Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Wintersemester 2013/2014

Musterlösung für die Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (5 Punkte) GGT

$$\begin{aligned} 840 &= 1 \cdot 455 + 385 \\ 455 &= 1 \cdot 385 + 70 \\ 385 &= 5 \cdot 70 + 35 \\ 70 &= 2 \cdot 35 + 0. \end{aligned}$$

Bei Rest 0 endet der Euklidsche Algorithmus. Es gilt:

$$\text{ggT}(840, 455) = 35.$$

Aufgabe 2: (9 = 4 + 5 Punkte) Kombinatorik

a) Da Lara zwei verschiedene Beilagen aus den 7 Möglichkeiten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auswählt, handelt es sich um eine Kombination. Die Anzahl Möglichkeiten ist somit:

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

b) Auch hier handelt es sich um eine Kombination, da es nicht auf die Anordnung ankommt. Da Hans auch gleiche Beilagen nimmt, ist es eine Kombination mit Wiederholung. Also gibt es

$$\binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 3: (16 = 5 + 5 + 6 Punkte) Determinante
Gegeben sind die beiden folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Für die Determinante der Matrix A gilt:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7 + 28 = 21.$$

b) Die Determinante der Matrix B ist gleich null, da es linear abhängige Zeilen gibt. Zum Beispiel sind die erste und die fünfte Zeile linear abhängig.

c) Berechnung der inversen Matrix A:

$$\begin{array}{r|rrrr|rrrr}
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
II-2I & 0 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
IV-4/3III & 0 & 0 & 0 & -7/3 & 0 & 0 & -4/3 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1/3II & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
IV-4/3III & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/7 & -3/7 \\
\hline
I-2II & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\
III-4IV & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -9/7 & 12/7 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/7 & -3/7 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\
1/3III & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/7 & 4/7 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/7 & -3/7
\end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 4/7 & -3/7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (16 = 6 + 3 + 7 Punkte) Lineare Funktion

Betrachten Sie folgende lineare Funktion:

$$f : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 + 2v_3 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 + v_2 \\ 2v_1 + 3v_3 \end{pmatrix}.$$

a) Wir berechnen die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daher lautet die gesuchte Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Eine Funktion g, die einen Vektorraum V_1 auf einen Vektorraum V_2 abbildet, heißt linear, falls

$$f(\vec{v} + c\vec{w}) = f(\vec{v}) + cf(\vec{w})$$

für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{v} \in V_1$ und alle $c \in \mathbb{R}$.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\vec{v} + c\vec{w}) &= \begin{pmatrix} v_1 + cw_1 + 2(v_3 + cw_3) \\ v_2 + cw_2 - (v_3 + cw_3) \\ v_1 + cw_1 + v_2 + cw_2 \\ 2(v_1 + cw_1) + 3(v_3 + cw_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 + 2v_3 + cw_1 + 2cw_3 \\ v_2 - v_3 + cw_2 - cw_3 \\ v_1 + v_2 + cw_1 + cw_2 \\ 2v_1 + 3v_3 + 2cw_1 + 3cw_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 + 2v_3 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 + v_2 \\ 2v_1 + 3v_3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} w_1 + 2w_3 \\ w_2 - w_3 \\ w_1 + w_2 \\ 2w_1 + 3w_3 \end{pmatrix} \\ &= f(\vec{v}) + cf(\vec{w}). \end{aligned}$$

Als ist die Funktion f linear.

Aufgabe 5: (12 = 10 + 2 Punkte) LGS

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \end{array}$$

a) Wir wenden zunächste das Gauß-Jordan-Verfahren an:

I	2	-1	2	1
II	1	-2	3	1
III	6	3	-2	1
IV	1	-5	7	2
II	1	-2	3	1
I-2I	0	3	-4	-1
III-6II	0	15	-20	-5
IV-II	0	-3	4	1
	1	-2	3	1
1/3II	0	1	$-4/3$	$-1/3$
I+2II	1	0	$1/3$	$1/3$
	0	1	$-4/3$	$-1/3$

Damit lautet die gesamte Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Der Rang ist zwei, da nach der Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens zwei linear unabhängige Zeilen übrig bleiben.

Aufgabe 6: (16 = 4 + 2 + 5 + 5) Hornerschema, Regel von Cramer

a) Wir berechnen für das Polynom

$$p(r) = r^3 - 3r + 2$$

das Horner-Schema für $r = -2$:

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 0 & -3 & 2 & \\ & -2 & 4 & -2 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & = p(-2) \end{array}$$

Die Koeffizienten in der unteren Reihe liefern das Polynom:

$$\frac{p(r)}{(r+2)} = x^2 - 2x + 1 = q(r).$$

b) Das Polynom $q(r)$ hat wegen $q(r) = (r-1)^2$ eine doppelte Nullstelle bei 1. Somit hat das Polynom $p(r)$ die Nullstelle -2 und eine doppelte Nullstelle bei 1.

c) Wir berechnen die Determinante der Matrix, die die linke Seite des LGS beschreibt:

$$\begin{vmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix} = r(r^2-1) - (r-1) + (1-r) = r^3 - 3r + 2.$$

Das LGS ist genau dann eindeutig lösbar, wenn diese Determinante ungleich null ist. Nach Aufgabenteil a) und b) wissen wir, dass das Polynom für $r = -2$ und $r = 1$ Nullstellen besitzt. Das LGS ist also für alle r ungleich -2 und 1 eindeutig lösbar.

d) Wir benennen die Spalten der Matrix c) mit $\vec{a}_i$ und den Vektor auf der rechten Seite mit $\vec{b}$. Dann gilt für x_2:

$$x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}.$$

Wir berechnen:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix} = r(r-1) - (r-1) + 0 = r^2 - 2r + 1.$$

Somit erhalten wir:

$$x_2 = \frac{r^2 - 2r + 1}{r^3 - 3r + 2} = \frac{1}{r+2},$$

denn wir dürfen mit $(r-1)^2$ kürzen, da auf jeden Fall $r \neq 1$ nach Voraussetzung.

Aufgabe 7: (16 = 10 + 3 + 3 Punkte) Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung

Gegeben ist die Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 7 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 7 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 49\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 40) \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 10)(\lambda + 4). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = -4.$$

Wir berechnen die Eigenvektoren zu den Eigenwerten. Wir beginngen mit dem Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und berechnen das entsprechende homogen LGS:

$$\begin{array}{ccr} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3,5 \\ 0 & 0 & -20,5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Dabe wurden aber in der letzten Zeile die zweite und dritte Variable vertauscht. Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei hier die beiden Variablen schon wieder zurückgetauscht sind. Es ergibt sich als möglicher Eigevektor:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Eigenwert $\lambda = 10$ ergibt sich:

$$\begin{array}{rrr} -7 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 0 \\ 7 & 0 & -7 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Also ist ein möglicher Eigenvektor:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Der Eigenvektor ist nur bis auf ein beliebiges Vielfaches ungleich null bestimmt.) Für den dritten Eigenwert $\lambda = -4$ erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

und somit einen Eigenvektor:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die gesuchte Matrix setzt sich hier einfach aus den Eigenvektoren zusammen:

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Spalten von B sind orthogonal, wie man leicht nachrechnet:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0.$$

Für die Längen der Eigenvektoren ergibt sich:

$$|\vec{v}_1| = 1, \quad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}, \quad |\vec{v}_3| = \sqrt{2}.$$

Um B in eine orthogonale Matrix umzuwandeln, müssen wir die Spalten durch ihre Länge teilen und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$