

Charakteristische Funktionen

Maximilian Ernst

June 1, 2021

Inhalt

1. Motivation

Dualität

Wir schauen auf zwei Seiten der selben Medaille.

Beispiel 1

Betrachte die Menge aller Kreise.

Die duale Menge ist die Menge alle eingeschriebenen Quadrate.



Die Relation $>$ für den Flächeninhalt bleibt erhalten. Wollen wir also wissen, ob ein Kreis größer als ein anderer ist, können wir stattdessen auch schauen, ob das eingeschriebene Quadrat größer ist.

Beispiel 2

Es gilt (bei fester Basis): jeder linearen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kann eineindeutig eine Matrix zugeordnet werden, die sogenannte Darstellungsmatrix \mathbf{M}_f , sodass gilt:

$$f(x) = \mathbf{M}_f x$$

Die erhalten bleibende Struktur ist die Verknüpfung von Funktionen:

$$\mathbf{M}_{f \circ g} = \mathbf{M}_f \mathbf{M}_g$$

Außerdem gilt:

$$f \text{ ist bijektiv} \iff \mathbf{M}_f \text{ ist invertierbar}$$

Ein einfacher Beweis

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind invertierbar $\implies \mathbf{AB}$ ist invertierbar

Beweis:

1. **Gehe in die duale Menge:**

Es existieren lineare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sodass

- \mathbf{A} die Darstellungsmatrix von f ist
- \mathbf{B} die Darstellungsmatrix von g ist
- f, g sind bijektiv

2. **Führe den Beweis in der dualen Struktur:**

Da f, g bijektiv sind, ist auch $f \circ g$ bijektiv.

3. **Gehe zurück in die ursprüngliche Menge:**

Es ist dann \mathbf{AB} die Darstellungsmatrix von $f \circ g$, und da $f \circ g$ bijektiv ist, ist \mathbf{AB} invertierbar.

Ziel

Jeder (reellwertigen) Zufallsvariable ein möglichst "einfaches" mathematisches "Objekt" zuordnen, sodass wir Dinge einfacher berechnen/beweisen können.

Ziel

- Verteilung der Summe unabhängiger Zufallsvariablen
- Berechnung von Momenten
- Berechnung von Verteilungskonvergenzen

Mittel

Wir bestimmen eine (strukturhaltende) bijektive Abbildung aus der Menge aller reellwertigen Zufallsvariablen in eine andere Menge.

Dann zeigen wir, dass wir anstelle mit den Zufallsvariablen zu rechnen, auch viel einfacher mit ihrem "Partner" rechnen können.

Definition

Für eine Zufallsvariable X mit Werten in \mathbb{R} bezeichnet

$$\varphi^X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] \quad (1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP^X(x) \quad (2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(ux) dP^X(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(ux) dP^X(x) \quad (3)$$

ihre charakteristische Funktion.

Eigenschaften

ϕ sollte besonders "einfach" sein

- $\varphi(0) = 1$

- $|\varphi| \leq 1$

- gleichmäßig stetig

Links