Charakteristische Funktionen

Maximilian Ernst

June 12, 2021

Inhalt

Versicherungen

Wie viele Schadensmeldungen erhält eine Versicherung in einem Zeitintervall $(0, t)$?

- Wir zerlegen das Intervall in n Teilintervalle der Länge $\frac{t}{n}$
- n groß $\rightarrow$ Teilintervalle kurz $\rightarrow$ Annahme, dass nur ein Schaden auftritt
- in einem Intervall kann also ein Schaden auftreten oder kein Schaden (mit Wahrscheinlichkeit p)
- $p = \alpha \frac{t}{n}$
- Die einzelnen Teilintervalle sind unabhängig

Versicherungen

Wie viele Schadensmeldungen erhält eine Versicherung in einem Zeitintervall $(0, t)$?

Das bedeutet: eine "Unglücksfee" zieht n mal eine "Kugel" auf der steht "Schaden" (mit Wahrscheinlichkeit p) oder "kein Schaden" (mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$), mit $p = \alpha \frac{t}{n}$.
Anzahl der Schadensfälle $k \sim Bin_{n, \alpha \frac{t}{n}}$
Je größer wir n wählen, desto besser die Approximation. Also:

$$P(k) = \lim_{n \to \infty} Bin_{n, \alpha \frac{t}{n}}$$

Versicherungen

Sei p_n eine Folge von Wahrscheinlichkeiten mit $np_n \to \lambda$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} Bin_{n,p_n}(k) = Poiss_\lambda(k)$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n} \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{\color{red}{n}p_n}{\color{red}{n}}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Versicherungen

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^n \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x \quad &\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Geht das auch einfacher? $\rightarrow$ Ja!

Ziel

Jeder (reellwertigen) Zufallsvariable ein möglichst "einfaches" mathematisches "Objekt" zuordnen, sodass wir Berechnungen und Beweise mit diesem Objekt (statt der Zufallsvariable) machen.

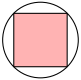
- Verteilung der Summe unabhängiger Zufallsvariablen
- Berechnung von Momenten
- Beweis von Verteilungskonvergenzen

Dualität

Manchmal bilden sehr unterschiedliche mathematische Objekte nur zwei Seiten der selben Medaille

Beispiel 1 - Flächeninhalt von Kreisen

Betrachte die Menge aller Kreise.
Die duale Menge ist die Menge aller einbeschriebenen Quadrate.



Die Relation $>$ für den Flächeninhalt bleibt erhalten.

Beispiel 2 - Berechnung von Produkten

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

$$xy = \exp(\log xy) = \exp(\log x + \log y)$$

Zur Berechnung großer Produkte:

- Berechne den Logarithmus
- addiere das Ergebnis
- nimm $\exp$ des Ergebnisses

Beispiel 2 - Berechnung von Produkten

$$L(x_1,\dots,x_n|\mu,\Sigma) = \prod_{i=1}^{n} L(x_i|\mu,\Sigma)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (2\pi)^{-d/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(x_i-\mu))$$

$$\log L(x_1,\dots,x_n|\mu,\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \log L(x_i|\mu,\Sigma)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} -\frac{d}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\det(\Sigma) - \frac{1}{2}(x_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(x_i-\mu)$$

Definition

Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet

$$\varphi^X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$$

ihre charakteristische Funktion.

Definition

Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet

$$\begin{aligned}\varphi^X(u) &= \mathbb{E}[e^{iuX}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathrm{d}P^X(x)\end{aligned}$$

ihre charakteristische Funktion.

Definition

Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet

$$\begin{aligned}\varphi^X(u) &= \mathbb{E}[e^{iuX}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathrm{d}P^X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(ux) \mathrm{d}P^X(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(ux) \mathrm{d}P^X(x)\end{aligned}$$

ihre charakteristische Funktion.

Beispiel 1 - Normalverteilung

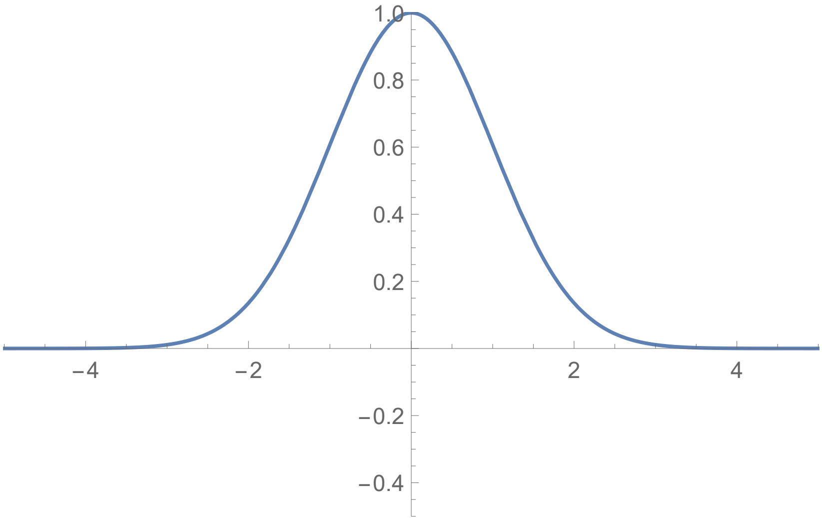
Sei $X \sim N(0,1)$. Dann ist die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) &= \mathbb{E}[e^{iuX}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_X(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

Beispiel 1 - Normalverteilung

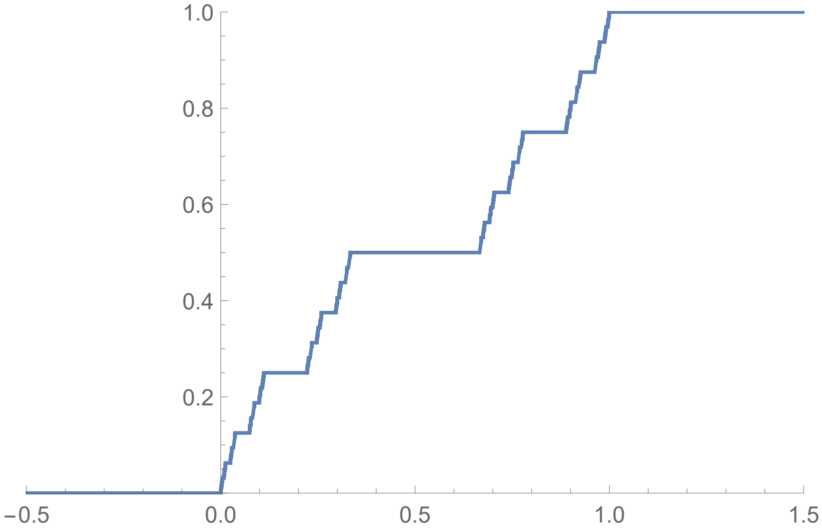


Eigenschaften

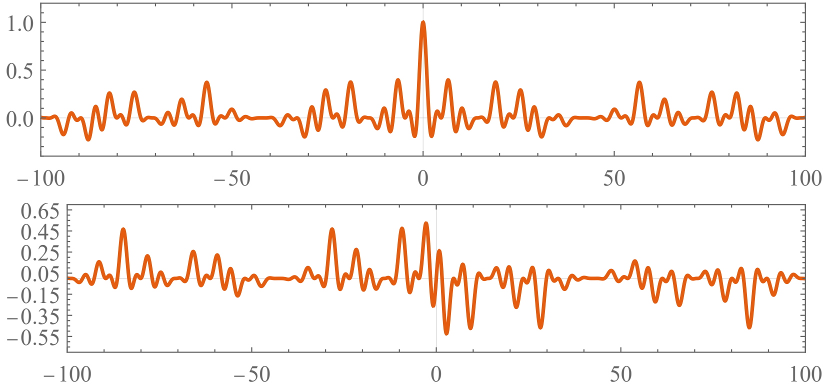
φ sollte besonders "einfach" sein

- $\varphi(0) = 1$
- $|\varphi| \leq 1$
- gleichmäßig stetig

Beispiel 2 - φ ist "einfach"



Beispiel 2 - φ ist "einfach"



Faltung - Dichten

Seien X, Y unabhängige reellwertige ZV die beide eine Dichte f^X, f^Y besitzen. Dann besitzt $X+Y$ die Dichte

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^X(z-y) f^Y(y) \mathrm{d}y, \ z \in \mathbb{R}$$

(eng.: convolution)

Faltung - Beispiel

Seien $X \sim Gamma(\lambda, p_1)$ und $Y \sim Gamma(\lambda, p_1)$ unabhängig.
Die Dichte der Gamma-Funktion ist

$$f_{\lambda,p}(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Es ergibt sich also für die Faltung

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^{p_1}}{\Gamma(p_1)} (z-y)^{p_1-1} e^{-\lambda(z-y)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z-y) \frac{\lambda^{p_2}}{\Gamma(p_2)} (y)^{p_2-1} e^{-\lambda(y)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \mathrm{d}y$$

Faltung - CF

Seien X, Y unabhängige reellwertige ZV mit charakteristischen Funktionen φ^X, φ^Y. Dann besitzt $X + Y$ die charakteristische Funktion

$$\varphi^{X+Y} = \varphi^X \varphi^Y$$

Faltung - Beispiel

Seien $X \sim Gamma(\lambda, p_1)$ und $Y \sim Gamma(\lambda, p_1)$ unabhängig.
Die charakteristische Funktion ist

$$\varphi^{Gamma(\lambda,p)}(u) = \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^{-p}$$

Es ergibt sich also für die Faltung

$$\varphi^{X+Y}(u) = \varphi^{X}(u)\varphi^{Y}(u) = \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-p_1}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-p_2} = \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{-(p_1+p_2)} = \varphi^{Gamma(\lambda,p_1+p_2)}(u)$$

Momente

Besitzt die ZV X p endliche Momente, ist φ^X p-mal stetig differenzierbar und es gilt für $k < p$

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{(\varphi^X)^{(k)}(0)}{i}$$

Momente - Beispiel

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Gesucht: $\mathbb{E}[X]$.
Es ist

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\varphi_X^{(1)}(0)}{i}$$

Momente - Beispiel

Wir berechnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi_X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\exp(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2) = \exp(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)(i\mu - \sigma^2 u)$$

Ausgewertet an der Stelle 0

$$\varphi_X^{(1)}(0) = \exp(0-0)(i\mu - 0) = 1 \cdot i\mu$$

Momente - Beispiel

Eingesetzt in unsere Formel

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\varphi_X^{(1)}(0)}{i} = \frac{i\mu}{i} = \mu$$

Konvergenz in Verteilung

Stetigkeitssatz von Levy:
Seien P_n Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ mit charakteristischen Funktionen φ_n und gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und eine bei $x = 0$ stetige Funktion φ, so ist φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ und es gilt: $P_n \to P$.

Konvergenz in Verteilung - Beispiel

Wir haben eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $Bin(n, p_n)$ mit $np_n \to \lambda$. Es gilt:

$$\varphi^{Bin(n,p_n)}(u) = (1 + p_n(e^{iu} - 1))^n$$

Wir erhalten also

$$\varphi^{Bin(n,p_n)}(u) = (1+p_n(e^{iu}-1))^n = \left(1+\frac{np_n(e^{iu}-1)}{n}\right)^n \to e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \varphi^{Poiss(\lambda)}$$

Referenzen

[1] Hans-Otto Georgii. *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015.

[2] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.