

# Kantenpixel und geometrische Primitive

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

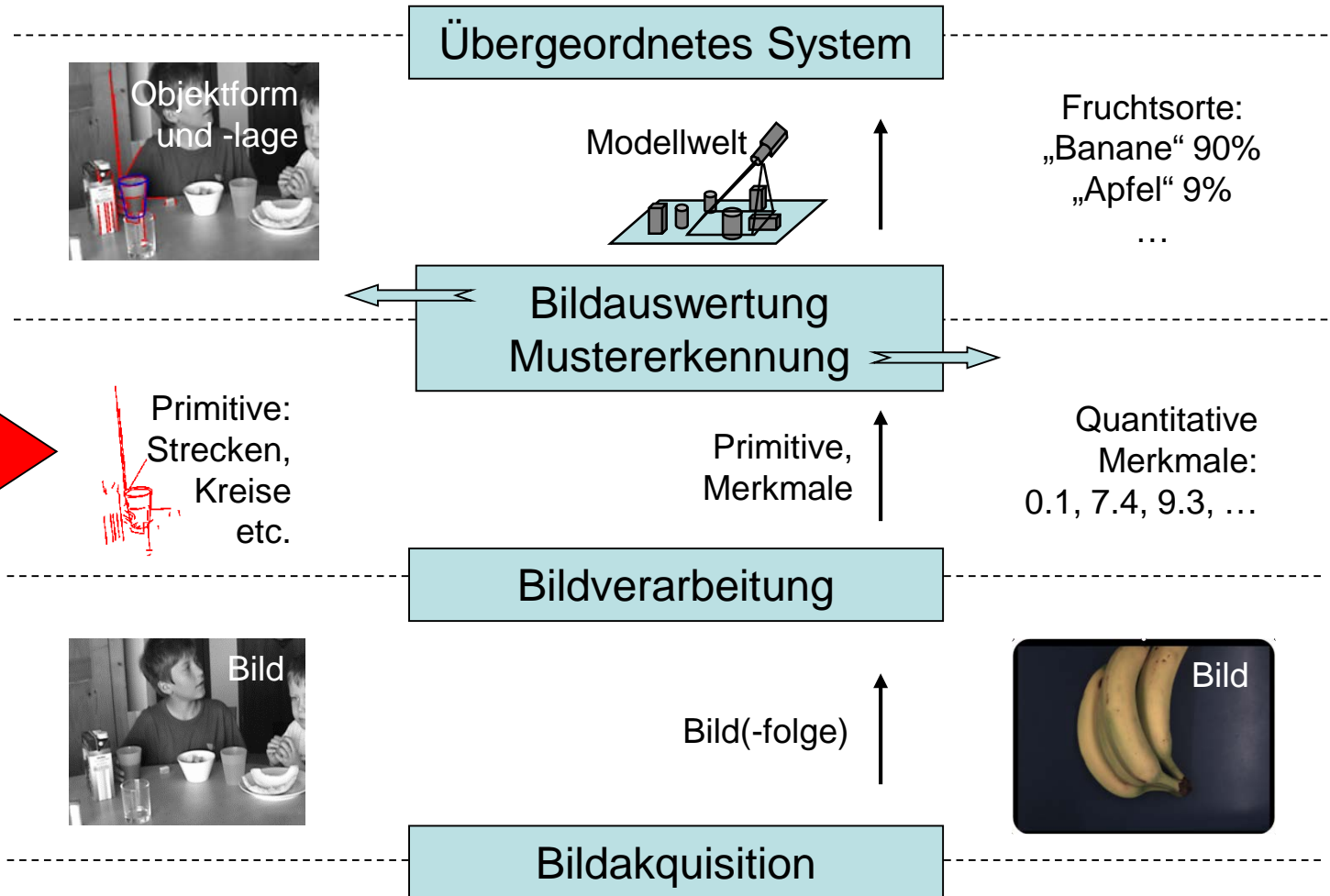
#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### KI. Quadrate

#### Hough-Trans

nächstes Ziel



# Kantenpixelbilder

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

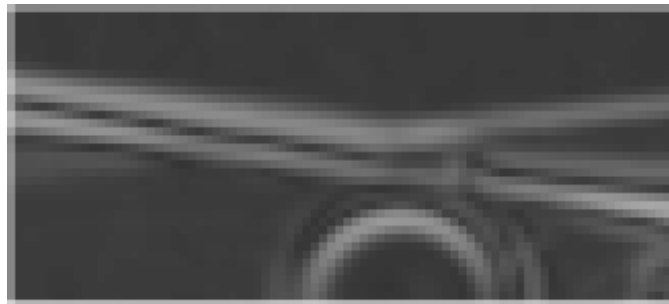
Bei Ansätzen mit der 1. Ableitung wird nach denjenigen Pixeln  $(x,y)$  gesucht, die eine gegebene Schwelle  $\varepsilon$  überschreiten:

$$\sqrt{I_x^2(x, y) + I_y^2(x, y)} > \varepsilon$$

Auf diese Weise werden die Kanten mitunter recht breit:



Gradientenbetragsbild



Ausschnitt



Ausschnitt aus dem Binärbild

# Ausdünnen von Gradientenbetragsbildern

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

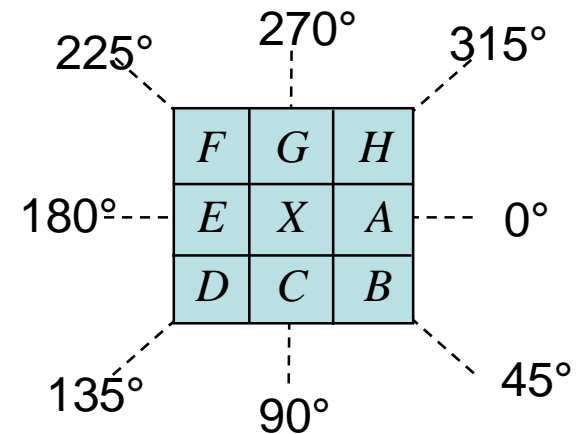
#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

Dieser unerwünschte Effekt kann mit der »**non-maximum supression**« auf Basis des Gradientenrichtungsbilds unterdrückt werden. Dabei wird ein neues, ausgedünntes Gradientenbild nach folgender Regel erzeugt:

**Regel:** Wenn der Gradientenbetrag  $I'(x,y)$  im Pixel  $X=(x,y)$  größer ist als der Betrag der Nachbarpixel (längs Gradientenrichtung), so trage den Betrag ein, andernfalls setze 0.



Gradienten-Richtung in $X=(x,y)$	Maximumbedingung
$1^\circ \dots 22^\circ, 158^\circ \dots 202^\circ, 338^\circ \dots 360^\circ$	$I'(A) \leq I'(X)$ und $I'(E) \leq I'(X)$
$23^\circ \dots 67^\circ, 203^\circ \dots 247^\circ$	$I'(B) \leq I'(X)$ und $I'(F) \leq I'(X)$
$68^\circ \dots 112^\circ, 248^\circ \dots 292^\circ$	$I'(C) \leq I'(X)$ und $I'(G) \leq I'(X)$
$113^\circ \dots 157^\circ, 293^\circ \dots 337^\circ$	$I'(D) \leq I'(X)$ und $I'(H) \leq I'(X)$

# Beispiel für die Ausdünnung

## Kapitel 5

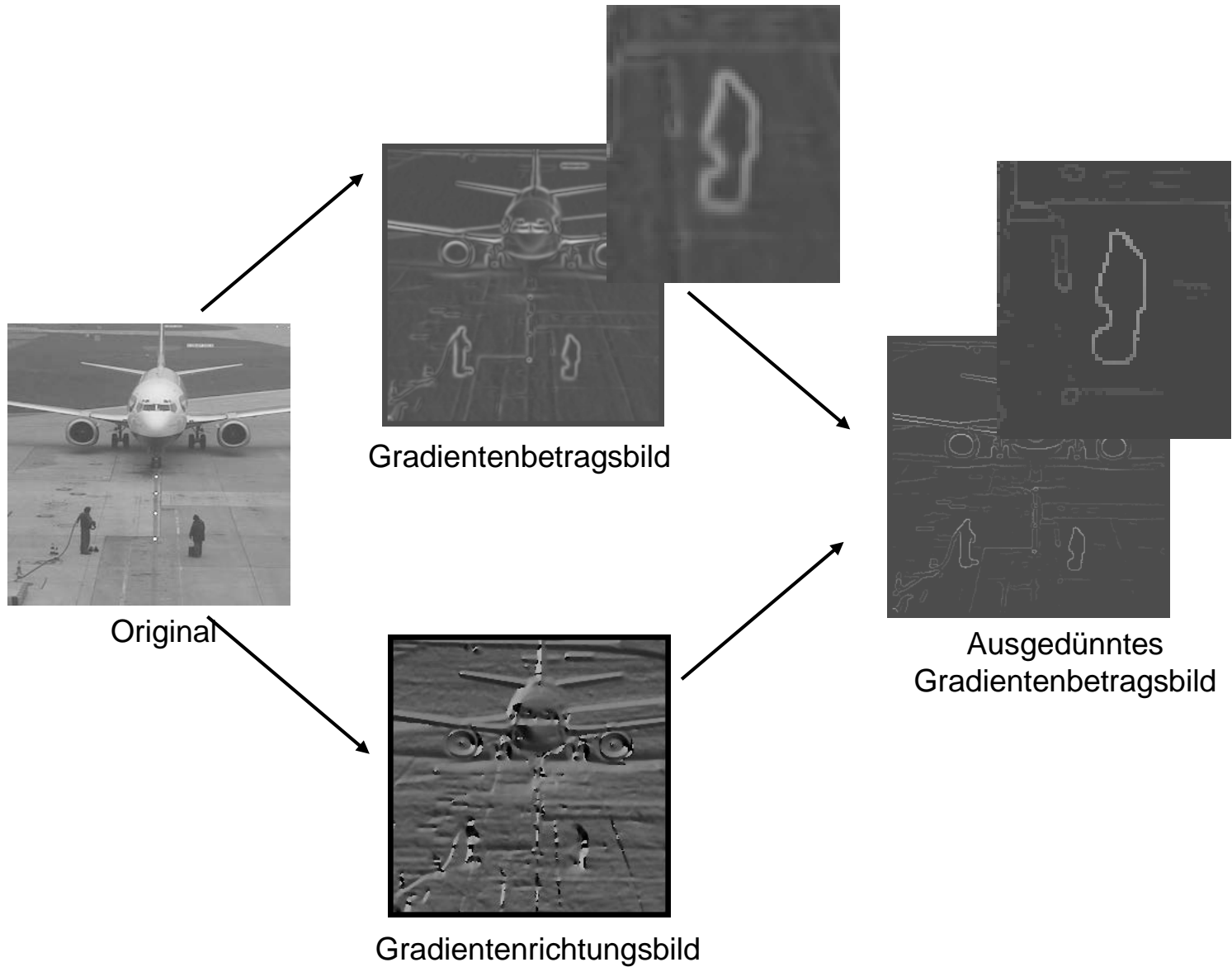
### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### KI. Quadrate

#### Hough-Trans



# Kantenpixelbild – Wahl der Schwelle

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

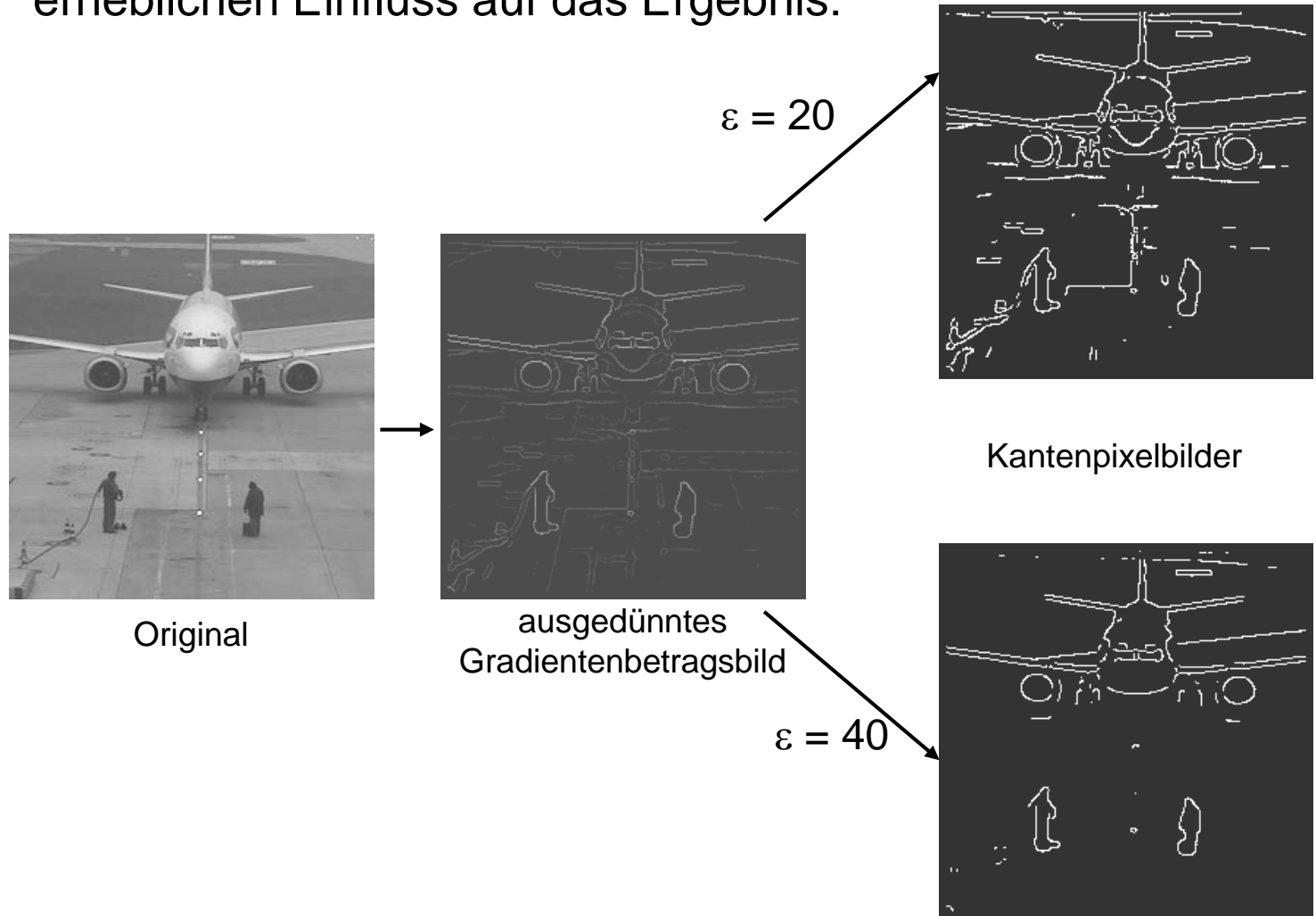
#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

Bei der Binarisierung hat die Wahl der Schwelle erheblichen Einfluss auf das Ergebnis:



# Binarisierung mit zwei Schwellen

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

Wenn Objektkonturen (=Ränder von Objekten) möglichst vollständig erfasst werden sollen, bietet sich folgendes Verfahren an:

1. Erstelle mit einer kleinen Schwelle  $\varepsilon_1$  ein Kantenpixelbild.
2. Fasse jeweils zusammenhängende Pixel zu Gruppen zusammen (z.B. in Form von Listen mit Pixelkoordinaten).
3. Lösche alle Gruppen, bei denen die Gradientenbeträge aller Pixel unter einer höheren Schwelle  $\varepsilon_2$  liegen.

# Beispiel für Binarisierung mit zwei Schwellen

## Kapitel 5

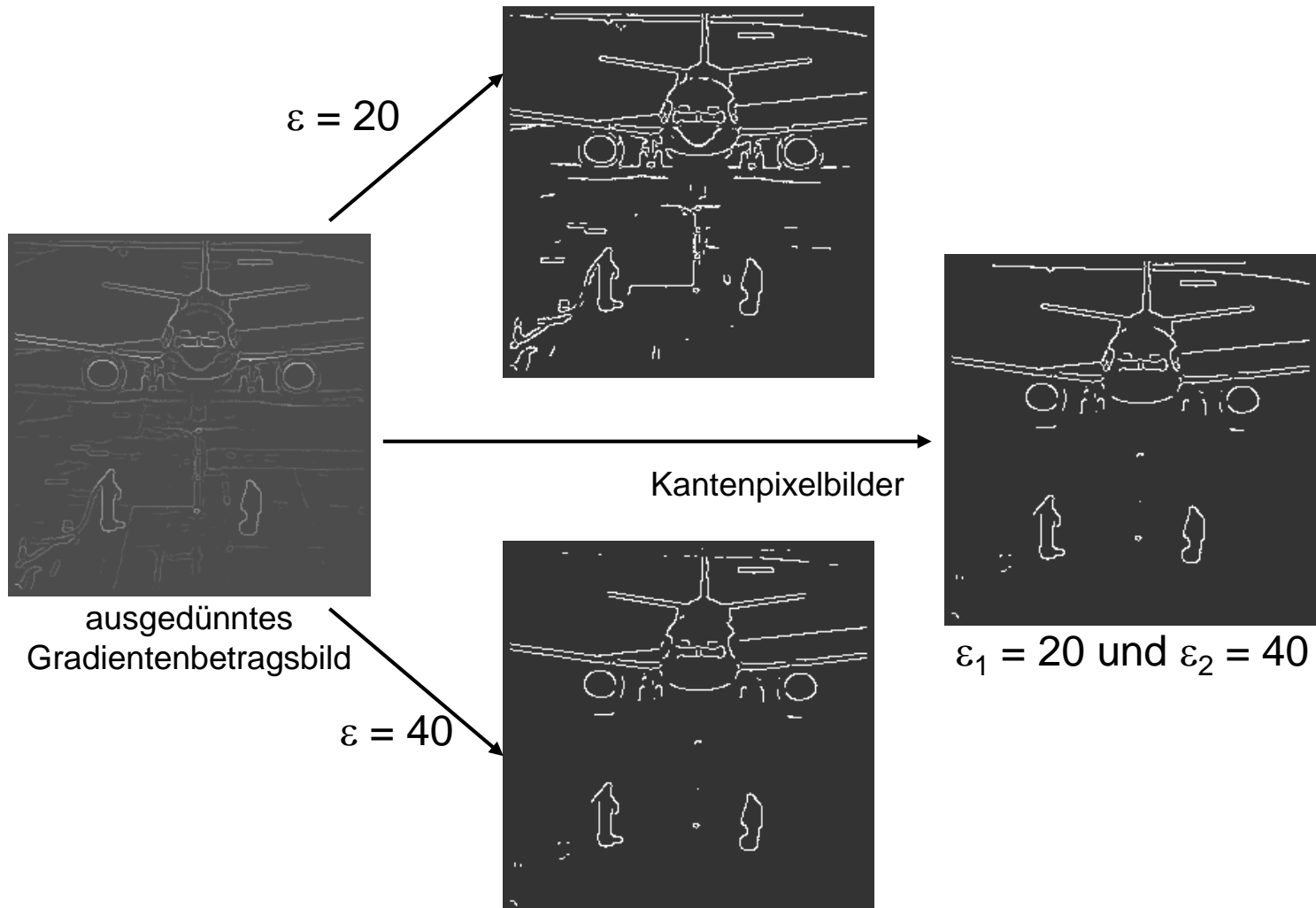
### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans



# Zusammenfassung: Canny-Operator

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

Zur Berechnung von Kantenpixelbildern unternimmt man in der Regel folgende Schritte:

1. Unterdrückung von Rauschen durch Glättungsfilter
2. Berechnung der partiellen Ableitungen  $I_x$  und  $I_y$
3. Berechnung von Gradientenbetrags und –richtungsbild
4. Ausdünnen des Gradientenbetragsbilds
5. Binarisierung, ggf. mit zwei Schwellen

Diese Abfolge von Operationen ist unter dem Begriff **Canny-Operator** bekannt.



# Lokale Gruppierung von Kantenpixelkandidaten

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

Wenn ein Kantenpixelbild vorliegt, muss häufig entschieden werden, welche Pixel zu einer Primitive gehören.

Dieses Vorgehen nennt man **lokales Gruppieren** von Kantenpixeln und erfolgt so:

1. Zu einem aktuellen Pixel wird eine kleine Nachbarschaft (z.B. 3x3 oder 5x5) untersucht.
2. Liegen in der Nachbarschaft »ähnliche« Kantenpixel, so werden diese zur aktuellen Gruppe hinzugefügt
3. Alle hinzugefügten Pixel werden zu aktuellen Pixeln.

Welches Maß für die Ähnlichkeit von Pixeln herangezogen wird, hängt davon ab, welche Primitiven detektiert werden sollen...

# Ähnlichkeit von Kantenpixelkandidaten

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

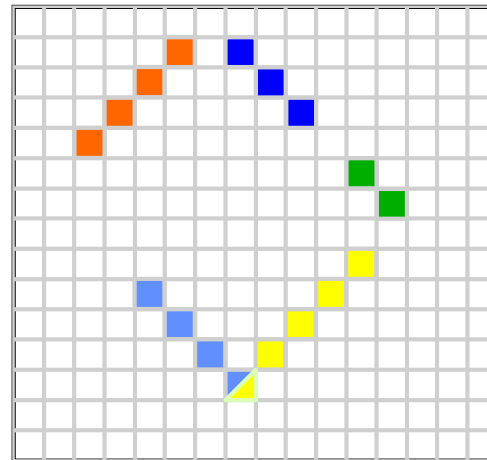
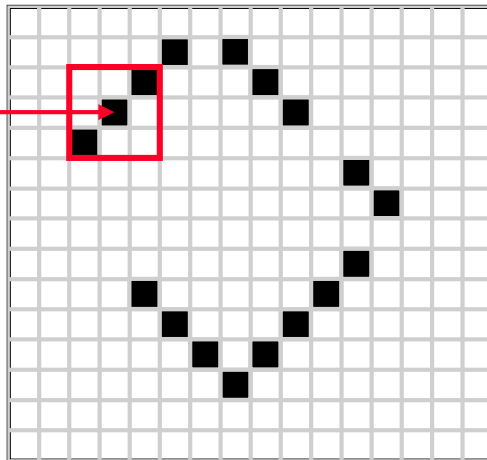
In der Regel wird die **Ähnlichkeit** an Hand der Gradientenbeträge und –richtungen definiert:

Zwei Pixel  $(x,y)$  und  $(x',y')$  sind sich ähnlich, wenn gilt:

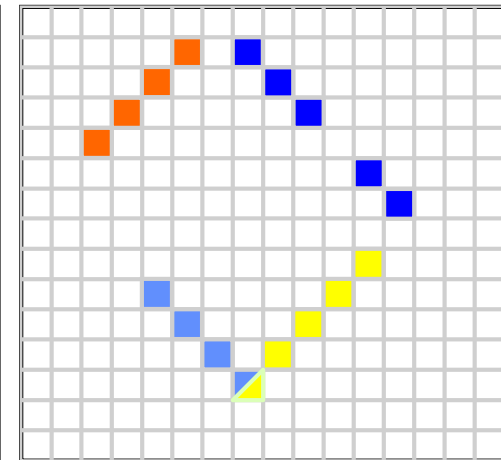
$$\left| \|\nabla I(x, y)\| - \|\nabla I(x', y')\| \right| \leq T_{\nabla} \quad \text{und} \quad \left| \varphi(x, y) - \varphi(x', y') \right| \leq T_{\varphi}$$

d.h. wenn sich die Gradientenbeträge und die Gradientenrichtungen maximal um vorgegebene Schwellen unterscheiden.

aktueller  
Kandidat



Beispiel: Richtung 3x3



Beispiel: Richtung 5x5

# Parameterschätzung

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

KI. Quadrate

Hough-Trans

Gehen wir davon aus, dass wir eine Gruppe von  $m$  Pixelpositionen

$$(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$$

gegeben haben, an die wir eine geometrische Primitive (Gerade, Strecke, Kreis, Ellipse, etc.) mit unbekannten Parametern  $a_1, \dots, a_n$  anpassen wollen.

... wobei  
»möglichst  
klein« durch  
eine mathe-  
matische  
Funktion  
definiert wird.

Nur in Ausnahmefällen werden die Pixel genau auf einer Form liegen, d.h. wir müssen die Parameter so bestimmen (schätzen), dass der restliche Fehler möglichst klein ist.

Das ist ein Optimierungsproblem!

Hier: Methode kleinster Quadrate

# Modellierung von Kreisen

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

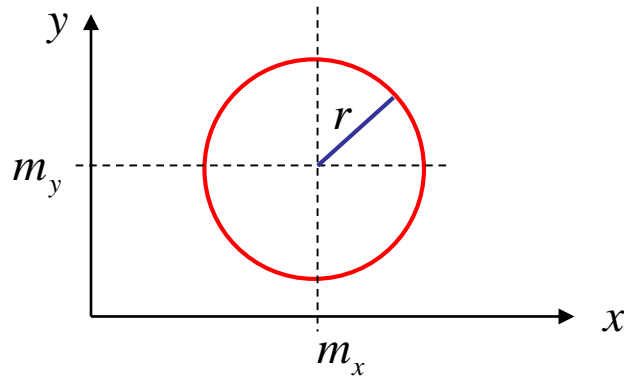
KI. Quadrate

Hough-Trans

Kreise lassen sich durch drei Parameter beschreiben:

Mittelpunkt:  $(m_x, m_y)$

Radius:  $r$



Sie lassen sich z.B. durch die folgenden (äquivalenten) Gleichungen modellieren:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

$$\sqrt{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2} - r = 0$$

# Vereinfachte Kreismodellierung I

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

**Vereinfachter Fall:** Wir betrachten zunächst nur den Fall, dass die gefundenen Pixel auf dem Kreisbogen (relativ) gleichmäßig verteilt sind.

**1. Schritt: Mittelpunkt** – Wir berechnen das **arithmetische Mittel** der Pixel (=Schwerpunkt) als Kreismittelpunkt

$$m_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \quad \text{und} \quad m_y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$$

**2. Schritt: Zentrierung** – Nun verschieben wir alle Pixelpositionen der Pixel, so dass der Kreismittelpunkt im Ursprung liegt:

$$x_i \leftarrow x_i - m_x \quad \text{und} \quad y_i \leftarrow y_i - m_y$$

# Vereinfachte Kreismodellierung II

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

KI. Quadrate

Hough-Trans

Bemerkung:  
Man spricht  
hier von einer  
**geschlos-  
senen**

**Lösung**, weil  
das optimale  $r$   
explizit  
gegeben ist.

**3. Schritt:** *Optimierung nach der Methode der kleinsten (Fehler-)Quadrate* – Nun suchen wir denjenigen Radius  $r$ , für den die **Fehlerfunktion** (auch: **Kostenfunktion**)

$$E(r) = \sum_{i=1}^m \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r \right)^2$$

ihr Minimum annimmt.

Ableiten nach  $r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial r}(r) &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i=1}^m \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r \right)^2 = \sum_{i=1}^m 2 \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r \right) (-1) \\ &= (-2) \left( \sum_{i=1}^m \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \sum_{i=1}^m r \right) \end{aligned}$$

und Ableitung auf null setzen liefert

$$\sum_{i=1}^m \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r m = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

# Schneller Test auf Kreiseigenschaft

Eng verwandt mit dieser Methode ist der folgende, schnelle Test auf Kreiseigenschaft:

1. Berechne den potentiellen Mittelpunkt

$$m_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \quad \text{und} \quad m_y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$$

2. Berechne für jedes Pixel den Abstand zum Mittelpunkt

$$d_i = \sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2} \quad i = 1, \dots, m$$

3. Berechne den Mittelwert dieser Abstände

$$\bar{d} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d_i$$

4. Berechne die mittlere quadratische Abweichung als Maß für die Kreiseigenschaft

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (d_i - \bar{d})^2$$

# Motivation der allgemeinen Kreismodellierung

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

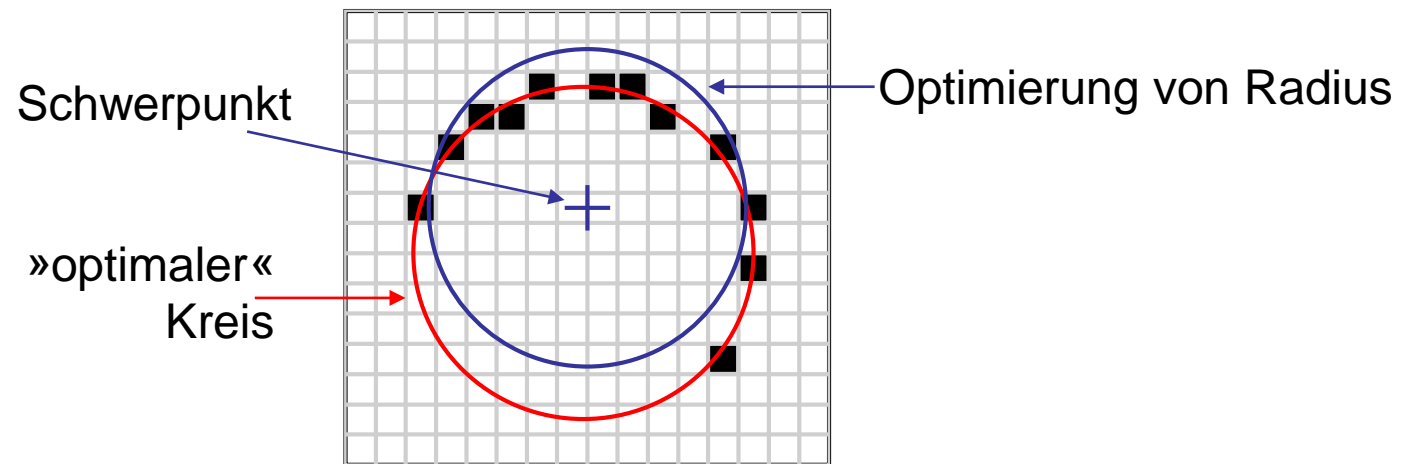
Kantenpixel

Gruppierung

KI. Quadrate

Hough-Trans

Die vereinfachte Kreiserkennung und der Test werden in der folgenden Situation nicht zufrieden stellend funktionieren, weil der Mittelpunkt in den Schwerpunkt gesetzt wurde:



Wir benötigen also für solche Fälle Ansätze, die auch den Kreismittelpunkt optimieren.



# Allgemeine Kreismodellierung I

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### KI. Quadrate

#### Hough-Trans

In diesem Fall wenden wir die Methode der kleinsten Quadrate auf alle drei Kreisparameter an.

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 - r^2 = 0$$

Die Gleichung ist in allen drei Parametern  $m_x$ ,  $m_y$  und  $r$  quadratisch (ungünstig!), d.h. zunächst wird sie **linearisiert**:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xm_x + m_x^2 + y^2 - 2ym_y + m_y^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2xm_x - 2ym_y + \underbrace{(m_x^2 + m_y^2 - r^2)}_{r'} + (x^2 + y^2) = 0$$

Wieder wählen wir den Ansatz über die kleinsten Quadrate

$$E(r', m_x, m_y) = \sum_{i=1}^m \left( -2x_i m_x - 2y_i m_y + r' + (x_i^2 + y_i^2) \right)^2$$

# Allgemeine Kreismodellierung II

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

KI. Quadrate

Hough-Trans

Ableiten liefert

$$\frac{\partial E}{\partial r'}(r', m_x, m_y) = 2 \left( -m_x \sum_{i=1}^m 2x_i - m_y \sum_{i=1}^m 2y_i + mr' + \sum_{i=1}^m (x_i^2 + y_i^2) \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial m_x}(r', m_x, m_y) = 4 \left( -m_x \sum_{i=1}^m 2x_i^2 - m_y \sum_{i=1}^m 2x_i y_i + r' \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m x_i (x_i^2 + y_i^2) \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial m_y}(r', m_x, m_y) = 4 \left( -m_x \sum_{i=1}^m 2x_i y_i - m_y \sum_{i=1}^m 2y_i^2 + r' \sum_{i=1}^m y_i + \sum_{i=1}^m y_i (x_i^2 + y_i^2) \right)$$

und null setzen ein lineares Gleichungssystem für drei Parameter  $m_x$ ,  $m_y$  und  $r'$ :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m 2x_i & \sum_{i=1}^m 2y_i & -m \\ \sum_{i=1}^m 2x_i^2 & \sum_{i=1}^m 2x_i y_i & -\sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m 2x_i y_i & \sum_{i=1}^m 2y_i^2 & -\sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m (x_i^2 + y_i^2) \\ \sum_{i=1}^m x_i (x_i^2 + y_i^2) \\ \sum_{i=1}^m y_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

# Allgemeine Kreismodellierung III

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem, das sich z.B. mit der Cramer'schen Regel (für 3x3-Matrizen) lösen lässt.

Wenn alle auftretenden Determinanten ungleich null sind (also das Gleichungssystem eindeutig lösbar) und die »optimalen« Parameter  $m_x$ ,  $m_y$  und  $r'$  gefunden sind, können wir noch via

$$r = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 - r'^2}$$

den Radius  $r$  berechnen.

# Anwendung im 3D

## Kapitel 5

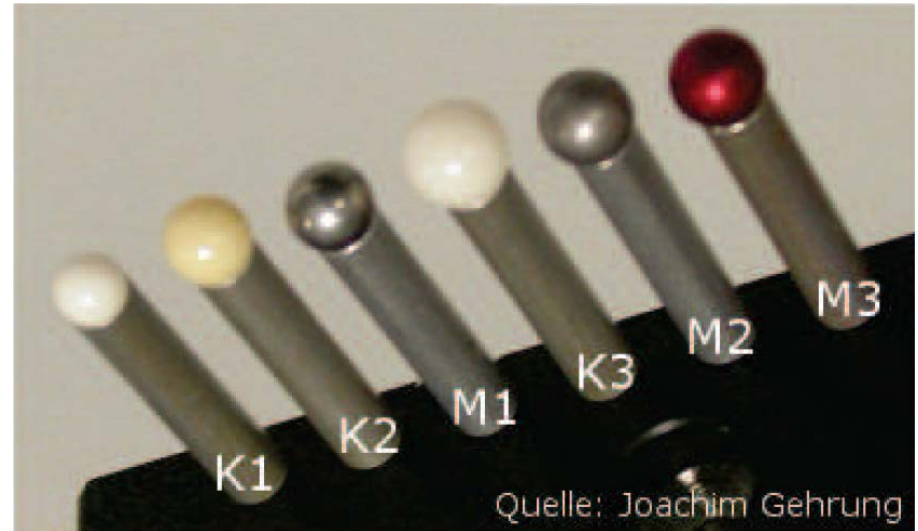
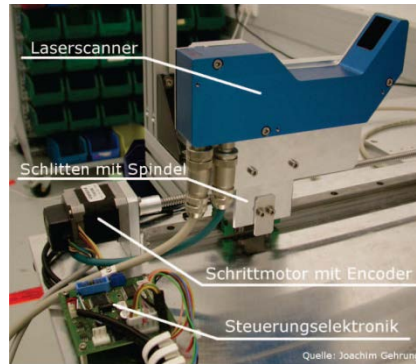
### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

KI. Quadrate

Hough-Trans



K2



M1



M2

# Skalarprodukt und Norm

Im Folgenden benötigen wir für Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

die Begriffe **Skalarprodukt**

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

und die (euklidische) **Norm**

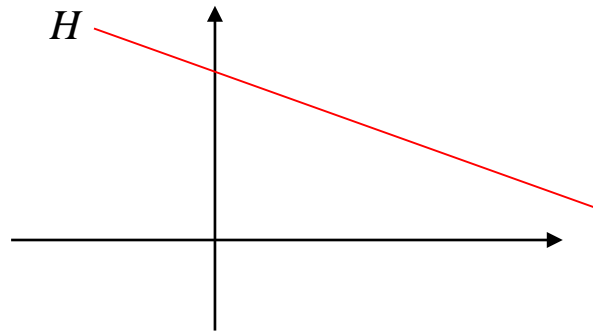
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \in \mathbb{R}$$

Ein Vektor  $\vec{x}$  hat also genau dann die Länge 1, wenn gilt

$$\|\vec{x}\| = 1$$

# Hyperebenen

Eine Hyperebene  $H$  im  $\mathbb{R}^n$  ist ein affiner Unterraum der Dimension  $n-1$ , also z.B.



$\mathbb{R}^2$ : Gerade

siehe Tafel...

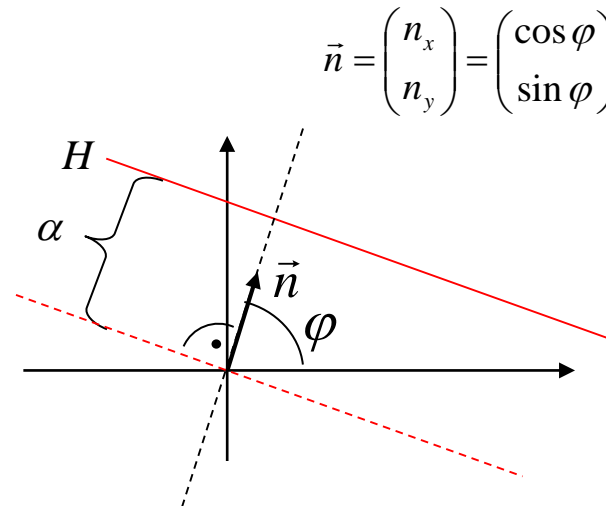
$\mathbb{R}^3$ : Ebene

# Hesse'sche Normalform

Jede Hyperebene kann durch die Hesse'sche Normalform beschrieben werden

$$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \alpha \quad \text{mit} \quad \|\vec{n}\| = 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung:**  $\alpha$  ist der signierte (=mit Vorzeichen versehene) Abstand von der Hyperebene zum Ursprung!



$\mathbb{R}^2$ : Gerade

siehe Tafel...

$\mathbb{R}^3$ : Ebene

## Hesse'sche Normalform im $\mathbb{R}^2$

Die Hyperebene besteht also aus allen Punkten, die diese Gleichung erfüllen, also der Menge

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \alpha\}$$

**Bemerkung:** Für  $n = 2$  mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und den Spezialfall, dass die  $y$ -Komponente  $n_y$  des Normalenvektors ungleich null ist, gilt

$$x n_x + y n_y = \alpha \quad \stackrel{n_y \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad y = \underbrace{-\frac{n_x}{n_y}}_{a_1} \cdot x + \underbrace{\frac{\alpha}{n_y}}_{a_2}$$

**Das ist eine Geradengleichung!**



# Modellierung von Geraden I

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

KI. Quadrate

Hough-Trans

Zunächst reduzieren wir die Anzahl der Parameter unseres mathematischen Geradenmodells

$$x n_x + y n_y = \alpha$$

auf zwei (tatsächlich sind es nur zwei:  $\alpha$  und  $\varphi$ ).

Hierfür müssen wir eine Normierung durchführen, die zu einer Fallunterscheidung führt:

**1. Fall:**  $n_y \neq 0$  (Gerade ist nicht senkrecht)

$$x n_x + y n_y = \alpha \quad \stackrel{n_y \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{\frac{n_x}{n_y}}_{a_1} \cdot x - \underbrace{\frac{\alpha}{n_y}}_{a_2} + y = 0$$

Wir arbeiten wieder mit der Methode der kleinsten Quadrate, minimieren also

$$E(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^m (x_i a_1 - a_2 + y_i)^2$$

# Modellierung von Geraden II

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

Ableiten der Fehlerfunktion ergibt

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m (a_1 x_i - a_2 + y_i)^2 = 2 \left( a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m x_i y_i \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \sum_{i=1}^m (a_1 x_i - a_2 + y_i)^2 = -2 \left( a_1 \sum_{i=1}^m x_i - a_2 m + \sum_{i=1}^m y_i \right)$$

Die Ableitungen gleich Null setzen liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & -\sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^m x_i y_i \\ -\sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

# Modellierung von Geraden III

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

KI. Quadrate

Hough-Trans

Die Cramer'sche Regel liefert schließlich

$$\det = \left( \sum x_i \right)^2 - m \left( \sum x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m (x_i - x_j)^2$$

und für  $\det \neq 0$

$$a_1 = \frac{1}{\det} \left( m \left( \sum x_i y_i \right) - \left( \sum x_i \right) \left( \sum y_i \right) \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{\det} \left( - \left( \sum x_i^2 \right) \left( \sum y_i \right) + \left( \sum x_i \right) \left( \sum x_i y_i \right) \right)$$

= 0  
genau dann  
wenn die  
Gerade  
senkrecht ist  
2. Fall !!!

Nun muss noch die Substitution rückgängig gemacht werden durch

$$n_x = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} \quad \alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + 1}}$$

# Modellierung von Geraden IV

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

## 2. Fall $n_y = 0$ (Gerade ist senkrecht)

$$x n_x + y n_y = \alpha \quad \begin{matrix} n_y=0 \Leftrightarrow n_x=1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad x - \alpha = 0$$

In diesem Fall führt der Ansatz mit dem einzigen Parameter  $\alpha$

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^m (x_i - \alpha)^2$$

zu

$$\alpha = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

Fehlt noch:

Bestimmung von Anfangs- und Endpunkt der Strecke

dazu: Mathe Recall

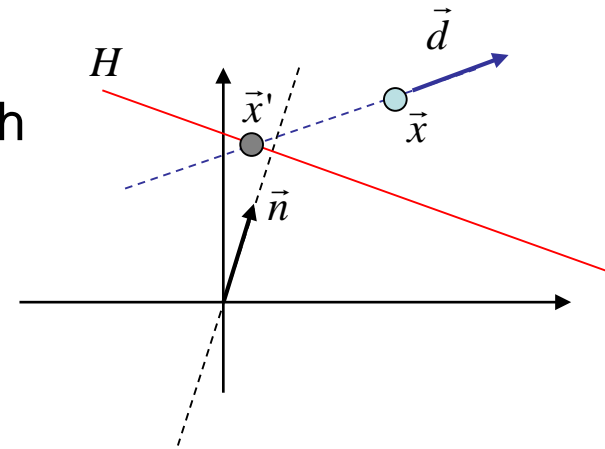
# Projektion auf Hyperebenen...

Die Projektion eines Vektors  $\vec{x}$  auf eine Hyperebene

$$H = \{ \vec{x} \mid \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \alpha \}$$

längs dem Vektor  $\vec{d}$  ist gegeben durch

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{\alpha - \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{d} \rangle} \vec{d}$$



Für  $\vec{d} = \vec{n}$  mit  $\|\vec{n}\| = 1$  gilt speziell

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\alpha - \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle) \vec{n}$$

Der Abstand von  $\vec{x}$  zur Hyperebene  $H$  beträgt also

$$\|\vec{x} - \vec{x}'\| = \|\vec{x} - \vec{x} - (\alpha - \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle) \vec{n}\| = |\alpha - \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle|$$

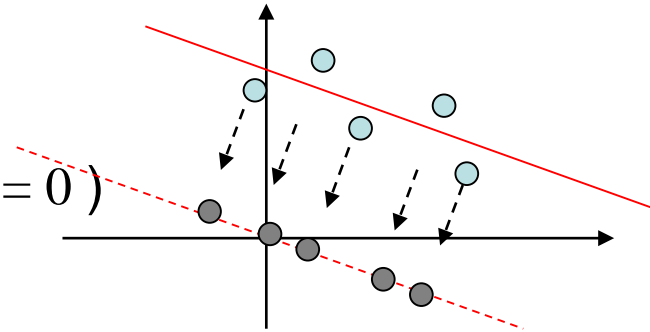
# Bestimmung der Endpunkte von Strecken...

Für die Bestimmung der Endpunkte einer Strecke werden die Pixel nicht auf die Gerade selbst, sondern auf die in den Ursprung verschobene Gerade ( $\alpha = 0$  setzen) projiziert:

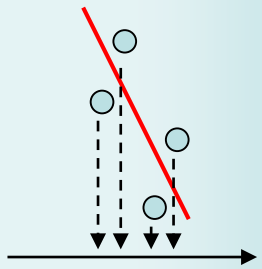
$$\{\vec{x} \mid \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle \geq 0\}$$

Die Projektion lautet also (wegen  $\alpha = 0$ )

$$\vec{x}'' = \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle \vec{n}$$



Projektion auf eine der Achsen geht nicht immer:

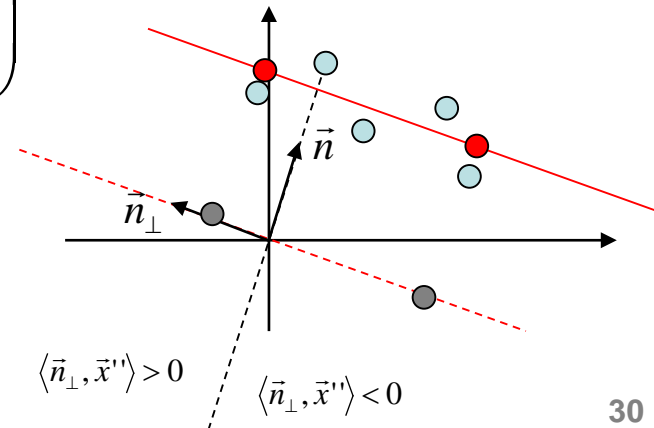


Die Punkte mit dem größten und dem kleinsten signierten Abstand zum Ursprung

$$\text{sgn}(\langle \vec{n}_\perp, \vec{x}'' \rangle) \cdot \|\vec{x}''\| \quad \text{mit} \quad \vec{n}_\perp = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \end{pmatrix}$$

liefern Anfangs- und Endpunkt der Strecke:

Projektion auf die Gerade!



# Zusammenfassung

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

IEEE-  
Veröffentl.:  
Elektron.  
Zugang via  
Hochschul-  
netz

Die Methode der kleinsten Quadrate ist eine universelle Technik, um mathematische Modelle (hier Funktionen) an Daten (hier Pixelpositionen) anzupassen.

- Geraden
- Polynome
- Kreise
- Ellipsen
- etc.

Besonders geeignet ist sie für Funktionen, die (in den Parametern, die bestimmt werden sollen) linear sind, denn dann entsteht ein lineares Gleichungssystem.

Zum Weiterlesen:

W. Gander, G. H. Golub, and R. Strebler. Least-Squares Fitting of Circles and Ellipses In BIT Numerical Mathematics, Volume 34, Number 4. Nov./Dec. 1994. Springer Netherlands

# Grenzen der Methode kleinster Quadrate

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

**Kl. Quadrate**

Hough-Trans

Die Methode kleinster Quadrate ist **nicht robust**, d.h. sie ist empfindlich gegenüber Ausreißern.



Robuste Methoden (wie z.B. M-Schätzer oder RANSAC) findet man z.B. in

Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling und Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Verlag Cambridge University Press. 3. Auflage. 2007.

<http://www.nrbook.com/a/bookcpdf.php>

Kapitel 15: Modeling of Data

...oder in neueren Auflagen.



# Hough-Transformation I

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

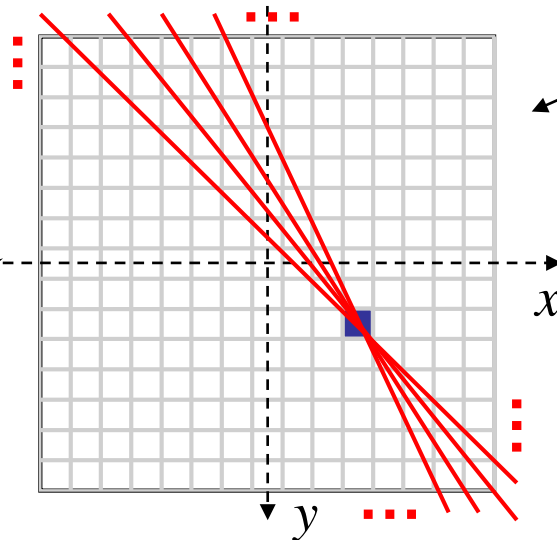
Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

Eine weitere (rechenintensive!) Methode zum Auffinden von Geraden im Bild ist die **Hough-Transformation**.

**Idee:** Für jedes im Kantenpixelbild markierte Pixel  $\vec{x}$  kommt ein ganzes Geradenbündel in Frage:



Ausnahmsweise legen wir den Ursprung in die Bildmitte

Das sind alle Geraden, die sich durch eine Gleichung der Form

$$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \alpha$$

schreiben lassen, wobei alle

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, \pi)$$

in Frage kommen.

# Hough-Transformation II

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

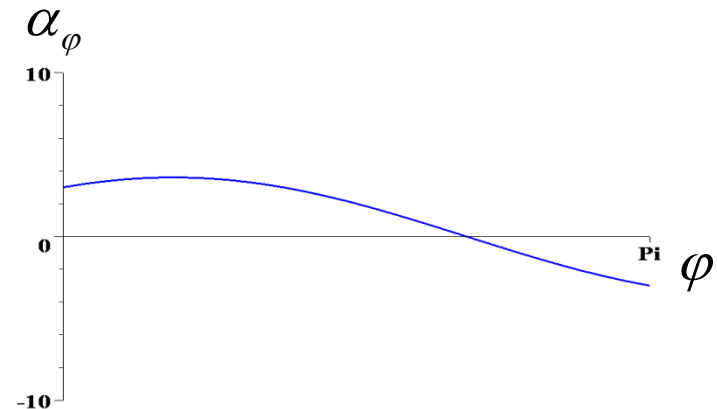
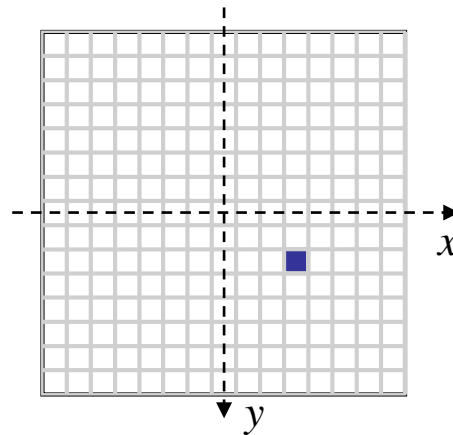
Kl. Quadrate

Hough-Trans

Für unser Pixel  $(x, y) = (3, 2)$  lässt sich also zu jedem Winkel  $\varphi \in [0, \pi)$  der Abstand der entsprechenden Geraden durch das Pixel zum Ursprung durch

$$\alpha_{\varphi} = 3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi$$

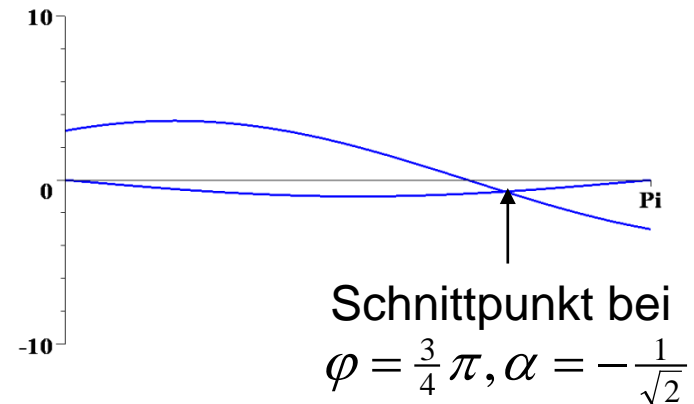
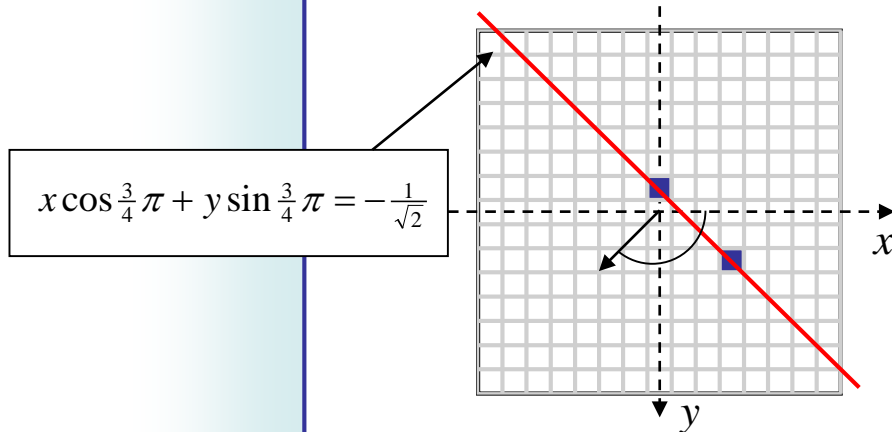
berechnen. Das ergibt folgende Kurve:



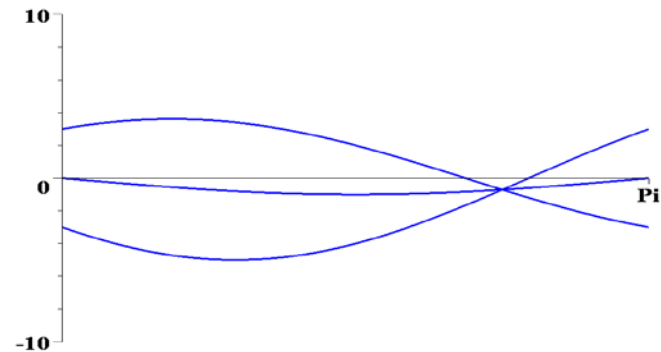
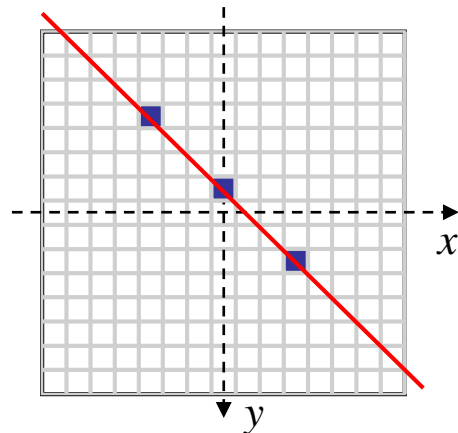
# Hough-Transformation III

...und für das Pixel  $(x, y) = (0, -1)$  die folgende Kurve

$$\alpha_\varphi = 0 \cos \varphi - 1 \sin \varphi$$



...und für  $(x, y) = (-3, -4)$



# Hough-Transformation IV

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

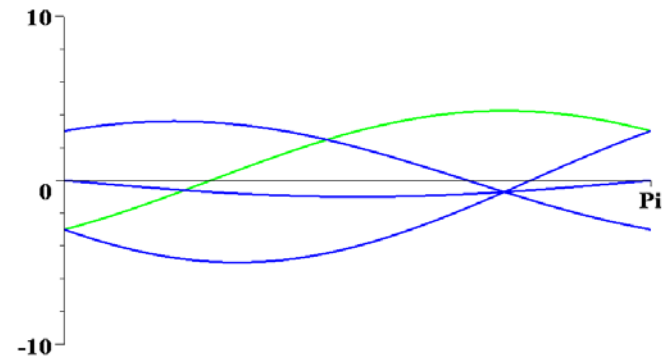
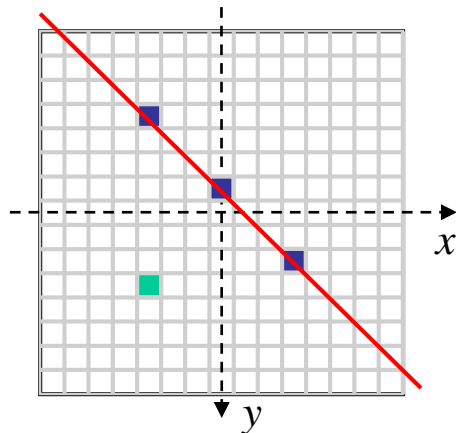
**In anderen Worten:** Für Pixel  $(x,y)$  die auf einer Geraden

$$\alpha = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

liegen, treffen sich die Kurven im **Hough-Raum** (auch **Parameter-Raum**) an der Stelle  $(\varphi, \alpha)$ .

Umgekehrt definieren die Parameter  $(\varphi, \alpha)$  an der Schnittstelle diejenige Gerade, die durch die Pixel geht.

Was passiert für weitere Pixel (hier:  $(x, y) = (-3, 3)$  )?



# Diskrete Hough-Transformation I

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

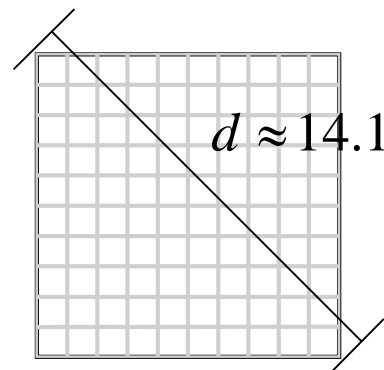
Gruppierung

Kl. Quadrate

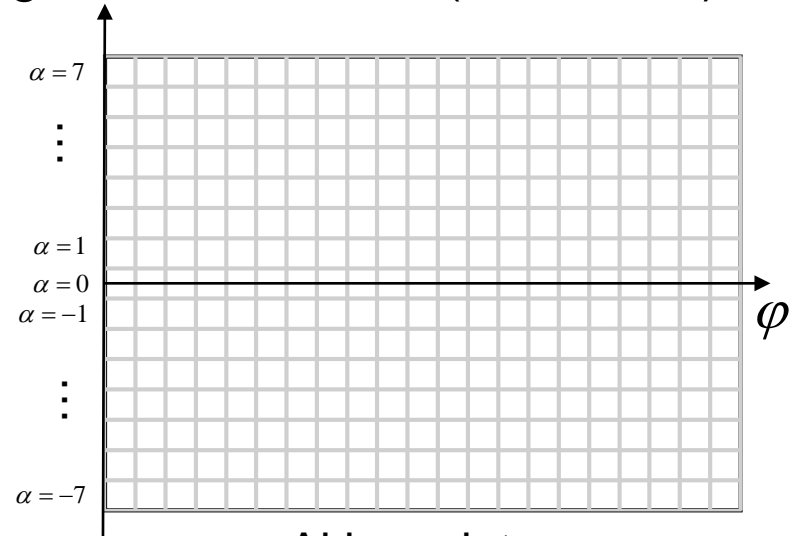
Hough-Trans

## Teil 1: Erzeugen des Hough-Raums

1. Lege den Ursprung in die Bildmitte (halbe Bildbreite bzw. halbe Bildhöhe von allen Kantenpixelkoordinaten abziehen).
2. Erzeuge den Hough-Raum in Form eines mit 0 initialisierten, ganzzahligen Arrays (=Akkumulator)
  - Breite  $b$ : in gewünschter Winkelauflösung  $\varphi_0, \dots, \varphi_N$
  - Höhe  $h$ : Bilddiagonale  $d$  in Pixeln (aufrunden)



Original



Akkumulator

# Diskrete Hough-Transformation II

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

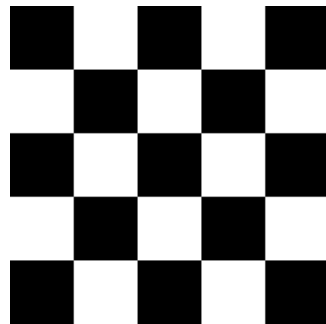
3. Für jedes (zentrierte) Kantenpixel  $(x_i, y_i)$  : Berechne zu jedem Winkel  $\varphi_n \in \{\varphi_0, \dots, \varphi_N\}$  den Wert

$$\alpha_n = x \cos \varphi_n + y \sin \varphi_n$$

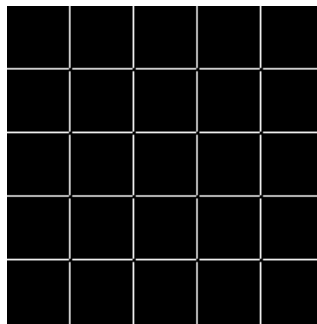
und inkrementiere den Akkumulator an der Stelle

$$(\varphi_n, \text{round}(\alpha_n + h / 2))$$

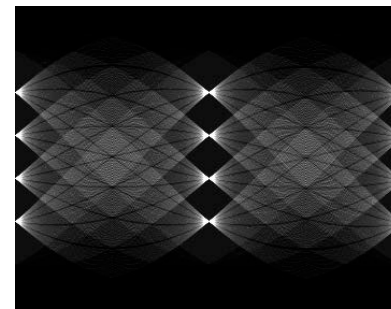
Beispiel:



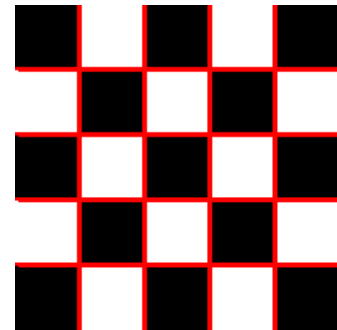
Original



Kantenpixel



Hough-Transformation



detektierte Geraden

# Diskrete Hough-Transformation III

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

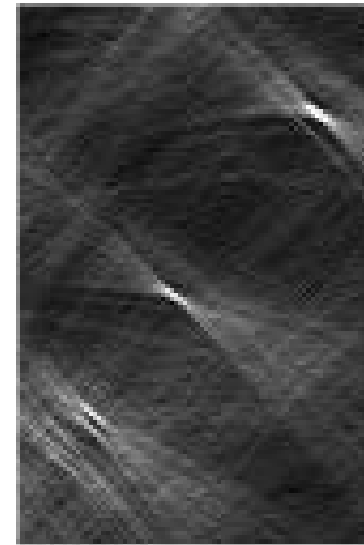
Kl. Quadrate

Hough-Trans

## Teil 2: Auswerten des Hough-Raums

Beobachtung:

1. Bei der nicht-diskreten Hough-Transformation wird jeder lokale Extremwert mit einer Geraden identifiziert.
2. Bedingt durch Rundungsfehler liegen diese Extremwerte jedoch nicht genau im Raster des diskreten Hough-Raums. Dadurch entstehen „verschmierte“ Extremwerte.



# Diskrete Hough-Transformation IV

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

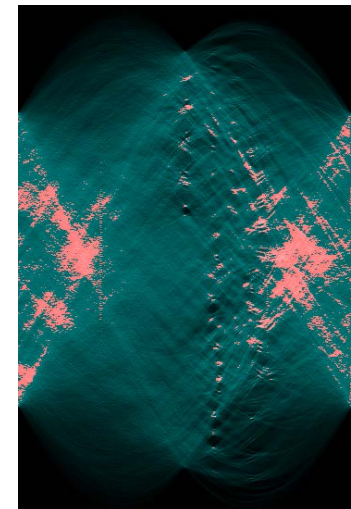
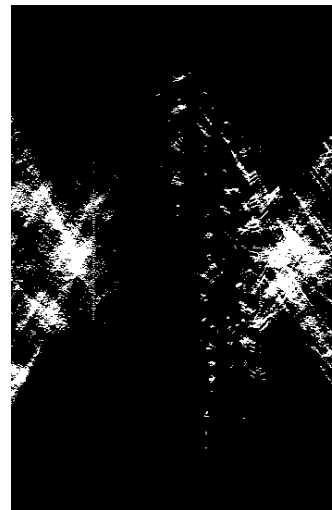
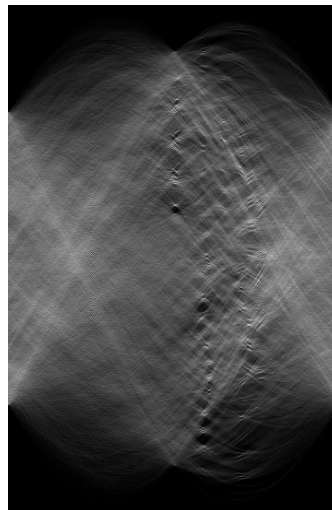
Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

Für den Umgang mit diesem Artefakt gibt es diverse Lösungen. Die einfachste ist:

- »non-maximum suppression« bezüglich aller benachbarten Pixel im Hough-Raum.
- Um den Rechenaufwand zu reduzieren kann zuvor noch eine Schwelle im Hough-Raum angelegt werden, so dass nur Geraden betrachtet werden, zu der eine Mindestzahl an Kantenpixeln beigetragen haben.





# Weitere Beispiele und Grenzen...

## Kapitel 5

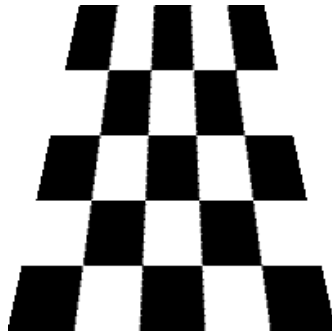
### Geom. Primitive

Kantenpixel

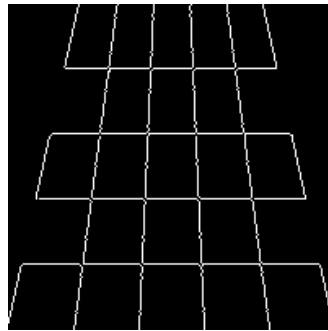
Gruppierung

Kl. Quadrate

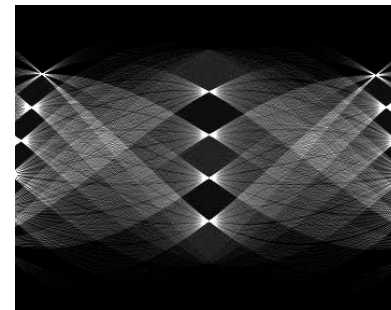
Hough-Trans



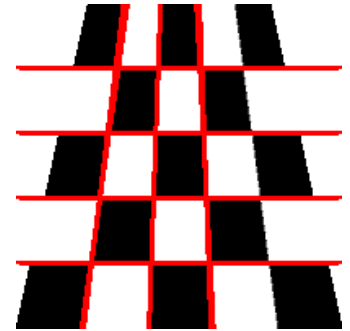
Original



Kantenpixel



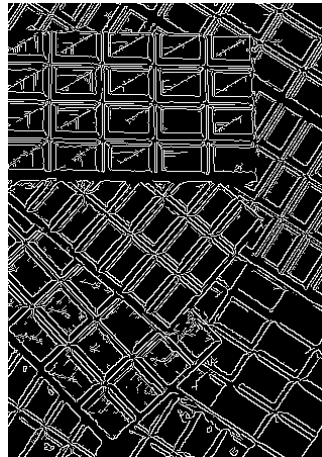
Hough-Transformation



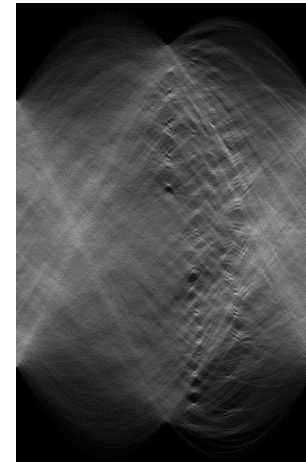
detektierte Geraden



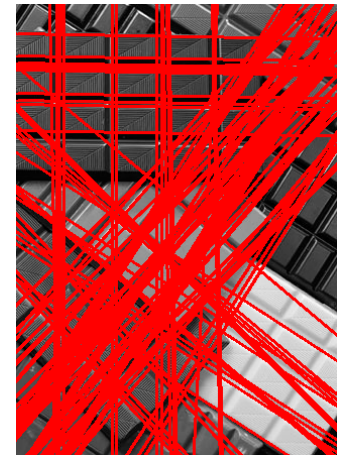
Original



Kantenpixel



Hough-Transformation



detektierte Geraden

# Zusammenfassung Hough-Transformation

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

#### Kantenpixel

#### Gruppierung

#### Kl. Quadrate

#### Hough-Trans

1. Die Hough-Transformation ist eine Methode zur Extraktion von Geraden in Kantenpixelbildern.
2. Eine Gruppierung der Kantenpixel wird nicht benötigt!
3. Mit der Hough-Transformation können auch Strecken extrahiert werden:
  1. Extrahiere alle relevanten Geraden.
  2. Finde zu jeder Gerade diejenigen Pixel, die in der Nähe der Geraden liegen (siehe Folie 29).
  3. Bestimme die Anfangs- und Endpunkte wie bereits beschrieben (siehe Folie 30).

# Ausblick Hough-Transformation I

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

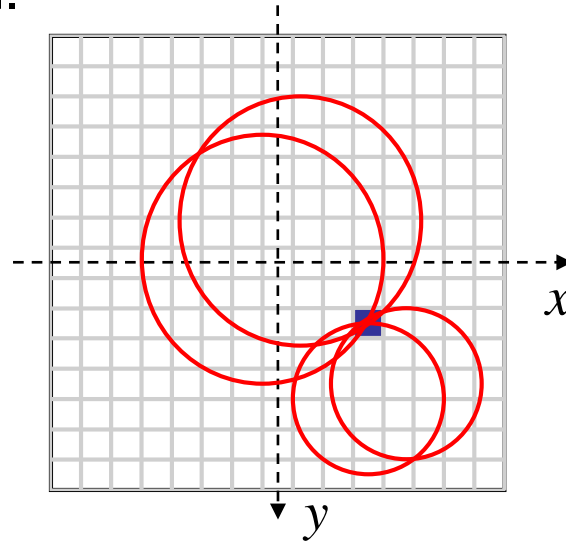
Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

**Bemerkung:** Die Hough-Transformation kann auch zur Extraktion von anderen Formen (Kreise, Ellipsen etc.) eingesetzt werden.



Dann erhöht sich allerdings die Dimension des Hough-Raums auf die Anzahl der Parameter und die Kurven sind (Hyper-) Flächen.

# Ausblick Hough-Transformation II

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

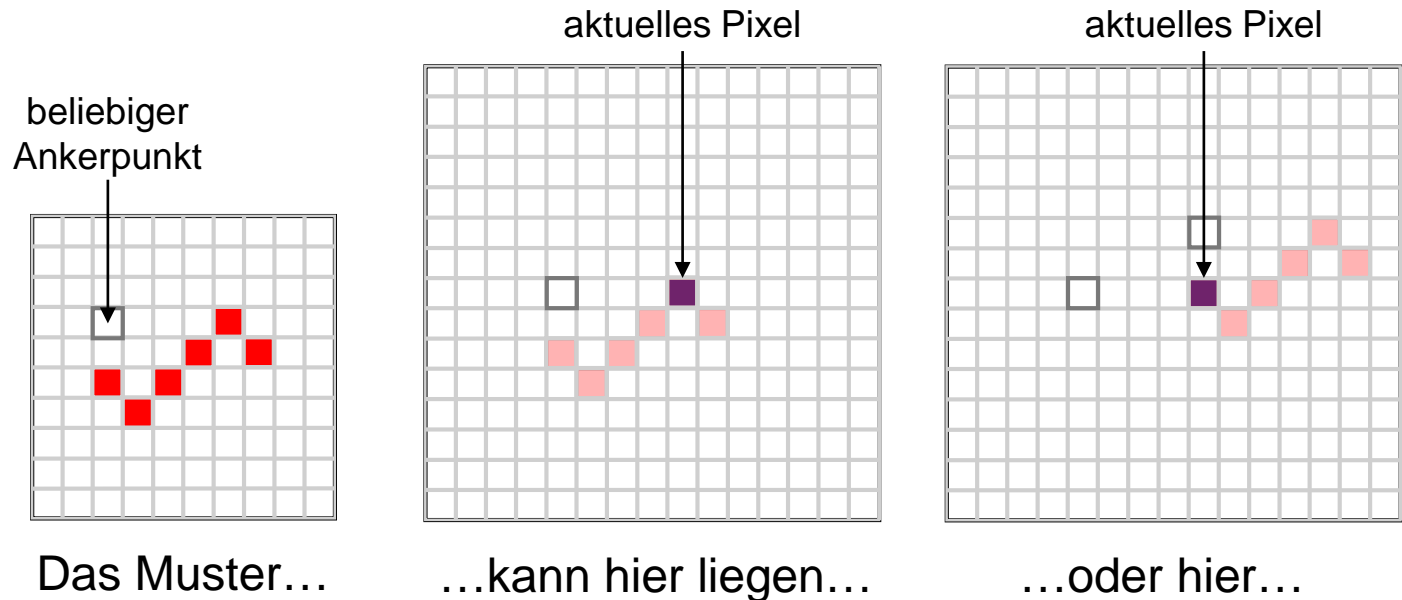
Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

Die **verallgemeinerte Hough-Transformation** liefert schließlich Detektionsmechanismen für beliebige, als Binärbild vorliegende Muster.



Das aktuelle Pixel »votet« für alle Ankerpunkte, für die das Muster das aktuelle Pixel trifft.

**Optimierung:** z.B. Berücksichtigung von Gradientenrichtung

# Anwendungsbeispiel – Lagebestimmung I

## Kapitel 5

### Geom. Primitive

Kantenpixel

Gruppierung

Kl. Quadrate

Hough-Trans

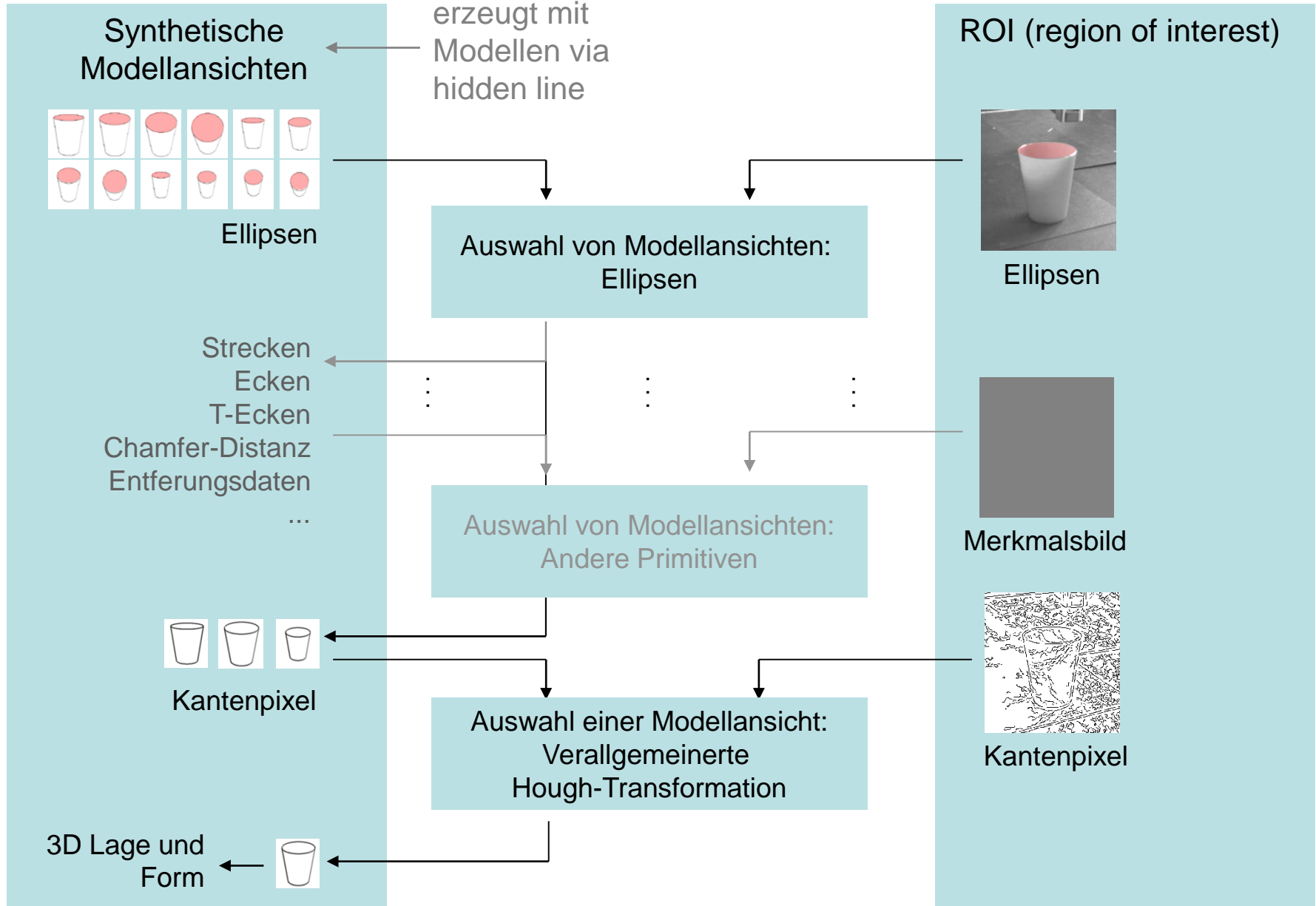
Graphics  
meets Vision!

Die verallgemeinerte Hough-Transformation kann zur Lagebestimmung (Lokalisierung in der Welt) bekannter Objekte eingesetzt werden:

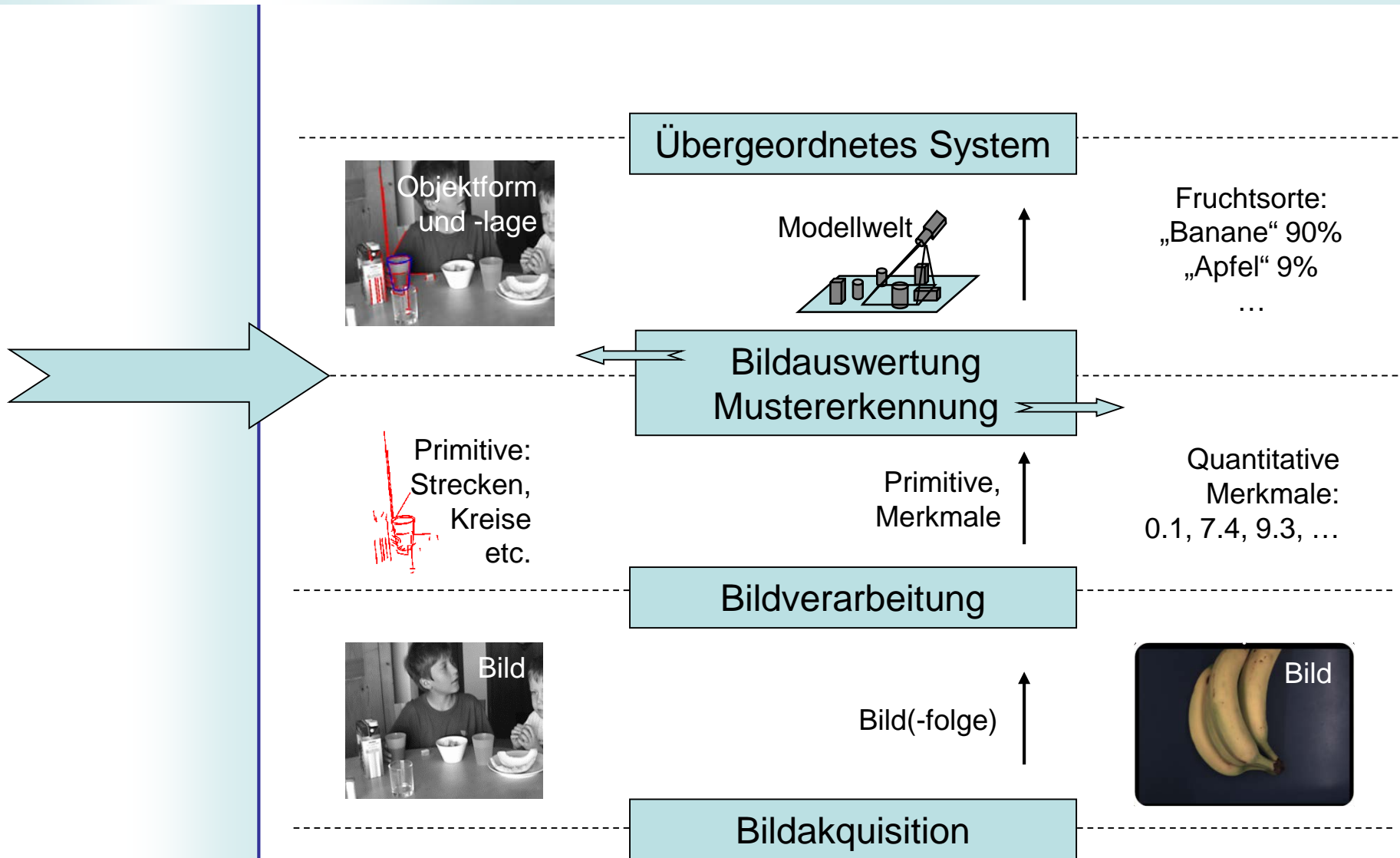
1. Erzeuge Beispielansichten (=Muster) des Objekts, z.B.
  - durch Aufnahme des Objekts in definierten Lagen oder
  - durch Rendern eines Objektmodells in definierten Lagen
2. Wende die verallgemeinerte Hough-Transformation auf alle Muster an.
3. Entscheidung zugunsten der Ansicht, die insgesamt (über alle Muster) die größte Anzahl »votes« für eine Position erhalten hat.

Durchgeführt in der Master-Thesis von Steffen Richter,  
betreut von Prof. Link (HS-KA) und mir (IOSB), veröffentlicht  
auf der Konferenz Humanoids 2007...

# Anwendungsbeispiel – Lagebestimmung II



# Hier sind wir jetzt...



Jetzt geht's weiter mit 3D-Techniken, zuvor jedoch...