Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Sommersemester 2014

Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (9 Punkte) Injektiv, surjektiv
Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie injektiv bzw. surjektiv sind. Begründen Sie Ihre Behauptung!

a) $f_1 : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{00, 01, 10, 11\}$ mit $0 \mapsto 00, 1 \mapsto 01, 2 \mapsto 10, 3 \mapsto 11$.

b) $f_2 : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{00, 01, 10, 11\}$ mit $0 \mapsto 11, 1 \mapsto 00, 2 \mapsto 01, 3 \mapsto 10$.

c) $f_3 : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{00, 01, 10, 11\}$ mit $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 01, 2 \mapsto 10, 3 \mapsto 11$.

d) $f_4 : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ mit $0 \mapsto 000, 1 \mapsto 000, 2 \mapsto 010, 3 \mapsto 011$.

e) $f_5 : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{0, 1\}$ mit $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 1$.

Aufgabe 2: (12 = 4 + 4 + 4 Punkte) Restklassenrechnung im Polynomring
In der Vorlesung haben wir $\mathbb{F}_2[x]$, die Menge der Polynome in x mit Koeeffizienten aus $\mathbb{Z} \mod 2$ betrachtet.

a) Multiplizieren Sie die beiden Polynome $p := x^3 + x + 1$ und $q := x^5 + x^2 + 1$.

b) Berechnen Sie $p \cdot q \mod (x^7 + x^3 + x + 1)$.

c) Wieviele Restklassen gibt es beim Rechnen $\mod (x^7 + x^3 + x + 1)$?

Aufgabe 3: (12 = 9 + 3 Punkte) Interpolation

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom mit der Methode nach Newton. Beachten Sie dabei die Werte für x! (Sie brauchen das Polynom nicht auszumultiplizieren!)

x	1	3	7	11
y	5	9	21	13

b) Werten Sie das Interpolationspolynom an der Stelle 2 aus.

Aufgabe 4: (6 Punkte) Linear unabhängig

Untersuchen Sie, ob folgende drei Vektoren linear unabhängig sind. Ihre Antwort muss natürlich durch Ihre Rechnung belegt sein!

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 7 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: (18 = 9 + 5 + 4 Punkte) Rotation, Translation

Gegeben ist in einer Ebene ein Dreieck mit den drei Ecken $A(1|1), B(3|1)$ und $C(1|3)$. Es soll eine Rotation um die Ecke $A(1|1)$ mit $30°$ durchgeführt werden (es gilt $\sin(30°) = \frac{1}{2}, \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$). Die gesuchte Rotation soll mit einer Matrix beschrieben werden. Daher müssen homogene Koordinaten verwendet werden.

a) Geben Sie die drei 3×3-Matrizen an, die für die Teilschritte benötigt werden.

b) Multiplizieren Sie die Matrizen aus Teil a) in der richtigen Reihenfolge zu einer Matrix, die die gesamte Rotation mit einer einzigen Matrix beschreibt.

c) Wenden Sie die Matrix aus Teil b) auf die Eckpunkte B und C an (homogene Koordinaten!).

Aufgabe 6: (16 = 4 + 7 + 5) LGS, Determinanten, Regel von Cramer
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter c:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & + & cx_3 & = & -1 \end{array}$$

a) Für welche Werte von c ist das LGS eindeutig lösbar?

b) Bestimmen Sie die Lösung für x_2 in Abhängigkeit von c mit Hilfe der Regel von Cramer. Wir setzen dabei voraus, dass für c nur Werte in Frage kommen, für die das LGS eindeutig lösbar ist.

c) Lösen Sie das LGS für $c := 5$ mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens.

Aufgabe 7: (17 = 8 + 6 + 3 Punkte) Eigenwerte, Eigenvektoren

Gegeben ist die Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte der Matrix A.

b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenvektoren zu dem Eigenwert -2.

c) Kann die Matrix A diagonalisiert werden? Begründen Sie Ihre Behauptung.