2. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik II

Musterlösungen

Aufgabe 1: Jedes Terminalsymbol von w muss durch einen Ableitungsschritt der Form $A \to a$ erzeugt werden. Hierfür benötigt man also genau $|w|$ Ableitungschritte. Ferner müssen aber auch erst einmal $|w|$ viele Variablen verfügbar sein, um diese Regeln anwenden zu können. Mit jeder Produktion der Form $A \to BC$ werden aus einer Variablen zwei generiert, also eine mehr als zuvor. Da wir mit einer Variable (nämlich der Startvariablen) starten und $|w|$ Variablen benötigen, werden nochmals genau $|w| - 1$ Ableitungsschritte fällig, insgesamt also $2|w| - 1$ viele. $\square$

Aufgabe 2: Die TM M akzeptiert die Sprache $\{0^n 1^n \,|\, n \geq 1\}$.

a) M akzeptiert 0011 mit diesen Konfigurationsübergängen:

$$\begin{aligned} z_0 0011 &\vdash_M Xz_1011 \vdash_M X0z_111 \vdash_M Xz_20Y1 \vdash_M z_2X0Y1 \vdash_M Xz_00Y1 \\ &\vdash_M XXz_1Y1 \vdash_M XXYz_11 \vdash_M XXz_2YY \vdash_M Xz_2XYY \\ &\vdash_M XXz_0YY \vdash_M XXYz_3Y \vdash_M XXYYz_3\square \vdash_M XXYY\square z_4\square \ . \end{aligned}$$

b) M verwirft 0010 aufgrund dieser Konfigurationsübergänge:

$$\begin{aligned} z_0 0010 &\vdash_M Xz_1010 \vdash_M X0z_110 \vdash_M Xz_20Y0 \vdash_M z_2X0Y0 \\ &\vdash_M Xz_00Y0 \vdash_M XXz_1Y0 \vdash_M XXYz_10 \vdash_M XXY0z_1\square \ . \end{aligned}$$

Bei 0010 zeigt M zunächst das gleiche Verhalten wie bei 0011, bis M in der Konfiguration $XXYz_10$ zum ersten Mal die letzte 0 liest. M verbleibt dann im Zustand z_1, muss eine Bewegung nach rechts ausführen und kommt zu der Konfiguration $XXY0z_1\square$. Im Zustand z_1 gibt es jedoch keinen Übergang für das Bandsymbol $\square$, so dass M die Eingabe nicht akzeptiert.

c) Oben wurde bereits erwähnt, dass M die Sprache $\{0^n 1^n \,|\, n \geq 1\}$ akzeptiert. Die Idee ist, jede Null durch ein X und jede Eins durch ein Y zu markieren. Wenn sich M in dem Startzustand z_0 befindet und eine Null liest, dann ersetzt sie diese durch ein X und wechselt in den Zustand z_1. Dort sucht sie nach rechts über alle Nullen und bereits ersetzte Einsen (also Y–Symbole) hinweg nach einer weiteren Eins. Wird sie fündig, so ersetzt sie auch diese Eins mit einem Y und begibt sich in den Zustand z_2. Dort bewegt sich M über alle vorherigen Y–Symbole und (noch nicht ersetzten) Nullen zurück nach links. Erreicht M das am weitesten links stehende X, welches das rechte Ende des Blocks der bereits ersetzten Nullen markiert, so kehrt M in den Zustand z_0 zurück. Liest M nun eine Null, so beginnt der obige Prozess von vorn. Liest M dagegen ein Y, so wurden alle Nullen bereits in X–Symbole umgewandelt. Wurden auch alle Einsen in Y–Symbole geändert, dann lag eine Eingabe der Form 0^n1^n vor, und M sollte akzeptieren. M wechselt daher in den Zustand z_3 und bewegt sich über alle Y–Symbole hinweg nach rechts. Handelt es sich bei dem ersten Zeichen ungleich Y, auf das M trifft, um ein Leerzeichen, dann lag tatsächlich eine identische Anzahl von Nullen und Einsen vor, und M geht in dem Endzustand z_4 über. Trifft M jedoch auf eine weitere Eins, dann sind zu viele Einsen vorhanden, und M verwirft. Trifft M auf eine Null, dann hatte die Eingabe das falsche Format, und M verwirft ebenfalls.

Aufgabe 3: Die Turingmaschine $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_2\})$ mit nachstehender Turingtafel leistet das Gewünschte:

	a	b	$\Box$
z_0	(z_0, b, R)	(z_0, a, R)	$(z_1, \Box, L)$
z_1	(z_1, a, L)	(z_1, b, L)	$(z_2, \Box, R)$
z_2	–	–	–

Der Kopf von M bewegt sich in z_0 nach rechts bis zum Ende der Eingabe und ersetzt dabei jedes a durch ein b und umgekehrt. Nun steht das gewünschte Ergebnis bereits auf dem Band. In z_1 bewegt sich der Kopf nach links zurück, und M wechselt abschließend in den Endzustand.

Aufgabe 4: Die nachstehende DTM $M = (\{z_0, z_1, \ldots, z_5\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_5\})$ arbeitet nach dem folgenden Prinzip. Der Kopf bewegt sich über die Eingabe nach rechts, bis er auf ein a trifft, welches von einem b gefolgt wird. In diesem Fall tauscht M beide Zeichen aus, bewegt den Kopf zurück nach links und beginnt von vorn. Auf diese Weise wandern mit der Zeit alle b's nach links und alle a's nach rechts. Zum Schluss werden dann alle a's am rechten Ende gelöscht.

Phase 1: Der Kopf bewegt sich nach rechts, bis er auf ein a stösst (falls kein a mehr vorhanden ist, geht M in Phase 4 über):

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &:= (z_1, a, R) \\ \delta(z_0, b) &:= (z_0, b, R) \\ \delta(z_0, \Box) &:= (z_4, \Box, L) \end{aligned}$$

Phase 2: Ein a wurde gefunden, und es wird nun nach einem b gesucht (falls kein b mehr vorhanden ist, geht M in Phase 4 über):

$$\begin{aligned} \delta(z_1, a) &:= (z_1, a, R) \\ \delta(z_1, b) &:= (z_2, a, L) \\ \delta(z_1, \Box) &:= (z_4, \Box, L) \end{aligned}$$

Phase 3: Das a und das b werden vertauscht, der Kopf wird zurück nach links bewegt, und es geht weiter mit Phase 1:

$$\begin{aligned} \delta(z_2, a) &:= (z_3, b, L) \\ \delta(z_3, a) &:= (z_3, a, L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(z_3, b) &:= (z_3, b, L)\\ \delta(z_3, \Box) &:= (z_0, \Box, R)\end{aligned}$$

Phase 4: Alle evtl. vorhandenen a's am Ende des Eingabewortes werden gelöscht, und der Kopf wird unter dem ersten Symbol des Ergebnisses positioniert:

$$\begin{aligned}\delta(z_4, a) &:= (z_4, \Box, L)\\ \delta(z_4, b) &:= (z_4, b, L)\\ \delta(z_4, \Box) &:= (z_5, \Box, R)\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Sei $M = (\{z_0, \ldots, z_6\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_6\})$ eine DTM mit folgender Turingtafel:

	a	b	$\Box$
z_0	$(z_1, \Box, R)$	$(z_2, \Box, R)$	$(z_6, \Box, N)$
z_1	(z_1, a, R)	(z_1, b, R)	$(z_3, \Box, L)$
z_2	(z_2, a, R)	(z_2, b, R)	$(z_4, \Box, L)$
z_3	$(z_5, \Box, L)$	$-$	$(z_6, \Box, N)$
z_4	$-$	$(z_5, \Box, L)$	$(z_6, \Box, N)$
z_5	(z_5, a, L)	(z_5, b, L)	$(z_0, \Box, R)$
z_6	$-$	$-$	$-$

M versucht prinzipiell, jeweils am Anfang und danach am Ende der Eingabe das gleiche Symbol mit einem Blank zu überschreiben. Dies führt sie solange aus, bis sie die Eingabe komplett gelöscht hat.

Im Zustand z_0 überschreibt M dazu das erste Zeichen mit einem Blank und bewegt den Kopf nach rechts. Je nachdem, ob sie ein a oder b überschrieben hat, vollzieht sie die Rechtsbewegung in z_1 oder z_2. Am Ende angekommen bewegt sie den Kopf auf das letzte Zeichen zurück und befindet sich danach in z_3 bzw. z_4. Dort erwartet sie dann das gleiche Zeichen, welches sie am Anfang überschrieben hat, also ein a in z_3 bzw. ein b in z_4. Es ist auch in Ordnung, wenn M jeweils nur noch ein Blank auf dem Band vorfindet — in diesem Fall war die Eingabe ein Palindrom ungerader Länge, und M hatte zuvor in z_0 das letzte Zeichen in der Mitte überschrieben. Ansonsten bewegt M den Kopf in z_5 nach links zurück, und das Spiel beginnt in z_0 von vorne.

Auch in z_0 kann M natürlich ein Blank vorfinden — in diesem Fall war die Eingabe ein Palindrom gerader Länge, und M akzeptiert ebenfalls.

Aufgabe 6: Eine passende NTM $M = (\{z_0, z_1\}, \{\star\}, \{\star, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_1\})$ kommt mit nur zwei Zuständen aus. Sie besitzt beim Lesen eines Blanks jedesmal die Möglichkeit, nach links oder rechts weiter zu suchen:

$$\delta(z_0, \Box) := \{(z_0, \Box, L), (z_0, \Box, R)\}$$

Beim Auffinden des Symbols $\star$ bleibt sie dann darunter stehen:

$$\delta(z_0, \star) := \{(z_1, \star, N)\}$$

Mit diesen Übergängen wird M das Symbol sicher finden, denn sie braucht nur jedesmal die richtige Suchrichtung zu „raten“. Eine DTM M' hat es da etwas schwieriger, denn wenn man deterministisch eine Richtung festlegen würde und es sich dabei um die falsche handeln sollte, so würde M' das Symbol niemals finden.

Trotzdem kann auch eine DTM gezielt nach dem Symbol suchen, indem sie nämlich das Band gleichzeitig nach links und rechts abtastet. Dazu werden zwei Symbole X und Y benutzt, die den linken und rechten Rand des schon abgesuchten Bereichs markieren. Anfangs bewegt sich die DTM z.B. ein Feld nach links und hinterlässt dort ein X. Dann bewegt sie sich zwei Felder nach rechts und hinterlässt dort ein Y. Dann bewegt sich die DTM wieder nach links und schiebt das X um eine Position weiter nach links. Anschließend bewegt sie sich wieder nach rechts und schiebt das Y um eine Position weiter nach rechts, usw. Diese Hin– und Her–Bewegungen wiederholt sie solange, bis sie auf das Zeichen $\star$ trifft.