IWI Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik

**Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik**
**Prof. Dr. Heiko Körner**

Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

# 3. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

**Aufgabe 1** ($\bullet\bullet$): Sei $R := \{(1,2),(3,2)\}$ eine Relation über der Menge $\{1,2,3\}$.

a) Prüfen Sie, ob $R$ reflexiv, symmetrisch und / oder transitiv ist.

b) Schließen Sie $R$ symmetrisch und transitiv ab, d.h. erweitern Sie $R$ durch eine minimale Menge von weiteren Paaren $(x,y)$, so dass $R$ danach symmetrisch und transitiv ist.

c) Ist $R$ danach sogar eine Äquivalenzrelation?

**Aufgabe 2** ($\bullet\bullet$): Sei $A := \{1,2,3\}$. Geben Sie eine Relation $R$ über $A$ mit $|R| \geq 3$ an, die

a) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist,

b) reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch ist,

c) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist.

**Aufgabe 3** ($\bullet$): Prüfen Sie, welche der nachfolgenden Relationen $R$ über den angegebenen Mengen $A$ reflexiv, symmetrisch, und / oder transitiv sind.

a) $A := \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R := \{(x,y) \,|\, x \cap y = \emptyset\}$.

b) $A := \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R := \{(x,y) \,|\, x \subseteq \mathbb{N} \setminus y\}$.

c) $A := \mathbb{Z}$, $R := \{(x,y) \,|\, xy \geq 0\}$.

**Aufgabe 4** ($\bullet\bullet\bullet$): Eine Relation $R$ über einer Menge $A$ heißt *irreflexiv*, wenn für alle $x \in A$ stets $\neg(xRx)$ gilt. $R$ ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $x,y \in A$ aus $xRy$ und $yRx$ stets $x = y$ folgt. $R$ ist *asymmetrisch*, wenn für alle $x,y \in A$ die Bedingung $xRy$ stets $\neg(yRx)$ impliziert.

a) Drücken Sie die drei Begriffe Irreflexivität, Antisymmetrie und Asymmetrie formal (und mit Hilfe von Quantoren) aus.

b) Geben Sie ein Beispiel für $R$ und $A$ an, so dass $R$ alle drei Bedingungen erfüllt.

c) Geben Sie ein Beispiel für $R$ und $A$ an, so dass $R$ keine der drei Bedingungen erfüllt.

d) Geben Sie ein Beispiel für $R$ und $A$ an, so dass $R$ zwar antisymmetrisch, aber weder asymmetrisch noch irreflexiv ist.

e) Zeigen Sie, dass für jede Relation $R$ gilt:

$$R \text{ ist asymmetrisch} \iff R \text{ ist irreflexiv und antisymmetrisch}\ .$$

**Aufgabe 5** ($\bullet\bullet\bullet$): Für zwei nichtleere endliche Mengen $A$ und $B$ bezeichne $B^A$ die Menge aller Funktionen, die von $A$ nach $B$ abbilden. Zeigen Sie, dass $|B^A| = |B|^{|A|}$ gilt.

**Aufgabe 6** ($\bullet\bullet$): Sei $A$ eine beliebige Menge mit $n := |A| \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau $2^n$ unäre Prädikate über $A$ gibt. (*Tipp:* Bearbeiten Sie zuerst Aufgabe 5.)