IWI Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Prof. Dr. Frank Schaefer

Wintersemester 2015/2016

Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

Musterlösung für die Klausur Mathematik 1

(90 Punkte, 90 Minuten)

Aufgabe 1: (3 + 3 + 4 = 10 Punkte) Permutationen

a)
$$p = (1\;3\;5)(2\;4\;6)(7\;8).$$

b)
$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

c)
$$p \circ p \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (4+4+4=12 Punkte), Kombinatorik

a) Variationen **ohne** Wiederholung von vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ zur zweiten Klasse:

$$\begin{matrix} aa & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \end{matrix}.$$

b) Variationen **mit** Wiederholung von vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ zur zweiten Klasse:

$$\begin{matrix} aa & ba & ca & da \\ ab & bb & cb & db \\ ac & bc & cc & dc \\ ad & bd & cd & dd \end{matrix}.$$

c) Auswahl einer dreielementigen Teilmenge in einer Menge mit 7 Elementen:

$$K_7^{(3)} = \frac{7!}{(7-3)!\;3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Aufgabe 3: (5 + 8 = 13 Punkte) Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

a) Die Lösungsmenge lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir bestimmen die Menge aller Lösungen mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens:

I	2	−5	6	−6	−3
II	2	3	−1	1	8
III	−6	−1	0	2	10
IV	4	6	−2	2	12
I	2	−5	6	−6	−3
II-I	0	8	−7	7	11
III+3I	0	−16	18	−16	1
IV-2I	0	16	−14	14	18
I	2	−5	6	−6	−3
II	0	8	−7	7	11
III+2II	0	0	4	−2	23
IV-2II	0	0	0	0	−4

In der letzten Zeile ist zu sehen, dass das LGS unlösbar ist, da die Zeile auf der linken Seite nur Nullen enthält und rechts ungleich Null ist. Also ist die Lösungsmenge die leere Menge.

Aufgabe 4: (6 + 6 + 3 = 15 Punkte) Lineare Abhängigkeit

a) Die Definition von linear unabhängig würde für die drei gegebenen Vektoren lauten:

$$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Die Gleichung auf der linken Seite entspricht dem LGS:

I	2	3	−1	0
II	3	1	9	0
III	0	1	−3	0
IV	−2	0	−8	0
V	1	1	1	0
I	2	3	−1	0
II	3	1	9	0
III	0	1	−3	0
IV+I	0	3	−9	0
V-1/3II	0	2/3	2	0
I	2	3	−1	0
2II	6	2	18	0
III	0	1	−3	0
IVi3III	0	0	0	0
V-2/3III	0	0	0	0
I	2	3	−1	0
II-3I	0	−7	21	0
III	0	1	−3	0
I	2	3	−1	0
II	0	−7	21	0
III+7II	0	0	0	0

Da das LGS nur den Rang 2 (und nicht den Rang 3) besitzt, hat es als homogenes LGS unendliche viele Lösungen. Insbesondere kann $c_3 \neq 0$ gewählt werden. Damit ist nachgewiesen, dass die drei Vektoren linear abhängig sind!

(Es gibt noch eine andere Lösungsmethode. Man könnte die Vektoren auch an Stelle von Spalten als Zeilen eines LGS auffassen. Das LGS ist dann etwas einfacher umzuformen.)

b) Wir entwickeln die Determinante nach der zweiten Zeile:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2((-1)5 + (-5)) = 20.$$

c) Da die Determinante der Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ der Matrix A aus Teil b) ungleich 0 ist, so sind diese vier Vektoren linear unabhängig. (Wir hatte in der Vorlesung die Gesetzmäßigkeit, dass die Determinante gleich 0 ist genau dann, wenn die Spaltenvektoren linear abhängig sind.)

Aufgabe 5: (6 + 5 = 11 Punkte) Lineare Abbildungen, Matrizen

a) Wir bestimmen zunächst die Bilder der kanonischen Einheitvektoren:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der gesuchten Abbildungsmatrix bestehen aus den Bildern der kanonischen Einheitsvektoren:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist die gesuchte Abbildungsmatrix.

b) Die gesuchte Matrix für die Abbildung $g \circ f$ berechnet sich durch:

$$B \cdot A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 13 \\ 21 & -3 & 21 \\ 36 & -7 & 58 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: (1+4+4+8=17 Punkte) Translation, Rotation

Gegeben ist ein Dreieck mit den drei Eckpunkten $A(2,3), B(5,3)$ und $C(2,7)$. Das Dreieck soll in der Ecke A um $30°$ gedreht werden. Es gilt $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ und $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Die drei Eckpunkte in homogenen Koordinaten lauten:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Folgende Translationsmatrix verschiebt das Koordinatensystem in den Punkt $A(2,3)$:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Die gesuchte Rotationsmatrix lautet:

$$R := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Es ist zu berechnen: $T^{-1} \cdot R \cdot T$. Wir führen die Berechnung in zwei Schritten durch:

$$\begin{aligned} T^{-1} R\, T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}+3/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1-3/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 7/2-\sqrt{3} \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 2-3/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7: (12 Punkte) Invertieren von Matrizen

I	7	4	-1	1	0	0
II	4	7	-1	0	1	0
III	-4	-4	4	0	0	1
$-(1/4)III$	1	1	-1	0	0	$-1/4$
$II+III$	0	3	3	0	1	1
I	7	4	-1	1	0	0
I	1	1	-1	0	0	$-1/4$
$(1/3)II$	0	1	1	0	$1/3$	$1/3$
$III-7I$	0	-3	-6	1	0	$7/4$
$I-II$	1	0	-2	0	$-1/3$	$-7/12$
II	0	1	1	0	$1/3$	$1/3$
$III+3II$	0	0	9	1	1	$11/4$
I	1	0	-2	0	$-1/3$	$-7/12$
II	0	1	1	0	$1/3$	$1/3$
$(1/9)III$	0	0	1	$1/9$	$1/9$	$11/36$
$I+2III$	1	0	0	$2/9$	$-1/9$	$1/36$
$II-III$	0	1	0	$-1/9$	$2/9$	$1/36$
III	0	0	1	$1/9$	$1/9$	$11/36$

Die inverse Matrix läßt sich also schreiben als:

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$