Lösung 5.1

Sei $M :=$ Messfehler in Grad

a) $P(M > 1) = 1 - \Phi\left(\frac{1-0}{0.6}\right) \approx 1 - \Phi(1.67) \approx 1 - 0.9522 \approx$ **4.78%**

b) $P(M > 1 \mid M > 0) = \frac{P(M>1 \cap M>0)}{P(M>0)} = \frac{P(M>1)}{P(M>0)} = \frac{0.0478}{0.5} \approx$ **9.56%**

c) i: $0.478 \cdot (1 - 0{,}478)^3 \approx$ **4.13 %**

ii: Es gibt analog zu (i) noch drei weitere gleich wahrscheinliche Möglichkeiten, wie es zu dem gesuchten Ereignis kommen kann, nämlich dass nur die zweite oder nur die dritte oder nur die vierte Messung eine Abweichung über 1 Grad ergibt. Insgesamt ergibt sich also $4 \cdot 0.478 \cdot (1 - 0{,}478)^3 \approx$ **16.5 %**

Lösung 5.2

a)

K :=„Ereignis, dass das Gerät innerhalb der ersten 3 Jahre kaputtgeht“

L := „Lebensdauer der Geräts“

Z := Ereignis, dass der Kunde zufrieden ist“

Laut Angabe gilt: P(Z | K) = 20% und $P(Z \mid \overline{K}) = 60\%$ und E(L) = 2 Jahre

Gesucht ist P(K | Z)

b)

Im Folgenden wird L stets in der Einheit „Jahre“ angegeben:

Es gilt: $P(K) = P(L \leq 3) = F_L(3) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 3} = 1 - e^{-1.5} \approx \mathbf{77.7\%}$

Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$P(K \mid Z) = \frac{P(Z \mid K) \cdot P(K)}{P(K)} = \quad \text{(Satz v.d.totalen W.)}$$

$$= \frac{P(Z \mid K) \cdot P(K)}{P(Z \mid K) \cdot P(K) + P(Z \mid \overline{K}) \cdot P(\overline{K})} = \frac{0.2 \cdot 0.777}{0.2 \cdot 0.777 + 0.6 \cdot (1 - 0.777)} \approx \underline{\mathbf{54\ \%}}$$

Lösung 3.2

- **a)** Der Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht dem Mittelwert einer Häufigkeitsverteilung. Bei einer symmetrischen Verteilung ist das die Symmetrieachse, also hier: **E(X) = 4**

- **b)** **E(Z) = 4** (Begründung wie bei a)

- **c)** **(i)**, da die Wahrscheinlichkeitsdichte im Bereich 4.0 bis 4.1 höher ist als in den anderen beiden Bereichen.

- **d)** Als Dichte bei X=4 liest man ab: f(4) ≈ 0.3.
  Es gilt: $P(3.9 < X < 4.1)$ ist die Fläche unter der Dichtefunktion zwischen 3.9 und 4.1.
  Diese lässt sich annähern durch die Fläche eines Rechtecks mit Breite 0.2 und Höhe 0.3, also $0.3 \cdot 0.2 = 0.06 =$ **6.0 %**
  Unter Verwendung eines Integrals lässt sich der Gedankengang so schreiben:
  $P(3.9 < X < 4.1) \;=\; \int_{3.9}^{4.1} f(x)dx \;\approx\; 0.3 \cdot (4.1 - 3.9) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 =$ **6.0 %**

- **e)** **Z hat größere Standardabweichung**, da Werte mit großer Abweichung vom Erwartungswert 4 höhere und Werte mit kleiner Abweichung von 4 kleinere Dichte haben als bei *X*.

- **f)** **σ(X) = 0.8**: Die Werte bewegen sich im Intervall [2;6], die Abweichungen vom Erwartungswert 4 bewegen sich also zwischen 0 und 2. Die Werte mit kleiner Abweichung von 4 haben höhere Wahrscheinlichkeitsdichte als die Werte mit großer Abweichung. Insofern ist als Standard-Abweichung ein Wert zu erwarten, der kleiner ist als die Mitte zwischen kleinster und größter Abweichung, also eher ein Wert kleiner als 1. Dass die Quadrate der Abweichungen und nicht die Beträge gemittelt werden führt aber eher zu einem höheren Wert. Insgesamt erscheint 0.8 am plausibelsten.

Lösung 5.3

a)

x_0	-3	0	3
$P(X = x_0)$	0.2	0.5	0.3
$P(X \le x_0)$	0.2	0.7	1.0

b) **Nein**, denn $P(X_1 = 2) = 10\% + 30\% = 40\%$,
$P(X_2 = 1) = 40\% + 30\% = 70\%$,
aber $P(X_1 = 2 \cap X_2 = 1) = 30\%$ $\neq$ 0.4· 0.7= 28%
(Die Abweichung von stochastisch unabhängigem Verhalten ist allerdings nicht sehr groß.)

c) $E(X) = -3 * 0.2 + 0 * 0.5 + 3 * 0.3 = \mathbf{0.3}$
$V(X) = (-3 - 0.3)^2 * 0.2 + (0 - 0.3)^2 * 0.5 + (3 - 0.3)^2 * 0.3 = 4.41$
σ(X) = **2.1** (Wurzel von 4.21)

Lösung 5.4

a) Wegen der Symmetrie der Standardnormalverteilung um Null ist das *q*-Quantil gleich Minus das *p*-Quantil, die Summe also **Null**.

b) Wegen der Symmetrie der Normalverteilung um Null liegt das *q*-Quantil gleich weit unterhalb wie das *p*-Quantil oberhalb des Erwartungswertes. Der Mittelwert beider Quantile ist also **μ** .

Lösung 5.5

Wir bestimmen die kumulierte Verteilungsfunktion der berechneten Werte. D.h. wir berechnen für $x_0 \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein mit der Formel $F_X^{-1}(Z)$ aus Z berechneter Wert $\le x_0$ ist:

$P(\, F^{-1}(Z) \le x_0 \,) \quad =$ (da F streng monoton wächst)

$= P(\, F(F^{-1}(Z)) \le F(x_0)\,) \quad =$ (da F^{-1} Umkehrfunktion von F ist)

$= P(\, Z \le F(x_0)\,) \quad =$ (da Z gleichverteilt auf]0;1[ )

$= F(x_0)$ q.e.d.