Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Prof. Dr. Frank Schaefer
Sommersemester 2013

Musterlösung für die Klausur: Mathematik für Informatiker 1

(90 Punkte, 90 Min.)

Aufgabe 1: (9 = 2 + 3 + 2 + 2) Funktionen

a) Nein, die Funktion f_1 kann nicht surjektiv sein, da keine 365 Personen an der Klausur teilnehmen. Daher werden nicht alle Tage des Jahres erreicht.

b) Wenn die Funktion f_1 injektiv ist, dann haben alle Teilnehmer an verschiedenen Tagen Geburtstag (was übrigends eher unwahrscheinlich ist!).

c) Auch die Funktion f_2 ist nicht surjektiv. Dazu müßten ja alle 100.000 verschiedenen Matrikelnummern erreicht werden.

d) Die Funktion f_2 muß injektiv sein, da sonst zwei verschiedene Studierende die gleiche Matrikelnummer hätten, und gerade das soll ja nicht der Fall sein.

Aufgabe 2: (5) Äquivalenzrelation
Für eine Äquivalenzrelation müßte gelten:

a) fRf

b) $fRg \Longrightarrow gRf$

c) $fRg \wedge gRh \Longrightarrow fRh$

Dies ist aber leicht einzusehen, da diese Regeln für den Grad einer Funktion $\deg f$ gelten:

a) $\deg f = \deg f$

b) $\deg f = \deg g \Longrightarrow \deg g = \deg f$

c) $\deg f = \deg g \wedge \deg g = \deg h \Longrightarrow \deg f = \deg h$

Also ist dies eine Äquivalenzrelation. Man könnte auch noch allgemeiner argumentieren und sagen, diese Äquivalenzrelation baut auf der Gleichheit auf. Für die Gleichheit gelten immer diese drei Regeln der Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3: (12 = 7 + 5 Punkte) Interpolation

a)

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 5 \\
 & & 2 \\
2 & 7 & & -\frac{1}{2} \\
 & & 1 & & -\frac{2}{3} \\
3 & 8 & & -\frac{5}{2} \\
 & & -4 \\
4 & 4
\end{array}$$

Damit lautet das Interpolationspolynom:

$$p(x) = 5 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3).$$

b)

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & 5 \\
 & & 2 \\
2 & 7 & & -\frac{1}{2} \\
 & & 1 & & -\frac{2}{3} \\
3 & 8 & & -\frac{5}{2} & & \frac{5}{8} \\
 & & -4 & & \frac{11}{6} \\
4 & 4 & & 3 \\
 & & 2 \\
5 & 6
\end{array}$$

Das neue Polynom lautet somit:

$$p_{neu}(x) = p(x) + \frac{5}{8}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$= 5+2(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)-\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{5}{8}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Aufgabe 4: (6 Punkte) Matrixprodukt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: (21 = 5 + 8 + 4 + 4)

a) Berechnung der Determinante von A:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right. = 8 + 12 + 6 - 4 - 9 - 16 = -3.$$

b) Berechnung der Inversen Matrix von A:

$$
\begin{array}{r|rrr|rrr}
 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
II-2I & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
III-2I & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-1/2II & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\
III+II_{neu} & 0 & 0 & 3/2 & -1 & -1/2 & 1 \\
\hline
I-2II & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\
2/3III & 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \\
\hline
I-2III & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 5/3 & -4/3 \\
II+1/2III & 0 & 1 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \\
 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/3
\end{array}
$$

Die inverse Matrix lautet also:

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/3 & -4/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.
$$

c)

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}_1| &= \sqrt{1+4+4} = 3 \\
|\vec{a}_2| &= \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17} \\
|\vec{a}_3| &= \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}
\end{aligned}
$$

d) Der gesuchte Winkel α errechnet sich durch:

$$
cos(\alpha) = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{2+4+6}{3\sqrt{17}} = \frac{12}{3\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.
$$

Aufgabe 6: (19 = 5 + 5 + 9 Punkte) Rotations- und Translationsmatrix

a) Die gesuchte Rotationsmatrix für die Drehung um den Ursprung des Koordinatensystems bzgl. homogener Koordinaten lautet:

$$
R := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

b) Die Translationsmatrix und ihre Inverse lauten:

$$
T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

c) Die Matrix für die Rotation um den Punkt A berechnet sich durch:

$$T^{-1} \cdot R \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -1-\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}+\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 2-\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: (16 = 6 + 6 + 4 Punkte) Eigenwerte, -vektoren

a) Wir stellen das charakteristische Polynom auf:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 8 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die Berechnung der Determinante ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= (6-\lambda)^2 - 16 \\ &= 36 - 12\lambda + \lambda^2 - 16 \\ &= \lambda^2 - 12\lambda + 20 \\ &= (\lambda-2)(\lambda-10) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 10$.

b) Wir setzen die beiden Eigenwerte in das Charakteristische Polynom ein und lösen das entsprechende homogene LGS. Wir beginnen mit dem Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{array}{cc} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Damit erhalten wir den Eigenvektor:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir den nächsten Eigenwert: $\lambda_2 = 10$.

$$\begin{array}{cc} -4 & 8 \\ 2 & -4 \\ \hline 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Damit erhalten wir den Eigenvektor:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Da diese 2×2-Matrix zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist sie diagonalisierbar. Die Diagonalmatrix setzt sich in der Diagonalen immer aus den Eigenwerten zusammen.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$