la météorite n'est pas abrasée uniformément. De plus, les gaz émis par la sublimation de la roche ne sont probablement pas éjectés à la même vitesse dans toutes les directions.

- Finalement, nous avons supposé tout au long de notre étude que la météorite avait une géométrie sphérique. En réalité, ce n'est qu'un cas très particulier (généralement pour des météorites bien plus grosses) et la géométrie de la roche influe de manière significative sur son abrasion. La météorite de Tcheliabinsk s'est en réalité disloquée avant de toucher le sol en plusieurs morceaux qui se sont abrasés différemment.

Ces différents points peuvent, ainsi, faire l'objet d'améliorations pour obtenir un modèle de météorite plus réaliste.



Fig. 7 Image de la traînée de la météorite de Tcheliabinsk - Futura-Sciences.com

References

- [1] Centrale: Sujet physique-chimie 1 filière tsi (2015)
- [2] Australian-Space-Academy: Théorie de L'abrasion des Météorite,
www.spaceacademy.net.au/watch/debris/metflite.htm
- [3] Garing, C., Mrabet, C., Vialatte, P.-Y., Paviet, F., Idda, H.: Les mille et une questions en prepa - questions ouvertes de physique. Ellipses (2023)