Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik 2

Kapitel 2: Folgen und Reihen

Folgen

Aufgabe 2.1 Geben Sie die ersten fünf Glieder der Folgen an:

a) $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N}$

d) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2.2 Geben Sie rekursive Bildungsgesetze zu diesen Folgen an:

a) $(3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$

b) Fibonaccizahlen:

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$

c) $(4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$

d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots)$

Aufgabe 2.3 Geben Sie die ersten fünf Glieder der Teilfolgen an:

a) $a_n = n, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{2n} =$

b) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{2n+1} =$

c) $a_n = n, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{3n+1} =$

d) $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{2n+1} =$

Aufgabe 2.4 Geben Sie Bildungsgesetze der Teilfolgen an:

a) $a_n = 2^n, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{2n} =$

b) $a_n = (-1)^n \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{2n+1} =$

c) $a_n = n!, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{2n} =$

d) $a_n = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_{2n+1} =$

Konvergenz von Folgen

Aufgabe 2.5 Zeigen Sie mit Hilfe der Definition für konvergente Folgen:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+1} = 3$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ fest

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 2.6 Berechnen Sie mit dem Sandwichsatz die Grenzwerte der folgenden Folgen. Beachten Sie dabei, dass nach Aufgabe 2.5a) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

a) $c_n = \frac{1}{n!}$

b) $c_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots 1}{n\cdot n\cdots n}$

c) $c_n = \frac{1}{n^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ fest

d) $c_n = \sqrt[n]{q}$ für alle $q \geq 1$ fest. Verwenden Sie dabei $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Aufgabe 2.7 Bestimmen Sie mit dem Limessatz die folgenden Grenzwerte:

a) $a_n = (1 + \frac{2}{n!})^2$

b) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$

c) $a_n = (3 + 100e^{-n})\frac{1}{2^{n-3}}$

Aufgabe 2.8 Warum sind diese Folgen divergent?

a) $a_n = 2^n$

b) $a_n = (-1)^n n^n$

c) $a_n = (-1)^n \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)$

Aufgabe 2.9 Sind die Folgen bestimmt divergent (=uneigentlich konvergent) oder divergent oder gar konvergent?

a) $a_n = (-1)^n n^2$

b) $a_n = 2n + (-1)^n$

c) $a_n = \frac{n^3+2}{-n}$

d) $a_n = n^n$

Aufgabe 2.10 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit dem Satz über die Konvergenz rationaler Folgen.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2+1}{6n^2+5n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^6+2n^2-1}{-0.4n^4}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+10^{20}}{7n^2+10^{20}}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n-1000}{0.1n+5}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+n^3}{e+n^2}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1000n^2}{\pi(n+1)^3}$

Aufgabe 2.11 Profiaufgaben.

a) Zeigen Sie, dass für alle $|q| < 1$ gilt: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Definitiv eine Profiaufgabe.

Reihen

Aufgabe 2.12 Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen mit Hilfe der Definition konvergenter Reihen (Teilsummenkriterium).

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Aufgabe 2.13 Sind die folgenden Reihen alternierend? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k\sqrt{k+1}}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2+(-1)^{k+1}\cdot 9}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3+1}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+2(-1)^k}$

Aufgabe 2.14 Prüfen Sie für die folgenden Reihen, ob das Leibniz-Kriterium anwendbar ist.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(-1)^k k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot k}{k^3+1}$

Aufgabe 2.15 Quotientenkriterium. Prüfen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz.

a) Binominalreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} q^k$ mit $q \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie dem verallgemeinerten Binominalkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\Pi_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}{k!}$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k\, k!}{k^k}$. Hinweis: Es gilt $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\, k!}{k^k}$.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k\, k!}{k^k}, q \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.16 Profiaufgabe. Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergent ist.

Aufgabe 2.17 Cauchy-Produkt.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produkts

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)$$

dass für $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k(k+1) = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2$$

b) Berechnen Sie

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)$$

mit Hilfe des Cauchy-Produkts.