IWI Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

1. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik II

Musterlösungen

Aufgabe 1: Lassen Sie sich nicht verwirren — ein Wort, welches die genannten sechs verschiedenen Zeichen enthält, muss auch mindestens sechs Zeichen lang sein. Nach dem Testkriterium von Satz 2.6.2 c) der Vorlesung akzeptiert M demnach eine unendliche Sprache, also auch insbesondere noch mindestens 173 weitere Wörter (fünf verschiedene Zeichen hätten für den gleichen Schluss übrigens auch gereicht). $\square$

Aufgabe 2: Die einzelnen Beweisschritte verlaufen wie folgt:

a) Ein DKA $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b, c, \$\}, \{X, \#\}, \delta, z_0, \#)$ kann L_1 wie folgt erkennen. Zunächst liest M ausgehend vom Startzustand eine nichtleere Folge von a's. Sobald M auf das erste b trifft, zählt M die Anzahl dieser b's mit, indem für jedes b ein Symbol X auf dem Keller abgelegt wird. Anschließend muss die Anzahl der c's genau mit der Anzahl der X–Symbole (und damit mit der Anzahl der b's) übereinstimmen, ansonsten gibt es keinen passenden Übergang. Zum Schluss wird das \$–Zeichen am Wortende eingelesen. Die folgenden Übergänge entsprechen dieser Idee:

$$z_0a\# \to z_1\#, \quad z_1a\# \to z_1\#, \quad z_1b\# \to z_2X\#,$$
$$z_2bX \to z_2XX, \quad z_2cX \to z_3\varepsilon, \quad z_3cX \to z_3\varepsilon, \quad z_3\$\# \to z_3\varepsilon \ .$$

Es ist leicht zu sehen, dass M deterministisch ist, denn zu keinem Zeitpunkt muss M „raten“, wie es weitergeht. $\square$

b) Ein passender DKA $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b, c, \$\}, \{X, \#\}, \delta, z_0, \#)$ mit $N(M) = L_2$ folgt der gleichen Idee, nur wird diesmal zunächst die Anzahl der a's und b's miteinander verglichen und anschließend eine nichtleere Anzahl von c's akzeptiert:

$$z_0a\# \to z_1X\#, \quad z_1aX \to z_1XX, \quad z_1bX \to z_2\varepsilon,$$
$$z_2bX \to z_2\varepsilon, \quad z_2c\# \to z_3\#, \quad z_3c\# \to z_3\#, \quad z_3\$\# \to z_3\varepsilon \ .$$

M ist auch hier deterministisch. $\square$

c) Der Schnitt von L_1 und L_2 ergibt die Sprache $L := \{a^ib^ic^i\$ \,|\, i \geq 1\}$. Falls L kontextfrei und $n \in \mathbb{N}$ die Pumping–Lemma–Zahl wäre, so würde für das Wort $z = a^nb^nc^n\$$ wegen $|z| = 3n + 1 > n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$ existieren, und $uv^0wx^0y = uwy$ wäre ein Wort aus L. Folglich kann vx nicht das \$–Zeichen am Ende enthalten, denn ohne dieses Zeichen kann uwy nicht in L sein. Wegen $|vwx| \leq n$ kann vx auch nicht gleichzeitig aus a's, b's *und* c's bestehen (hierfür müsste vwx mindestens die

Länge $n+2$ haben). Durch das Fehlen von vx wird wegen $|vx| \geq 1$ das ursprüngliche Wort kürzer, aber es werden nicht gleichzeitig a's, b's *und* c's entfernt. Also kann das restliche Wort uwy nicht von der Form $a^ib^ic^i\$$ sein, d.h. das Pumping–Lemma gilt nicht. Folglich ist L nicht kontextfrei und insbesondere auch nicht deterministisch kontextfrei. Demnach sind die deterministisch kontextfreien Sprachen nicht unter Schnitt abgeschlossen. □

d) Wegen $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ würde ein Abschluss unter Vereinigung einen Abschluss unter Schnitt nach sich ziehen, was wie soeben gesehen nicht der Fall ist. □

Aufgabe 3: Keine der drei Sprachklassen ist unter Bildung von Teilmengen abgeschlossen. Zum Beweis benötigen wir ein Gegenbeispiel und betrachten hierzu die beiden Sprachen

$$L := \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\} \quad \text{und} \quad L' := \{a, b, c\}^+$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L' ist die Sprache aller nichtleeren Wörter. Sie wird von dem regulären Ausdruck $(a \mid b \mid c)^+$ erzeugt und ist somit regulär, also auch kontextfrei und deterministisch kontextfrei.

Die Sprache L ist hingegen nicht kontextfrei, also auch nicht deterministisch kontextfrei und erst recht nicht regulär. Trotzdem ist L aber eine Teilmenge von L', so dass die Abgeschlossenheitseigenschaften nicht gelten können. □

Aufgabe 4: Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein beliebiger NKA. Grob gesprochen wird M' aus M dadurch gewonnen, dass jede δ–Regel von M, die die Höhe des Stacks um mehr als ein Kellersymbol erhöht, durch Einführen von $k-2$ neuen Zuständen und $k-1$ neuen Regeln der Länge 2 ersetzt werd. Konkret sei $(z', B_1B_2 \dots B_k) \in \delta(z, a, A)$ mit $z, z' \in Z$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $A, B_1, \dots, B_k \in \Gamma$ ein solcher Übergang mit $k > 2$. Wir führen $k-2$ neue Zustände ein, die wir im Folgenden mit $z_1, \dots, z_{k-2}$ bezeichnen. Nun wird die Zustandsübergangsfunktion δ wie folgt modifiziert. Zunächst ersetzen wir die Ausgangsregel $(z', B_1B_2 \dots B_k) \in \delta(z, a, A)$ durch $(z_{k-2}, B_{k-1}B_k) \in \delta(z, a, A)$. Zusätzlich fügen wir neue Übergänge der Form

$$\begin{aligned}
\delta(z_{k-2}, \varepsilon, B_{k-1}) &= \{(z_{k-3}, B_{k-2}B_{k-1})\}\ , \\
\delta(z_{k-3}, \varepsilon, B_{k-2}) &= \{(z_{k-4}, B_{k-3}B_{k-2})\}\ , \\
&\dots \\
\delta(z_2, \varepsilon, B_3) &= \{(z_1, B_2B_3)\}\ , \\
\delta(z_1, \varepsilon, B_2) &= \{(z', B_1B_2)\}
\end{aligned}$$

ein. Offensichtlich wird dann durch die neu eingeführten Zustände und Regeln der bisherige Übergang $(z, a, A) \vdash_M (z', \varepsilon, B_1 \dots, B_k)$ durch

$$(z, a, A) \vdash_{M'} (z_{k-2}, \varepsilon, B_{k-1}B_k) \vdash_{M'} (z_{k-3}, \varepsilon, B_{k-2}B_{k-1}B_k) \vdash_{M'} \dots \vdash_{M'} (z', \varepsilon, B_1 \dots B_k)$$

nachgebildet.