2.4 Wichtige **Standardverteilungen**

- **2.1 Grundbegriffe**
  - Typen von Merkmalen bzw. Zufallsvariablen
  - Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeits**verteilung**
  - **Kumulierte** Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilung
- 2.2 Kennzahlen diskreter Merkmale / Zufallsvariablen
  - Arithmetischer Mittelwert / Erwartungswert
  - Andere Mittelwerte: geometrischer / harmonischer Mittelwert
  - Median, Quantil, Modus
  - Varianz / Standardabweichung
- 2.3 **Stetige** Merkmale / Zufallsvariablen
  - Wahrscheinlichkeitsdichten / Dichtefuntion
  - Übertragung der diskreten Kennzahldefinitionen
- **2.4 Wichtige Standardverteilungen**
  - Gleichverteilung
  - Binomialverteilung, Poissonverteilung
  - Exponentialverteilung
  - Normalverteilung

Wie bekommt man zu einer Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeitsverteilung?

- **Empirisch**, indem man über eine große Zahl von Wiederholungen die Häufigkeitsverteilung ermittelt und diese als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten verwendet.
  Beispiel: Aktienkursprognose

- **Durch theoretische Überlegungen auf Basis eines Modells** des Zufallsexperimentes. Dazu muss der Sachverhalt also gut verstanden sein (oder die Berechnung gilt nur unter dem Vorbehalt, dass bestimmte Annahmen gelten)
  Beispiel: Glücksspiele

- **Kombination aus beidem**:
  Häufig werden bestimmte elementare Wahrscheinlichkeiten empirisch ermittelt, und daraus dann mit einem Modell die Wahrscheinlichkeiten von komplexeren Ereignisse ermittelt.
  Beispiel: Ausfallwahrscheinlichkeit eines redundanten Systems:
  Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Komponenten → empirisch
  Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems → berechnet unter Annahme, dass die Komponentenausfälle stochastisch unabhängig voneinander sind.

Standard-Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Für viele Klassen von Fragestellungen sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeits-verteilungen bereits gut untersucht und besitzen eigene Namen:

stetig

Alle Werte aus einem Intervall sind *gleich wahrscheinlich*: **Stetige Gleichverteilung**
(Flaschendrehen)

Zeit *bis zum nächsten Eintreten* eines Ereignisses, wenn der Prozess *gedächtnislos* und *zeitlich homogen* ist: **Exponentialverteilung**
(Zeit bis zum nächsten Flugzeugabsturz, Lebensdauer eines verschleißfreien Bauteils)

Summe vieler kleiner unabhängiger Komponenten: **Normalverteilung**
(IQ, Fertigungsgenauigkeit)

---

diskret

n gleich wahrscheinliche Fälle: **Diskrete Gleichverteilung**
(Werfen eines Würfels)

Wie oft insgesamt tritt ein bestimmtes Ereignis bei *n unabhängigen Wiederholungen des selben* Versuches ein: **Binomialverteilung**
(*Anzahl* Sechsen bei n Mal würfeln)

Wie oft in einem bestimmten Zeitintervall tritt ein bestimmtes Ereignis ein? Wenn der Prozess gedächtnislos und zeitlich homogen ist: **Poissonverteilung**
(Anzahl weltweiter Flugzeugabstürze in einem Jahr)

Wichtige diskrete Wahrsch.-Verteilungen

Diskrete Gleichverteilung

Definition (**diskrete Gleichverteilung**)
Man nennt eine diskrete Zufallsvariable X *gleichverteilt,*
wenn X das Ergebnis eines Laplace-Experimentes beschreibt, d.h.
wenn es **nur *n* mögliche Realisationen** $x_1, \ldots, x_n$ gibt ($n \in \mathbb{N}$),
und diese **alle gleich wahrscheinlich** sind.
Dann gilt:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i \in \{1; \ldots; n\}$$

Beispiel:
Die Augenzahl beim Werfen eines Würfels ist gleichverteilt in {1; 2; …; 6}

wichtig

Poisson-Verteilung

Definition (**Poisson-Verteilung**)

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt ***poissonverteilt*** mit Parameter λ, wenn gilt

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (x \in \mathbb{N}_0)$$

Satz (**Erwartungswert** und **Varianz** der Poissonverteilung)

Für eine poissonverteilte Zufallsvariable X gilt:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Bemerkung: λ ist also als ***Erwartungswert von X*** interpretierbar.

Beispiel: Anzahl weltweiter Flugzeugabsturz im nächsten Jahr.

Binomialverteilung

Definition:

Eine diskrete Zufallsvariable *X* heißt ***binomialverteilt***, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung für passende Werte *n, p* ($n \in \mathbb{N}$, $p \in [0;1]$)

folgende Form hat:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Dabei ist $\binom{n}{x} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-x+1)}{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$ der ***Binomialkoeffizient*** (Sprechweise: „x aus n“)

Satz

Für Erwartungswert und Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen *X* gilt:

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{und} \quad V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Wichtige stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Stetige Gleichverteilung

Definition (**stetige Gleichverteilung**)
Man nennt eine stetige Zufallsvariable X *gleichverteilt auf dem Intervall* [*a*; *b*] wenn **nur Werte in [a; b]** möglich sind, und diese **alle gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte** haben. Für die Dichtefunktion f und die kumulierte Verteilungsfunktion F gilt dann:

$$f_X(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad x_0 \in [a;b] \\ 0 & \text{für} \quad x_0 \notin [a;b] \end{cases} \qquad F_X(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_0 < a \\ \frac{x_0-a}{b-a} & \text{für} \quad x_0 \in [a;b] \\ 1 & \text{für} \quad x_0 > b \end{cases}$$

Beispiel:
Der Winkel beim Flaschendrehen war gleichverteilt auf]0; 360].

Satz (Erwartungswert und Std-Abw. der Gleichverteilung)

Für eine *auf dem Intervall* [*a*; *b*] *gleichverteilte stetige Zufallsvariable* X gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \sigma(X) = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,(b-a)$$

wichtig

Exponentialverteilung

Definition 27.43 (**Exponentialverteilung**) Eine Zufallsvariable mit der Verteilungs- bzw. Dichtefunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-k\,x}, & \text{für } x > 0 \\ 0 \quad , & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \quad f(x) = \begin{cases} k\,\mathrm{e}^{-k\,x}, & \text{für } x > 0 \\ 0 \quad , & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **exponentialverteilt** (Abbildung 27.9). Erwartungswert und Varianz sind in diesem Fall gegeben durch

$$\mu = \frac{1}{k}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{k^2}.$$

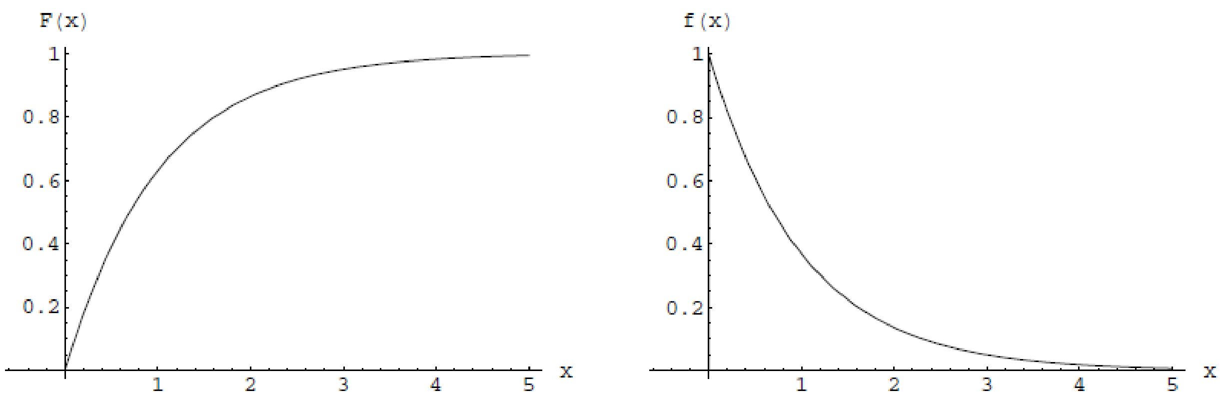


Abbildung 27.9. Verteilungs- bzw. Dichtefunktion der Exponentialverteilung für $k = 1$.

Normalverteilung

ist die wichtigste stetige Verteilung,

aber leider mit einer zusätzlichen Schwierigkeit.

Sie wird deshalb erst später im Semester behandelt.

Eigenschaften der Exponentialverteilung

oder

Woher weiß man, ob eine Zufallsvariable exponentialverteilt ist?

Definition der Exponentialverteilung

Definition 27.43 (**Exponentialverteilung**) Eine Zufallsvariable mit der Verteilungs- bzw. Dichtefunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-k\,x}, & \text{für } x > 0 \\ 0 \quad , & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \begin{cases} k\,e^{-k\,x}, & \text{für } x > 0 \\ 0 \quad , & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **exponentialverteilt** (Abbildung 27.9). Erwartungswert und Varianz sind in diesem Fall gegeben durch

$$\mu = \frac{1}{k}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{k^2}.$$

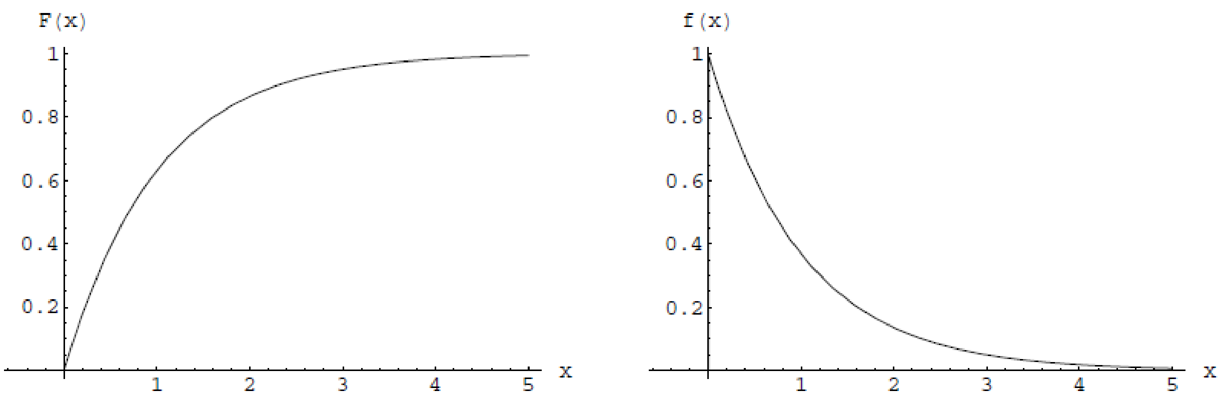


Abbildung 27.9. Verteilungs- bzw. Dichtefunktion der Exponentialverteilung für $k = 1$.

wichtig

Exponentialverteilung (Beispiel)

Beispiel 27.12 Exponentialverteilung
Die Lebensdauer X (in Jahren) eines elektronischen Bauteils, der zufällig (nicht verschleißbedingt) ausfällt, kann oft durch eine Verteilungsfunktion der Form

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-k\,x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0 \quad , & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

angegeben werden. Dabei ist $k > 0$ eine Materialkonstante.
a) Geben Sie die Dichtefunktion f an.
Für einen bestimmten Bauteil ist $k = 1$: Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer
b) höchstens 1 Jahr c) zwischen 1 und 2 Jahre d) größer als 2 Jahre ist?

Lösung zu 27.12

a) Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Ableitung von F, also

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} k\,\mathrm{e}^{-k\,x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0 \quad , & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

b) $P(X \leq 1) = F(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 63.2\%$. Die Verteilungsfunktion ist in Abbildung 27.7 dargestellt.

c) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = (1 - \mathrm{e}^{-2}) - (1 - \mathrm{e}^{-1}) = 23.3\%$

d) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \mathrm{e}^{-2} = 13.5\%$ ■

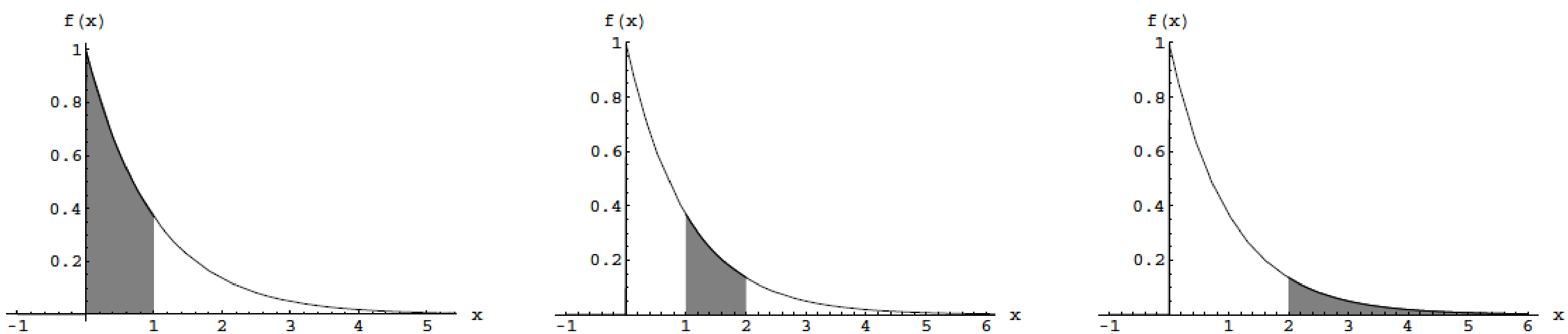


Abbildung 27.7. Exponentialverteilung: Die schattierten Flächen stellen $F(1)$, $F(2) - F(1)$ bzw. $1 - F(2)$ dar.

Eigenschaften der Exponentialverteilung

Beispiel: An einem Server seien die Zeitabstände *T* zwischen ankommenden Anfragen exponentialverteilt mit Parameter ***k*** = 2 [s^{-1}] (*k* ist also die ***Ankunftsrate*** der Aufträge)

Gerade ist eine Anfrage eingegangen. Wie wahrscheinlich ist es, dass es bis zu nächsten Anfrage …

a) … mehr als 1s dauert?

$$P(T > 1s) = 1 - F(1s) = 1 - \left(1 - e^{-k\cdot 1s}\right) = e^{-2s^{-1}\cdot 1s} = e^{-2} \approx \underline{\mathbf{13.5\%}}$$

b) … mehr als 3s dauert?

$$P(T > 3s) = 1 - F(3s) = 1 - \left(1 - e^{-k\cdot 3s}\right) = e^{-2s^{-1}\cdot 3s} = e^{-6} \approx \underline{\mathbf{0.248\%}}$$

c) … mehr als 4s dauert?

$$P(T > 4s) = 1 - F(4s) = 1 - \left(1 - e^{-k\cdot 4s}\right) = e^{-2s^{-1}\cdot 4s} = e^{-8} \approx \underline{\mathbf{0.0335\%}}$$

Allgemein: $P(T > x) = e^{-2x} = (e^{-2})^x$ d.h. mit jeder weiteren Sekunde sinkt die Wahrscheinlichkeit um den gleichen Faktor.

d) Seit der letzten Anfrage **sind bereits 3 s vergangen**. Wie wahrscheinlich ist es, dass auch in der *nächsten Sekunde* keine Anfrage kommt?

Gesucht: Wie wahrscheinlich vergehen seit der letzten Anfrage mehr als 4s bis zur nächsten, unter der Bedingung, dass schon 3s vergangen sind:

$$P(T > 4s \,|T > 3s) = \frac{P(\,(T>4s) \cap \,(T>3s))}{P(T>3s)} = \frac{P(T>4s)}{P(T>3s)} = \frac{(c)}{(b)} \approx \underline{\mathbf{13.5\%}}\ \mathbf{= (a)\ !!!}$$

Gleiches Ergebnis wie in (a) --> **Gedächtnislosigkeit** der Exponentialverteilung

Zum Vergleich: Gleichverteilung

Beispiel: Eine Straßenbahn fährt regelmäßig alle 10 Minuten. Sie kennen den Fahrplan nicht, und kommen wahllos zu irgendeinem Zeitpunkt. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie

a) mehr als 1 Minute

$$P(T > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{10} = \underline{\mathbf{90\%}}$$

b) mehr als 8.5 Minuten

$$P(T > 8.5) = 1 - F(8.5) = 1 - \frac{8.5}{10} = \underline{\mathbf{15\%}}$$

c) mehr als 9.5 Minuten warten müssen?

$$P(T > 9.5) = 1 - F(9.5) = 1 - \frac{9.5}{10} = \underline{\mathbf{5\%}}$$

d) Sie warten bereits 8.5 Minuten. Wie wahrscheinlich ist es unter dieser Bedingung, dass auch in der *nächsten Minute* keine Tram kommt? (Annahme: Die Trams kommen wirklich pünktlich alle 10 Minuten)

$$P(T > 9.5\,|T > 8.5) = \frac{P(\,(T>9.5) \cap \,(T>8.5))}{P(T>8.5)} = \frac{P(T>9.5)}{P(T>8.5)} = \frac{(c)}{(b)} \approx \underline{\mathbf{1/3}}$$

Anderes Ergebnis als in (a) --> **Keine Gedächtnislosigkeit**. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der nächsten Minute keine Tram kommt, sinkt mit zunehmender Wartezeit.

Eigenschaften der Exponentialverteilung

Satz

Sei X exponentialverteilt. Dann gilt für jedes $x_0 > 0$ und $c > 0$:

$$P(X > x_0 + c \mid X > c) = P(X > x_0)$$

Diese Eigenschaft nennt man **Gedächtnislosigkeit** der Exponentialverteilung .

Beweis:

$$P(X > c + x_0 \mid X > c) = \frac{P(X > c + x_0 \ \cap \ X > c)}{P(X > c)} = \frac{P(X > c + x_0)}{P(X > c)} = \frac{1 - F(c + x_0)}{1 - F(c)} =$$

$$= \frac{e^{-k(c+x_0)}}{e^{-k\cdot c}} = \frac{e^{-k\cdot c - k\cdot x_0}}{e^{-k\cdot c}} = \frac{e^{-k\cdot c}\cdot e^{-k\cdot x_0}}{e^{-k\cdot c}} = e^{-k\cdot x_0} = 1 - F(x_0) = P(X > x_0)$$

Beispiel: Wenn die Lebensdauer eines Bauteils exponentialverteilt ist, dann hängt die Wahrscheinlichkeit, dass es das nächste Jahr überlebt, nach obigem Satz nicht davon ab, wie alt es ist. Es ist also ***verschleißfrei***.

Wann wird die Exponentialverteilung verwendet?

Ohne Beweis: Es gilt auch die Umkehrung des Satzes von der vorigen Folie:

Wenn eine Zufallsvariable *X*

- ***stetig*** ist, und
- die ***Zeitdauer bis zum nächsten*** Eintreten eines bestimmten Ereignisses beschreibt, und
- die Eigenschaft der ***Gedächtnislosigkeit*** besitzt,
  d.h. für jedes $x_0 > 0$ und $c > 0$ gilt:

$$P(\, X > x_0 + c \;\mid\; X > c\,) \quad = \quad P(X > \; x_0)$$

dann ist *X* **exponentialverteilt**.

wichtig

Beispiele exponentialverteilter Zufallsvariablen

Bemerkung:

Exponentialverteilte Zufallsvariablen beschreiben also gedächtnislose Prozesse.
Umgekehrt sind Zeitabstände bis zum *nächsten* Ereignis bei gedächtnislosen zeitlich homogenen Prozessen exponentialverteilt.

Beispiele für exponentialverteilte Zufallsvariablen

- Lebensdauer verschleißfreier Bauteile
- radioaktiver Zerfall

Unter bestimmten Annahmen:

- Dauer bis zum nächsten Flugzeugabsturz auf der Welt
- Zeitabstände zwischen eingehenden Anrufen im Call-Center
- Zeitabstände zwischen eingehenden Anfragen an einem Server

Binomialverteilung

Kombinatorik

Kurze Wiederholung: (Vgl. Teschl Kap. 7)

Satz (Produktregel)

Wenn es zu Variablen $V_1,\ldots,V_n$ jeweils $m_1 \ldots m_n$ verschiedene Werte gibt, keine gegenseitigen Einschränkungen bestehen,
und **alle Fälle unterschieden** werden (Reihenfolge beachtet wird)
dann gibt es $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ mögliche **Wertevariationen** – die Zahl der Möglichkeiten **multipliziert** sich.

Beispiele

- Auf der Speisekarte sind 3 Vorspeisen, 10 Hauptgerichte und 2 Desserts. Wie viele 3-gängige Menüs kann man zusammenstellen? → 3*10*2 = 60
- Ein roter und ein blauer Würfel werden geworfen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es? → 6 * 6 = 36
- In einer Urne sind eine rote, zwei blaue, drei grüne Kugeln. Es werden ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es?

  → Produktregel nicht anwendbar, da Ergebnis der ersten Ziehung die möglichen Ergebnisse der zweiten einschränkt.

wichtig

Kombinatorik

Satz (Summenregel)

Wenn es mehrere Gruppen mit m_1 *bzw.* … m_n verschiedenen Werte gibt, die sich gegenseitig ausschließen, dann gibt es insgesamt $m_1 + \ldots + m_n$ mögliche Werte.

Beispiel:

Auf der Speisekarte sind als Hauptspeise 10 Fleischgerichte, 4 Fischgerichte und 2 vegetarische Gerichte zur Auswahl. Zusätzlich gibt es 3 Vorspeisen und 5 Desserts zur Auswahl.
Wie viele 3 gängige Menüs kann man zusammenstellen?

→ 3*(10+4+2)*5

wichtig

Beispiel

Bei einem Automodell gibt es 3 Diesel- und 2 Benzinmotoren, 3 alternative Ausstattungspakete (‚Basic', ‚Lowline' und ‚Highline') und 15 Farben zur Auswahl. Farben, Ausstattung und Motorisierung sei beliebig kombinierbar.

a) Wie viele verschiedene Konfigurationsmöglichkeiten gibt es?

b) Zusätzlich zu den Wahlmöglichkeiten aus (a) stehen jetzt auch noch 4 aufpreispflichtige Zusatzoptionen (Navi, Xenon-Licht, Heckkamera und Runflat-Bereifung) zur Wahl, die untereinander und mit den Varianten aus (a) beliebig kombinierbar sind.
Wie viele verschiedene Konfigurationen gibt es jetzt?

Standardfälle der Kombinatorik

Wenn man k gleichartige Entscheidungen mit jeweils n Möglichkeiten zu treffen hat, dann hat man insgesamt die folgende Zahl an Möglichkeiten, abhängig davon ob man

- Mehrmals die gleiche Wahl treffen kann (**mit Wdh.**) / das nicht kann (**o. Wdh.**)
- Die Reihenfolge der Entscheidungen wichtig ist (**mit Reihenf.**) / egal ist (**o. Reihenf.**)

Wdh?	Rhf?	Anzahl. Möglichkeiten	Beispiel	Laplace
mit	mit	n^k	k Personen werfen je einen Würfel (also n = 6); Anzahl Teilmengen einer Menge von k Elementen	ja
ohne	mit	$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	Lotto „k aus n" mit Ziehungs-Reihenfolge	ja
ohne	mit	$n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$	Auf wie viele Arten lassen sich n Objekte sortieren?	ja
ohne	ohne	$\binom{n}{k}:=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	Wie viele Teilmengen mit k Elementen hat eine Menge aus n Elementen? Normales Lotto „k aus n"	ja
Mit	ohne	$\binom{n+k-1}{k}$	k nicht unterscheidbare Würfel werden in einem Würfelbecher geworfen	**nein**

Binomialkoeffizient, gesprochen „k aus n". Hat nichts zu tun mit dem Bruch $\frac{n}{k}$

wichtig

Kombinatorik

Satz

Zu einer Menge *M*, die *n* Elemente enthält, gibt es

2^n verschiedene **Teilmengen** und

$\binom{n}{k}$ verschiedene **Teilmengen mit genau *k* Elementen**.

Beweis:

a) Eine Teilmenge von *M* ist identifizierbar mit einer Sequenz von ***n*** **Entscheidungen**, wobei zu jedem Element von *M* entschieden wird, ob es enthalten sein soll oder nicht. Die Teilmenge ergibt sich also also aus *m* Entscheidungen, bei denen es **jeweils 2 Möglichkeiten** gibt. Die Entscheidungen sind **frei kombinierbar**, also gibt es nach der Produktregel $2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^m$ Möglichkeiten.

b) Die Teilmengen vom Umfang *k* lassen sich durch eine Sequenz von ***k*** **Entscheidungen** darstellen, wobei bei jeder Entscheidung **eines der *n* Elemente** von *M* ausgewählt wird, das in der Teilmenge enthalten sein soll. Die gleichen Elemente dürfen dabei **NICHT wiederholt** werden, und es spielt **keine Rolle, in welcher Reihenfolge** die Elemente ausgewählt werden. Nach der vorherigen Folie ergibt sich die behauptete Formel.

wichtig

Binomialverteilung

Definition: Man nennt ein Zufallsexperiment *Bernoulli-Experiment* wenn man nur unterscheidet, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt (=*Treffer*) oder nicht.

Führt man *n* **unabhängige** Wiederholungen eines solchen Experimentes unter gleichen Bedingungen durch (d.h. **gleiche Trefferwahrscheinlichkeit p**), so spricht man von einer *Bernoulli-Kette der Länge n*.

Satz:
Bei einer Bernoulli-Kette mit Trefferwahrscheinlichkeit ***p*** besitzt die Zufallsvariable *X* := *„**Anzahl Treffer** bei **n** Versuchen“* folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$$

X heißt dann ***binomialverteilt***.

Für Erwartungswert und Varianz gilt: $E(X) = n \cdot p$ und $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Dabei ist $\binom{n}{x} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-x+1)}{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$ der **Binomialkoeffizient** (Sprechweise: „x aus n“)

wichtig

Binomialverteilung

Beweis:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei *n* Versuchen die ersten *x* Versuche alle Treffer sind und die restlichen nicht, ist

$p^{x} \cdot (1-p)^{(n-x)}$ (nach dem Multiplikationssatz für **unabhängige** Ereignisse)

Es gibt aber noch viele andere Reihenfolgen, in denen insgesamt x Treffer fallen können. Man sieht leicht, dass diese alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Aus der Kombinatorik ist bekannt, dass es $\binom{n}{x}$ solcher Reihenfolgen gibt.

(Auf wie viele Arten kann man x Treffer auf n mögliche Plätze verteilen?)

Also gibt es insgesamt $\binom{n}{x}$ mögliche *unvereinbare* Arten, wie genau x Treffer zustande kommen können, und jede hat die Wahrscheinlichkeit $p^{x} \cdot (1-p)^{(n-x)}$.

Diese Wahrscheinlichkeiten dürfen wegen der Unvereinbarkeit der zugehörigen Ereignisse addiert werden. Das ergibt $\binom{n}{x}$ gleiche Summanden, also insgesamt:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x}$$

Beweis der Formel für Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Dieser Beweis setzt die Rechengesetze für Erwartungswert und Varianz voraus, die erst später in der Vorlesung behandelt werden.

Beweis (Erwartungswert und der Varianz der Binomialverteilung):

X ist die Anzahl Treffer bei n Wiederholungen eines Bernoulli-Experimentes.

Sei X_i die „Anzahl Treffer“ bei der i-ten der n Wiederholungen. (also 0 oder 1)
Dann gilt:

$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p =: \mu$, und

$V(X_i) = (1-\mu)^2 \cdot p + (0-\mu)^2 \cdot (1-p) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = \ldots = p \cdot (1-p)$

Es gilt $X = X_1 + \ldots + X_n$. Mit den Rechengesetzen für Erwartungswert und Varianz folgt:

$E(X) = E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = p + \ldots + p = \underline{n \cdot p}$

$V(X) = V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = p \cdot (1-p) + \ldots + p \cdot (1-p) = \underline{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Die sind paarweise unabhängig, da die einzelnen Bernoulli-Experimente als unabhängig vorausgesetzt sind

Beispiel BV 1 (Binomialverteilung)

Beispiel: Ein Würfel wird 10 Mal geworfen. Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei genau zwei mal eine Eins kommt?

→ *Treffer* := „*Eins würfeln*."

p := P(*Treffer*) = 1/6 .

n := 10

Die Würfe sind voneinander unabhängig, also ist
X:= „Anzahl Treffer bei 10 Würfen" binomialverteilt.

Deshalb gilt:

$$P(X=2)=\binom{10}{2}\cdot\left(1/6\right)^{2}\cdot\left(1-1/6\right)^{10-2}=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\left(1/6\right)^{2}\cdot\left(5/6\right)^{8}\approx 29.1\%$$

Beispiel BV2 (Binomialverteilung)

Ein Würfel wird 10 Mal geworfen.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei die Zufallsvariable
X := „Anzahl der Würfe mit Ergebnis Eins“ den Wert x annimmt,
d.h. wie wahrscheinlich sind genau x Einsen?

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X graphisch dar.

c) Bestimmen Sie die kumulierte Verteilungsfunktion von X

d) Bestimmen Sie $P(2 \leq X \leq 5)$

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X

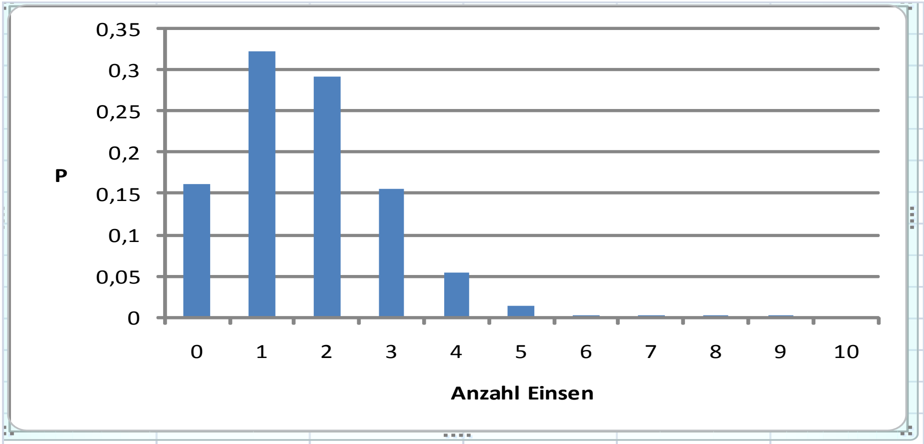
f) Wie viele Einsen pro 10 Würfe sind also im Mittel zu erwarten?
(über eine große Anzahl an Versuchen)

Beispiel BV2 (Binomialverteilung)

a) Es gilt $P(X=x)=\binom{10}{x}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^{x}\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^{10-x}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=x)	16,2%	32,3%	29,1%	15,5%	5,4%	1,3%	0,22%	2,48E-04	1,86E-05	8,27E-07	1,65E-08
c) F(x) = P(X≤x)	16,2%	48,5%	77,5%	93,0%	98,5%	99,8%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

b)



d) $P(2 \le X \le 5) = F(5) - F(1) \approx 0.998 - 0.485 =$ <u>**51.3 %**</u>

e) $E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 1/6 \approx$ <u>**1.67**</u>

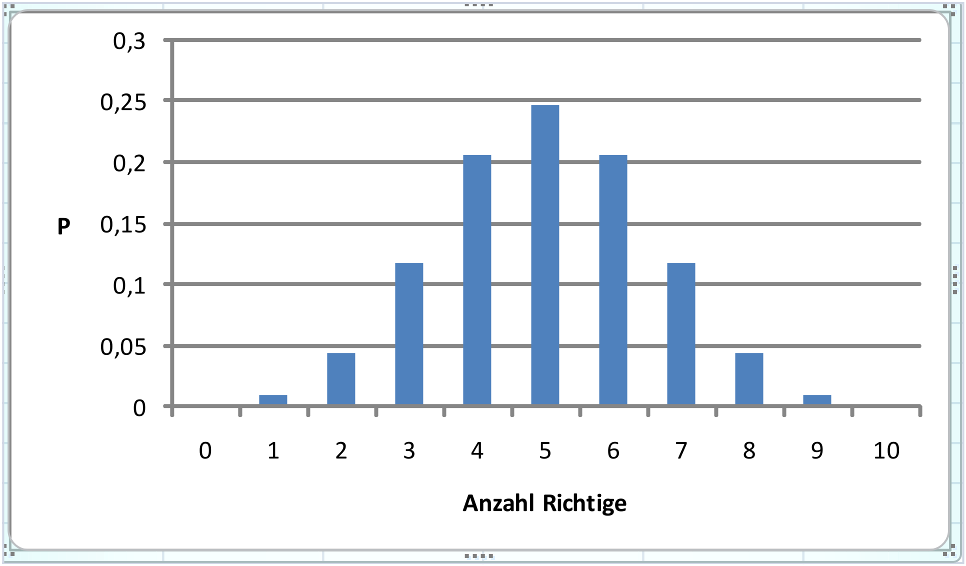
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{10\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}\approx 1.18$$

Beispiel BV 3 (Binomialverteilung)

Beispiel: Bei einem Multiple-Choice-Test mit 10 ja/nein-Fragen raten Sie blind.
Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei die Zufallsvariable
X := „Anzahl der richtigen Antworten“ den Wert *x* annimmt,
d.h. wie wahrscheinlich sind genau *x* richtige Antworten?
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von *X* graphisch dar.

→ Es gilt $P(X=x)=\binom{10}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}=\binom{10}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=x)	0,1%	1,0%	4,4%	11,7%	20,5%	24,6%	20,5%	11,7%	4,4%	1,0%	0,1%



Wann wird die Binomialverteilung verwendet?

In der Definition der Binomialverteilung gab es folgende Voraussetzungen, die zum Beweis der Formel benötigt wurden:

1. Die Zufallsvariable muss beschreiben, **wie oft bei einer vorgegebenen Anzahl n an Versuchen** etwas bestimmtes (=**Treffer**) passiert. (zwangsläufig ist dann X diskret mit Wertebereich {0; 1; …; n}
2. Bei jedem einzelnen Versuch gibt es **nur 0 oder 1 Treffer**.
3. Bei den einzelnen Versuchen ist die **Trefferwahrscheinlichkeit gleich** groß.
4. Die einzelnen **Versuche** sind voneinander **stochastisch unabhängig**.

Beispiele:

Anzahl Sechsen bei 10 Mal würfeln,

Anzahl an Ausfällen bei 3 redundanten Bauteilen (falls Ausfälle unabhängig voneinander)

Anzahl an Bitfehlern in einem Nachrichtenkanal (falls Fehler unabhängig voneinander)

wichtig

Binomialverteilt oder nicht?

Ggf. sind die Annahmen anzugeben, die gemacht wurden

1. X = „Anzahl Sechser beim Würfeln mit 10 Würfeln“
2. X = „Augensumme von 10 Würfeln“
3. X = „Anzahl gezogener Gewinnlose bei fünfmaligem Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Lostrommel mit 10 Gewinnlosen und 90 Nieten“
4. Wie 3. aber Ziehung ***mit*** Zurücklegen.
5. 10 baugleiche Server haben jeweils eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 1% an einem Tag.
   X = „Anzahl Server, die an einem Tag ausfallen“
6. Anzahl Bitfehler bei der Übertragung von 100 Bits über eine fehlerhaften Kanal.

1: Ja.
2: Nein (da bei den einzelnen Versuchen nicht nur 0 oder 1 Treffer unterschieden wird)
3: Nein (Versuche sind nicht unabhängig voneinander; Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich abhängig von den vorigen Ziehungsergebnissen)
4: Ja.
5: Ja, falls die Ausfälle als unabhängig angenommen werden können (dürfen also z.B. nicht an der gleichen Stromversorgung hängen)
6. Nur falls die Bitfehler als unabhängig angenommen werden können (also keine Störungen, die mehrere benachbarte Bits auf einmal betreffen!), und die Fehlerwahrscheinlichkeit während der gesamten Übertragung konstant ist.

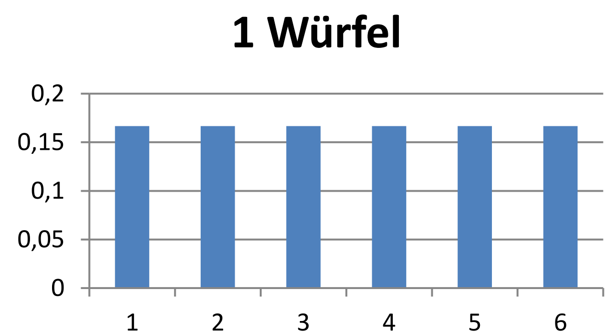
Was Sie gelernt haben sollten

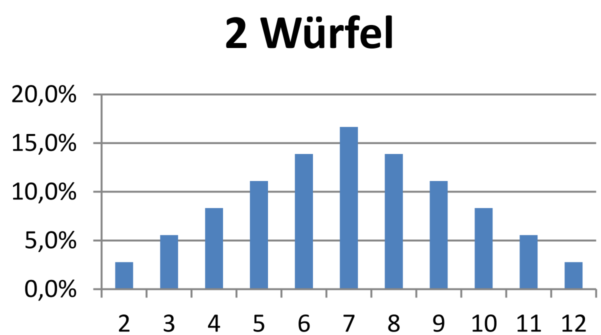
- Erkennen, ob Zufallsvariable binomialverteilt sind
- Für binomialverteilte Zufallsvariable Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswert und Standardabweichung bestimmen.

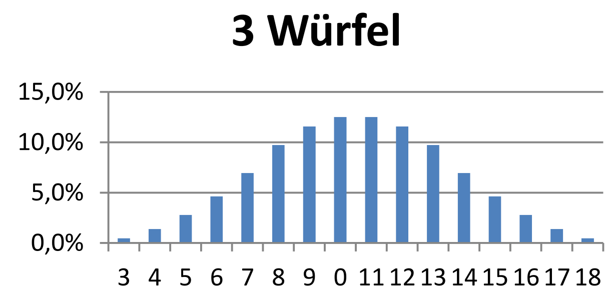
Motivation Normalverteilung

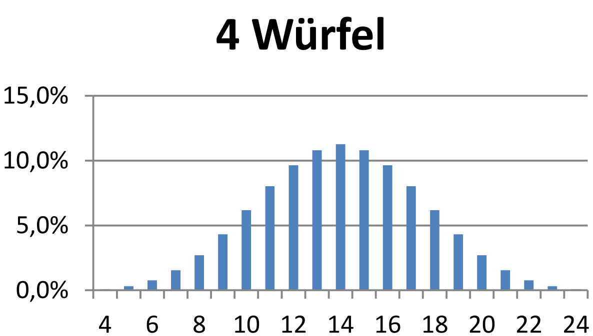
Beispiel:

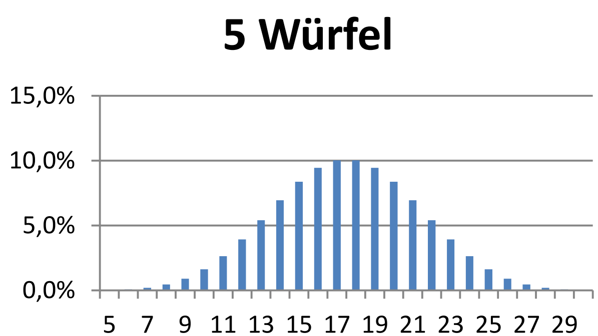
Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable
„Augensumme von mehreren Würfeln"

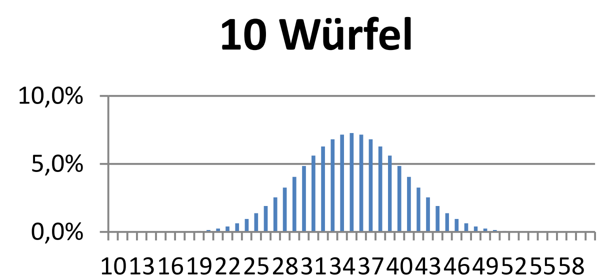












Beobachtung: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung nähert sich immer mehr einer Glockenkurve an.

Normalverteilung

Definition/Satz 29.1 (**Normalverteilung** oder **Gaußverteilung**)

Eine Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, wenn sie die folgende Dichtefunktion besitzt:

(Gauß'sche Glockenkurve)

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \Pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Ist X normalverteilt, gilt also $f(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x)$

bzw. für die kum. Verteilungsfunktion $F(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)\mathrm{d}t$

$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ ist also die Bezeichnung für die spezielle Dichtefunktion der Normalverteilung und wird meist anstatt der Bezeichnung $f(x)$ verwendet.

Entsprechend bezeichnet $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ die kumulierte Verteilungsfunktion der Normalverteilung und dieser Bezeichner wird meist anstatt von $F(x)$ verwendet.

Dass eine Zufallsvariable mit obiger Dichtefunktion tatsächlich Erwartungswert μ bzw. Standardabweichung σ besitzt, kann man nicht einfach definieren, sondern das muss man nach der Definition von Folie 2-90 zeigen.

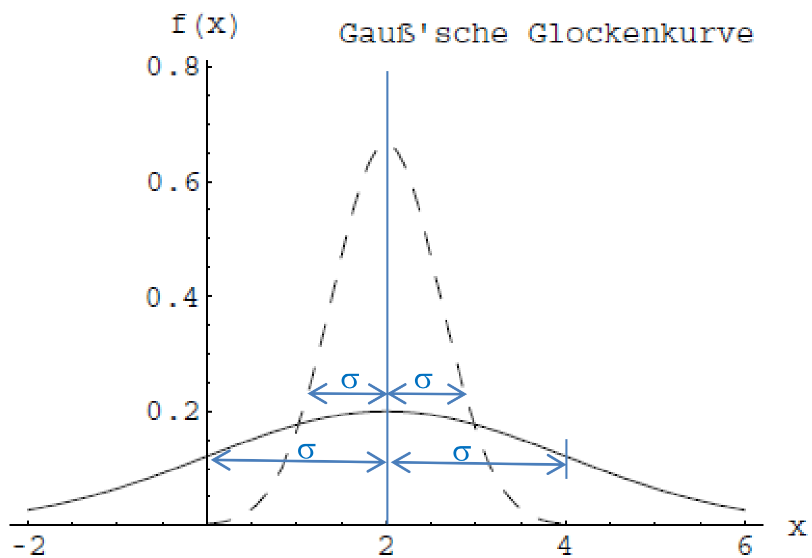
wichtig

Normalverteilung (Dichtefunktion)

- Die Gauß'sche Glockenkurve ist symmetrisch zu $x = \mu$ und hat hier ihr einziges **Maximum**. Es gibt **zwei Wendepunkte** an den Stellen $\mu \pm \sigma$. Damit legt σ (= Abstand der Wendepunkte von μ) die Breite der Glocke fest.
- Der **Flächeninhalt** unter der Gauß'schen Glockenkurve ist gleich 1. Das wird durch den Faktor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ sichergestellt. Es folgt: Eine schmale Glocke (σ klein) ist hoch, eine breite Glocke (σ groß) ist niedrig.

Dichtefunktion

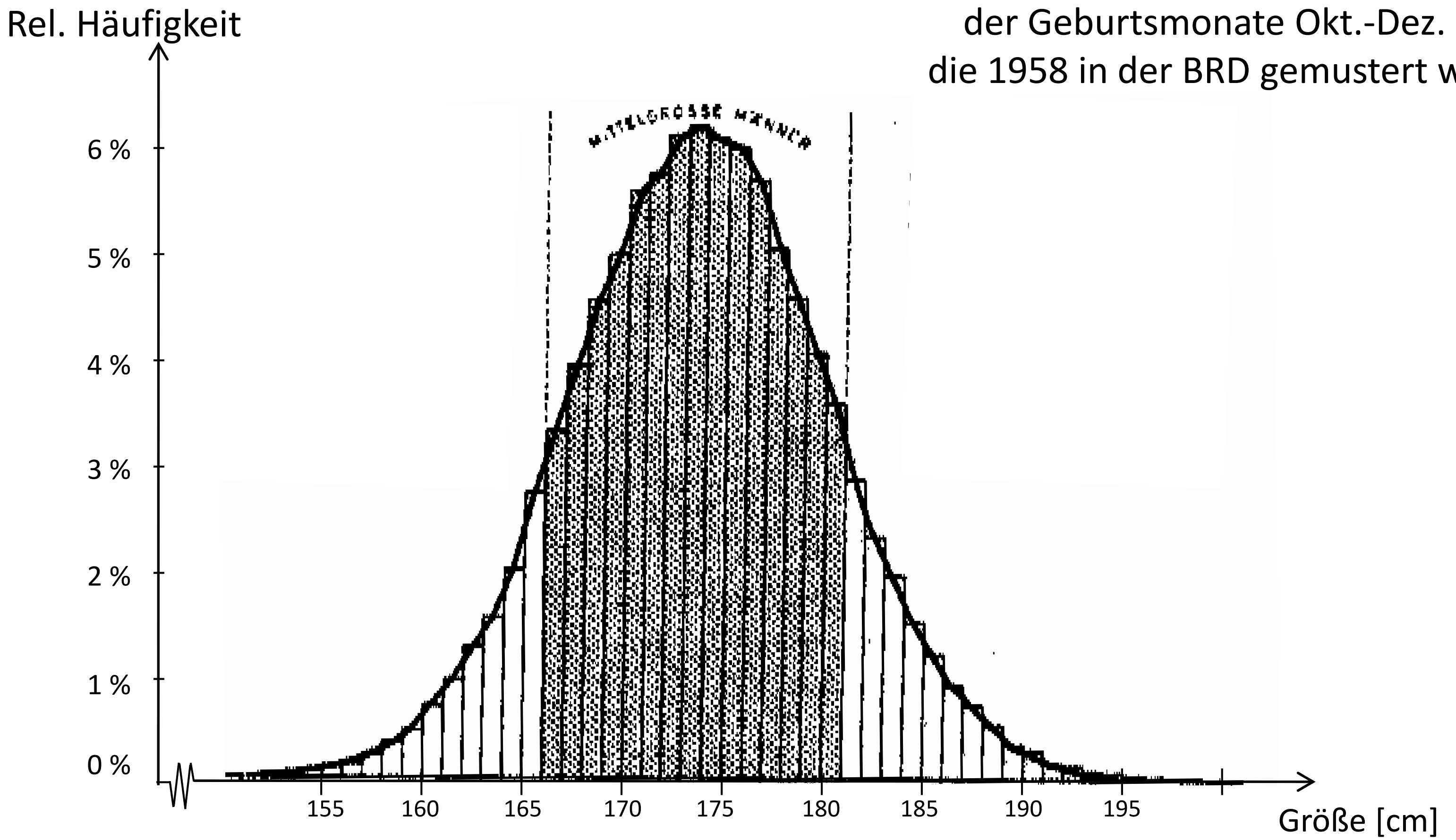
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Normalverteilung

Beispiel

Körpergröße von 91 342 Männern
der Geburtsmonate Okt.-Dez. 1937,
die 1958 in der BRD gemustert wurden.



Die Körpergrößen in dieser sehr großen Stichprobe entsprechen perfekt einer Normalverteilung.

Quelle: Barth, Haller: Stochastik Leistungskurs, Ehrenwirth-Verlag

Zentraler Grenzwertsatz

Satz (29.12)
Die Summe von ***vielen, unabhängigen*** Zufallsvariablen ist näherungsweise normalverteilt, solange nicht ein oder wenige Summanden die Summe dominieren.

Ab wie vielen Summanden die Näherung gut ist, hängt von der Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summanden ab und davon, wie ähnlich die Standardabweichungen der Summanden sind. (Je ähnlicher einer Normalverteilung, und je ähnlicher die Standardabweichungen desto weniger)

Im Normalfall genügen **30 Summanden**.

Satz (29.11)
Die Summe von zwei oder mehr normalverteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt.

wichtig

Keine Formel für die kumulierte Verteilungsfunktion

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Die kumulierte Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu;\sigma}$ der Normalverteilung ist **nicht als geschlossene Funktion darstellbar** (d.h. ohne Integral oder unendliche Reihe).

Trotzdem kann man ihre Werte numerisch approximativ berechnen.
Z.B. erhält man in Excel

$\Phi_{\mu;\sigma}(x_0)$ mit `NORM.VERT(`x_0`;μ;σ;1)`

Auch gibt es **Tabellen** von $\Phi_{0;1}(x)$:

Standard-Normalverteilung

Definition 29.2 (**Standardnormalverteilung**)

Eine Zufallsvariable X heißt standardnormalverteilt, wenn sie normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$.

Man schreibt dann meist nur $\varphi(x)$ statt $\varphi_{0,1}(x)$ und $\Phi(x)$ statt $\Phi_{0,1}(x)$:

Es gilt: $$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

und $$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{dt}$$

Für die kumulierte Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sind Tabellen verfügbar.

wichtig

Standardisierte Zufallsvariable

Definition

Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, so nennt man

$$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\cdot X - \frac{\mu}{\sigma}$$

die zugehörige **standardisierte Zufallsvariable**.

Beispiel

Sei X = Punktezahl in einem Test, Hans hat 66 Punkte. Ist das gut?

Angenommen, wir wissen noch : $\mu := E(X) = 50$
→Hans ist überdurchschnittlich

Angenommen, wir wissen noch: $\sigma(X) = 8$
→weit überdurchschnittlich

Standardisiertes Testergebnis von Hans: (66-50)/8 = 2
Hans ist *2 Standardabweichungen besser* als der Durchschnitt.

wichtig

Berechnen von $\Phi_{\mu;\sigma}(x)$ aus $\Phi(x)$

Satz 29.6:

Sei X normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

Dann ist die **standardisierte Zufallsvariable** $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt

und es gilt:

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Für die p-**Quantile** x_p und z_p gilt:

$$x_p = \mu + z_p \cdot \sigma$$

Wenn man **nur eine Tabelle der Standard-Normalverteilung** besitzt kann man mit diesem Satz trotzdem die Werte für Normalverteilungen mit anderen Parametern bestimmen – sowohl Werte der kumulierten Verteilungsfunktion als auch Quantile.

wichtig

Beweis von Satz 29.6 (1. Teil)

Zwischen den kumulierten Verteilungsfunktionen von X und Z besteht ein Zusammenhang:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \mu + z \cdot \sigma) = F_X(\mu + z \cdot \sigma)$$

Bekannt ist: $$f_X(x) = \varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (*)$$

Zu zeigen ist, dass Z standardnormalverteilt ist, d.h. dass gilt:

$$f_Z(z) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Nach *Kettenregel,* und weil f_X die Ableitung von F_X ist

Beweis: $$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{d}{dz}F_X(\mu + z \cdot \sigma) = \sigma \cdot f_X(\mu + z \cdot \sigma) =$$

$$= \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\mu+z\cdot\sigma)-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} = \varphi(z)$$

Nach (*)

q.e.d.

Beweis von Satz 29.6 (2. Teil)

Für das *p*-Quantil z_p von Z gilt :

$$p = P\left(Z \leq z_p\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z_p\right) = P\left(X \leq (\mu + z_p \cdot \sigma\,)\right),$$

also ist $\mu + z_p \cdot \sigma$ das p-Quantil von *X*.

Normalverteilung (Symmetrie)

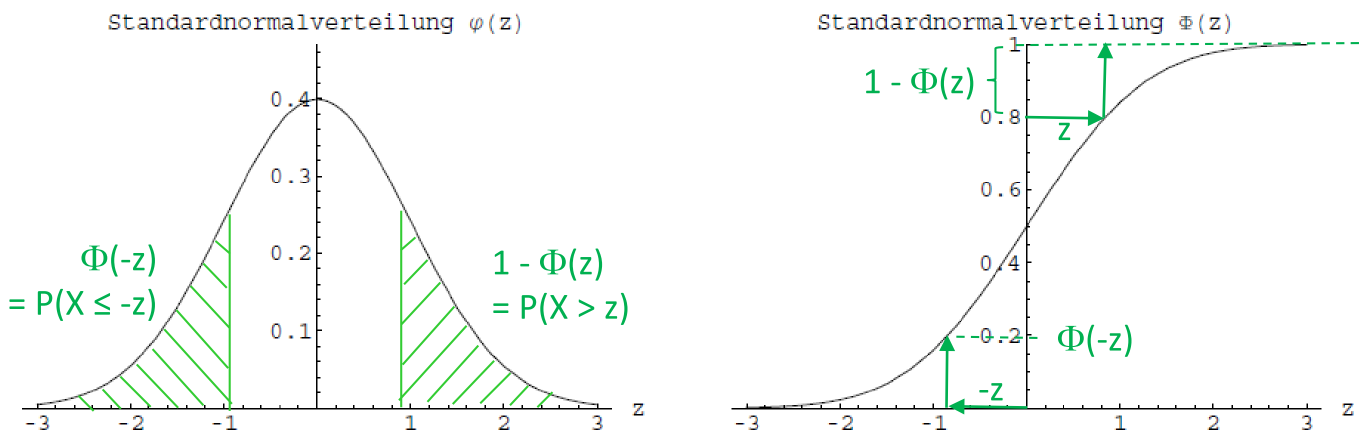


Abbildung 29.2. Standardnormalverteilung: $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

Satz 29.3 φ ist symmetrisch zur y-Achse, d.h. $\varphi(-z) = \varphi(z)$.
Die kum. Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung ist deshalb punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$P(X \leq -z) = P(X \geq z)$$

$$\mathbf{\Phi(-z) = 1 - \Phi(+z)}$$

In der Tabelle von Φ sind nur positive Werte eingetragen. Für negative benutzt man diesen Satz.

wichtig

Zusammenfassung: Eigenschaften der Normalverteilung

Aus Satz 29.11, 29.12, 29.3, 29.5, 29.6:

1. Die Summe von normalverteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt.
2. Ist *X* normalverteilt mit Parametern μ, σ, so ist $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt.

   Es gilt deshalb $$P(X \leq x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
3. Zusätzlich gilt: $$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

So berechnet man für normalverteiltes *X* mit beliebigem μ, σ
die kumulierte Verteilungsfunktion ***F(x)* = $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$:**

Den *standardisierten* Wert $\boldsymbol{z} := \frac{x-\mu}{\sigma}$ ausrechnen und **in der -Tabelle der Standardnormalverteilung Φ nachschlagen.**

Falls *z* negativ ist: Benutzen, dass $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. (nach Satz 29.3)

Beispiel:
Die maximale funktionierende Taktfrequenz T bei produzierten Chips einer bestimmten Baureihe sei normalverteilt mit Erwartungswert 75 und Standardabweichung 5 [MHz].

a) Wie wahrscheinlich ist $T \leq 85$ MHz ?

b) Wie wahrscheinlich ist T unter 65 MHz?

c) Wie hoch ist das 90%-Quantil von T?

d) Wie hoch ist das 10%-Quantil von T?

Beispiel:
Wie hoch ist bei einer normalverteilten Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert

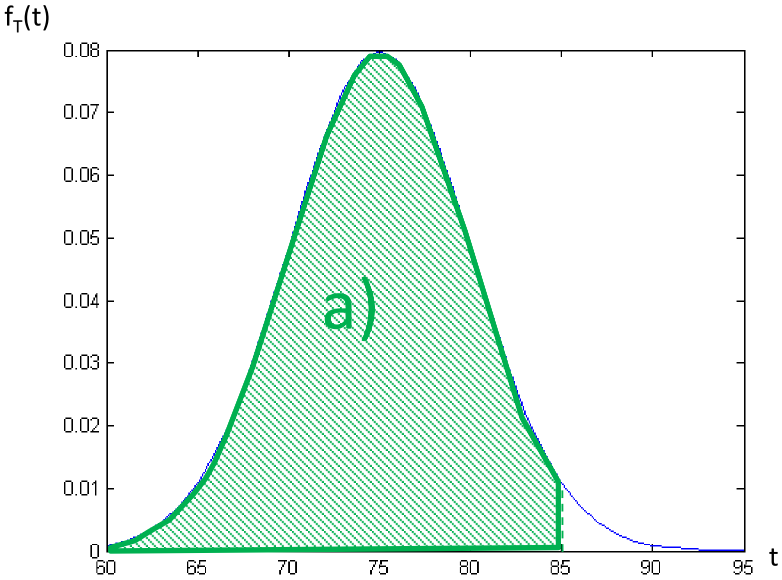
a) … außerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$ liegt?

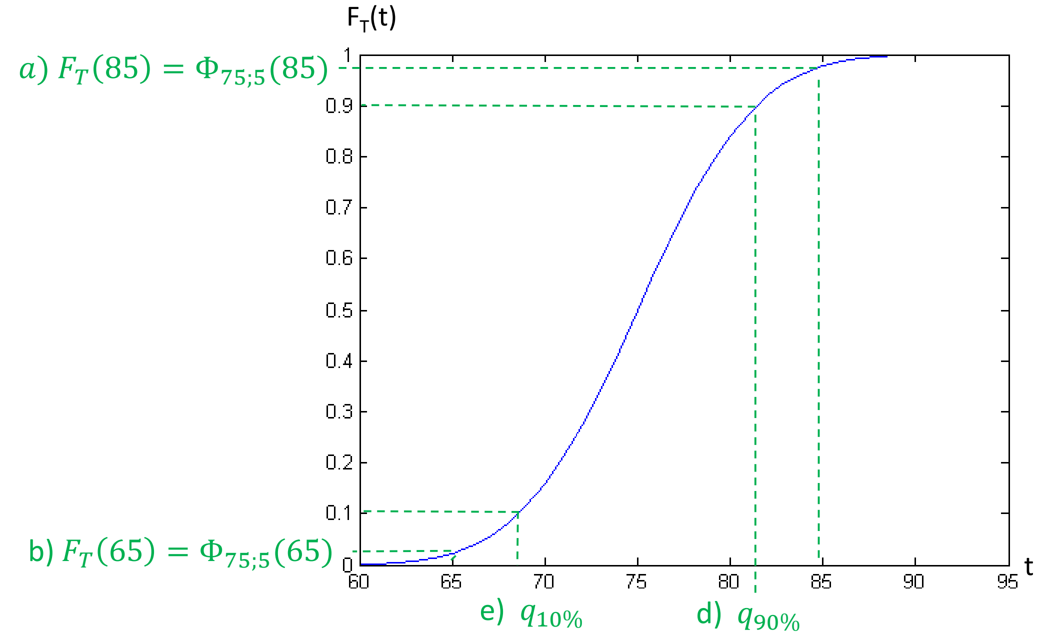
b) … außerhalb des Intervalls $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$ liegt?

c) … außerhalb des Intervalls $[\mu - 2.8\sigma;\ \mu + 2.8\sigma]$ liegt?

Lösung:

Die maximale funktionierende Taktfrequenz T bei produzierten Chips einer bestimmten Baureihe sei normalverteilt mit Erwartungswert 75 und Standardabweichung 5 [MHz].





$a)\ \ P(T \leq 85) = \mathrm{F}_{\mathrm{T}(85)} = \Phi\left(\frac{85-75}{2}\right) = \Phi(2.00) \approx 0.97725$

$b)\ \ P(T \leq 65) = \mathrm{F}_{\mathrm{T}(65)} = \Phi\left(\frac{65-75}{2}\right) = \Phi(-2.00) = 1 - \Phi(2.00) \approx 1 - 0.97725 = 0.02275$

$c)\ \ P(65 < T < 85) = F_{T(85)} - F_{T(65)} = 0.97725 - 0.02275 \approx 0.9545$

d) 90%-Quantil der Std-NV: $x_{0.9} = 1.29 \quad \Rightarrow \quad q_{0.9} = 75 + 1.29 \cdot 5$ = **<u>81.45 [MHz]</u>**

e) 10%-Quantil der Std-NV: $x_{0.1} = -x_{0.9} = -1.29$ (Symmetrie der Std-NV benutzen)
$\Rightarrow \quad q_{0.1} = 75 - 1.29 \cdot 5$ = **<u>68.55 [MHz]</u>**

Lösung:

Wie hoch ist bei einer normalverteilten Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert

a) … außerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$ liegt?

$P(X > \mu + \sigma) = \Phi\left(\frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1.00) \approx$ 15.9% = $P(X < \mu - \sigma)$ (Symmetrie)

Also $P(X \notin [\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]) \approx 2 \cdot 0.159 \approx$ **31.8%**

b) … außerhalb des Intervalls $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$ liegt?

Analog: **4.5%**

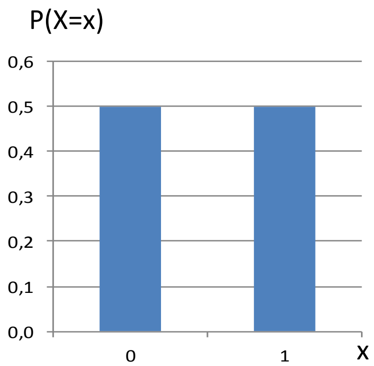
c) … außerhalb des Intervalls $[\mu - 2.8\sigma;\ \mu + 2.8\sigma]$ liegt?

Analog: **0.5%**

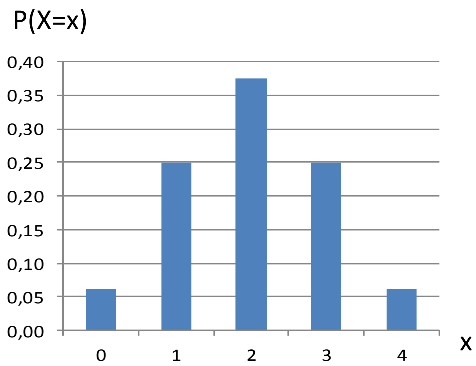
Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Beobachtung: Sei X binomialverteilt mit p=0.5.

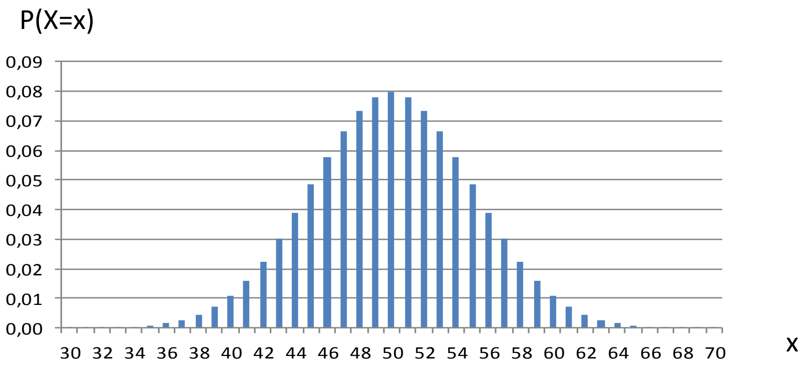
Dann nähert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X für wachsendes n einer Gauß'schen Glockenkurve an:



$n = 1$



$n = 4$



$n = 100$

Grund: X kann als Summe vieler unabhängiger Zufallsvariablen gesehen werden:

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

mit X_i := „Anzahl Treffer beim i-ten Versuch" (jeweils 0 oder 1)

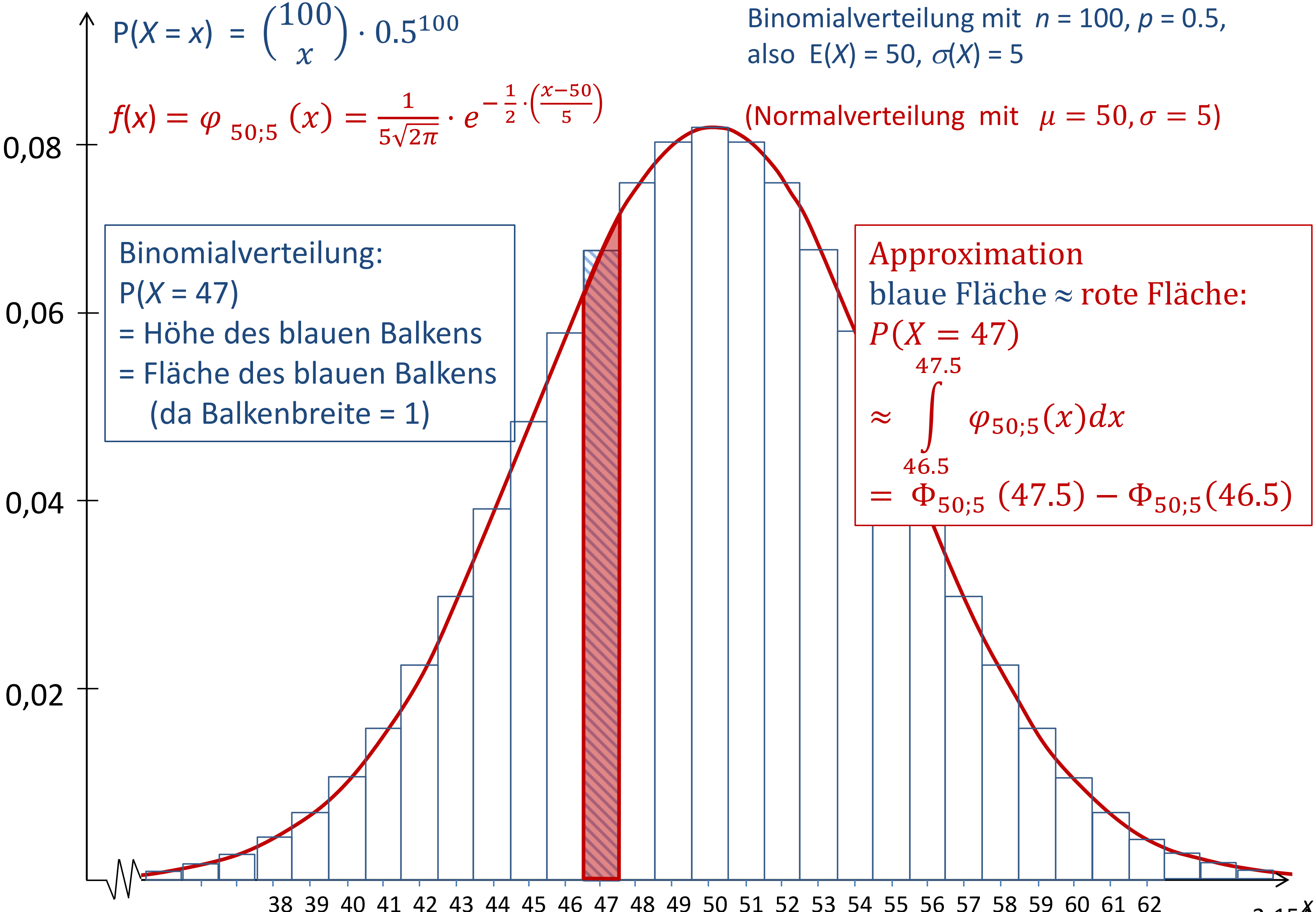
Also ist X nach dem zentralen Grenzwertsatz für große n annähernd normalverteilt.

$P(X = x) = \binom{100}{x} \cdot 0.5^{100}$

Binomialverteilung mit $n = 100$, $p = 0.5$, also $E(X) = 50$, $\sigma(X) = 5$

$f(x) = \varphi_{50;5}(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-50}{5}\right)}$

(Normalverteilung mit $\mu = 50, \sigma = 5$)



Binomialverteilung:
$P(X = 47)$
= Höhe des blauen Balkens
= Fläche des blauen Balkens
(da Balkenbreite = 1)

Approximation
blaue Fläche ≈ rote Fläche:

$$P(X = 47) \approx \int_{46.5}^{47.5} \varphi_{50;5}(x)\,dx = \Phi_{50;5}(47.5) - \Phi_{50;5}(46.5)$$

Normalapproximation der Binomialverteilung

Satz (Normalverteilung als Approximation der Binomialverteilung)

Ist X binomialverteilt mit n Versuchen und Trefferwahrscheinlichkeit p, so lassen sich Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion durch eine Normalverteilung mit $\mu = n \cdot p$ und Varianz $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ annähern, **falls $n \cdot p \cdot (1 - p) \geq 9$**:

Ist sichtbar zu prüfen, bevor Sie diese Näherung anwenden

$$P(X = x) \approx \Phi_{\mu;\sigma}(x + 0.5) - \Phi_{\mu;\sigma}(x - 0.5) \approx 1 \cdot \varphi_{\mu;\sigma}(x)$$

$$P(X \leq x) \approx \Phi_{\mu;\sigma}(x + 0.5)$$

Stetigkeitskorrektur

Intervallbreite

Die $\pm$ 0.5 heißen ***Stetigkeitskorrektur***, und sind nur dann sinnvoll, wenn eine *stetige* W-Verteilung benutzt wird um eine *diskrete* Wahrscheinlichkeitsverteilung zu approximieren.

Beweis: Sei X_i := *„Anzahl" Treffer beim i-ten Versuch* (i=1,...,n), (also ist X_i 0 oder 1)

dann ist $X = X_1 + \ldots + X_n$, also die Summe von vielen unabhängigen Zufallsvariablen.

Für genügend großes n ist X also nach dem zentralen Grenzwertsatz normalverteilt.

Normalapproximation der Binomialverteilung (Beispiel)

Beispiel:

X =Anzahl Köpfe bei 100 Münzwürfen.

Wie wahrscheinlich liegt X bei 100 Würfen im Bereich $45 \leq X \leq 60$?

Lösung:

X ist binomialverteilt mit $n = 100$, $p = 0.5$.

Variante 1:

$P(45 \leq X \leq 60) = P(X = 45) + P(X = 46) + \ldots + P(X = 60)$

d.h. für die Werte 45, 46, …, 60 jeweils die Binomialverteilung ausrechnen ☹

Variante 2:

$n \cdot p \cdot (1 - p) = 25 > 9$, also kann die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung mit $\mu = n \cdot p = 50$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 5$ approximiert werden:

$P(45 \leq X \leq 60) \approx \Phi_{50;\,5}(60.5) - \Phi_{50;\,5}(44.5) =$

$\Phi(\,(60.5 - 50) / 5) - \Phi(\,(44.5 - 50) / 5) = \Phi(\,2.1) - \Phi(\,-1.1) =$

$\Phi(2.1) - (\,1 - \Phi(1.1)\,) = 0.98214 - 1 + 0.86433$ ≈ <u>**84.6 %**</u>

Normalapproximation der Binomialverteilung (Beispiel)

Beispiel 1 (Näherung einer Binomialverteilung, vgl . Teschl Bsp. 29.15**)**
Bei einem digitalen Übertragungskanal sein die Wahrscheinlichkeit für jedes übertragene Bit unabhängig von den anderen Bits gleich 10^{-5}, dass es falsch übertragen wird. Es wird eine Nachricht von 10^7 Bits übertragen, die einen Error Correcting Code enthält, der alle Übertragungsfehler erkennen und heilen kann, sofern nicht mehr als 110 Bits verfälscht wurden. Wie wahrscheinlich sind 111 oder mehr falsch übertragene Bits?

Lösung
Sofern man annimmt, dass die einzelnen Bits unabhängig voneinander verfälscht werden, ist die Anzahl *X* der falsch übertragenen Bits *binomialverteilt* mit $n = 10^7$ und $p = 10^{-5}$.

Da $n \cdot p \cdot (1-p) \approx 100 > 9$, sind die Voraussetzungen des vorherigen Satzes erfüllt, und die *Binomialverteilung* kann durch die *Normalverteilung* mit $\mu = n \cdot p = 100$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 10.0$ approximiert werden:

Stetigkeitskorrektur, da X eigentlich diskret, aber mit einer stetigen W-Verteilung angenähert wird.

$$P(X \geq 111) = 1 - P(X \leq 110) \approx 1 - \Phi_{100;10}(110.5) = 1 - \Phi\left(\frac{110.5 - 100}{10}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1.05) \approx 1 - 0.85314 \approx \underline{\mathbf{14.7\,\%}}$$

Was Sie gelernt haben sollten

- Wahrscheinlichkeiten und Quantile zur Normalverteilung mit Hilfe der Tabelle bestimmen.
- Wahrscheinlichkeiten dafür bestimmen, dass der Wert einer normalverteilte Zufallsvariablen in einem vorgegebenen Intervall liegt.