Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Sommersemester 2015

Musterlösung für die Klausur: Mathematik 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (7 Punkte) GGT

$$\begin{aligned} 234 &= 1 \cdot 182 + 52 \\ 182 &= 3 \cdot 52 + 26 \\ 52 &= 2 \cdot 26 + 0. \end{aligned}$$

Wenn der Rest gleich 0 ist, endet der Euklidsche Algorithmus. Es gilt:

$$\mathrm{ggT}(234, 182) = 26.$$

Aufgabe 2: (14 = 7 + 7 Punkte) Äquivalenzrelationen

a) Die Relation R_1 ist reflexiv, da für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$(i, i) \in R_1$$

gilt.

Die Relation R_1 ist nicht transitiv. Wir zeigen dies durch ein Gegenbeispiel:

$$(1, 2) \in R_1, (2, 0) \in R_2, \text{ aber } (1, 0) \notin R_2.$$

Die Relation R_1 ist auch nicht symmetrisch, denn es gilt z.B. $(0, 1) \in R_1$, aber $(1, 0) \notin R_1$. Es handelt sich also nicht um eine Äquivalenzrelation.

b) Bei der Relation R_2 gibt es genau 3 Äquivalenzklassen:

$$\{0, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{5\}.$$

Innerhalb einer Äquivalenzklassen steht jedes Element zu jedem in Relation und zwischen zwei verschiedenen Äquivalenzklassen gibt es keine Elemente, die zu einander in Relation stehen.

Aufgabe 3: (9 = 3 + 3 + 3 Punkte) Surjektiv, injektiv, bijektiv

a) f_1 ist injektiv, da alle 3 Elemente aus dem Definitionsbereich D_1 auf 3 verschiedene Elemente abgebildet werden. f_1 ist nicht surjektiv, da es kein $x \in D_1$ gibt, für das $f_1(x) = 4$ gilt. Die 4 hat also kein Urbild. Insgesamt ist f_1 somit auch nicht bijektiv.

b) f_2 ist injektiv, das alle vier Elemente aus dem Definitionsbereich D_2 auf vier verschiedene Elemente aus dem Bildbereich abgebildet werden. Ferner ist f_2 auch surjektiv, da alle vier Elemente aus dem Bildbereich B_2 ein Urbild besitzen. Insgesamt ist f_2 also auch bijektiv.

c) f_3 ist nicht injektiv. Wir geben ein Gegenbeispiel an: $f_3(1) = f_3(4) = 1$. Da 1 und 4 verschieden sind, ist die Injektivität nicht erfüllt. f_3 ist surjektiv, da alle 3 Elemente aus B_3 Urbilder in D_1 besitzen. Insgesamt ist f_3 somit also nicht bijektiv.

Aufgabe 4: (12 = 6 + 6 Punkte) Hornerschema

a) Auswertung des Polynoms $p(x)$ an der Stelle 2:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 5 & 9 & 17 \\ & 8 & 20 & 50 & 118 \\ \hline 4 & 10 & 25 & 59 & 135 \end{array}$$

Es gilt: $p(2) = 135$.

b)

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 2 & 4 & 10 & 22 & 44 & 90 & 182 & 366 & 732 & 1464 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 11 & 22 & 45 & 91 & 183 & 366 & 732 & 1465 \end{array}$$

Der Dezimalwert von 10110111001 ist 1465.

Aufgabe 5: (15 = 12 + 3 Punkte) LGS

Wir notieren die Koeffizienten des LGS und Lösen es mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus:

a)

$$\begin{array}{l|rrrr|r} & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ & 1 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ & 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ & -1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ \hline I & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ II - I & 0 & 2 & -3 & -1 & 3 \\ III - 2I & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ IV + I & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ \hline I & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ III & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ II - 3III & 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \\ IV - III & 0 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ \hline I + II & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ II & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -(1/5)II & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline I - III & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ II - III & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ III & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

Aus der Form nach dem letzten Bearbeitungsschritt können wir die Lösung direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Der Rang des LGS ist 3, da genau drei Schritte des Gauß-Jordan-Verfahren durchgeführt werden können, bzw. drei linear unabhängige Zeilen übrig bleiben.

Aufgabe 6: (17 = 8 + 9) Rechnen mit Matrizen

a) Es können genau drei Produkte gebildte werden:

$$A \cdot B,\ B \cdot C,\ C \cdot A.$$

Hier stimmen die Länge der Zeilen der ersten Matrix mit der Länge der Spalten der zweiten Matrix überein. Die übrigen Kombinationen A mit C, B mit A und C mit B können nicht miteinander multipliziert werden, da die Länge der Zeilen der ersten Matrix nicht mit der Länge der Spalten der zweiten Matrix übereinstimmt.

$$AB := \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 22 & 5 \\ -11 & 25 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}, BC := \begin{pmatrix} 19 & 26 & 33 & 40 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ -18 & -16 & -14 & -12 \end{pmatrix}, CA := \begin{pmatrix} 21 & 28 & -1 \\ 61 & 68 & -9 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{array}{l|rrr|rrr}
 & 6 & 8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 & 4 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
III & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
I - 6III & 0 & -4 & -3 & 1 & 0 & -6 \\
II - 4III & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -4 \\
\hline
I & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
(-1)III & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\
II - 4III & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \\
\hline
I - 2II & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -7 \\
II & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\
III & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \\
\hline
I + II & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\
II - III & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\
III & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10
\end{array}$$

Die inverse Matrix lautet also:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: (16 = 8 + 8 Punkte) Eigenwerte, Eigenvektoren

a) Wir betrachten den erstn Eigenwerte der Matrix $\lambda_1 = 1$ und berechnen die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert. Dazu bestrachten wir das entsprechende, homogene LGS:

$$
\begin{array}{lccr|c}
 & 3 & 0 & -2 & 0 \\
 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
\hline
1/3\mathrm{I} & 1 & 0 & -2/3 & 0 \\
\mathrm{II} & 1 & 2 & -2 & 0 \\
\mathrm{III\text{-}II} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\mathrm{I} & 1 & 0 & -2/3 & 0 \\
\mathrm{II\text{-}I} & 0 & 2 & -4/3 & 0 \\
\hline
\mathrm{I} & 1 & 0 & -2/3 & 0 \\
1/2\mathrm{II} & 0 & 1 & -2/3 & 0
\end{array}
$$

Also ist

$$
\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

ein Eigenvektor und jedes (nicht-triviale) Vielfache davon.

Analog behandeln wir $\lambda_2 = 2$:

$$
\begin{array}{lccr|c}
 & 2 & 0 & -2 & 0 \\
 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
 & 1 & 2 & -3 & 0 \\
\hline
1/2\mathrm{I} & 1 & 0 & -1 & 0 \\
\mathrm{II} & 1 & 1 & -2 & 0 \\
\mathrm{III} & 1 & 2 & -3 & 0 \\
\hline\hline
\mathrm{I} & 1 & 0 & -1 & 0 \\
\mathrm{II\text{-}I} & 0 & 1 & -1 & 0 \\
\mathrm{III\text{-}I} & 0 & 2 & -2 & 0 \\
\hline
\mathrm{I} & 1 & 0 & -1 & 0 \\
\mathrm{II} & 0 & 1 & -1 & 0 \\
\mathrm{III\text{-}2I} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Also ist

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

ein Eigenvektor und jedes (nicht-triviale) Vielfache davon.

Für $\lambda_3 = 3$ ergibt sich:

$$
\begin{array}{lccr|c}
 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
 & 1 & 2 & -4 & 0 \\
\hline
\mathrm{I} & 1 & 0 & -2 & 0 \\
\mathrm{III\text{-}I} & 0 & 2 & -2 & 0 \\
\mathrm{II\text{-}I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\mathrm{I} & 1 & 0 & -2 & 0 \\
1/2\mathrm{II} & 0 & 1 & -1 & 0
\end{array}
$$

Also ist

$$
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

ein Eigenvektor und jedes (nicht-triviale) Vielfache davon.

b) Das charakteristische Polynom der Matrix lautet:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda)-2\right)$$
$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 1\right) = 0.$$

Somit ist der erste Eigenwert $\lambda_1 = 1$ schon gefunden. Für die beiden anderen Eigenwerte ergibt die Formel für quadratische Gleichungen:

$$\lambda_2 = 2 + \sqrt{3},\ \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}.$$