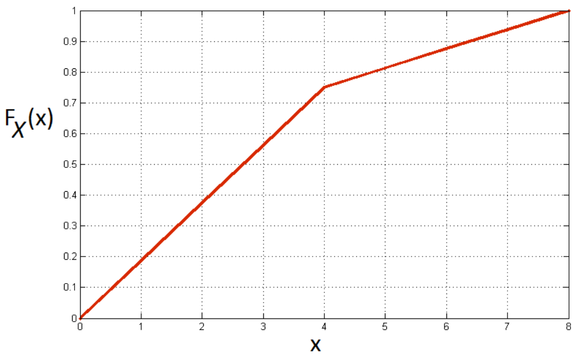
Statistik für Informatiker
Prof. Dr. Reimar Hofmann

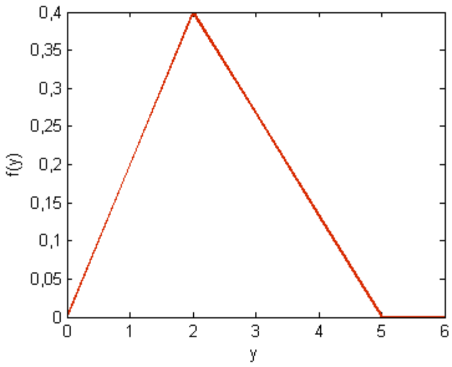
Aufgabenblatt 3 zur Statistik-Vorlesung

Basisaufgaben zum Grundverständnis stetiger Zufallsvariablen

Aufgabe 3.1

- Die Lebensdauer ***L*** eines bestimmten Bauteiltyps (Typ 1) in Jahren sei eine stetige Zufallsvariable mit der kumulierten Verteilungsfunktion $F_L(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$ (x ≥ 0)
- Die Lebensdauer ***X*** eines zweiten Bauteiltyps (Typ 2) in Jahren besitze folgende kumulierte Verteilungsfunktion (linkes Diagramm):





- Die (stetige) Lebensdauer ***Y*** eines weiteren Bauteiltyps in Jahren besitze die oben abgebildete Wahrscheinlichkeitsdichte. (rechtes Diagramm)
- ***Z*** sei eine diskrete Zufallsvariable mit den möglichen Werten 1; 2; 3; 4; 5 und der Wahrscheinlichkeitsfunktion P(*Z* = x) = $\frac{6-x}{15}$

Bestimmen Sie

a-i) P(*L* ≤ 2 J)	a-ii) P(*X* ≤ 2 J)	a-iii) P(Y ≤ 2 J)	a-iv) P(*Z* ≤ 2)
b-i) P(*L* < 2 J)	b-ii) P(*X* < 2 J)	b-iii) P(Y < 2 J)	b-iv) P(*Z* < 2)
c-i) P(2 J. < *L* < 4 J)	c-ii) P(2 J < *X* < 4 J)	c-iii) P(2 J < Y < 4 J)	c-iv) P(2 < *Z* < 4)
d-i) P(*L* > 4 J)	d-ii) P(*X* > 4 J)	d-iii) P(Y > 4 J)	d-iv) P(*Z* > 4)

Geben Sie die formale Bezeichnung der in (e) und (f) gesuchten Größen an und bestimmen Sie ihren Wert:

e) Nach welcher Zeit sind (über eine große Zahl von Bauteilen gemittelt) 75% kaputt beim
e-i) *ersten* Bauteiltyp? e-ii) *zweiten* Bauteiltyp?

Bestimmen Sie das 40%-Quantil der Zufallsvariablen
e-iii) Y e-iv) Z

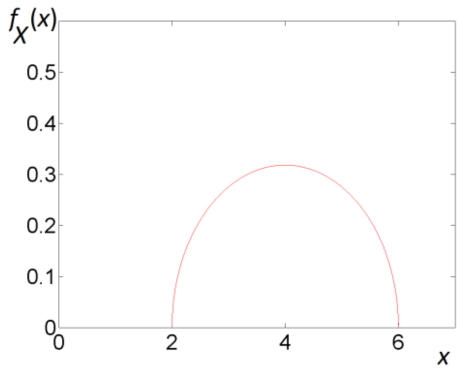
f) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Bauteil des ersten Typs innerhalb von 2 Jahren kaputtgeht?

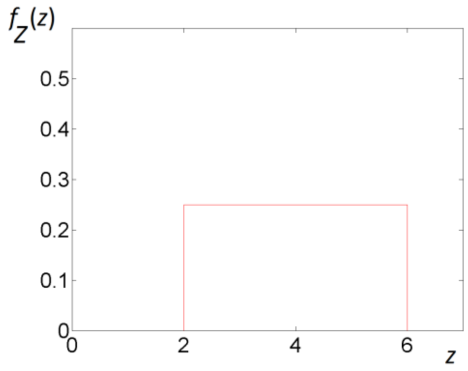
Bestimmen Sie

g-i) P(L < 4 J | L > 2 J) g-ii) P(X < 4 J | X > 2 J) g-iii) P(Y < 4 J | Y > 2 J) g-iv) P(Z < 4 J | Z > 2 J)

Aufgabe 3.2

Die Dichtefunktionen f_X, f_Z der stetigen Zufallsvariablen *X* und *Z* sind nebenstehend abgebildet.





a) Welcher der folgenden Werte ist für *E*(*X*) am plausibelsten?
0; 0.25; 0.5; 1; 2; 4; 6; 8

b) Welcher der folgenden Werte ist für *E*(*Z*) am plausibelsten?
0; 0.25; 0.5; 1; 2; 4; 6; 8

c) Welche der folgenden drei Wahrscheinlichkeiten ist die größte? (kurze Begründung, Ausrechnen nicht verlangt)
(i) $P(4.0 < X < 4.1)$
(ii) $P(4.5 < X < 4.6)$
(iii) $P(5.0 < X < 5.1)$

d) Bestimmen Sie ungefähr $P(3.9 < X < 4.1)$

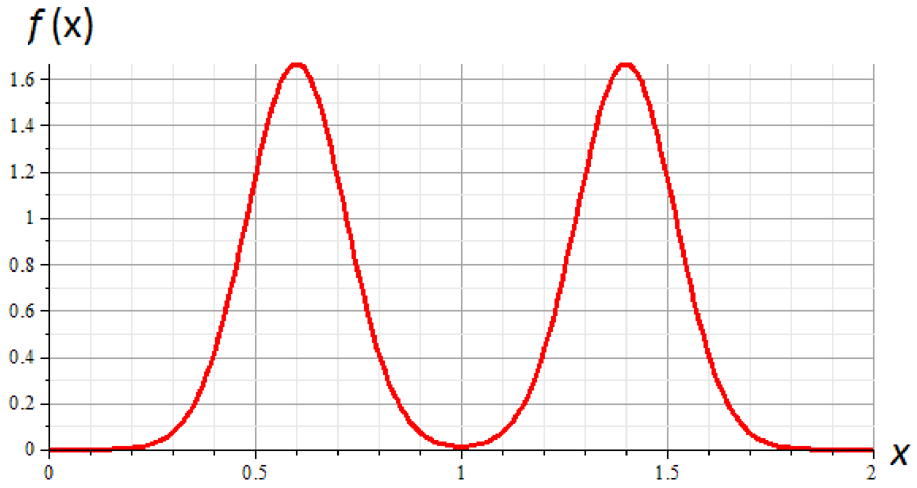
e) Ist die Standardabweichung der Zufallsvariablen *Z* mit nebenstehender Dichte größer, kleiner, oder gleich wie die von obigem *X*? (kurze Begründung)

f) Welcher der folgenden Werte ist für σ(*X*) am plausibelsten?
-7.2; -3.6; -1.8; -0.8; -0.3; 0; 0.3; 0.8; 1.8; 3.6; 7.2
[TIPP: Anschaulich beschreibt die Standardabweichung von *X*, wie weit die Werte von *X* im Mittel von ihrem Erwartungswert abweichen. Dabei geht sowohl der Wertebereich von *X* ein, als auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h. ob die Werte mit geringen Abstand zum Erwartungswert oder solchen mit großem Abstand höhere Wahrscheinlichkeit besitzen. In jedem Fall liegt die Standardabweichung zwischen dem kleinsten und dem größten auftretenden Abstand.]

Weitere Basisaufgabe bei zusätzlichem Übungsbedarf

Aufgabe 3.3

Die stetige Zufallsvariable X besitze folgende Dichtefunktion:



Bestimmen Sie … (nur bei e und f Rechenweg oder Begründung erforderlich)

a) $E(X)$ b) $\sigma(X)$ [Genauigkeit 0.1 genügt] c) das 75%-Quantil von X.

d) $P(0.6 < X < 1.4)$ e) $P(X < 1 \mid X < 1.4)$ f) $P(0.49 < X < 0.51)$

g) Bei welcher Stichprobe ist am plausibelsten, dass sie von X stammt:

1. 1.38 0.73 1.78 0.76 1.51 0.85 1.12 0.41 0.99
2. 0.58 0.70 0.64 0.49 0.61 0.50 0.71 0.43 0.74
3. 0.63 1.32 1.56 1.39 0.47 0.58 1.26 0.70 1.42

Anwendungsaufgaben

(Mit Stand vom 21.11. schwer, mit Stand vom 28.11. mittelschwer)

Bei den folgenden Aufgaben sind stets auch die formalen Bezeichner der gesuchten Größen anzugeben.

Aufgabe 3.4

Eine Straßenbahnlinie fährt im 10 Minuten Takt. Sie kommen zu irgendeinem unkoordinierten Zeitpunkt an die Haltestelle und interessieren sich für die Wartezeit W bis zum Eintreffen der nächsten Bahn.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die nächste Bahn innerhalb von 0.5 Minuten kommt …
   i. …wenn Sie soeben an der Haltestelle angekommen sind?
   ii. …wenn Sie schon seit 5 Minuten warten.
   iii. …wenn Sie schon seit 9 Minuten warten.
b) Sie sind soeben an der Haltestelle angekommen.
   Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie zwischen 9 und 9.5 Minuten warten müssen?

Hinweis: Für die folgenden Aufgaben dürfen Sie benutzen:
Eine Zufallsvariable X heiße exponentialverteilt, wenn für irgendeinen Wert $k > 0$ folgendes gilt:

$F_X(x) = 1 - e^{-kx}$, $f_X(x) = k \cdot e^{-kx}$, $E(X) = \frac{1}{k}$ sowie $\sigma(x) = \frac{1}{k}$

Aufgabe 3.5 Die Lebensdauer *L* eines bestimmten Bauteiltyps sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 2 Jahren.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein solches Bauteil mindestens zwei Jahre überlebt? [Ergebnis: 36.8%]
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Bauteil, das bereits zwei Jahre unbeschadet überstanden hat, auch zwei weitere Jahre (also insgesamt 4 Jahre) überlebt?
c) Nach welcher Zeit ist ein Bauteil mit 90% Wahrscheinlichkeit kaputt?
d) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Lebensdauer.

Aufgabe 3.6 In einem Gerät sind zwei redundante Bauteile des Typs aus der vorigen Aufgabe eingebaut. Das Gerät funktioniert, solange mindestens eines der beiden Bauteile noch funktioniert. Die Ausfälle beider Bauteile werden als *unabhängig* voneinander angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät nach zwei Jahren noch funktioniert.
b) Gilt die Berechnung aus (a) auch, wenn die Bauteile nicht unabhängig voneinander ausfallen?

Aufgabe 3.7
Die Lebensdauer *L* eines Bauteiltyps sei exponentialverteilt. Ferner sei bekannt, dass im langfristigen Mittel 20% der Bauteile innerhalb der ersten 1.5 Jahre kaputt gehen.

a) Nach welcher Zeit sind (in etwa, bei einer großen Zahl von Bauteilen) 50% der Bauteile kaputt?
b) Ergänzen Sie mit dem richtigen Fachbegriff: Das … der Lebensdauer beträgt 1.5 Jahre.

Aufgabe 3.8
Die Lebensdauer *L* eines Bauteiltyps sei exponentialverteilt mit Erwartungswert 5 Jahre.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Bauteil innerhalb der nächsten 0.5 Jahre kaputtgeht, wenn…
   i. …es sich um ein neues Bauteil handelt?
   ii. …es seit 5 Jahren fehlerfrei läuft.
   iii. …es seit 9 Jahren fehlerfrei läuft.
b) In etwa welcher Anteil einer großen Zahl von neu gekauften Bauteilen wird mehr als 9 aber weniger als 9.5 Jahre lang funktionieren?