Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Sommersemester 2014

Musterlösung für die Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (9 Punkte) Injektiv, surjektiv

a) Die Funktion f_1 ist surjektiv und injektiv, denn jedem der vier Elemente aus dem Definitionsbereich wird ein unterschiedliches Element aus dem Bildbereich zugeordnet (injektiv) und alle vier Elemente des Bildbereiches haben ein Urbild (surjektiv).

b) Bei f_2 haben wir die gleiche Situation wie bei f_1. Jedem der vier Elemente aus dem Definitionsbereich wird ein unterschiedliches Element aus dem Bildbereich zugeordnet (injektiv) und alle vier Elemente des Bildbereiches haben ein Urbild (surjektiv).

c) Bei f_3 werden 0 und 1 auf das gleiche Element abgebildet, daher ist die Abbildung nicht injektiv. Ferner wird das Element 00 nicht erreicht. Daher ist die Abbildung nicht surjektiv.

d) Bei f_4 werden wiederum 0 und 1 auf das gleiche Element abgebildet. Also ist die Abbildung nicht injektiv. Der Bildbereich umfaßt 8 Elemente, aber der Definitionsbereich nur 4. Daher kann die Abbildung schon von daher niemals surjektiv sein.

e) f_5 ist surjektiv, da sowohl die 0 als auch die 1 aus dem Bildbereich ein Urbild haben, aber sie ist nicht injektiv, da z.B. 0 und 2 auf das gleiche Element abgebildet werden. Auch hier könnte auch schon allgemeiner argumentiert werden. Eine Abbildung von vier Elementen auf zwei ELemente ist niemals injektiv.

Aufgabe 2: (12 = 4 + 4 + 4 Punkte) Restklassenrechnung im Polynomring

a)

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (x^3 + x + 1)(x^5 + x^2 + 1) \\ &= x^8 + x^5 + x^3 + x^6 + x^3 + x + x^5 + x^2 + 1 \\ &= x^8 + x^6 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p \cdot q &\equiv x^8 + x^6 + x^2 + x + 1 \\ &\equiv x^8 + x^6 + x^2 + x + 1 + x(x^7 + x^3 + x + 1) \\ &\equiv x^8 + x^6 + x^2 + x + 1 + x^8 + x^4 + x^2 + x \\ &\equiv x^6 + x^4 + 1. \end{aligned}$$

c) Die Restklassen können mit Polynomen vom Grad kleiner oder gleich 6 dargestellt werden. Da diese Polynome 7 verschiedene Koeffizienten haben und jeder Koeffizient gleich 0 oder 1 sein kann, gibt es insgesamt

$$2^7 = 128$$

Restklassen.

Aufgabe 3: (12 = 9 + 3 Punkte) Interpolation

a)

$$\begin{array}{r|ccccccc}
1 & 5 & & & & \\
 & & 2 & & & \\
3 & 9 & & \frac{1}{6} & & \\
 & & 3 & & -\frac{19}{240} \\
7 & 21 & & -\frac{5}{8} & & \\
 & & -2 & & & \\
11 & 13 & & & &
\end{array}$$

Damit lautet das Interpolationspolynom:

$$p(x) = 5 + 2(x-1) + \frac{1}{6}(x-1)(x-3) - \frac{19}{240}(x-1)(x-3)(x-7).$$

b)

$$p(2) = 5 + 2 + \frac{1}{6}(-1) - \frac{19}{240}(-1)(-5) = 6\frac{7}{16}.$$

Aufgabe 4: (6 Punkte) Linear unabhängig

Da es sich hier um drei Vektoren der Länge 5 handelt, kann die Determinante nicht eingesetzt werden. Wir prüfen die lineare Unabhängigkeit mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens, wobei wir die drei Vektoren als Zeilen einer Matrix eintragen.

I	5	0	1	3	−9
II	0	1	3	7	−2
III	−10	3	7	15	12
I	5	0	1	3	−9
II	0	1	3	7	−2
III+2I	0	3	9	21	−6
I	5	0	1	3	−9
II	0	1	3	7	−2
III-3II	0	0	0	0	0

Es ergibt sich, dass die drei Vektoren linear abhängig sind, da wir einen Rang 2 bekommen haben. Nur wenn sich der Rang 3 ergeben hätte, dass wären die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 5: (18 = 9 + 5 + 4 Punkte) LGS

a) Die Matrix T liefert eine Translation des Koordinatensystems der Art, dass der Ursprung dann auf dem Punkt $A(1|1)$ liegt. Die Matrix R liefert die Drehung um den Koordinatenursprung um 30°. Die Matrix T^{-1} verschiebt das Koordinatensystem wieder in die Ausgangslage zurück:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrizen müssen in der angegebenen Reihenfolge multipliziert werden:

$$T^{-1} \cdot R \cdot T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 + 3/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 + 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Für den Eckpunkt B gilt:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 + 3/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 + 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analog folgt für die Ecke C:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 + 3/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 + 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: (16 = 4 + 7 + 5) LGS, Determinanten, Regel von Cramer

a) Wir berechnen die Determinante der Matrix, die von den Werten der linken Seite des LGS gebildet wird, mit Hilfe der Regel von Sarrus (Entwicklung nach Laplace wäre auch möglich).

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & c & -3 & -2 \end{array} \right. = -c + 6 - 8 - 6 + 4 + 2c = c - 4.$$

Also ist für alle $c \neq 4$ das LGS eindeutig lösbar.

b) Wir benennen die Spalten der Matrix des LGS mit $\vec{a}_i$ und den Vektor auf der rechten Seite mit $\vec{b}$. Dann gilt für x_2:

$$x_2 = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3)}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}.$$

Wir berechnen:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & c \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & c \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(-c+2) - 2(-1-3) \\ &= 2c+4 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir unter Verwendung des Ergebnisses aus Teil a):

$$x_2 = \frac{2c+4}{c-4}.$$

c)

$$\begin{array}{lrrr|r} \text{I} & 1 & -1 & 2 & -1 \\ \text{II} & 2 & -1 & 2 & 0 \\ \text{III} & -3 & -2 & 5 & -1 \\ \hline \text{I} & 1 & -1 & 2 & -1 \\ \text{II-2I} & 0 & 1 & -2 & 2 \\ \text{III+3I} & 0 & -5 & 11 & -4 \\ \hline \text{I+II} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{II} & 0 & 1 & -2 & 2 \\ \text{III+5II} & 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline \text{I} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{II+2III} & 0 & 1 & 0 & 14 \\ \text{III} & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Also lautet die Lösung: $x_1 = 1, x_2 = 14, x_3 = 6$.

Aufgabe 7: (17 = 8 + 6 + 3 Punkte) Eigenwerte, Eigenvektoren

a) Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= \\ (-2-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda)\left((-3-\lambda)(-1-\lambda)+1\right) &= \\ (-1)(\lambda+2)^3(\lambda^2+4\lambda+4) &= (-1)(\lambda+2)^5 = 0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir fünf mal den gleichen Eigenwert:

$$\lambda = -2.$$

b) Wir berechnen die Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\lambda = -2$ und betrachten das entsprechende homogene LGS:

I	-1	1	0	0	0
II	-1	1	0	0	0
III	-3	1	0	1	1
IV	-2	1	0	0	1
V	-1	1	0	0	0
(-1)I	1	-1	0	0	0
III-3I	0	-2	0	1	1
IV-2I	0	-1	0	0	1
I-III	1	0	0	0	-1
-III	0	1	0	0	-1
II-2III	0	0	0	1	-1

Die Lösungsmenge dieses homogenen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle diese Linearkombinationen sind Eigenvektoren.

c) Wir haben nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden. Für eine Diagonalisierung hätten wir aber 5 linear unabhängige Eigenvektoren benötigt. Die Matrix kann also nicht diagonalisiert werden.