Lokale Operatoren

- Die bisher besprochenen Punktoperationen manipulieren Grauwerte, ohne benachbarte Pixel zu betrachten.
- Die Anordnung der Grauwerte zueinander geht dabei verloren.
- Andererseits ist die Anordnung der Grauwerte in vielen Fällen wichtig, z.B. um Kantenpixel im Bild (=Stellen mit starker Grauwertveränderung) zu berechnen.

Beispiel:

Grauwertbild

Gradientenbetragsbild

Astrid Laubenheimer
Version 1.0

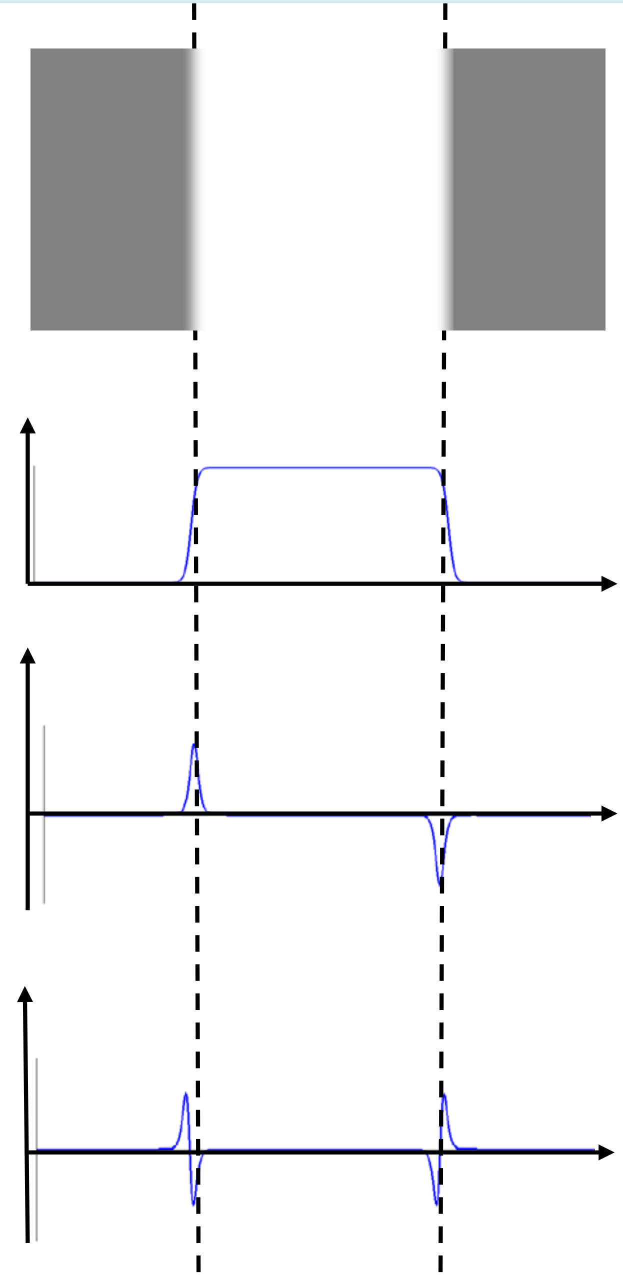
1. und 2. Ableitung

Grauwertbild

Grauwertprofil

1. Ableitung: Die erste Ableitung besitzt an starken Grauwert-übergängen **Extremwerte**!

2. Ableitung: Die zweite Ableitung besitzt an starken Grauwert-übergängen **Nulldurchgänge**!



Betrag und Richtung

Betrachten wir vorerst das Bild $I(x,y)$ als kontinuierliche Funktion auf der xy-Ebene:

Dann bilden die **partiellen Ableitungen** in x- und y-Richtung den **Gradienten**

$$\nabla I(x,y) = \left[\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \right]^T$$

oder in Kurzschreibweise $\nabla I = (I_x, I_y)^T$

Manchmal schreiben wir auch $I_x(x,y)$ und $I_y(x,y)$

Dann können wir an jeder Stelle (x,y) des Bildes den Betrag

$$\left|\nabla I\right| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$ Stärke des Grauwertübergangs

und die Richtung des Grauwertübergangs berechnen:

$$\varphi = \arctan \frac{I_y}{I_x}$$ Richtung des Grauwertübergangs

Diskretisierung

Frage: Wie können wir die Gradienten für diskrete Bilder berechnen?

Antwort: Differenzenquotienten in x- und y-Richtung

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \approx \frac{I(x+\Delta x, y) - I(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \approx \frac{I(x, y+\Delta y) - I(x, y-\Delta y)}{2\Delta y}$$

Setze dann $\Delta x = 1$ (also genau ein Pixel), dann ist

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \approx \frac{I(x+1, y) - I(x-1, y)}{2}$$

Diskretisierung in x- und y-Richtung

Wenn wir für die y-Richtung genauso vorgehen, erhalten wir folgende Approximation der partiellen Ableitungen:

$$I_x(x,y) \approx \frac{I(x+1,y) - I(x-1,y)}{2}$$

$$I_y(x,y) \approx \frac{I(x,y+1) - I(x,y-1)}{2}$$

Damit können wir für jedes Pixel den (approximierten) Gradientenbetrag und die (approximierte) Richtung berechnen.

$$\left|\nabla I(x,y)\right| = \sqrt{I_x(x,y)^2 + I_y(x,y)^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{I_y(x,y)}{I_x(x,y)}$$

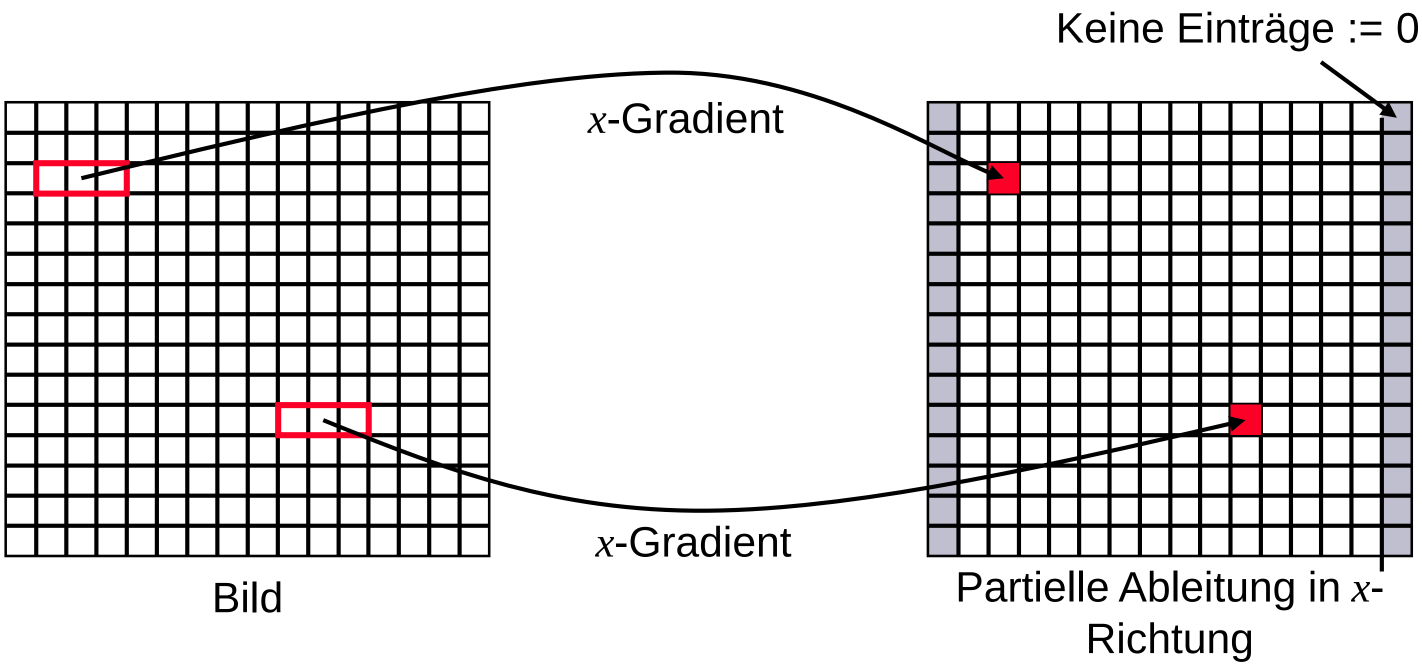
Differenzenquotient als lokaler Operator

Betrachten wir nochmals $I_x(x,y) \approx \dfrac{I(x+1,y) - I(x-1,y)}{2}$

Gewichtete Addition

Wir berechnen also für jedes Pixel (x,y)

$$\tfrac{1}{2} \cdot I(x+1,y) + 0 \cdot I(x,y) - \tfrac{1}{2} \cdot I(x-1,y)$$



Und das können wir abkürzen:

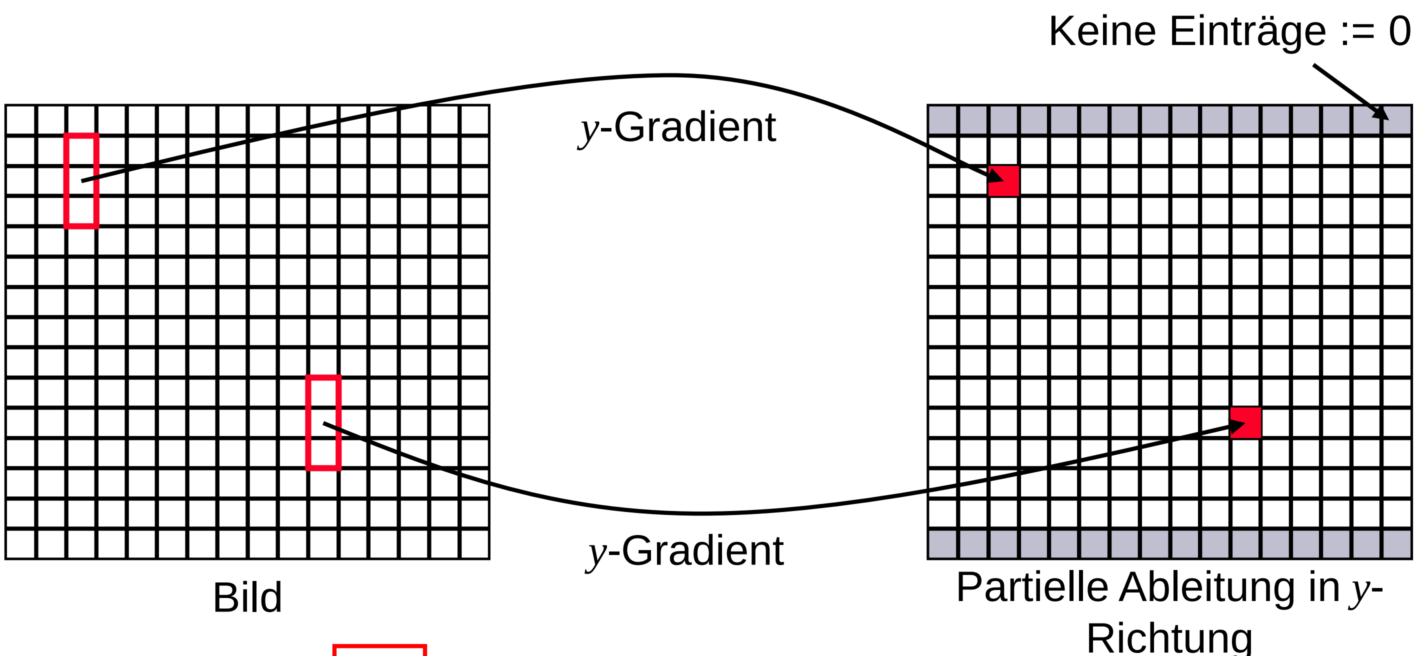
$-\tfrac{1}{2}$	0	$\tfrac{1}{2}$

Operatorfenster (auch: Maske, Filterkern)

…in y-Richtung

Analog für die y-Richtung:

$$\tfrac{1}{2} \cdot I(x, y+1) + 0 \cdot I(x, y) - \tfrac{1}{2} \cdot I(x, y-1)$$

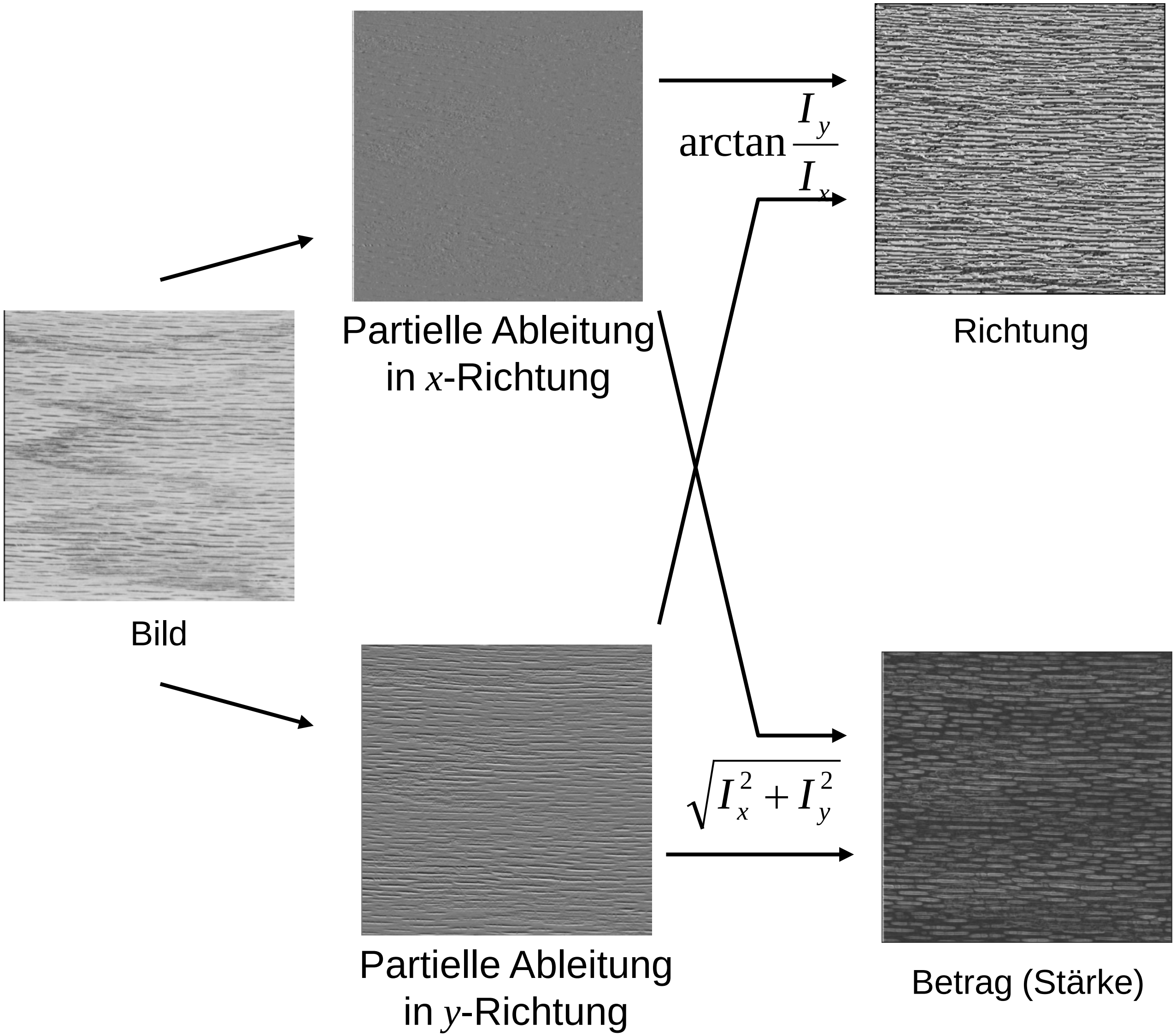


$$\begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} \\ 0 \\ \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

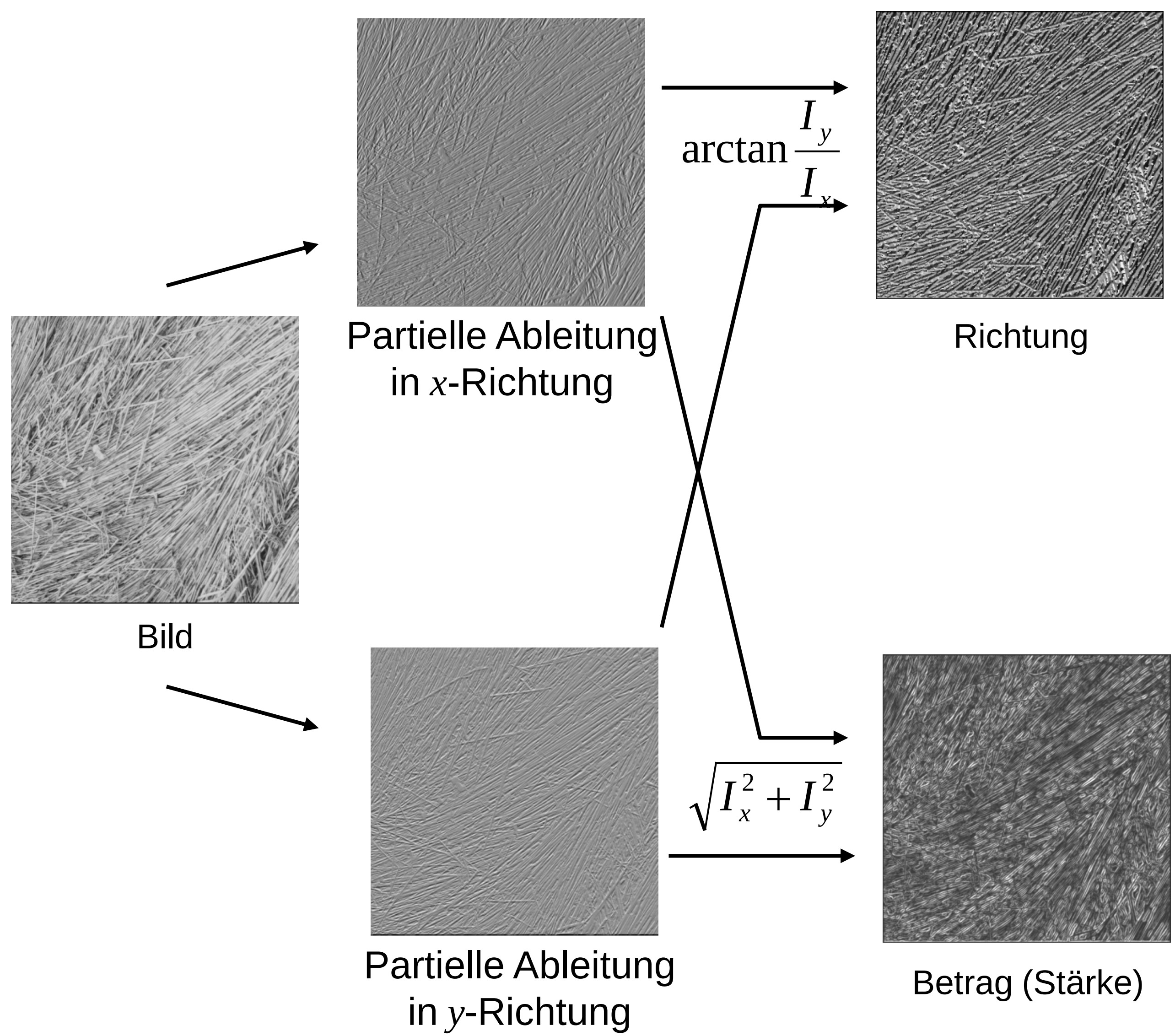
Gewichtete Addition spaltenweise…

Astrid Laubenheimer

Beispiel Buchenholz



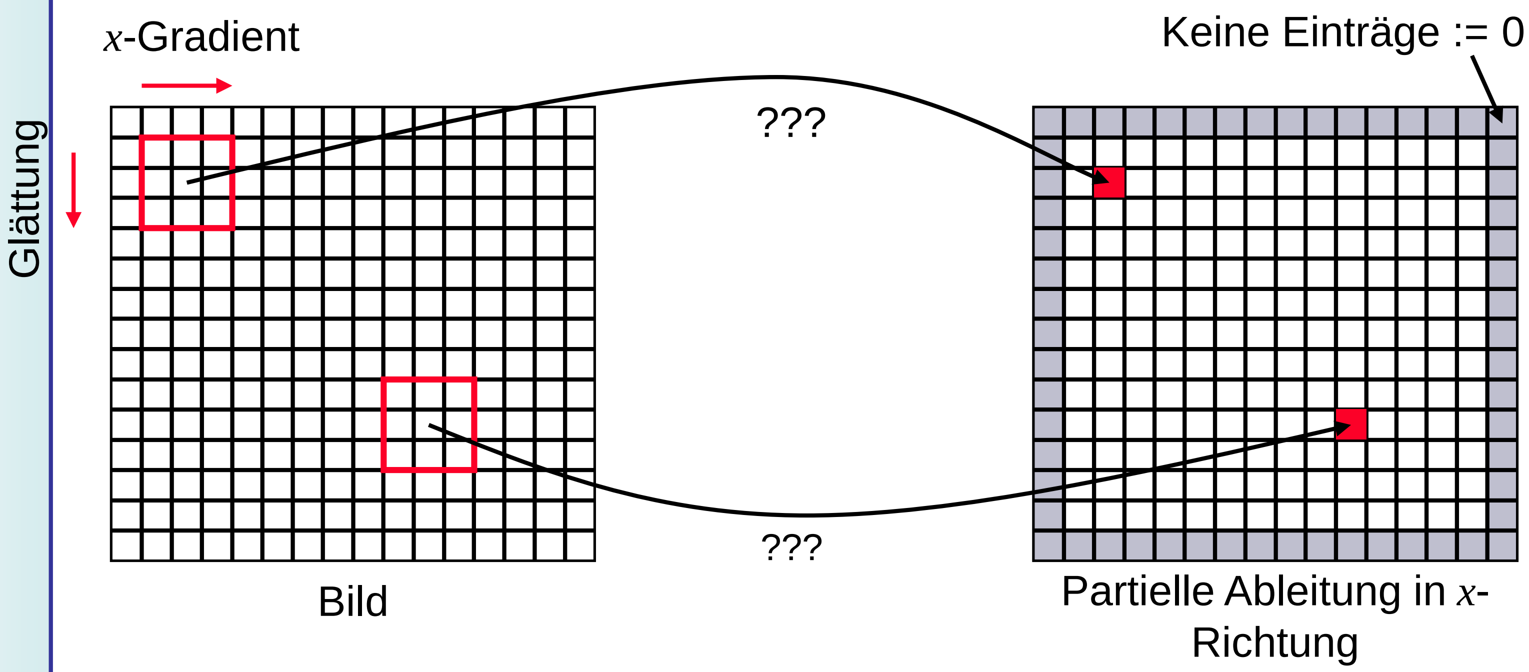
Beispiel Stroh



Zweidimensionale gewichtete Addition

Problem: Rauschanfälligkeit

Idee: Differenzenquotient in eine Richtung berechnen, Mitteln (=Glätten) in die andere Richtung



Klassische Gradientenoperatoren

	x-Gradient	y-Gradient
Prewitt-Operator (Mittelwert-Differenz-Operator)	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Sobel-Operator	$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

	Diagonale 1	Diagonale 2
Roberts Cross	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Beispiel: Mittelwertfilter

Die gewichtete Addition mit dem Operator

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ \hline 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ \hline 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ \hline \end{array} = 1/9 \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

erzeugt eine Glättung des Bilds (=**Glättungsfilter**)

Beispiel: **Median** vs. **Mittelwertfilter**

Eindimensional aber viel allgemeiner…

Sei I eine diskrete Funktion (z.B. ein einzeiliges Bild)

$$I : \mathbb{Z} \to D$$

Ferner sei $M = \{-n,\ldots,n\} \subset \mathbb{Z}$ eine Menge von $m=2n+1$ ganzen Zahlen und K eine ebenfalls diskrete Funktion in die reellen Zahlen

$$K : M \to \mathbb{R}$$

Dann heißt die Operation

$$(I \otimes K)(x) = \sum_{i=-n}^{n} I(x-i)K(i) \quad x \in \mathbb{Z}$$

Faltung (engl. convolution) von I mit der **Kernfunktion** K (kurz: **Kern**, engl: kernel).

Bemerkung: Bei der Faltung wird I zunächst gespiegelt und dann die Grauwerte gewichtet aufaddiert. Die Gewichte sind gerade die Funktionswerte des Kerns.

Gradientenberechnung als Faltung…

Die Berechnung des Gradienten in x-Richtung ist nichts anderes als eine Faltung der einzelnen Bildzeilen mit der Kernfunktion

$$K : \{-1,0,1\} \to \mathbb{R}$$

mit

$$K(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{für } x = -1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1/2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

oder symbolisch

$$\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boxed{\tfrac{1}{2}} & \boxed{0} & \boxed{-\tfrac{1}{2}} \end{array}$$

wird angewandt auf die gespiegelte Zeile

Zur Erinnerung: Unser Operatorfenster lautete

$$\boxed{-\tfrac{1}{2}}\ \boxed{0}\ \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

wird angewandt auf die ungespiegelte Zeile

Gewichtete Addition und Faltung

Fassen wir zusammen:

- Gewichtete Additionen von Pixeln einer Zeile können wir als Faltung schreiben. Wir müssen nur das Operatorfenster spiegeln und erhalten damit den Kern.
- Umgekehrt können wir eine Faltung durchführen, wie in der Herleitung der Ableitung in x-Richtung gezeigt wurde. Wir müssen nur den Kern spiegeln und erhalten damit das Operatorfenster.
- Das geht natürlich alles auch spaltenweise…
- und zweidimensional…

Ab sofort identifizieren wir die gewichtete Addition mit der Faltung!!!

Zweidimensionale Faltung

Sei I eine diskrete Funktion (z.B. ein Bild)

$$I : \mathbb{Z}^2 \to D$$

Ferner sei $M = \{-m,\ldots,m\} \text{x} \{-n,\ldots,n\} \subset \mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z}$ und K eine ebenfalls diskrete Funktion in die reellen Zahlen

$$K : M \to \mathbb{R}$$

Dann heißt die Operation

$$(I \otimes K)(x, y) = \sum_{j=-n}^{n} \sum_{i=-m}^{m} I(x-i, y-j) K(i, j) \quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

Faltung.

Bemerkung: Diejenigen **Filter**, die sich als Faltung darstellen lassen, sind genau die **linearen Filter**.

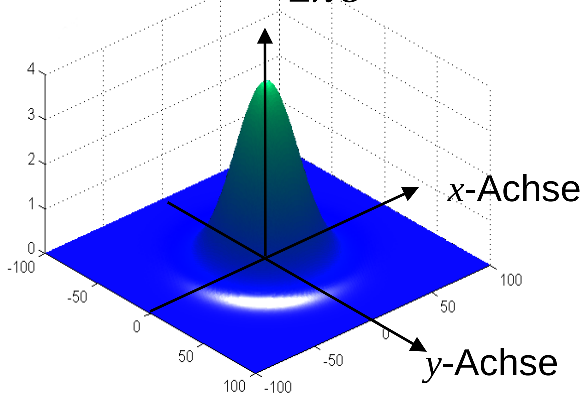
Beispiel: Der Medianfilter ist nicht linear!!!

Funktionen als Filter

Halten wir fest: Die Faltung ist eine universelle Technik. Mit ihr kann man Differenzenquotienten berechnen, Bilder glätten etc.

Beispiel: Die Faltung lässt sich auch auf Funktionen als Kern anwenden, wie z.B. die Gauß'sche Glockenkurve. Die Funktionen müssen aber erst diskretisiert (=**abgetastet** und quantisiert) werden:

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



$$\sigma = 20$$

Abtasten,
ggf. skalieren
und
quantisieren

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

Separierbare Kerne

Der Gaußfilter ist – genau wie der Mittelwert und der Medianfilter – ein Glättungsfilter.

Er hat eine besondere Eigenschaft, die **Separierbarkeit**.

Ein Kern heißt **separierbar**, wenn er in einen eindimensionalen horizontalen und einen eindimensionalen vertikalen Kern zerlegt werden kann.

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ \hline 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ \hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}}$$

pro Bildpunkt:
25 Multiplikationen
24 Additionen

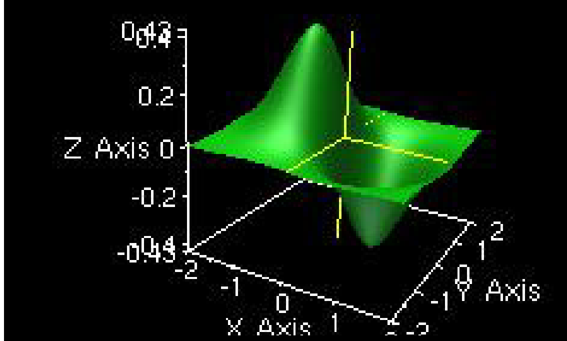
pro Bildpunkt:
10 Multiplikationen
8 Additionen

Ableitungen der Gauß‘schen Glockenkurve

Auch die partiellen Ableitungen der Gauß‘schen Glockenkurve sind separierbare Filter – zur Approximation der partiellen Ableitungen.

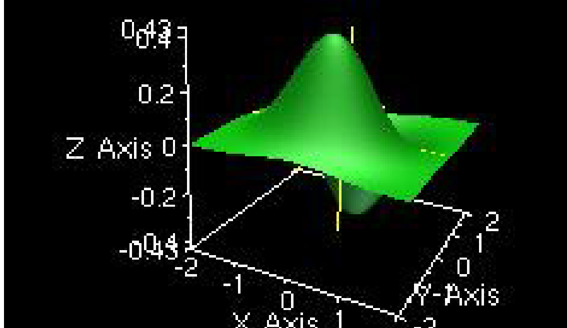
$$G(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)=\frac{-x}{\sigma^2}G(x,y)$$



partielle Ableitung von G nach x

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)=\frac{-y}{\sigma^2}G(x,y)$$



partielle Ableitung von G nach y

Ansätze über die 2. Ableitung

Erinnerung: Die zweite Ableitung steht für die Krümmung einer Funktion.

Wir suchen nach Stellen, an denen die zweite Ableitung einen Nulldurchgang hat.

Hierfür betrachten wir den **Laplace-Operator** (=Spur der Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen):

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

Wieder benötigen wir eine Approximation der Ableitungen für diskrete Funktionen (also z.B. Bilder).

Laplace-Operator

Die zweiten Ableitungen können wie folgt approximiert werden

$$\frac{\partial I^2}{\partial x^2}(x,y) \approx I(x-1,y) - 2I(x,y) + I(x+1,y)$$

$$\frac{\partial I^2}{\partial y^2}(x,y) \approx I(x,y-1) - 2I(x,y) + I(x,y+1)$$

Diese Approximationen liefern den folgenden Kern für den Laplace-Operator:

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Operator ist nicht separabel, kann aber wie folgt berechnet werden:

$$\nabla^2 I = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes I + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \otimes I$$

bildpunktweise

Mexican Hat

Problem: Die 2. Ableitung ist noch rauschanfälliger als die erste Ableitung.

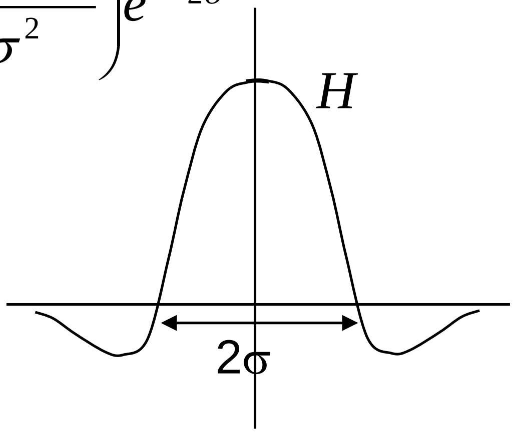
Lösung: Glätte das Bild I zunächst mit dem Gaußfilter G, wende dann den Laplace-Operator an.

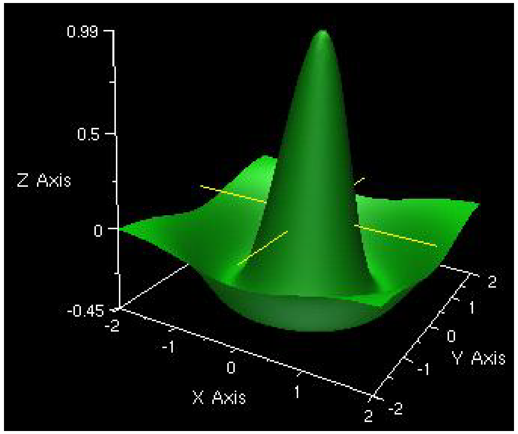
$$\nabla^2 (G \otimes I)(x,y) = (\underbrace{\nabla^2 G} \otimes I)(x,y)$$

Laplacian of Gaussian- (LoG) oder
Hildreth-Marr- oder
Mexican Hat-Operator

$$H = -\nabla^2 G$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sigma^4}\left(2 - \frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

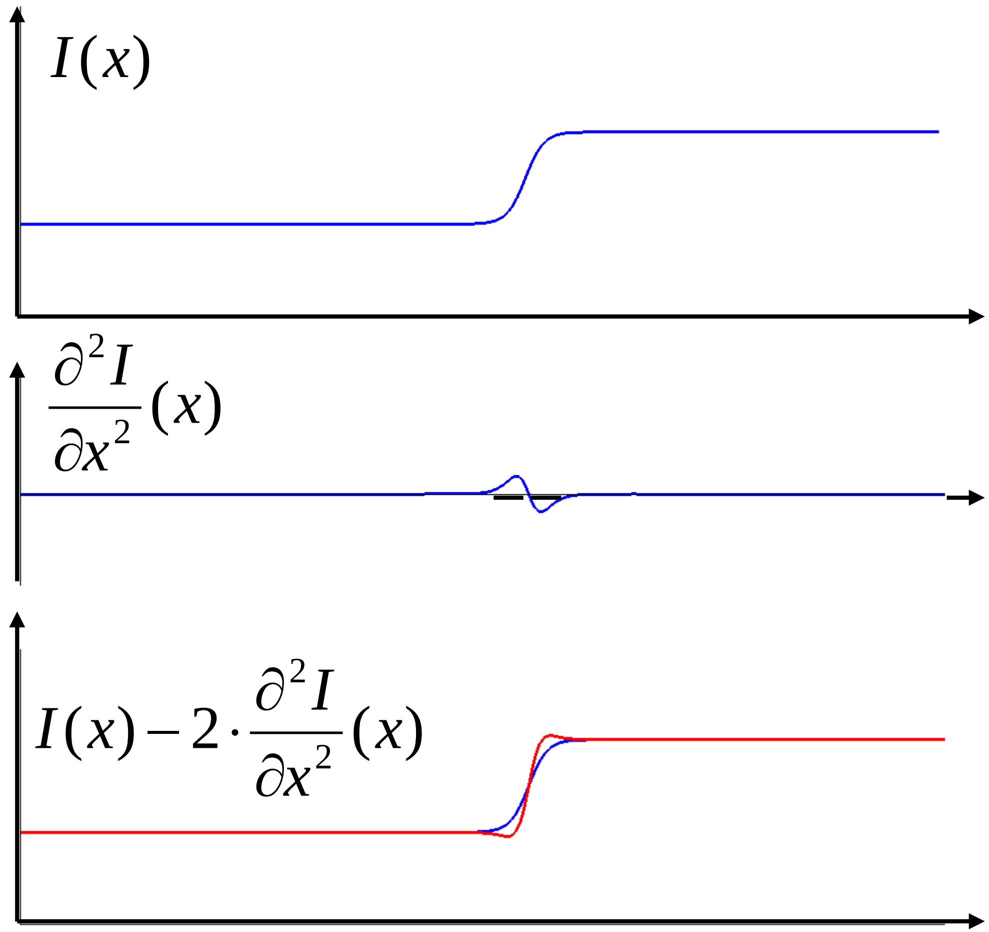




Bildschärfung mit Laplace

Wenn wir die zweite Ableitung (gewichtet mit $\alpha > 0$) von einem Bild abziehen, verstärken sich die Kanten $\Rightarrow$ Bildschärfung

$$I' = I - \alpha \cdot \nabla^2 I$$



Zusammenfassung

Wir haben folgende Operatoren kennen gelernt:

- Approximation von Gradienten :
  - Mittelwert-Differenz-Operator
  - Sobel-Operator
  - Roberts-Cross
  - Ableitungen der Gauß'schen Glockenkurve
- Approximation der 2. Ableitung:
  - Laplace-Operator
  - Mexican-Hat-Operator
- Glättungsfilter:
  - Mittelwert-Operator
  - Median-Operator
  - Gauß-Operator
- Schärfungsfilter:
  - Subtaktion und Laplace-Operator

Morphologie

Todo: Hier Kapitel 10…

Astrid Laubenheimer