Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Wintersemester 2014/2015

Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (10 = 3 + 3 + 2 + 2 Punkte) Surj., inj., Umkehrfunktion

Gegeben ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x &\mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ surjektiv ist.

c) Geben Sie die Umkehrfunktion für $f(x)$ an.

d) Welche besondere Eigenschaft besitzt der Graph dieser Funktion?

Aufgabe 2: (9 = 2 + 3 + 4 Punkte) Restklassenrechnung mit Polynomen

Wir haben in der Vorlesung das Rechnen im Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$ behandelt. Gegeben sind die beiden Polynome:

$$p(x) := x^2 + x + 1, \quad q(x) := x^5 + x^2 + 1.$$

a) Berechnen Sie $p(x) + q(x)$ in $\mathbb{F}_2[x]$.

b) Berechnen Sie $p(x) \cdot q(x)$ in $\mathbb{F}_2[x]$.

c) Berechnen Sie die Division mit Rest von $q(x)$ dividiert durch $p(x)$ in $\mathbb{F}_2[x]$.

Aufgabe 3: (11 = 3 + 2 + 3 + 3 Punkte) Horner-Schema

Gegeben ist das Polynom:

$$p(x) := x^3 - 5x^2 - 23x + 63.$$

a) Werten Sie das Polynom an der Stelle $x_0 = 2$ aus.

b) Verifizieren Sie, dass $x_1 = 7$ eine Nullstelle des Polynomes ist.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Horner-Schema aus Teil b) das Polynom

$$p(x)/(x-7).$$

d) Geben Sie das Ergebnis der Division mit Rest $p(x)/(x-2)$ an. Verwenden Sie dabei das Horner-Schemas aus Teil a).

Aufgabe 4: (15 = 3 + 6 + 3 + 3 Punkte) Rechnen mit Matrizen

Gegeben sind die beiden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

a) $A \cdot B$

b) A^{-1}

c) $\det(A)$ und $\det(B)$

d) $\det(B^{-1})$ (ohne B^{-1} explizit auszurechen)

Aufgabe 5: (12 = 4 + 8 Punkte) Gruppen und orthogonale Matrizen

a) Beweisen Sie, dass das Produkt von zwei orthogonalen Matrizen wieder orthogonal ist.

b) Wir betrachten die Menge M, die alle orthogonalen (3×3)-Matrizen enthält. Liefert die Menge M zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 6: (12) Determinante

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix C in Abhängigkeit von k. Für welche k ist die Derminante gleich 0?

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: (21 = 5 + 7 + 3 + 3 + 3 Punkte) Eigenwerte, Eigenvektoren

Wir betrachten noch einmal die beiden Matrizen A und B aus Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte der Matrix A.

b) Die Eigenwerte der Matrix B lauten:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Dabei ist λ_1 ein doppelter Eigenwert. Bestimmen Sie sämtliche(!) Eigenvektoren zu den beiden Eigenwerten.

c) Prüfen Sie, ob die Eigenvektoren aus Teil b) paarweise senkrecht aufeinander stehen.

d) Geben Sie drei (lin. unabh.) normierte Eigenvektoren für die Matrix B an.

e) Kann die Matrix B aus Teil b) diagonalisiert werden? Begründen Sie Ihre Behauptung.