Charakteristische Funktionen

Maximilian Ernst

June 8, 2021

Inhalt

Versicherungen

Wie viele Schadensmeldungen erhält eine Versicherung in einem Zeitintervall $(0, t)$?
Überlegung:

- Wir zerlegen das Intervall in n Teilintervalle der Länge $\frac{t}{n}$
- n groß $\rightarrow$ Teilintervalle kurz $\rightarrow$ Annahme, dass nur ein Schaden auftritt
- in einem Intervall kann also ein Schaden auftreten oder kein Schaden (mit Wahrscheinlichkeit p)
- $p = \alpha \frac{t}{n}$
- Die einzelnen Teilintervalle sind unabhängig.

Versicherungen

Wie viele Schadensmeldungen erhält eine Versicherung in einem Zeitintervall $(0,t)$?
Das bedeutet: eine "Unglücksfee" zieht n mal eine "Kugel" auf der steht "Schaden" (mit Wahrscheinlichkeit p) oder "kein Schaden" (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$), mit $p = \alpha\frac{t}{n}$.
Anzahl der Schadensfälle $k \sim Bin_{n,\alpha\frac{t}{n}}$
Je größer wir n wählen, desto besser die Approximation. Also:

$$P(k) = \lim_{n\to\infty} Bin_{n,\alpha\frac{t}{n}}$$

Versicherungen

Sei p_n eine Folge von Wahrscheinlichkeiten mit $np_n \to \lambda$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} Bin_{n,p_n}(k) = Poiss_\lambda(k)$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^k \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^k \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^k \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^k \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-\frac{np_n}{n})^k \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^k \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Ziel

Ziel: Jeder (reellwertigen) Zufallsvariable ein möglichst "einfaches" mathematisches "Objekt" zuordnen, sodass wir Berechnungen und Beweise mit diesem Objekt (statt der Zufallsvariable) machen.

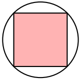
- Verteilung der Summe unabhängiger Zufallsvariablen
- Berechnung von Momenten
- Beweis von Verteilungskonvergenzen

Dualität

Manchmal bilden sehr unterschiedliche mathematische Objekte nur zwei Seiten der selben Medaille

Beispiel 1

Betrachte die Menge aller Kreise.
Die duale Menge ist die Menge alle einbeschriebenen Quadrate.



Die Relation $>$ für den Flächeninhalt bleibt erhalten. Wollen wir also wissen, ob ein Kreis größer als ein anderer ist, können wir stattdessen auch schauen, ob das einbeschriebene Quadrat größer ist.

Beispiel 2

Logarithmieren zur Berechnung von Produkten.
Die Menge sind die positiven reellen Zahlen, und die duale Menge sind auch die positiven reellen Zahlen.
Die strukturerhaltende Abbildung ist der Logarithmus; die Multiplikation von reellen Zahlen entspricht der Addition:

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

Zur Berechnung großer Produkte: Berechne den Logarithmus; addiere das Ergebnis; nimm $\exp$ des Ergebnisses.

Beispiel 3

Es gilt (bei fester Basis): jeder linearen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann eineindeutig eine Matrix zugeordnet werden, die sogennante Darstellungsmatrix $\mathbf{M}_f$, sodass gilt:

$$f(x) = \mathbf{M}_f x$$

Die erhalten bleibende Struktur ist die Verknüpfung von Funktionen:

$$\mathbf{M}_{f \circ g} = \mathbf{M}_f \mathbf{M}_g$$

Außerdem gilt:

$$f \text{ ist bijektiv} \iff \mathbf{M}_f \text{ ist invertierbar}$$

Ein einfacher Beweis

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ sind invertierbar} \implies \mathbf{AB} \text{ ist invertierbar}$$

Beweis:

1. **Gehe in die duale Menge:**
   Es existieren lineare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sodass
   - $\mathbf{A}$ die Darstellungsmatrix von f ist
   - $\mathbf{B}$ die Darstellungsmatrix von g ist
   - f, g sind bijektiv
2. **Führe den Beweis in der dualen Struktur:**
   Da f, g bijektiv sind, ist auch $f \circ g$ bijektiv.
3. **Gehe zurück in die ursrüngliche Menge:**
   Es ist dann $\mathbf{AB}$ die Darstellungsmatrix von $f \circ g$, und da $f \circ g$ bijektiv ist, ist $\mathbf{AB}$ invertierbar.

Mittel

Wir bestimmen eine bijektive Abbildung aus der Menge aller reellwertigen Zufallsvariablen in einen andere Menge.
Dann zeigen wir, dass wir anstelle mit den Zufallsvariablen zu rechnen, auch viel einfacher mit ihrem "Partner" rechnen können.

Definition

Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet

$$\varphi^X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] \tag{1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathrm{d}P^X(x) \tag{2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(ux) \mathrm{d}P^X(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(ux) \mathrm{d}P^X(x) \tag{3}$$

ihre charakteristische Funktion.

Eigenschaften

φ sollte besonders "einfach" sein

- $\varphi(0) = 1$
- $|\varphi| \leq 1$
- gleichmäßig stetig

Berechnungsbeispiel + zeigen, dass die Funktion einfach ist

Faltung - Dichten

Seien X, Y unabhängige reellwertige ZV die beide eine Dichte f^X, f^Y besitzen. Dann besitzt $X+Y$ die Dichte

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^X(z-y) f^Y(y) \mathrm{d}y, \ z \in \mathbb{R}$$

(eng.: convolution)

Faltung - CF

Seien X, Y unabhängige reellwertige ZV mit charakteristischen Funktionen φ^X, φ^Y. Dann besitzt $X + Y$ die charakteristische Funktion

$$\varphi^{X+Y} = \varphi^X \varphi^Y$$

Faltung - Beispiel

Momente

Besitzt die ZV X p endliche Momente, ist φ^X p-mal stetig differenzierbar und es gilt für $k < p$

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{(\varphi^X)^{(k)}(0)}{i}$$

Momente - Beispiel

Konvergenz in Verteilung

Stetigkeitssatz von Levy:
Seien P_n Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ mit charakteristischen Funktionen φ_n und gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und eine bei $x = 0$ stetige Funktion φ, so ist φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ und es gilt: $P_n \to P$.

Konvergenz in Verteilung - Beispiel

Poissonscher Grenzwertsatz oder ZGWS

Links