Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Sommersemester 2013

Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (10 = 2 + 3 + 2 + 3) surjektiv, injektiv

Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$f_1 : \{\text{Teilnehmer dieser Klausur}\} \mapsto \{\text{Tage im Jahr}\},$$

die jedem Studierenden dieser Klausur seinen Geburtstag zuordnet und

$$f_2 : \{\text{Teilnehmer dieser Klausur}\} \mapsto \{\text{5-stellige Zahl}\},$$

die jedem Teilnehmer die Matrikelnummer zuordnet.

a) Ist die Funktion f_1 surjektiv? Begründung!

b) Was könnten Sie daraus schliessen, wenn Sie erfahren, dass die Funktion f_1 injektiv ist?

c) Ist die Funktion f_2 surjektiv? Begründung!

d) Ist die Funktion f_2 injektiv? Begründung!

Aufgabe 2: (6 Punkte) Äquivalenzrelation

Wir führen folgende Relation R auf der Menge der Polynomfunktionen $\{f|f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\}$ ein: es gilt fRg genau dann, wenn f und g gleichen Grad besitzen. Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 3: (12 = 7 + 5 Punkte) Interpolation

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom mit den Stützstellen x_i und den Meßwerten y_i für $i = 0, \ldots, 3$:

x_i	1	2	3	4
y_i	5	7	8	4

Sie brauchen dabei das Polynom nicht auszumultiplizieren!

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zur gleichen Messreihe, wenn noch ein neuer Messwert $(x_4 = 5, y_4 = 6)$ neu hinzukommt. Auch hier muss das Polynom nicht ausmultipliziert werden!

Aufgabe 4: (6 Punkte) Matrixprodukt

Bilden Sie das Matrixprodukt $A \cdot B$ für die beiden folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: (21 = 5 + 8 + 4 + 4) Determinante, inv. Matrix, Skalarprod.
Gegeben ist die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante von A!
b) Invertieren Sie die Matrix A!
c) Bestimmen Sie die Länge der drei Spaltenvektoren der Matrix A!
d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden ersten Spaltenvektoren der Matrix A!

Da Sie ja keinen Taschenrechner zur Verfügung haben, lassen Sie die Wurzeln, die nicht glatt aufgehen, und die Cosinusfunktion einfach stehen.

Aufgabe 6: (19 = 5 + 5 + 9 Punkte) Rotations- und Translationsmatrix

In der Ebene soll eine Rotation um den Punkt $A(2|3)$ um 30° ausgeführt werden. Der Punkt A kann in homogenen Koordinaten beschrieben werden durch den Vektor:

$$A := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es geht um die Matrix, die diese Rotation um den Punkt A beschreibt. Verwenden Sie dabei die Formeln:

$$\sin(30°) = \frac{1}{2}, \quad \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die bei der Berechnung der Matrix auftretenden Wurzeln lassen Sie wieder einfach stehen.

a) Wie lautet die Matrix für eine Rotation um 30° um der Ursprung des Koordinatensystems (bei Verwendung von homogenen Korrdinaten)?

b) Wie lautet die Matrix für die benötigte Translation und deren Inverse?

c) Berechnen Sie die Matrix für die Rotation um den Punkt A.

Aufgabe 7: (16 = 6 + 6 + 4) Eigenwerte, Eigenvektoren
Gegeben ist folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A!

b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten!

c) Wie lautet die diagonalisierte Matrix A ?