



B: Basis des Zahlensystems

$$0 \leq a_i < B \quad a_i \in N_0 \quad B \in (N > 1)$$

Ganze Zahlen:

$$Z = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i$$

$$Z = a_0 \cdot B^0 + a_1 \cdot B^1 + a_2 \cdot B^2 + \dots + a_{n-1} \cdot B^{n-1}$$

Rationale Zahlen:

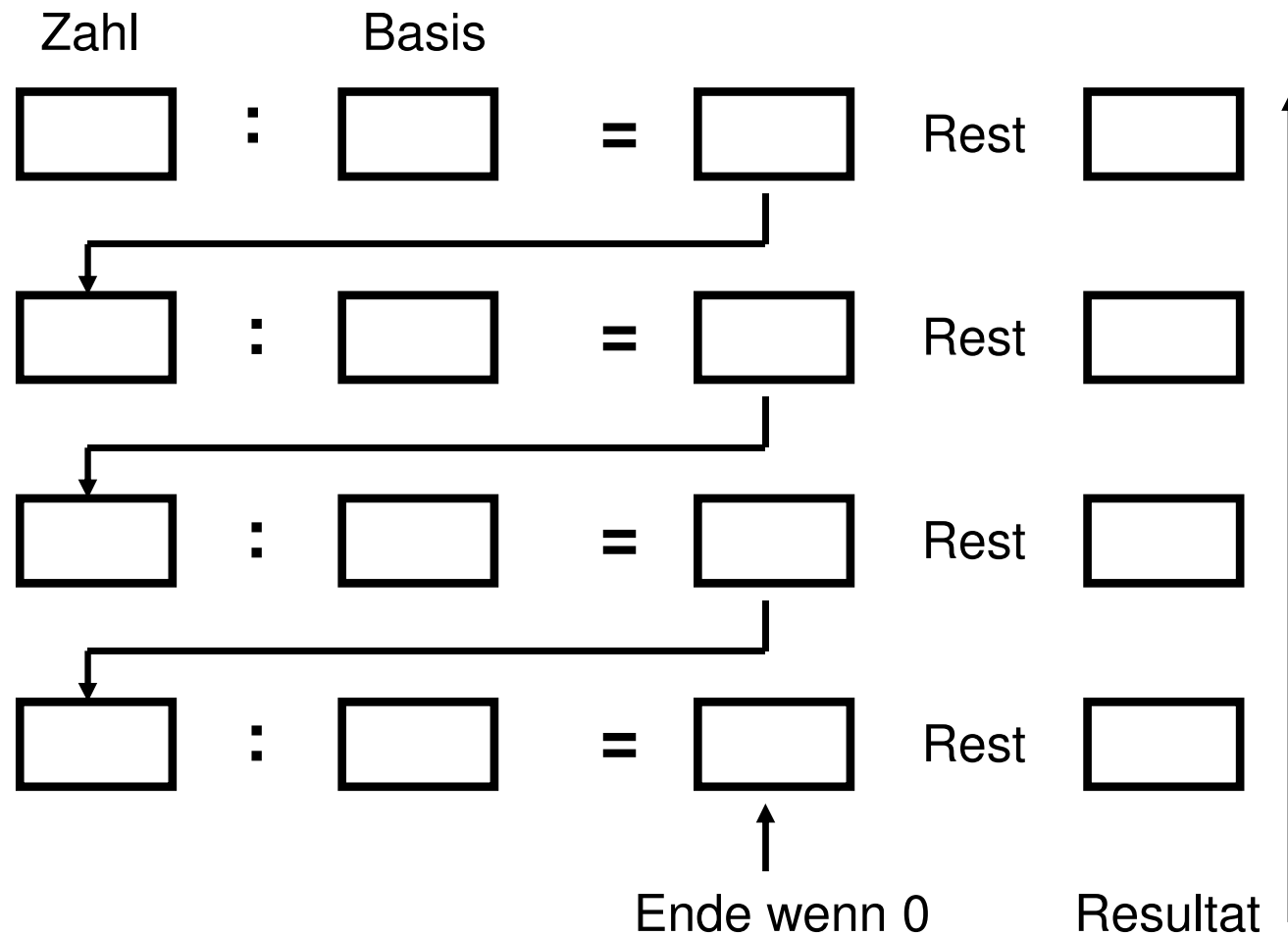
$$Z = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot B^i$$

$$Z = a_{-m} \cdot B^{-m} + \dots + a_0 \cdot B^0 + a_1 \cdot B^1 + a_2 \cdot B^2 + \dots + a_{n-1} \cdot B^{n-1}$$

Wandlung einer Dezimalzahl in ein anderes System



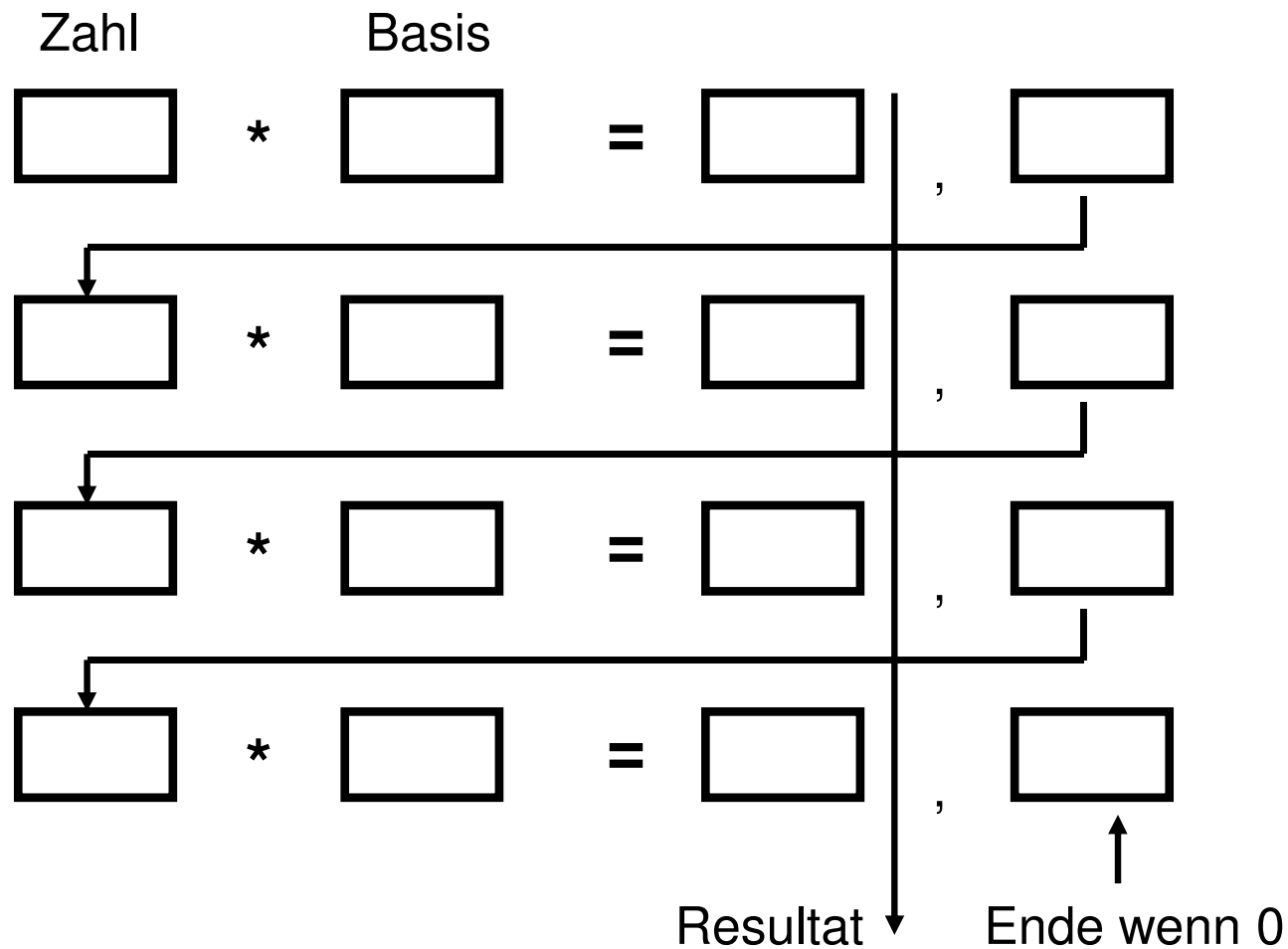
Verfahren für ganzzahligen Anteil



Wandlung einer Dezimalzahl in ein anderes System



Verfahren für gebrochenen Anteil





Oktal-Ziffern (2->8)

000	=	0
001	=	1
010	=	2
011	=	3
100	=	4
101	=	5
110	=	6
111	=	7

Hex-Ziffern (2->16)

0000	=	0
0001	=	1
0010	=	2
0011	=	3
0100	=	4
0101	=	5
0110	=	6
0111	=	7
1000	=	8
1001	=	9
1010	=	A
1011	=	B
1100	=	C
1101	=	D
1110	=	E
1111	=	F



Tabelle der Zweierpotenzen

n	2^n	2^{-n}
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625
5	32	0,03125
6	64	0,015625
7	128	0,0078125
8	256	0,00390625
9	512	0,001953125
10	1.024 = 1K	0,0009765625
11	2.048 = 2K	
12	4.096 = 4K	
13	8.192 = 8K	
14	16.384 = 16K	
15	32.768 = 32K	
16	65.536 = 64K	
17	131.072 = 128K	
18	262.144 = 256K	
19	524.288 = 512K	
20	1.048.576 = 1M	

Gängige Abkürzungen:

$10^3 = 1\text{k}$ (Kilo)
 $10^6 = 1\text{M}$ (Mega)
 $10^9 = 1\text{G}$ (Giga)
 $10^{12} = 1\text{T}$ (Tera)
 $10^{15} = 1\text{P}$ (Peta)
 $10^{18} = 1\text{E}$ (Exa)
 $10^{21} = 1\text{Z}$ (Zetta)
 $10^{24} = 1\text{Y}$ (Yotta)

$10^{-3} = 1\text{m}$ (Milli)
 $10^{-6} = 1\mu$ (Micro)
 $10^{-9} = 1\text{n}$ (Nano)
 $10^{-12} = 1\text{p}$ (Pico)
 $10^{-15} = 1\text{f}$ (Femto)
 $10^{-18} = 1\text{a}$ (Atto)
 $10^{-21} = 1\text{z}$ (Zepto)
 $10^{-24} = 1\text{y}$ (Yokto)

$2^{10} = 1\text{Ki}$ (Kibi)
 $2^{20} = 1\text{Mi}$ (Mebi)
 $2^{30} = 1\text{Gi}$ (Gibi)
 $2^{40} = 1\text{Ti}$ (Tebi)
 $2^{50} = 1\text{Pi}$ (Pebi)
 $2^{60} = 1\text{Ei}$ (Exbi)
 $2^{70} = 1\text{Zi}$ (Zebi)
 $2^{80} = 1\text{Yi}$ (Yobi)

2^{-10}
 2^{-20}
 2^{-30}
 2^{-40}
 2^{-50}
 2^{-60}
 2^{-70}
 2^{-80}



<i>Sprache</i>	<i>Dual</i>	<i>Oktal</i>	<i>Hexadezimal</i>
Zahlen	1011 0111 ₂	267 ₈	B7 ₁₆
Assembler	1011_0111B	267Q	0B7H
VHDL Variante 1	2#1011_0111#	8#267#	16#B7#
VHDL Variante 2	B"1011_0111"		X"B7"
C		0267	0xB7



3 Bit

000	=	0
001	=	1
010	=	2
011	=	3
100	=	4
101	=	5
110	=	6
111	=	7

8 Bit

0000	0000	=	0
0000	0001	=	1
0000	0010	=	2
0000	0011	=	3
0000	0100	=	4
0000	0101	=	5
0000	0110	=	6
0000	0111	=	7



4 Bit

1000	=	-0
1001	=	-1
1010	=	-2
1011	=	-3
1100	=	-4
1101	=	-5
1110	=	-6
1111	=	-7

8 Bit

1000 0000	=	-0
1000 0001	=	-1
1000 0010	=	-2
1000 0011	=	-3
1000 0100	=	-4
1000 0101	=	-5
1000 0110	=	-6
1000 0111	=	-7



1. Die Darstellung negativer Zahlen verändert sich bei Bereichserweiterungen:

- 5 als 4-Bit Zahl = 1101
- 5 als 1-Byte Zahl = 1000 0101
- 5 als 2-Byte Zahl = 1000 0000 0000 0101

2. Die Addition einer positiven und einer negativen Zahl funktioniert anders als üblich:

- 5	1000 0101	
+ 12	+ 0000 1100	
-----	-----	
7	+ 0000 0111	???

3. Null hat zwei verschiedene Darstellungen:

1000 0000 = - 0
0000 0000 = +0



Ziel: Subtraktion durch Addition des Komplements

Komplementbildung:

- Erweiterung einer n-stellige Zahl ohne VZ zu einer n+1-stelligen Zahl mit VZ
- Ergänzung zu B^{n+1}

Weg für Addition und Subtraktion:

- Positive Zahlen um VZ-Stelle mit Null erweitern
- Negative Zahlen komplementieren
- Normale Addition durchführen
- Überlauf auf Stelle n+2 ignorieren
- Negative Zahlen ggf. komplementieren



**Überlauf falls, VZ der beiden zu verknüpfenden
Zahlen gleich, aber unterschiedlich vom Ergebnis.**

Überlauf:

0...	1...
0...	1...
-----	-----
1...	0...

Ok:

0...	1...	0...	1...
1...	0...	0...	1...
-----	-----	-----	-----
....	0...	1...



Weg für Addition und Subtraktion:

- Positive Zahlen um VZ-Stelle mit Null erweitern
- Negative Zahlen ziffernweise zur höchsten Ziffer ergänzen (komplementieren)
- Normale Addition durchführen
- Falls Überlauf auf Stelle $n+2$, 1 addieren
- Negative Zahlen ggf. ziffernweise zur höchsten Zahl ergänzen (komplementieren)

Einerkomplement



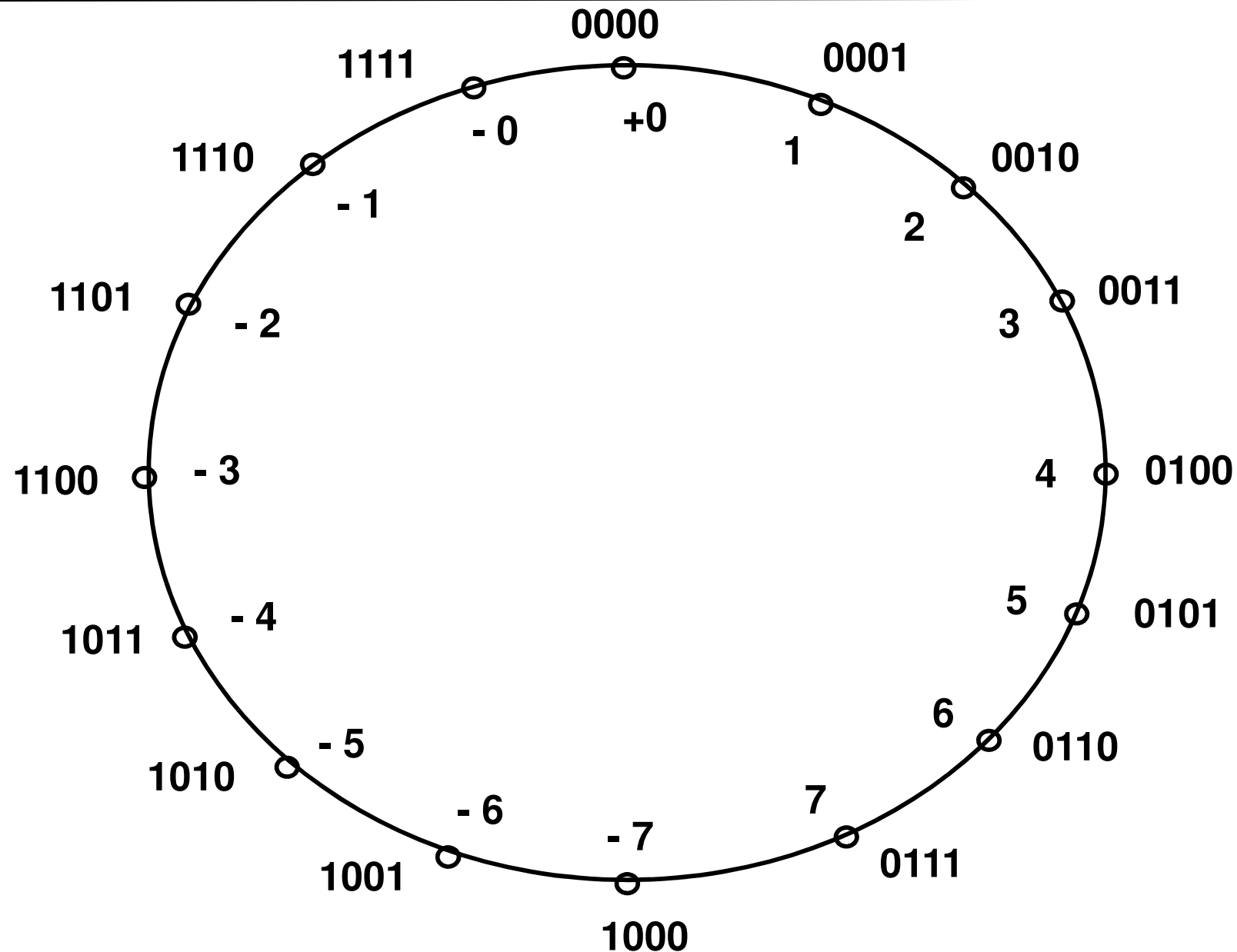
In der Einerkomplementdarstellung negiert man
Zahlen durch bitweises Komplementieren.

0000	=	0	1000	=	- 7
0001	=	1	1001	=	- 6
0010	=	2	1010	=	- 5
0011	=	3	1011	=	- 4
0100	=	4	1100	=	- 3
0101	=	5	1101	=	- 2
0110	=	6	1110	=	- 1
0111	=	7	1111	=	- 0

Das erste Bit gibt das Vorzeichen an.
Es gibt zwei Darstellungen für Null.



Einerkomplement am Zahlenkreis





Weg für Addition und Subtraktion:

- Positive Zahlen um VZ-Stelle mit Null erweitern
- Negative Zahlen ziffernweise zur höchsten Ziffer ergänzen (komplementieren)
- 1 addieren
- Normale Addition durchführen
- Überlauf auf Stelle $n+2$ ignorieren
- Negative Zahlen ggf. ziffernweise zur höchsten Zahl ergänzen (komplementieren) und 1 addieren

Zweierkomplement



Einerkomplementdarstellung:
Zahlen-Negierung durch
bitweises Komplementieren

0000	=	0	1000	=	- 7
0001	=	1	1001	=	- 6
0010	=	2	1010	=	- 5
0011	=	3	1011	=	- 4
0100	=	4	1100	=	- 3
0101	=	5	1101	=	- 2
0110	=	6	1110	=	- 1
0111	=	7	1111	=	- 0

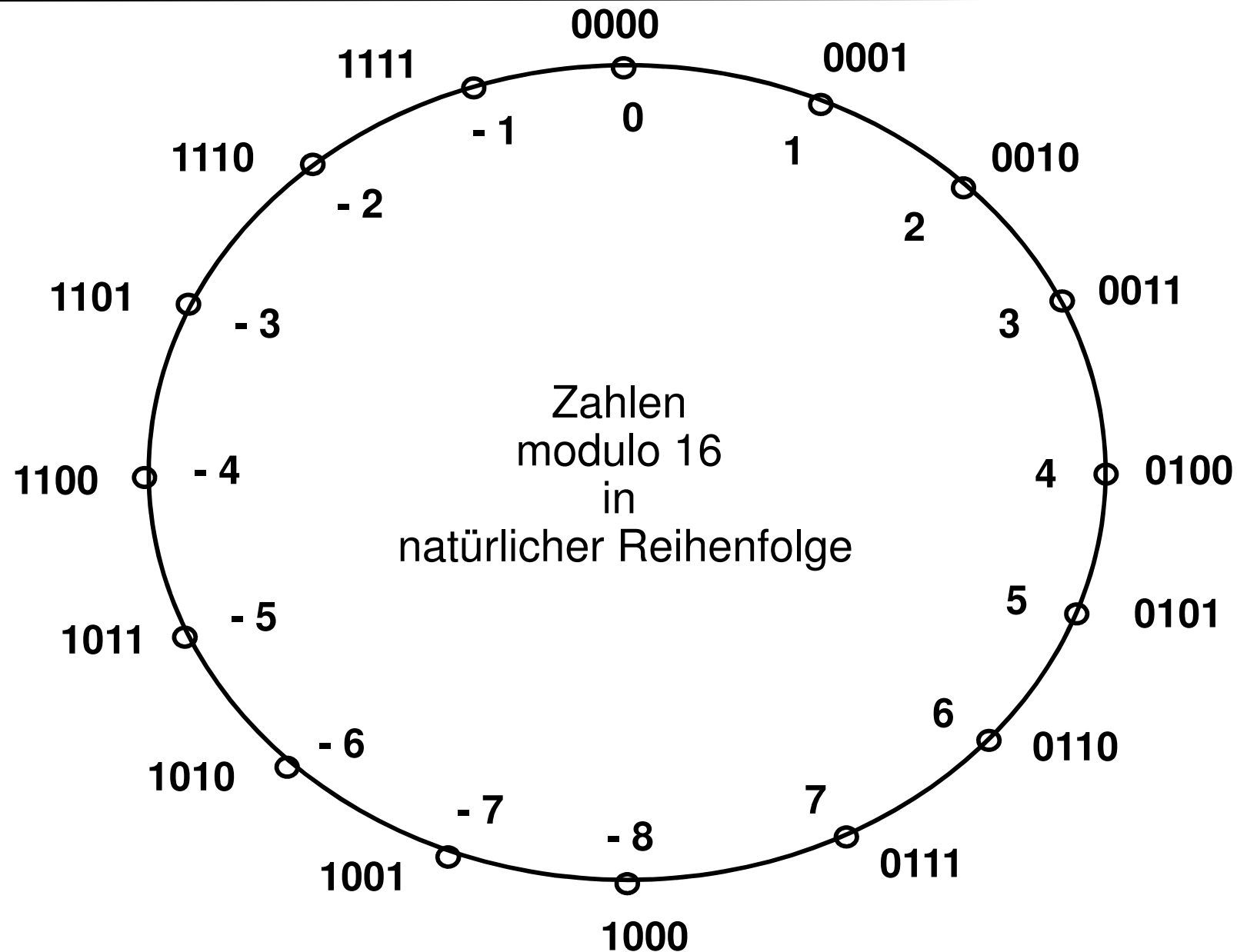
Erstes Bit: Vorzeichen
Zwei Darstellungen für Null.

Zweierkomplementdarstellung:
Durchlauf zunächst der positiven
Zahlen, dann der negativen Zahlen
in umgekehrter Reihenfolge

0000	=	0	1000	=	- 8
0001	=	1	1001	=	- 7
0010	=	2	1010	=	- 6
0011	=	3	1011	=	- 5
0100	=	4	1100	=	- 4
0101	=	5	1101	=	- 3
0110	=	6	1110	=	- 2
0111	=	7	1111	=	- 1

Auch bei Zweierkomplementdarstellung
Erste Ziffer: Vorzeichen

Zweierkomplement am Zahlenkreis





4 Bits entsprechen genau einer Hexadezimalziffer. Verzichtet man auf die Nutzung der Bitfolgen 1010 .. 1111, dann kann man jeweils 4 Bits nutzen um eine Dezimalziffer zu codieren:

0000 = 0

0100 = 4

1000 = 8

1100 = C

0001 = 1

0101 = 5

1001 = 9

1101 = D

0010 = 2

0110 = 6

1010 = A

1110 = E

0011 = 3

0111 = 7

1011 = B

1111 = F

BCD - Code (**B**inary **C**oded **D**ecimal)



An der Dezimaldarstellung orientierte Abspeicherung von Zahlen.
Einzelne Ziffern (0 bis 9) werden binär abgespeichert.
n Dezimalstellen erfordern n Speicherworte

Beispiel:

Angenommen sei ein 16bit-System, Abspeichern der Zahl 255_{10}

	Dual	BCD
Adresse n:	0000 0000 1111 1111	0000 0000 0000 0101
Adresse n+1	-	0000 0000 0000 0101
Adresse n+2	-	0000 0000 0000 0010

Sehr aufwendig und speicherintensiv.

Mögliche Abhilfe: **Packed BCD**

Mehrere BCD Ziffern werden in einem Speicherwort zusammengefasst.

0000 0010 0101 0101



Beispiel: 5 + 7

$$\begin{array}{r} 0101 \text{ (5)} \\ +0111 \text{ (7)} \\ \hline 1100 \text{ (?) ist keine gültige BCD Ziffer} \\ +0110 \text{ (6) Korrekturwert falls Ergebnis} > 9) \\ \hline 10010 \text{ (1,2) 2 mit Übertrag in die nächste Stelle.} \end{array}$$

Normale Addition und Subtraktion, aber:
Korrektur des Ergebnisses falls es keine BCD Ziffer ist.
Abarbeitung von rechts nach links !!

Wird oft von der Prozessorhardware unterstützt
Addition einer Stelle mit 2 Befehlen:

1. Normale Addition, 2. BCD Korrektur

Vorteil: Beliebige Genauigkeit, unter Software Kontrolle.

Nachteil: Langsam, alles wird über Schleifen abgewickelt



Analog zu der Schreibweise $815 = 0.815 * 10^3$
werden binäre Gleitkommazahlen gebildet.

Gleitkommazahlen (engl.: floating point numbers)

bestehen aus:

- dem Vorzeichen V
- dem Exponenten E
- der Mantisse M

V, E und M repräsentieren dann die Zahl

$$(-1)^V * M * 2^E$$



Normierte Gleitkommazahlen

Durch Verschieben des Kommas und gleichzeitiger Anpassung des Exponenten kann man erreichen, dass die erste Stelle der Mantisse 1 ist.

Diese Darstellung heißt **normierte Gleitkommadarstellung**.

$$\begin{aligned} &0.01010111 * 2^{14} \\ &= 0.1010111 * 2^{13} \\ &= 1.010111 * 2^{12} \\ &= 10.10111 * 2^{11} \end{aligned}$$

normiert

Vorteil normierter Gleitkommazahlen: Optimale Nutzung der Mantissenbits, da keine überflüssigen Nullen gespeichert werden müssen.

Die führende 1 braucht auch nicht gespeichert zu werden.

Darstellung von Gleitkommazahlen nach IEEE 754



Einfache Genauigkeit (Single Precision): 32 bit



V Exponent e Mantisse m
1 bit 8 bit 23 bit

Doppelte Genauigkeit (Double Precision): 64 bit



V Exponent e Mantisse m
1 bit 11 bit 52 bit

V: Vorzeichen. 0 = positiv; 1 = negativ. Betragsdarstellung der Mantisse.

m: Mantisse, normiert. Nur fraktioneller Teil, ohne die 1 vor dem Komma.

=> mit 23 bit Mantisse 24 bit Genauigkeit

e: Exponent, dargestellt als $e = E + 127$ bzw. $e = E + 1023$ -> Immer positiv



Darstellbare Zahlenbereiche

	<i>Einfache Genauigkeit</i>	<i>Doppelte Genauigkeit</i>
Bereich für E:	-126 .. 127	-1022 .. 1023
Kleinste positive Zahl	$2^{-126} \approx 1,2 * 10^{-38}$	$2^{-1022} \approx 2,2 * 10^{-308}$
Bits in Mantisse	24	53
Größte positive Zahl	$(2 - 2^{-23}) * 2^{127} \approx 3,4 * 10^{38}$	$(2 - 2^{-52}) * 2^{1023} \approx 1,8 * 10^{308}$
Größter relativer Fehler	2^{-24}	2^{-53}
Genauigkeit	≈ 7 Dezimalstellen	≈ 16 Dezimalstellen



Warum Exponent nur -126 bis 127 (254 Werte). Restliche 2 ?

Kleinster Exponent 00 und größter Exponent 0FFH werden für Sonderfälle benutzt.

<i>Vorzeichen</i>	<i>Exponent</i>	<i>Mantisse</i>	<i>Bedeutung</i>
0/1	0	0	+/- Null
0/1	0	1 bis 111....11	Nicht normierte Zahlen
0/1	FFH	0	+/- Unendlich
-	FFH	1 bis 111.....11	NaN (Not a Number)

$e = 0, M = 0$: Plus oder Minus Null

$e = 0, M \neq 0$: Nicht normiert: 0,M: Zahlenbereich um die 0 herum

$e = 0FFH, M = 0$: Plus oder Minus (V) Unendlich

$e = 0FFH, M \neq 0$: NAN, Not A Number, undefiniert, z.B. $\infty / \infty, \infty - \infty$



Stellen Sie die Dualzahl $-1\ 0011\ 10011,000\ 0110\ 0111$
als einfach genaue Gleitkommazahl gemäß IEEE754 dar.

(5 Punkte)

Es gilt das folgende Schema:

$v\ e_1\ e_2\ \dots\ e_8\ m_1\ m_2\ \dots\ m_{23}$

v : Vorzeichen (0:positiv, 1:negativ)

e : Exponent $e = e_1\ e_2\ \dots\ e_8$

m : Mantisse $m = m_1\ m_2\ \dots\ m_{23}$

aus normierter dualer Gleitkommadarstellung 1. $m_k \dots m_{k+n} \cdot 2^E$

m : nur fraktioneller Anteil der Mantisse der dualen Gleitkommadarstellung

$e = E + 127$

Zeichen des ASCII Codes



	<i>High</i>	<i>000</i>	<i>001</i>	<i>010</i>	<i>011</i>	<i>100</i>	<i>101</i>	<i>110</i>	<i>111</i>
Low	Hex	0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0	NUL	DLE		0	@	P	`	p
0001	1	SOH	DC	!	1	A	Q	a	q
0010	2	STX	DC	"	2	B	R	b	r
0011	3	ETX	DC	#	3	C	S	c	s
0100	4	EOT	DC	\$	4	D	T	d	t
0101	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	8	BS	CAN	(8	H	X	h	x
1001	9	HT	EM)	9	I	Y	i	y
1010	A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	B	VT	ESC	+	;	K	[k	{
1100	C	FF	FS	,	<	L	\	l	
1101	D	CR	GS	-	=	M]	m	}
1110	E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	F	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Folie 28



Zeichen des ANSI Codes

Tabelle A.1 ANSI-Zeichensatz

0	■	24	■	48	0	72	H	96	`	120	x	144	■	168	“
1	■	25	■	49	1	73	I	97	a	121	y	145	‘	169	©
2	■	26	■	50	2	74	J	98	b	122	z	146	’	170	ª
3	■	27	■	51	3	75	K	99	c	123	{	147	■	171	«
4	■	28	■	52	4	76	L	100	d	124		148	■	172	¬
5	■	29	■	53	5	77	M	101	e	125	}	149	■	173	-
6	■	30	■	54	6	78	N	102	f	126	~	150	■	174	®
7	■	31	■	55	7	79	O	103	g	127	■	151	■	175	¯
8	**	32		56	8	80	P	104	h	128	■	152	■	176	°
9	**	33	!	57	9	81	Q	105	i	129	■	153	■	177	±
10	**	34	”	58	:	82	R	106	j	130	■	154	■	178	²
11	■	35	#	59	;	83	S	107	k	131	■	155	■	179	³
12	■	36	\$	60	<	84	T	108	l	132	■	156	■	180	´
13	**	37	%	61	=	85	U	109	m	133	■	157	■	181	µ
14	■	38	&	62	>	86	V	110	n	134	■	158	■	182	¶
15	■	39	'	63	?	87	W	111	o	135	■	159	■	183	·
16	■	40	(64	@	88	X	112	p	136	■	160		184	˙
17	■	41)	65	A	89	Y	113	q	137	■	161	;	185	¹
18	■	42	*	66	B	90	Z	114	r	138	■	162	¢	186	º
19	■	43	+	67	C	91	[115	s	139	■	163	£	187	»
20	■	44	,	68	D	92	\	116	t	140	■	164	¤	188	¼
21	■	45	-	69	E	93]	117	u	141	■	165	¥	189	½
22	■	46	.	70	F	94	^	118	v	142	■	166	¦	190	¾
23	■	47	/	71	G	95	_	119	w	143	■	167	§	191	¿

Tabelle A.1 ANSI-Zeichensatz (Fortsetzung)

192	À	208	Ð	224	à	240	ð
193	Á	209	Ñ	225	á	241	ñ
194	Â	210	Ò	226	â	242	ò
195	Ã	211	Ó	227	ã	243	ó
196	Ä	212	Ô	228	ä	244	ô
197	Å	213	Õ	229	å	245	õ
198	Æ	214	Ö	230	æ	246	ö
199	Ç	215	×	231	ç	247	÷
200	È	216	Ø	232	è	248	ø
201	É	217	Ù	233	é	249	ù
202	Ê	218	Ú	234	ê	250	ú
203	Ë	219	Û	235	ë	251	û
204	Ì	220	Ü	236	ì	252	ü
205	Í	221	Ý	237	í	253	ý
206	Î	222	Þ	238	î	254	þ
207	Ï	223	ß	239	ï	255	ÿ



- 8-Bit Codefamilie
- 15 verschiedene Teilnormen
- Code 000-127 bei allen Teilnormen gleich (entspricht ASCII-Code)
- Besonders wichtig: ISO-8859-1 (Latin-1, ANSI, EBCDIC)
- ISO 8859-x

-1	<i>Latin-1</i> , Westeuropäisch
-2	<i>Latin-2</i> , Mitteleuropäisch
-3	<i>Latin-3</i> , Südeuropäisch
-4	<i>Latin-4</i> , Baltisch
-5	Kyrillisch
-6	Arabisch
-7	Griechisch
-8	Hebräisch
-9	<i>Latin-5</i> , Türkisch
-10	<i>Latin-6</i> , Nordisch
-11	Thai
-13	<i>Latin-7</i> , Baltisch
-14	<i>Latin-8</i> , Keltisch
-15	<i>Latin-9</i> , Westeuropäisch
-16	<i>Latin-10</i> , Südosteuropäisch



- Universelle Symboltabelle
- Jedes Zeichen bekommt einen eindeutigen binären Code mit $5+16=21$ Bit
- Der Binärcode ist auf jeder Hardware, unter jedem Betriebssystem und in jeder Programmiersprache gleich.
- Es gibt 17 Codebereiche (Planes) mit je 65536 möglichen Zeichen
- Wichtig: Basic Multilingual Plane (BMP)
- Die ersten 256 Zeichen der BMP sind identisch mit ISO 8859-1
- Zur Codierung des Unicode:
Universal Transformation Format (UTF)
- UTF-8, UTF-16, UTF-32

Einige Zeichen des Unicode



Latin Extended-A

	010	011	012	013	014	015	016	017
0	Ā	Đ	Ġ	İ	ı	Ŏ	Š	Ů
	0100	0110	0120	0130	0140	0150	0160	0170
1	ā	đ	ġ	ı	Ł	ō	š	ů
	0101	0111	0121	0131	0141	0151	0161	0171
2	Ă	Ē	Ģ	Ĳ	ł	Œ	Ŧ	Ű
	0102	0112	0122	0132	0142	0152	0162	0172
3	ă	ē	ġ	ij	Ń	œ	ţ	ű
	0103	0113	0123	0133	0143	0153	0163	0173
4	Ą	Ě	Ĥ	Ĵ	ń	Ŕ	Ť	Ŷ
	0104	0114	0124	0134	0144	0154	0164	0174
5	ą	ě	ĥ	ĵ	Ņ	ŕ	ț	ŵ
	0105	0115	0125	0135	0145	0155	0165	0175
6	Ć	Ė	Ħ	Ķ	ņ	Ŗ	Ŧ	Ÿ
	0106	0116	0126	0136	0146	0156	0166	0176
7	ć	ė	ħ	ķ	ņ	ŗ	ţ	ÿ
	0107	0117	0127	0137	0147	0157	0167	0177
8	Ĉ	Ė	Ĩ	κ	ň	Ř	Ů	Ÿ
	0108	0118	0128	0138	0148	0158	0168	0178
9	ĉ	ę	ĩ	ĺ	’n	ř	ů	ž
	0109	0119	0129	0139	0149	0159	0169	0179

Cherokee

	13A	13B	13C	13D	13E	13F
0	D	Ꭶ	G	Ꭰ	Ꭱ	Ꭲ
	13A0	13B0	13C0	13D0	13E0	13F0
1	R	Ꭳ	Ꭴ	Ꭵ	Ꭶ	Ꭷ
	13A1	13B1	13C1	13D1	13E1	13F1
2	T	Ꭸ	Ꭹ	Ꭺ	Ꭻ	Ꭼ
	13A2	13B2	13C2	13D2	13E2	13F2
3	Ꭽ	W	Z	L	G	G ^w
	13A3	13B3	13C3	13D3	13E3	13F3
4	Ꭾ	Ꭿ	Ꮀ	Ꮁ	Ꮂ	Ꮃ
	13A4	13B4	13C4	13D4	13E4	13F4
5	i	Ꮄ	Ꮅ	Ꮆ	Ꮇ	
	13A5	13B5	13C5	13D5	13E5	
6	Ꮈ	Ꮉ	Ꮊ	Ꮋ	Ꮌ	
	13A6	13B6	13C6	13D6	13E6	
7	Ꮍ	Ꮎ	Ꮏ	Ꮐ	Ꮑ	
	13A7	13B7	13C7	13D7	13E7	
8	Ꮏ	Ꮑ	Ꮓ	Ꮔ	Ꮕ	
	13A8	13B8	13C8	13D8	13E8	
9	Ꮖ	Ꮗ	Ꮘ	Ꮙ	Ꮚ	
	13A9	13B9	13C9	13D9	13E9	

Bopomofo Extended

	31A	31B
0	ㄅ	ㄆ
	31A0	31B0
1	ㄇ	ㄏ
	31A1	31B1
2	ㄏ	ㄏ
	31A2	31B2
3	ㄏ	ㄏ
	31A3	31B3
4	ㄏ	ㄏ
	31A4	31B4
5	ㄏ	ㄏ
	31A5	31B5
6	ㄏ	ㄏ
	31A6	31B6
7	ㄏ	ㄏ
	31A7	31B7
8	ㄏ	
	31A8	
9	ㄏ	
	31A9	