IWI Fakultät für Informatik
und Wirtschaftsinformatik

Prof. Dr. Frank Schaefer
Sommersemester 2016

Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

Musterlösung für die Klausur Mathematik 1

(90 Punkte, 90 Minuten)

Aufgabe 1: (5 Punkte) Euklidischer Algorithmus

Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten, gemeinsamen Teiler von 34 und 21. (Andere Methoden sind nicht gefragt.)

$$\begin{aligned} 34 &= 1 \cdot 21 + 13 \\ 21 &= 1 \cdot 13 + 8 \\ 13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Wenn der Rest gleich 0 ist, endet der Euklidsche Algorithmus. Dann ist der vorletzte Rest der gesuchte ggT. Somit gilt: $\text{ggT}(34, 21) = 1$.

Aufgabe 2: (3+8=11 Punkte) Äquivalenzrelation, homogene Koordinaten

a) Eine Äquivalenzrelation ist eine zweistellige Relation R auf einer Grundmenge G mit folgenden Eigenschaften:

Reflexiv: xRx für alle $x \in G$.

Transitiv: xRy und yRz impliziert xRz für alle $x, y, z \in G$.

Symmetrisch: $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in G$.

b) Wie in der Aufgabenstellung beschrieben gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \text{ für ein beliebiges } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

Dabei haben wir jetzt das $\cong$-Zeichen für die zweistellige Relation verwendet. Wir müssen die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation beweisen:

Reflexiv: Diese Eigenschaft ist einfach zu zeigen, da für $\lambda = 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Somit steht jeder Vektor zu sich selbst in Relation.

Transitiv: Angenommen es gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ und weiter } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Dann folgt durch Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

Damit ist aber genau die Transitivität gezeigt, da für λ_1 und λ_2 ungleich 0 auch $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ ungleich 0 gilt.

Symmetrisch: Angenommen es gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Dann folgt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wegen $\lambda \neq 0$ existiert $\frac{1}{\lambda}$ immer und ist auch ungleich 0. Damit ist die Symmetrie gezeigt.

Aufgabe 3: (5 + 5 + 8 = 18 Punkte) Rechnen mit Matrizen

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 8 & 23 \\ 20 & 1 & 16 \\ 20 & -1 & 44 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 & 26 & 73 \\ 4 & -2 & 8 & 28 \\ 7 & 4 & 39 & 24 \\ 7 & 1 & 10 & 29 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{array}{l|rrrr|rrrr}
 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
IV+3I & 0 & 0 & 6 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
I-2II & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
IV-6III & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -6 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
III-IV & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -6 & 1
\end{array}$$

Somit gilt:

$$C^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (5 + 7 = 12 Punkte) Determinante, Regel von Cramer

a) Wir bestimmen die Determinante der Matrix dieses LGS:

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right. = 18 + 2 - 20 + 20 - 12 - 3 = 5.$$

Da die Determinante ungleich 0 ist, ist das LGS eindeutig lösbar.

b) Wir bestimmen x_2 mit Hilfe der Regel von Cramer. Dabei sei A die Matrix des LGS, $\vec{a}_i$ die Spalten der Matrix und $\vec{b}$ die rechte Seite des LGS:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3) = \left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right. = 9 - 2 - 5 + 10 - 3 + 3 = 12.$$

Also gilt: $x_2 := \det(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3) / \det(A) = \frac{12}{5}$.

Aufgabe 5: (14 Punkte) LGS

Wir notieren die Koeffizienten des LGS und lösen es mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\begin{array}{lccccc|c}
 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\
 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\
 & 1 & 2 & 2 & 7 & 6 & 5 \\
 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 4 \\
\cline{2-7}
II & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\
I & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\
III-II & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\
IV-2II & 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -2 \\
\cline{2-7}
 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\
 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\
\cline{2-7}
I-II & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\
\cline{2-7}
\text{Vertauschen von} & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
x_2 \text{ und } x_3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2
\end{array}$$

Im letzten Schritt wurden x_2 und x_3 vertauscht. Die vertauschten Variablen bezeichnen wir mit $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5$, um sie von den ursprünglichen unterscheiden zu können. Aus der Form nach dem letzten Bearbeitungsschritt können wir die Lösung mit den vertauschten Werten direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{x}_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{x}_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{x}_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich nach Zurücktauschen der Variablen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: (4+8+3=15 Punkte) Skalarprodukt, Matrizen

a) Zunächst muss der Vektor $\vec{v}$ normiert werden, damit die Methode aus der Vorlesung angewendet werden kann. Dazu bestimmen wir die Länge $|\vec{v}| = 5$. Also gilt für den normierten Vektor:

$$\vec{v}_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt mit der Formel aus der Vorlesung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) Wir berechnen die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren, die ja dann die Spalten der gesuchten Matrix bilden:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{3}{25}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{4}{25}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Somit gilt für die gesuchte Matrix:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25}\\ 0 & \frac{12}{25} & \frac{16}{25}\end{pmatrix}$$

c) Matrizen mit vollem Rang sind invertierbar. Eine Matrix, die den dreidimensionalen Raum auf eine Gerade abbildet, stellt keine umkehrbare Abbildung dar und kann somit auch nicht invertierbar sein.

Aufgabe 7: (4+ 8 + 3 = 15 Punkte) Eigenwerte und Eigenvektoren

a) Zur Berechnung der Eigenwerte stellen wir das charakteristische Polynom auf:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 5 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 5 & -1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 7 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix} &= (2-\lambda)(5-\lambda)((2-\lambda)(2-\lambda)-25) = 0\\ &= (2-\lambda)(5-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-25)\\ &= (2-\lambda)(5-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-21)\\ &= (2-\lambda)(5-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-7)\end{aligned}$$

Also lauten die vier verschiedenen Eigenwerte: $2, 5, -3, 7$.

b) Wir müssen die beiden Eigenwerte in folgende Matrix einsetzen:

$$\begin{pmatrix}-4-\lambda & 2 & 13 & -4\\ -5 & 3-\lambda & 13 & -4\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 5 & -2 & -13 & 5-\lambda\end{pmatrix}.$$

Wir betrachten zuerst $\lambda_1 = 1$ und erhalten folgendes homogene LGS:

$$\begin{array}{rrrr|r}
-5 & 2 & 13 & -4 & 0 \\
-5 & 2 & 13 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & -2 & -13 & 4 & 0 \\
\hline
1 & -2/5 & 13/5 & -4/5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Wir können die Lösungsmenge direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 13/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle drei Vektoren sind Eigenvektoren, aber auch alle Linearkombinationen davon!

Als nächstes betrachen wir $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{array}{l rrrr|r}
 & -6 & 2 & 13 & -4 & 0 \\
 & -5 & 1 & 13 & -4 & 0 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & 5 & -2 & -13 & 3 & 0 \\
\cline{2-6}
 & -6 & 2 & 13 & -4 & 0 \\
 & -5 & 1 & 13 & -4 & 0 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
IV + II & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\cline{2-6}
I - II & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & -5 & 1 & 13 & -4 & 0 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\cline{2-6}
I + IV & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
II - 5I & 0 & -4 & 13 & -4 & 0 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\cline{2-6}
-I & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-IV & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
III & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
II - 4IV & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\
\cline{2-6}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Wir können die Lösungsmenge direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der angegebene Vektor und halle Vielfachen davon sind Eigenvektoren.

c) Da wir für den dreifachen Eigenwert 1 drei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden haben, gibt es insgesamt vier linear unabhängig Eigenvektoren und somit ist eine Diagonalisierung möglich!