

Aufgabenblatt 7 zur Statistik-Vorlesung

Basisaufgaben Korrelation, Regression

Aufgabe 7.1 (Regression, Stichprobenkorrelation)

Folgende Tabelle zeigt die Durchschnittstemperaturen der letzten Dekaden in Deutschland (über alle Jahreszeiten gemittelt)¹. Dabei sind die Durchschnittstemperaturen jeweils der Jahreszahl zugeordnet, die in der Mitte der Dekade liegt; „2005“ steht z.B. eigentlich für „2001-2010“.

Dekade	1925	1935	1945	1955	1965	1975	1985	1995	2005
Temperatur	8,14	8,21	8,45	8,20	7,99	8,25	8,49	8,93	9,18

- Stellen Sie die Temperaturentwicklung als Streudiagramm dar.
- Berechnen Sie die Korrelation zwischen Jahreszahl und Temperatur.
- Bestimmen Sie die Parameter der optimalen Regressionsgerade, und zeichnen Sie sie in das Diagramm aus (a) ein.
- Schätzen Sie auf Basis der Regressionsgeraden, um wie viel Grad es im Mittel pro Dekade wärmer wird (wenn man die Entwicklung 1920-2010 als repräsentativ für die Zukunft annimmt.)
- Welche Durchschnittstemperatur prognostizieren Sie für
 - 2015
 - 2045
 - Welche der beiden Schätzungen ist zuverlässiger?

Aufgabe 7.2 (Korrelation von Zufallsvariablen)

Ein Zufallsexperiment bestimme zwei (diskrete) Zufallsvariablen X und Y. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in der folgenden Tabelle abgebildet:

	X = -1	X = +1
Y = -1	10%	0%
Y = +1	80%	10%

Berechnen Sie die Korrelation zwischen X und Y.

¹ Quelle: Deutscher Wetterdienst

Aufgabe 7.3 (Interpretation von Korrelation, Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Sie untersuchen, ob der Kursgewinn Y des DAX an einem Tag mit dem Kursgewinn X des DAX am Vortag korreliert. Welche der Aussagen (i) bis (vi) sind dann sicher richtig ...

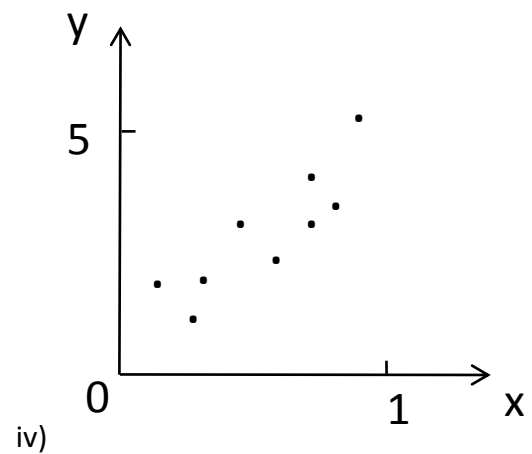
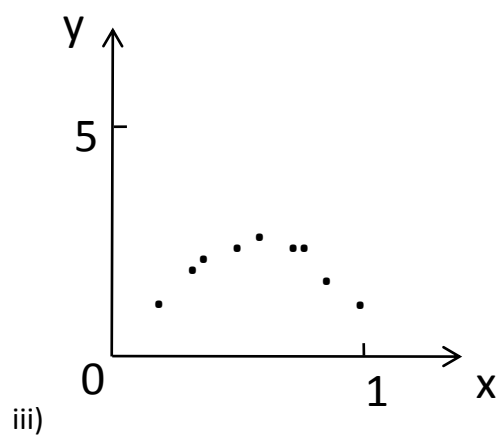
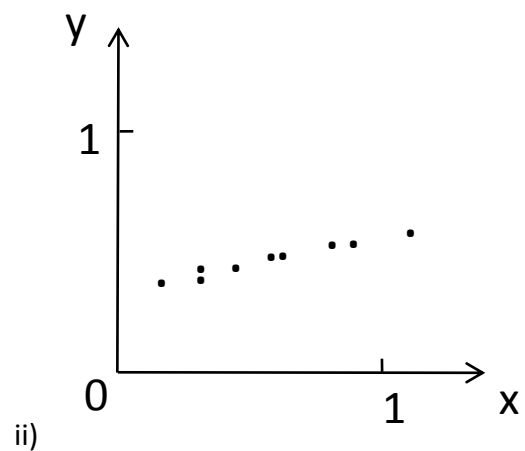
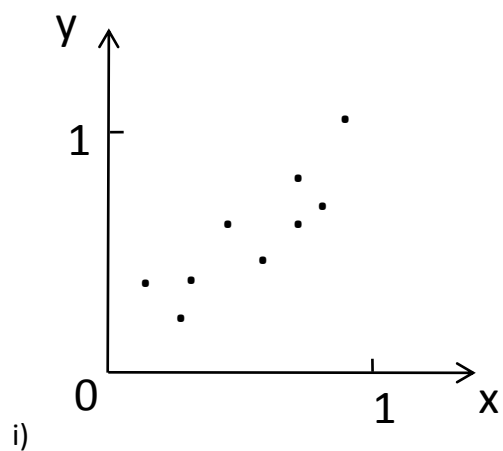
- a) ... wenn X und Y unkorreliert sind?
- b) ... wenn X und Y korreliert sind?
 - i. Dann bringt X nichts zur Prognose von Y .
 - ii. Dann bringt X nichts zur Prognose von Y mit einer linearen Funktion.
 - iii. Dann bringt X etwas zur Prognose von Y .
 - iv. Dann bringt X etwas zur Prognose von Y mit einer linearen Funktion.
 - v. Dann sind X und Y stochastisch **unabhängig** voneinander
 - vi. Dann sind X und Y stochastisch **abhängig** voneinander.

Aufgabe 7.4

Sortieren Sie die Diagramme nach den folgenden Kriterien von klein nach groß. Beachten Sie dabei auch die Skalenunterschiede.

(Nach Augenmaß, Sie müssen NICHT die Punkte ausmessen. Wenn bei zwei Diagrammen die Reihenfolge nicht offensichtlich ist, können Sie auch „ungefähr gleich“ angeben.)

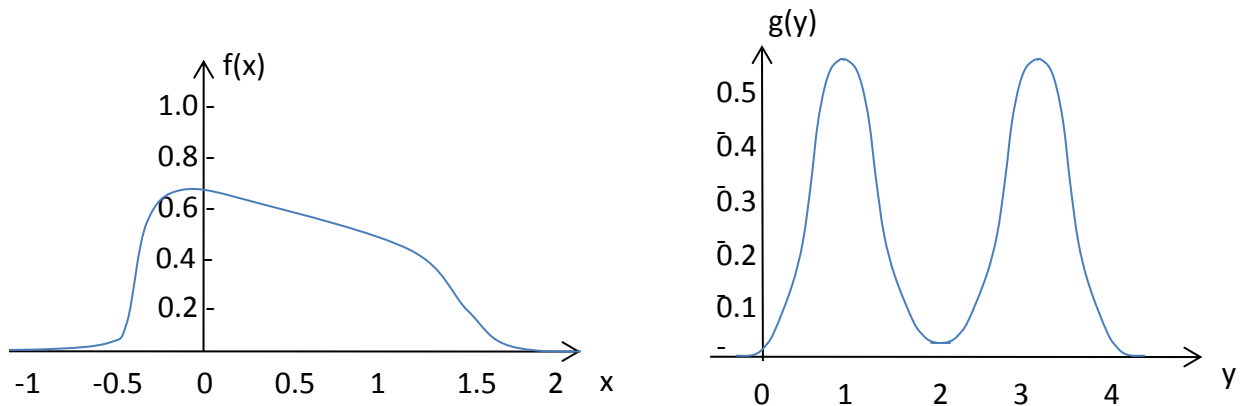
- a) Stichprobenvarianz der Y-Werte.
- b) Steigung der Regressionsgeraden
- c) Summe der Fehlerquadrate der Regressionsgeraden
- d) Korrelation
- e) Summe der Fehlerquadrate bei einer quadratischen Regressionsfunktion



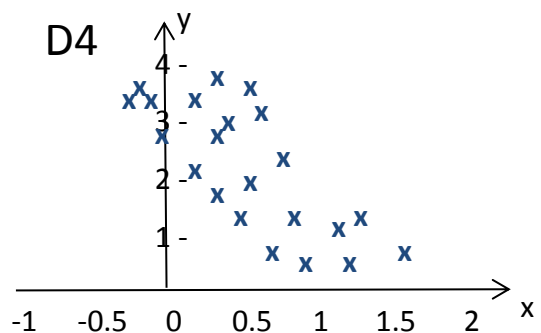
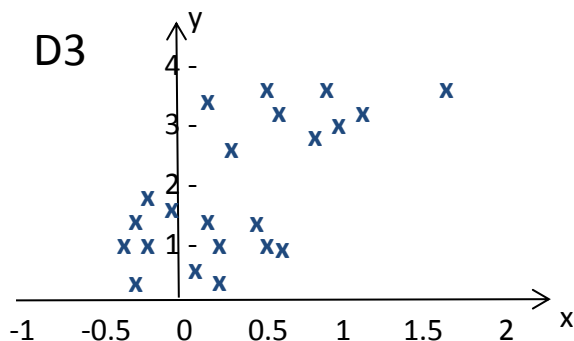
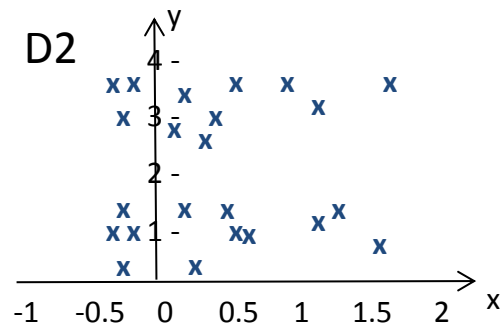
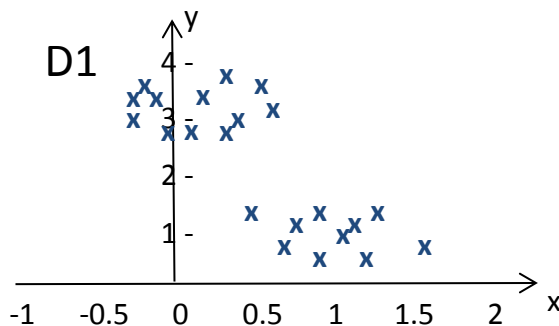
Themenübergreifende Aufgaben (alle eher einfach, wenn Verständnis da ist)

Aufgabe 7.5 (Verständnis Dichte, Streudiagramme, Korrelation, Kennzahlen)

$f(x)$ bzw. $g(y)$ seien die Dichtefunktionen der Zufallsvariablen X bzw. Y eines Zufallsexperimentes:



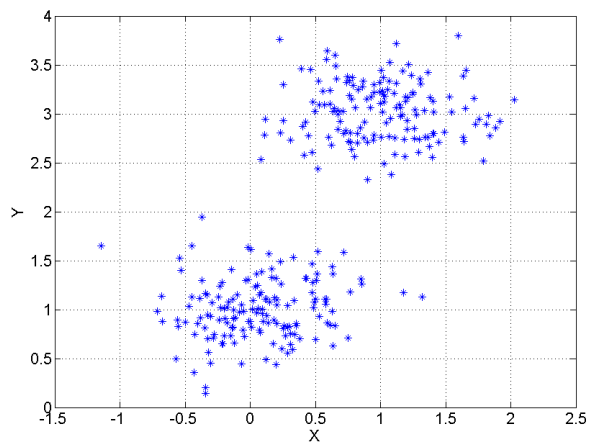
- Welcher der folgenden Werte kommt für $E(X)$ in Frage? -0.7, -0.2, 0.3, 0.8, 1.3, 1.8
- Welcher der folgenden Werte kommt für $\sigma(X)$ in Frage? -2.0, -1.6, -1.2, -0.8, -0.4, 0, 0.5, 1.0, 2.0
- Schätzen Sie $P(0 < X < 0.1)$ und $P(1 < X < 1.1)$
- Welche der folgenden Stichproben könnten von obigem Zufallsexperiment stammen? (falls nicht, jeweils Begründung)



- Sind X und Y dem Augenschein nach in D1 voneinander unabhängig?
- Sind X und Y dem Augenschein nach in D2 voneinander unabhängig?
- Schätzen Sie **für D3** $P(X > 0 \mid Y < 2)$

Aufgabe 7.6 (Verständnis Streudiagramm, bedingte W.)

X und Y seien Zufallsvariablen eines Zufallsexperimentes. Nebenstehendes Streudiagramm zeigt die Ergebnisse einiger Wiederholungen des Experimentes.



- Skizzieren Sie grob die Dichtefunktion von X.
Hinweise: Die Ordinate (vertikale Achse) im Graphen der Dichtefunktion muss nicht beschriftet werden, die Ordinate (horizontale Achse) schon. Die Genauigkeit der Skizze muss nur so hoch sein, dass man sie nicht per Augenmaß klar zurückweisen kann. Sie müssen die Punkte NICHT zählen oder ausmessen!
- Skizzieren Sie grob die Dichtefunktion von Y.
(Die Hinweise aus a gelten unverändert)
- Sind X und Y dem Augenschein nach in D1 voneinander unabhängig? (kurze Begründung)
- Schätzen Sie $P(X > 0 \mid Y < 2)$. (ohne Begründung)
- Schätzen Sie $P(X > 0 \cap Y < 2)$. (ohne Begründung)
- Schätzen Sie $P(Y < 2 \mid X > 0)$. (ohne Begründung)

Aufgabe 7.7

X und Y seien Zufallsvariablen eines Zufallsexperimentes. Nebenstehende Kreuztabelle zeigt die zugehörige gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X=x \cap Y=y)$.

y \ x:	-1	1	2
3	0	20%	30%
1	25%	25%	0

- Sind X und Y voneinander stochastisch unabhängig?
- Bestimmen Sie $P(X > 0 \mid Y < 2)$.
- Bestimmen Sie $P(X > 0 \cap Y < 2)$.
- Bestimmen Sie $P(Y < 2 \mid X > 0)$.
- Berechnen Sie die Korrelation zwischen X und Y.