IWI Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Prof. Dr. Frank Schaefer

Wintersemester 2015/2016

Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

Klausur Mathematik 1

(90 Punkte, 90 Minuten)

Aufgabe 1: (3 + 3 + 4 = 10 Punkte) Permutationen

Gegeben ist die Permuation:

$$p := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Permutation p in der Zyklenschreibweise an.

b) Bestimmen Sie p^{-1}.

c) Bestimmen Sie $p \circ p \circ p$.

Aufgabe 2: (4+4+4=12 Punkte), Kombinatorik

a) Listen Sie sämtliche Variationen **ohne** Wiederholung von vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ zur zweiten Klasse (d.h. zwei Elemente werden ausgewählt) auf.

b) Listen Sie sämtliche Variationen **mit** Wiederholung von vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ zur zweiten Klasse auf.

c) In einem Masterstudiengang müssen drei Wahlfächer belegt werden. Es stehen dazu 7 verschiedene Kurse zur Auswahl. Wieviele Möglichkeiten gibt es die drei Wahlfächer unter den 7 angebotenen Kursen zu wählen? Geben Sie neben Ihrer Lösung auch die Formel zur Berechnung der Anzahl Möglichkeiten mit an!

Aufgabe 3: (5 + 8 = 13 Punkte) Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

a) Bei folgenden LGS ist das Gauß-Jordan-Verfahren schon angewendet worden. Geben Sie die Menge aller Lösungen unter Verwendung der Schreibweise mit Vektoren an.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ & x_2 & & + & 4x_4 & + & 9x_5 & = & -7 \\ & & x_3 & - & 3x_4 & + & 8x_5 & = & 9 \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen für das folgende LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ -6x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \end{array}$$

Aufgabe 4: (6 + 6 + 3 = 15 Punkte) Lineare Abhängigkeit

a) Bestimmen Sie für die folgenden drei Vektoren, ob sie linear unabhängig sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Es seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ die Spaltenvektoren der Matrix A aus Teil b). Sind diese vier Vektoren linear abhängig? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 5: (6 + 5 = 11 Punkte) Lineare Abbildungen, Matrizen

a) Betrachten Sie folgende lineare Funktion:

$$f : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 + 2v_3 \\ v_1 + v_2 - v_3 \\ v_1 + v_2 \\ 2v_1 + 3v_2 + 3v_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix A mit

$$A \cdot \vec{v} = f(\vec{v}).$$

b) Es seien f und g lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$. Die Abbildung f ist durch die Matrix A und die Abbildung g durch die Matrix B gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix für die Abbildung $g \circ f$.

Aufgabe 6: (1+4+4+8=17 Punkte) Translation, Rotation

Gegeben ist ein Dreieck mit den drei Eckpunkten $A(2, 3), B(5, 3)$ und $C(2, 7)$. Das Dreieck soll in der Ecke A um 30° gedreht werden. Es gilt $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ und $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Stellen Sie die drei Eckpunkte in homogenen Koordinaten dar.

b) Stellen Sie die Translationsmatrix auf, die zur Beschreibung der gesuchten Rotation als Matrix benötigt wird. Beschreiben Sie kurz, was diese Matrix bewirkt.

c) Stellen Sie die Rotationsmatrix auf, die eine Rotation um 30° um den Ursprung des Koordinatensystems in homogenen Koordinaten beschreibt.

d) Berechnen Sie die Matrix, die die gesuchte Rotation um die Ecke A beschreibt. Lassen Sie dabei die $\sqrt{3}$ einfach stehen und rechnen Sie mit Ausdrücken der Form $a + b\sqrt{3}$.

Aufgabe 7: (12 Punkte) Invertieren von Matrizen

Invertieren Sie folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$