Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Wintersemester 2013/2014

Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (5 Punkte) GGT
Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus den

$$\mathrm{ggT}(840, 455).$$

Aufgabe 2: (9 = 4 + 5 Punkte) Kombinatorik
In der Mensa gibt es 7 verschiedene Beilagen.

a) Lara wählt zwei verschiedene (!) Beilagen aus. Wieviele Möglichkeiten hat sie?

b) Hans wählt drei Beilagen. Er nimmt aber öfters auch mehrere gleiche Beilagen. Wieviele Möglichkeiten gibt es für Ihn?

Aufgabe 3: (16 = 5 + 5 + 6 Punkte) Determinante
Gegeben sind die beiden folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A.

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix B.

c) Invertieren Sie die Matrix A.

Aufgabe 4: (16 = 6 + 3 + 7 Punkte) Lineare Funktion
Betrachten Sie folgende lineare Funktion:

$$f : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 + 2v_3 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 + v_2 \\ 2v_1 + 3v_3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrix A mit

$$A \cdot \vec{v} = f(\vec{v}).$$

b) Wann heißt eine Funktion g, die einen Vektorraum V_1 auf einen Vektorraum V_2 abbildet, linear?

c) Zeigen Sie, dass die Funktion f linear ist.

Aufgabe 5: (12 = 10 + 2 Punkte) LGS

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des linearen Gleichungssystems.

b) Wie ist der Rang des linearen Gleichungssystems?

Aufgabe 6: (16 = 4 + 2 + 5 + 5) Hornerschema, Regel von Cramer

a) Das Polynom
$$p(r) = r^3 - 3r + 2$$
hat eine Nullstelle bei $r = -2$. Berechnen Sie
$$\frac{p(r)}{(r+2)}$$
mit Hilfe des Hornerschema.

b) Wie lauten sämtliche Nullstellen des Polynomes $p(r)$?

c) Für welche r besitzt das LGS
$$\begin{array}{rcrcrcl} rx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & rx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & rx_3 & = & 1 \end{array}$$
eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Behauptung. (Beachten Sie Aufgabenteil a) und b))

d) Es sei nun r der Art gewählt, dass das LGS eindeutig lösbar ist. Bestimmen Sie x_2 in Abhängigkeit von r mit Hilfe der Regel von Cramer.

Aufgabe 7: (16 = 10 + 3 + 3 Punkte) Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung

Gegeben ist die Matrix:
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

b) Geben Sie die Matrix B an, für die
$$B^{-1}AB$$
eine Diagonalmatrix ist.

c) Formen Sie B um in eine orthogonale Matrix.