Charakteristische Funktionen

Maximilian Ernst

June 12, 2021

Inhalt

Versicherungen

Wie viele Schadensmeldungen erhält eine Versicherung in einem Zeitintervall $(0, t)$?
Überlegung:

- Wir zerlegen das Intervall in n Teilintervalle der Länge $\frac{t}{n}$
- n groß $\rightarrow$ Teilintervalle kurz $\rightarrow$ Annahme, dass nur ein Schaden auftritt
- in einem Intervall kann also ein Schaden auftreten oder kein Schaden (mit Wahrscheinlichkeit p)
- $p = \alpha \frac{t}{n}$
- Die einzelnen Teilintervalle sind unabhängig

Versicherungen

Wie viele Schadensmeldungen erhält eine Versicherung in einem Zeitintervall $(0, t)$?
Überlegung:

Das bedeutet: eine "Unglücksfee" zieht n mal eine "Kugel" auf der steht "Schaden" (mit Wahrscheinlichkeit p) oder "kein Schaden" (mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$), mit $p = \alpha \frac{t}{n}$.
Anzahl der Schadensfälle $k \sim Bin_{n,\alpha \frac{t}{n}}$
Je größer wir n wählen, desto besser die Approximation. Also:

$$P(k) = \lim_{n \to \infty} Bin_{n,\alpha \frac{t}{n}}$$

Versicherungen

Sei p_n eine Folge von Wahrscheinlichkeiten mit $np_n \to \lambda$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} Bin_{n,p_n}(k) = Poiss_{\lambda}(k)$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{\color{red}{n^k}}{k!} \frac{n!}{\color{red}{n^k}(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n} \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^{n} \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^{n} \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^{n} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{\color{red}{n}p_n}{\color{red}{n}})^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} {\color{red}(1-\frac{\lambda}{n})^n} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} {\color{red}e^{-\lambda}}
\end{aligned}
$$

Geht das auch einfacher? $\rightarrow$ Ja!

Ziel

Ziel: Jeder (reellwertigen) Zufallsvariable ein möglichst "einfaches" mathematisches "Objekt" zuordnen, sodass wir Berechnungen und Beweise mit diesem Objekt (statt der Zufallsvariable) machen.

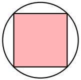
- Verteilung der Summe unabhängiger Zufallsvariablen
- Berechnung von Momenten
- Beweis von Verteilungskonvergenzen

Dualität

Manchmal bilden sehr unterschiedliche mathematische Objekte nur zwei Seiten der selben Medaille

Beispiel 1 - Flächeninhalt von Kreisen

Betrachte die Menge aller Kreise.
Die duale Menge ist die Menge alle einbeschriebenen Quadrate.



Die Relation $>$ für den Flächeninhalt bleibt erhalten.

Beispiel 2 - Berechnung von Produkten

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

$$xy = \exp(\log xy) = \exp(\log x + \log y)$$

Zur Berechnung großer Produkte: Berechne den Logarithmus; addiere das Ergebnis; nimm $\exp$ des Ergebnisses.

Beispiel 2 - Berechnung von Produkten

$$
\begin{aligned}
L(x_1, \ldots, x_n | \mu, \Sigma) &= \prod_{i=1}^{n} L(x_i | \mu, \Sigma) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-d/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log L(x_1, \ldots, x_n | \mu, \Sigma) &= \sum_{i=1}^{n} \log L(x_i | \mu, \Sigma) \\
&= \sum_{i=1}^{n} -\frac{d}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \det(\Sigma) - \frac{1}{2}(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu)
\end{aligned}
$$

Mittel

Wir bestimmen eine bijektive Abbildung aus der Menge aller reellwertigen Zufallsvariablen in einen andere Menge.
Dann zeigen wir, dass wir anstelle mit den Zufallsvariablen zu rechnen, auch viel einfacher mit ihrem "Partner" rechnen können.

Definition

Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet

$$\varphi^X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] \tag{1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathrm{d}P^X(x) \tag{2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(ux) \mathrm{d}P^X(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(ux) \mathrm{d}P^X(x) \tag{3}$$

ihre charakteristische Funktion.

Beispiel 1 - Normalverteilung

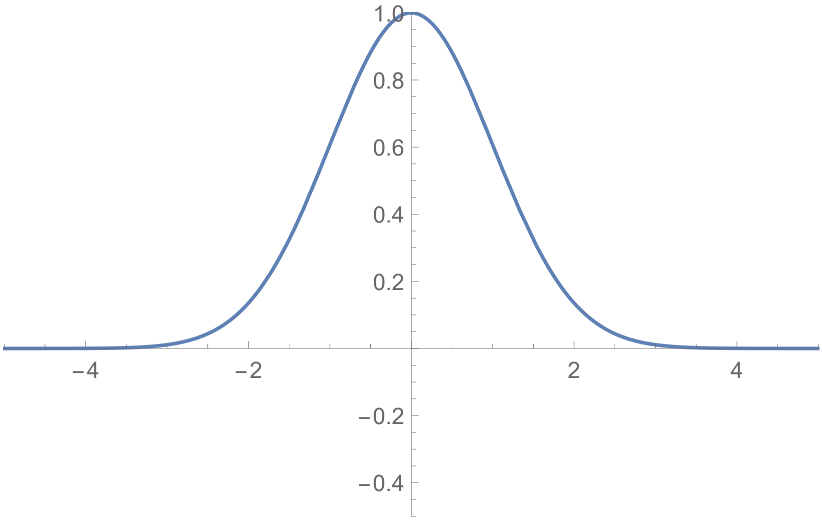
Sei $X \sim N(0,1)$. Dann ist die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) &= \mathbb{E}[e^{iuX}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_X(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

Beispiel 1 - Normalverteilung

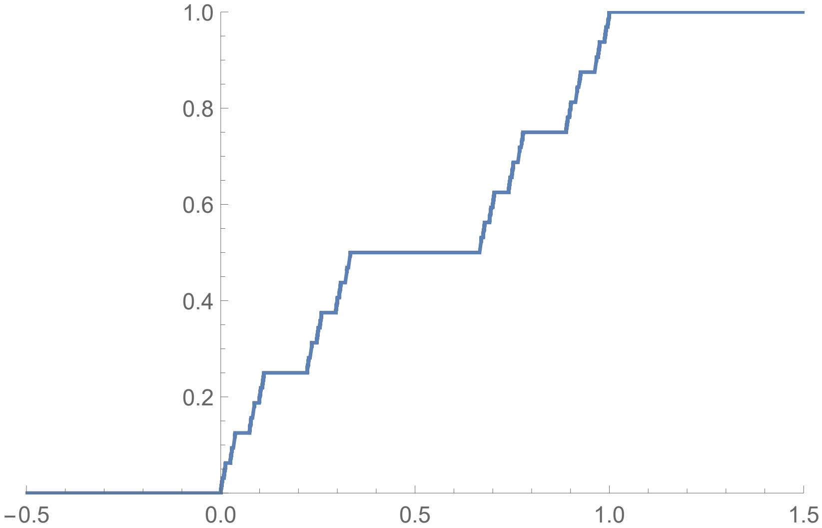


Eigenschaften

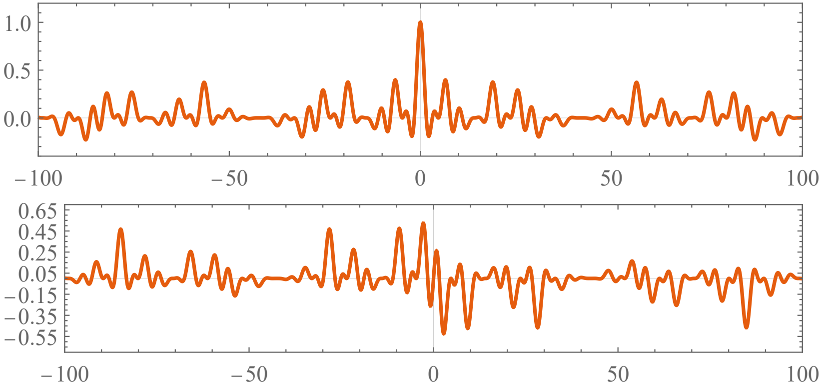
φ sollte besonders "einfach" sein

- $\varphi(0) = 1$
- $|\varphi| \leq 1$
- gleichmäßig stetig

Beispiel 2 - φ ist "einfach"



Beispiel 2 - φ ist "einfach"



Faltung - Dichten

Seien X, Y unabhängige reellwertige ZV die beide eine Dichte f^X, f^Y besitzen. Dann besitzt $X + Y$ die Dichte

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^X(z-y) f^Y(y) \mathrm{d}y, \; z \in \mathbb{R}$$

(eng.: convolution)

Faltung - CF

Seien X, Y unabhängige reellwertige ZV mit charakteristischen Funktionen φ^X, φ^Y. Dann besitzt $X + Y$ die charakteristische Funktion

$$\varphi^{X+Y} = \varphi^X \varphi^Y$$

Faltung - Beispiel

Seien $X \sim Gamma(\lambda, p_1)$ und $Y \sim Gamma(\lambda, p_1)$ unabhängig.
Die Dichte der Gamma-Funktion ist

$$f_{\lambda,p}(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Es ergibt sich also für die Faltung

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^{p_1}}{\Gamma(p_1)} (z-y)^{p_1-1} e^{-\lambda(z-y)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z-y) \frac{\lambda^{p_2}}{\Gamma(p_2)} (y)^{p_2-1} e^{-\lambda(y)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \mathrm{d}y$$

Faltung - Beispiel

Seien $X \sim Gamma(\lambda, p_1)$ und $Y \sim Gamma(\lambda, p_1)$ unabhängig.
Die characteristische Funktion ist

$$\varphi^{Gamma(\lambda,p)}(u) = \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{-p}$$

Es ergibt sich also für die Faltung

$$\varphi^{X+Y}(u) = \varphi^X(u)\varphi^Y(u) = \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-p_1}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-p_2} = \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-(p_1+p_2)} = \varphi^{Gamma(\lambda,p_1+p_2)}(u)$$

Momente

Besitzt die ZV X p endliche Momente, ist φ^X p-mal stetig differenzierbar und es gilt für $k < p$

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{(\varphi^X)^{(k)}(0)}{i}$$

Momente - Beispiel

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Gesucht: $\mathbb{E}[X]$.
Es ist

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\varphi_X^{(1)}(0)}{i}$$

Momente - Beispiel

Wir berechnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi_X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\exp(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2) = \exp(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)(i\mu - \sigma^2 u)$$

Ausgewertet an der Stelle 0

$$\varphi_X^{(1)}(0) = \exp(0-0)(i\mu - 0) = 1 \cdot i\mu$$

Momente - Beispiel

Eingesetzt in unsere Formel

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\varphi_X^{(1)}(0)}{i} = \frac{i\mu}{i} = \mu$$

Konvergenz in Verteilung

Stetigkeitssatz von Levy:
Seien P_n Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ mit charakteristischen Funktionen φ_n und gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und eine bei $x = 0$ stetige Funktion φ, so ist φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ und es gilt: $P_n \to P$.

Konvergenz in Verteilung - Beispiel

Wir haben eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $Bin(n, p_n)$ mit $np_n \to \lambda$. Es gilt:

$$\varphi^{Bin(n,p_n)}(u) = (1 + p_n(e^{iu} - 1))^n$$

Wir erhalten also

$$\varphi^{Bin(n,p_n)}(u) = (1+p_n(e^{iu}-1))^n = \left(1+\frac{np_n(e^{iu}-1)}{n}\right)^n \to e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \varphi^{Poiss(\lambda)}$$

Referenzen

[1] Hans-Otto Georgii. *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015.

[2] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.