Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Wintersemester 2014/2015

Musterlösung für die Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (10 = 3 + 3 + 2 + 2 Punkte) Surj., inj., Umkehrfunktion

Gegeben ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x &\mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

a) Injektivität: Wir weisen nach, dass aus der Gleichheit der Funktionswerte an zwei Stellen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ die Gleichheit der beiden Stellen $x_1 = x_2$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{x_1+1}{x_1-1} &= \frac{x_2+1}{x_2-1} \qquad \text{mit } x_1, x_2 \neq \tfrac{1}{2} \\ (x_1+1)(x_2-1) &= (x_2+1)(x_1-1) \\ x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 &= x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \\ 2x_2 &= 2x_1 \\ x_2 &= x_1. \end{aligned}$$

Also ist die Funktion injektiv.

b) Für die Surjektivität weisen wir nach, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ein passendes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $f(x) = y$ gibt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+1}{x-1} \\ (x-1)y &= x+1 \\ xy - y &= x+1 \\ xy - x &= y+1 \\ x(y-1) &= y+1 \\ x &= \frac{y+1}{y-1}. \end{aligned}$$

Dabei kann im letzten Schritt durch $y - 1$ geteilt werden, da $y \neq 1$ nach Voraussetzung. Somit ist die Funktion surjektiv.

c) Die Umkehrfunktion für $f(x)$ lautet:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x &\mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

d) Da die Funktion mit ihrer Umkehrfunktion identisch ist, muss der Graph dieser Funktion symmetrisch zur Winkelhalbierenden im ersten Quadrant des Koordinatensystems sein.

Aufgabe 2: (9 = 2 + 3 + 4 Punkte) Restklassenrechnung mit Polynomen

Wir haben in der Vorlesung das Rechnen im Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$ behandelt. Gegeben sind die beiden Polynome:

$$p(x) := x^2 + x + 1, \quad q(x) := x^5 + x^2 + 1.$$

a) $p(x) + q(x) = x^5 + x$.

b) $p(x) \cdot q(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$.

c) Berechnen Sie die Division mit Rest von $q(x)$ dividiert durch $p(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr} x^5 & & & +x^2 & +1 & = (x^2+x+1)(x^3+x^2)+1 \\ x^5 & +x^4 & +x^3 & & & \\ \hline & x^4 & +x^3 & +x^2 & +1 & \\ & x^4 & +x^3 & +x^2 & & \\ \hline & & & & 1 & \end{array}$$

Also gilt: $q(x) = (x^3 + x^2)p(x) + 1$.

Aufgabe 3: (11 = 3 + 2 + 3 + 3 Punkte) Horner-Schema

Gegeben ist das Polynom:

$$p(x) := x^3 - 5x^2 - 23x + 63.$$

a)

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -5 & -23 & 63 \\ & 2 & -6 & -58 \\ \hline 1 & -3 & -29 & 5 \end{array}$$

Also gilt: $p(2) = 5$.

b)

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -5 & -23 & 63 \\ & 7 & 14 & -63 \\ \hline 1 & 2 & -9 & 0 \end{array}$$

Also gilt: $p(7) = 0$, was zu zeigen war.

c) Aus dem Hornerschema aus Teil b) läßt sich aus der letzten Zeile ablesen:

$$p(x)/(x-7) = x^2 + 2x - 9.$$

d) Für die Division mit Rest gilt:

$$p(x) = (x-2)(x^2 - 3x - 29) + 5.$$

Aufgabe 4: (15 = 3 + 6 + 3 + 3 Punkte) Rechnen mit Matrizen

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \\ 13 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Berechnung der inversen Matrix A^{-1}:

$$\begin{array}{l|ccc|ccc}
 & 2 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
III & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\
1/3II & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\
I - 2III & 0 & 0 & -7 & 1 & 0 & -2 \\
\hline
I - 6III_{neu} & 1 & 0 & 0 & 6/7 & 0 & -5/7 \\
II & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\
-1/7III & 0 & 0 & 1 & -1/7 & 0 & 2/7
\end{array}$$

Die inverse Matrix lautet also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6/7 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/7 & 0 & 2/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 18 & 0 & -15 \\ 0 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) $\det(A) = 2 \cdot 3 \cdot 6 + (-15) = 21$ und $\det(B) = 3 - 12 = -9$.

d) $\det(B^{-1}) = -\frac{1}{9}$ nach dem Multiplikationssatz für Determinanten.

Aufgabe 5: (12 = 4 + 8 Punkte) Gruppen und orthogonale Matrizen

a) Eine orthogonale Matrix hatten wir definiert als eine Matrix, die das Skalarprodukt nicht verändert. Bei der Multitplikation von Matrizen A und B berechnen wir eine Matrix, die genau der Hintereinanderausführung der zwei Matrizen A und B entspricht. Wenn A und B das Skalarprodukt jeweils unverändert lassen, muss dies also auch für das Produkt von A und B gelten.

Eine alternative Art der Beweisführung wäre folgende: Wir hatten gezeigt, dass eine Matrix genau dann orthogonal ist, wenn gilt $A^t = A^{-1}$. Angenommen wir haben zwei orthogonale Matrizen A und B. Dann haben sie also beide diese Eigenschaft, dass die transponierte Matrix gleich der inversen Matrix ist. Dann gilt für das Produkt $A \cdot B$:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (AB)^t.$$

(Dabei haben wir die Rechenregeln für inverse und transponierte Matrizen aus der Vorlesung verwendet.) Somit ist gezeigt, dass auch AB eine orthogonale Matrix ist.

b) Wir betrachten die Menge M, die alle orthogonalen (3×3)-Matrizen enthält. Wir müssen die vier Gruppeneigenschaften prüfen.

- Die Multiplikation von orthogonalen Matrizen ist abgeschlossen, da das Produkt nach Teil a) wieder eine orthogonale Matrix ist.
- Die Assoziativität gilt allgemein für Matrizen, also auch hier speziell für orthogonale Matrizen.
- Wir haben in M auch ein neutrales Element, da die Einheitsmatrix auch orthogonal ist, also zu M dazugehört.
- Schliesslich haben wir in der Vorlesung festgestellt, dass für jede orthogonale Matrix $A^t = A^{-1}$ gilt. Also gibt es insbesondere zu jeder Matrix in M eine inverse Matrix. Es bleibt noch zu überlegen, warum die inverse Matrix auch wieder orthogonal ist. Dies könnte man z.B. folgendermaßen zeigen:

$$(A^t\vec{x}) \cdot (A^t\vec{y}) = (A^t\vec{x})^t \cdot (A^t\vec{y}) = (\vec{x}^t A) \cdot (A^t\vec{y}) = \vec{x}\vec{y}.$$

Aufgabe 6: (12) Determinante

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2k \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2k\left(3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k(3-4) + 0 = -2k.$$

Also ist die Determinante der Matrix C nur für $k = 0$ auch gleich 0.

Aufgabe 7: (21 = 5 + 7 + 3 + 3 + 3 Punkte) Eigenwerte, Eigenvektoren

a) Wir berechnen das charakteristische Polynom für die Matrix A:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} &= \\ (3-\lambda)\left((2-\lambda)(6-\lambda) - 5\right) &= \\ (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 8\lambda + 7\right) &= \\ (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-7) &= 0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir drei verschiedene, reelle Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 7.$$

b) Wir berechnen nacheinander für die verschiedene Eigenwerte der Matrix B sämtliche zugehörigen Eigenvektoren. Dazu setzen wir jeweils λ_i in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

ein und lösen das jeweilige, homogene LGS. Für $\lambda_1 = 3$ ergibt sich:

$$\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieses homogenen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle diese Linearkombinationen ($\neq \vec{0}$) sind Eigenvektoren.Wir können den Eigenvektoren auch noch Bezeichnungen geben:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind alle Linearkombinationen ($\neq \vec{0}$) von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ Eigenvektoren.

Analog behandeln wir den Eigenwert $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieses homogenen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Vielfachen des Vektors

$$\vec{v}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\neq \vec{0}$) sind Eigenvektoren.

c) Die Orthgonalität läßt sich am einfachsten mit dem Skalarprodukt prüfen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Damit stehen die $\vec{v}_i$'s paarweise senkrecht aufeinander. Da aber sowohl $\vec{v}_1$ als auch $\vec{v}_2$ senkrecht auf $\vec{v}_3$ stehen, gilt dies auch für jede Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

d) Der Vektor $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist bereits normiert. Die Länge von $\vec{v}_2$ beträgt $\sqrt{2}$.

Also haben wir als normierten Vektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Analog $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) Die Matrix B aus Teil b) kann diagonalisiert werden. Da sie nur zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist dies von den Eigenwerten her nicht selbstverständlich. Aber zu dem doppelten Eigenwert haben wir auch zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden und damit insgesamt drei linear unabhängige Eigenvektoren. Diese können zu einer invertierbaren Transformationsionsmatrix $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ zusammengesetzt werden. (Diese Matrix kann sogar als orthonomale Matrix gewählt werden!)