Raketslalom med tillämpning av Ordinära Differentialekvationer

Maximilian Hallqvist

23 maj 2024

1 Inledning

Inom ramen för kursen TNA005 gör alla elever ett individuellt miniprojekt. Denna rapport är den skriftliga redovisningen av delmoment 6 (UPG6).

2 Problem och Metod

Uppgiftens mål är att styra en raket genom en tvådimensionell bana där det tas hänsyn till de grundläggande krafter som verkar på en farkost i jordens atmosfär. Uppgiften genomförs med tillämpning av ordinära differentialekvationer som löses numeriskt då analytiska lösningar endast fungerar vid mycket enkla problem. För att beräkna raketens bana och visa den grafiskt används programmeringsmiljön MATLAB.

2.1 Raketens Egenskaper

2.1.1 Raketens Massa

Vi utgår från att raketen har en vikt på $10kg$ och ytterligare $20kg$ av bränsle med en förbrukning på $0.2kg/s$. För att skicka iväg raketen används en katapult som ger raketen begynnelsehastigheten $v_0 = 60m/s$ med begynnelsevinkeln $a_0 = 15°$. Raketens motor startar vid $t = 7s$ och förblir på tills bränslet är slut. Raketens massa $m(t)$ och dess derivata $m'(t)$ är då

$$m(t) = \begin{cases} 30 & \text{om } 0 \leq t < 7, \\ 30 - 0.2(t-7) & \text{om } 7 \leq t < 107, \\ 10 & \text{om } 107 \leq t, \end{cases} \tag{1}$$

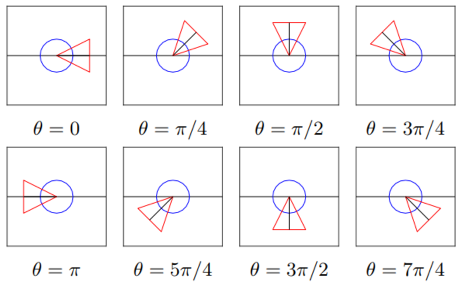
$$m'(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq t < 7, \\ -0.2 & \text{om } 7 \leq t < 107, \\ 0 & \text{om } 107 \leq t. \end{cases} \tag{2}$$

2.1.2 Styrning av Raket

För att styra raketen används två nya funktioner $u_x(t) \& u_y(t)$ som beskrivs av ekvationen

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_m \cos\theta(t) \\ k_m \sin\theta(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

där $k_m = 2000m/s$ är farten av partiklar som kommer ur raketmotorn och $\theta(t)$ är vinkel från x-axeln. Denna vinkel är begränsad till multipler av 45 grader och kan därav endast styras med riktningarna i Figur 1. Styrningen tillämpades med villkorssatser genom prövning tills en godtagbar bana funnits.



Figur 1: Möjliga riktningar $\theta(t)$ som raketen kan färdas i

2.2 Tillämpning av krafter och styrning

Raketens rörelse beskrivs av följande system av ickelinjära och kopplade differentialekvationer [3],

$$x''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,x' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_x(t), \tag{4}$$

$$y''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,y' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_y(t) - g, \tag{5}$$

där $x(t)$ och $y(t)$ beskriver raketens färdbana, t är tiden i sekunder, c och g är konstanter för luftmotstånd respektive gravitation, $u_x(t)$ och $u_y(t)$ är funktioner till raketens styrning, och $m(t)$ är en funktion som beskriver hur raketens massa förändras över tid.

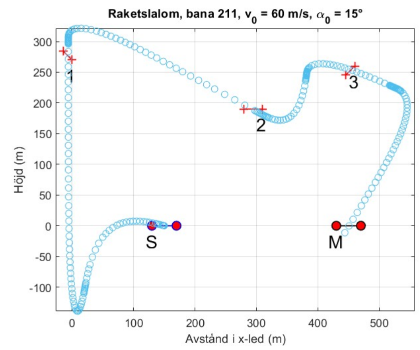
För att lösa differentialekvationen skriver vi om ekvationerna (4) & (5) till differentialekvationer av första ordning. Vi låter $z_1 = x, z_2 = x', z_3 = y, z_4 = y'$ deriverar sedan z enligt exempel 14.7 i Jönsson [2] och får det omskrivna ekvationssystemet,

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{z_2^2 + z_4^2}\,z_2 + \frac{m'(t)}{m(t)}u_x(t) \\ z_3' = z_4 \\ z_4' = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{z_2^2 + z_4^2}\,z_4 + \frac{m'(t)}{m(t)}u_y(t) - g. \end{cases} \tag{6}$$

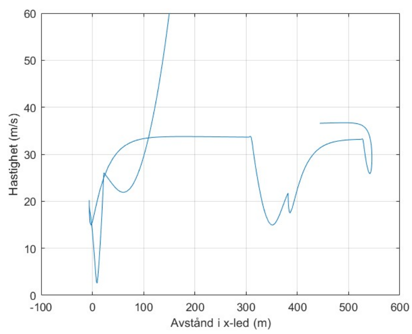
För att lösa systemet användes MATLAB's inbyggda ordinära differentialekvation-lösare ode45 som approximerar differentialekvationerna med hjälp av fjärde ordningens Runge-Kutta metod.

3 Resultat

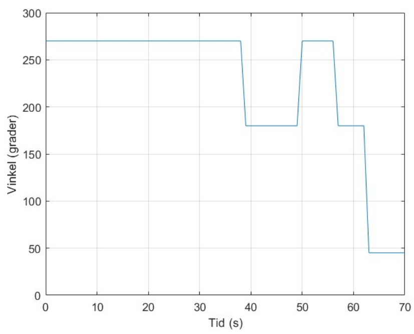
Den bana för rakteten som hittades tog 70 sekunder att avklara och visas i figur 2. Under raketens färd ändrades dess riktning fem gånger efter att den blivit ivägskjuten; där riktningen $\theta(t)$ visas i Figur 4. I Figur 3 beskrivs raketens hastighet över avståndet i x-led.



Figur 2: Raketslalom genom hinderbana



Figur 3: Raketslalom; Raketens hastighet över avstånd i x-led



Figur 4: Raketslalom; Raketens riktning (vinkel) över tid

4 Diskussion och Slutsats

Med noggrannare syn på ekvationen för raketens rörelse (4) & (5) ser vi hur de olika krafterna påverkar raketen. Luftmotståndet c divideras med raketens massa $m(t)$ och multipliceras med raketens hastighet. Det innebär att luftmotståndet ökar allt eftersom raketens massa minskar och / eller raketens hastighet ökar. Kraften från raketmotorn multipliceras med kvoten av förändringen av och raketens nuvarande massa vilket ser till att motorn endast är på då bränsle förbruks. Detta gör även att raketen accelererar snabbare då dess massa minskar.

I Figur 2 för banan av raketen ser vi hur raketen ändrar riktning, att med få korrigering nå slalomstolparna. Eftersom MATLAB's inbyggda differentialekvation-lösare (ode45) anpassar steglängden (noggrannheten) baserat på ekvationens komplexitet, ser vi även vart raketen påbörjar sina svängar i hinderbanan.

Raketen når sin största hastighet vid den assisterade starten och når därefter en maximal hastighet strax under $40m/s$. Denna hastighet uppnås vid slutet av banan när raketmotorn är nära att vara riktad rakt upp, och den slutar då att accelerera eftersom luftmotståndet blir lika stort som raketmotorns och gravitationens sammanlagda kraft.

Det finns många områden där ordinära differentialekvationer kan användas för att beskriva hur dynamiska system förändras över tid. Denna raketslalom är en demonstration av hur dessa kan användas för att tillämpa några de fysiska lagar som gäller för en farkost i jordens atmosfär. Vi förtsäger därmed dess bana och kan efter det styra raketen dit vi önskar. Med denna metod kan vi även lösa system som beskriver hur radioaktiva ämnen sönderfaller över tid, vilket demonstreras i exempel 9.2 i Göran Forsling [1]. Ett annat exempel, 9.3 i Göran Forsling [1], visar hur denna metod kan användas för att beskriva rörelsen hos en sfär som är fäst vid en fjäder och påverkas av en yttre kraft.

Referenser

[1] Mats Neymark Göran Forsling. *Matematisk Analys: En variabel*. 2:4. Liber AB, 2011.

[2] Per Jönsson. *MATLAB-beräkningar inom teknik och naturvetenskap*. 4:2. Studentliteratur AB, 2020.

[3] Berkant Savas. "UPG6—Individuellt miniprojekt: Tillämpning av differentialekvationer". I: *ITN, Linköpings universitet* (2024).