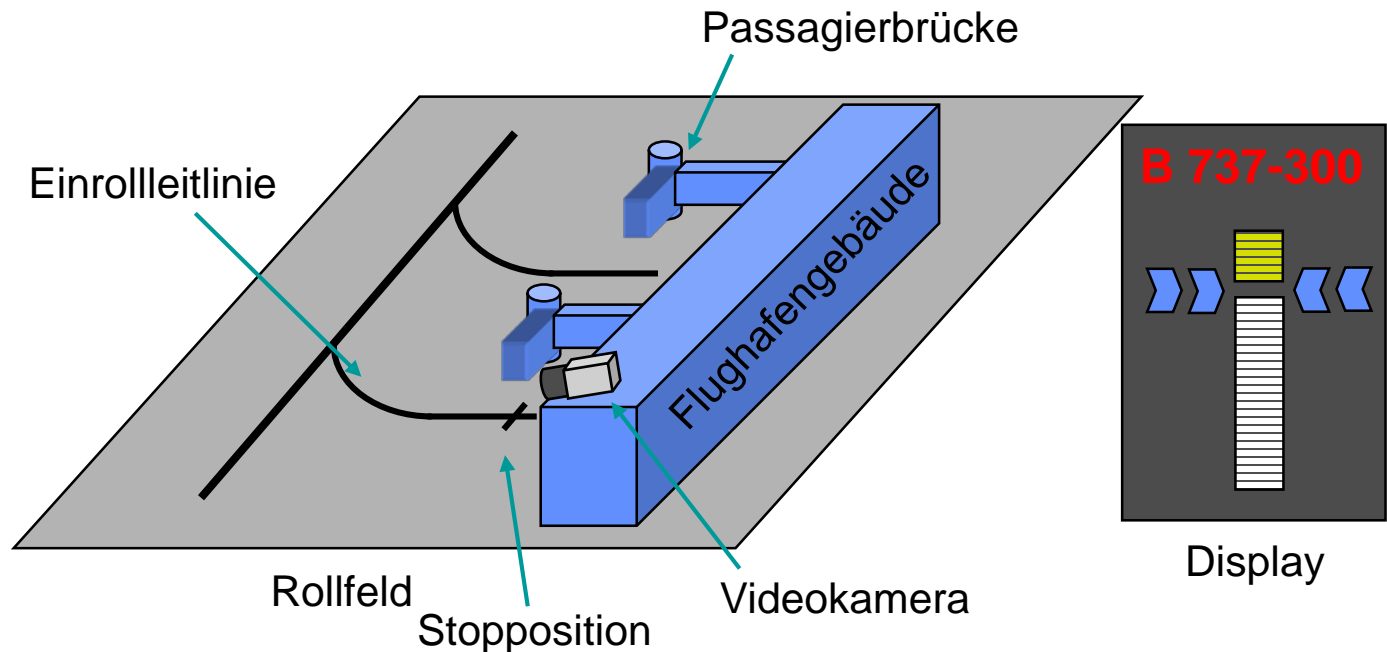


Beispiel Andocksystem

- **Systemleistung:** Leitung des Flugzeugpiloten mittels Display auf die für den Flugzeugtyp vorgeschriebene Stopposition
- **Sensor:** Messung der Bugradposition und des Achswinkels eines anrollenden Flugzeugs auf Basis von Videosequenzen.



Eine Komponente im System...

Kapitel 7

3D Vision

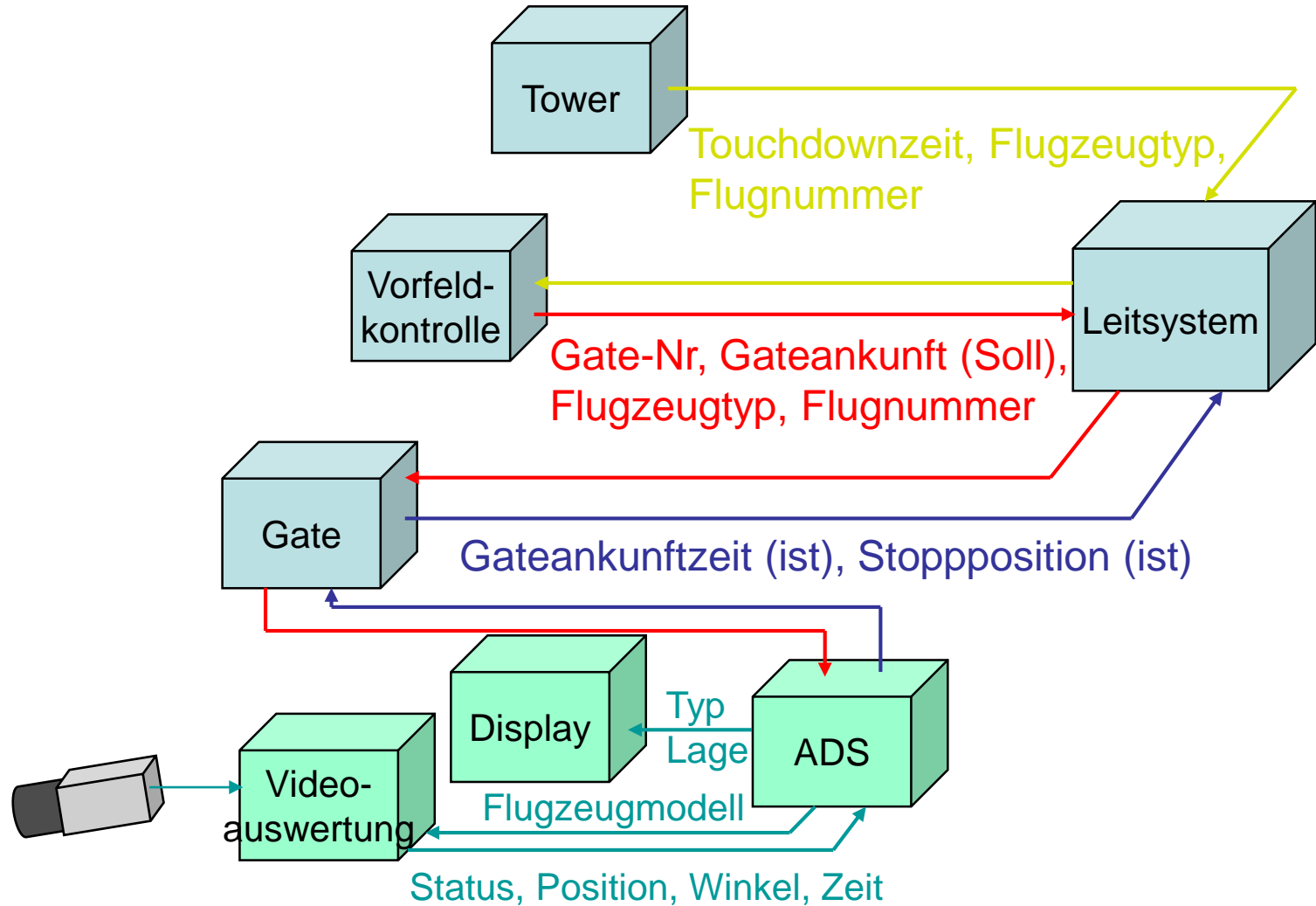
Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo



Systemanforderungen

Kapitel 7

3D Vision

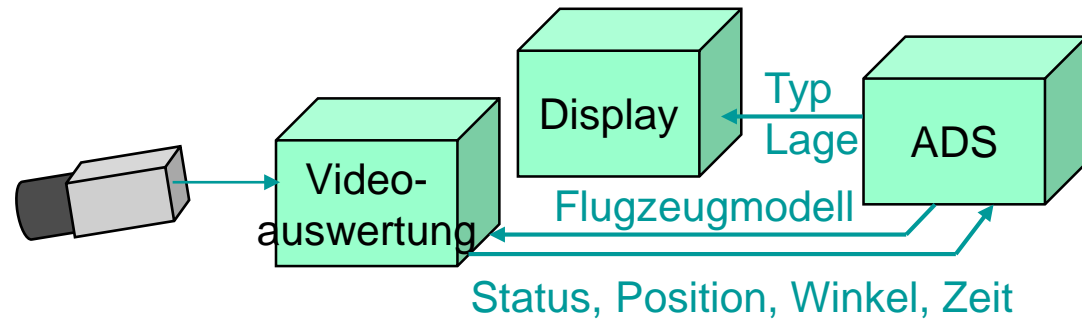
Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo



- **Sensor:** CCD-Videokamera im PAL-Format (576x768 Pixel)
- **Hardware / Plattform:** Standard-PC-System / Betriebssystem Windows xx
- **Messfrequenz:** mindestens 12 Hz
- **Messgenauigkeit:** Bugradposition $\pm 0,2$ m, Winkel Flugzeugachse/Leitlinie $\pm 2^\circ$
- **Operationelle Anforderungen:** Fehltyperkennung, Pushbackerkennung, Multi-Leitlinienfähigkeit
- **Beleuchtung:** Tageslicht, Flutlicht, Allwetterfähigkeit bis Cat III Sichtbedingung

- **Bisher:** Kamera als radiometrisches (Helligkeit, Farbe, Temperatur, etc.) Messinstrument
- **Jetzt:** Kamera als geometrisches Messinstrument!!!

Bevor wir mit der Kamera messen, sollten wir sie »eichen«:

Kamerakalibrierung

Was ist das?

1. Auswahl eines geeigneten Kameramodells:

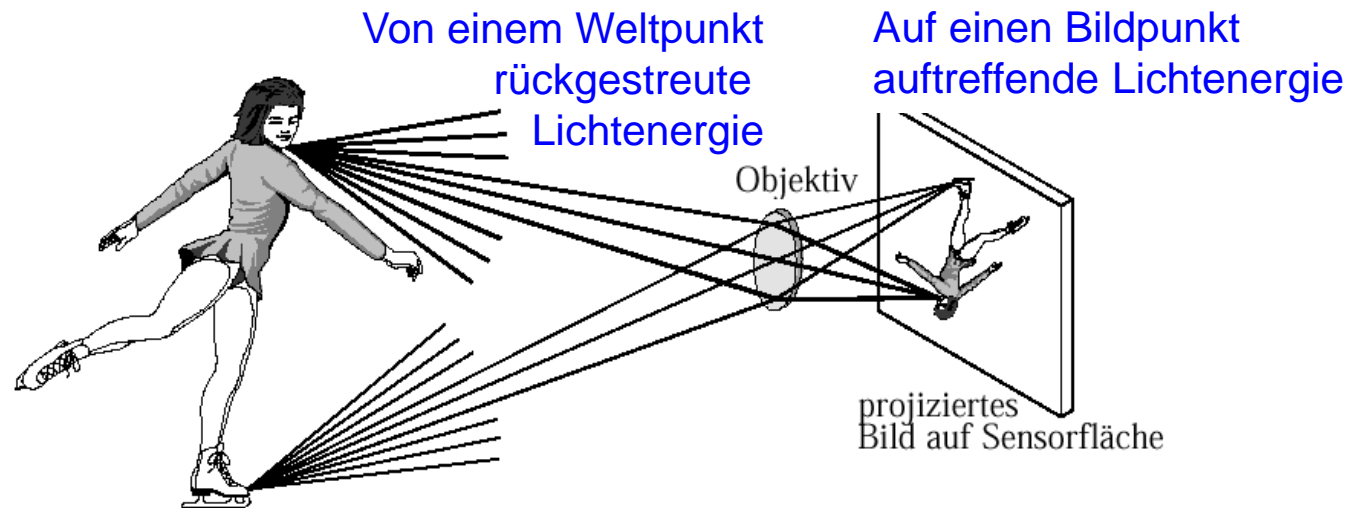
Mathematische, parametrisierte Modellierung des
realen Abbildungsverhaltens

2. Ermittlung eines Parametersatzes, so dass das Kameramodell das Abbildungsverhalten der Kamera möglichst gut approximiert:

(Parameter-)Optimierung

Das Lochkameramodell

Zur Erinnerung: Wie kommt das Licht auf die Sensorfläche



Das einfachste Modell für diesen physikalischen Vorgang ist das **Lochkameramodell**:

Die Parameter der Zentralprojektion

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

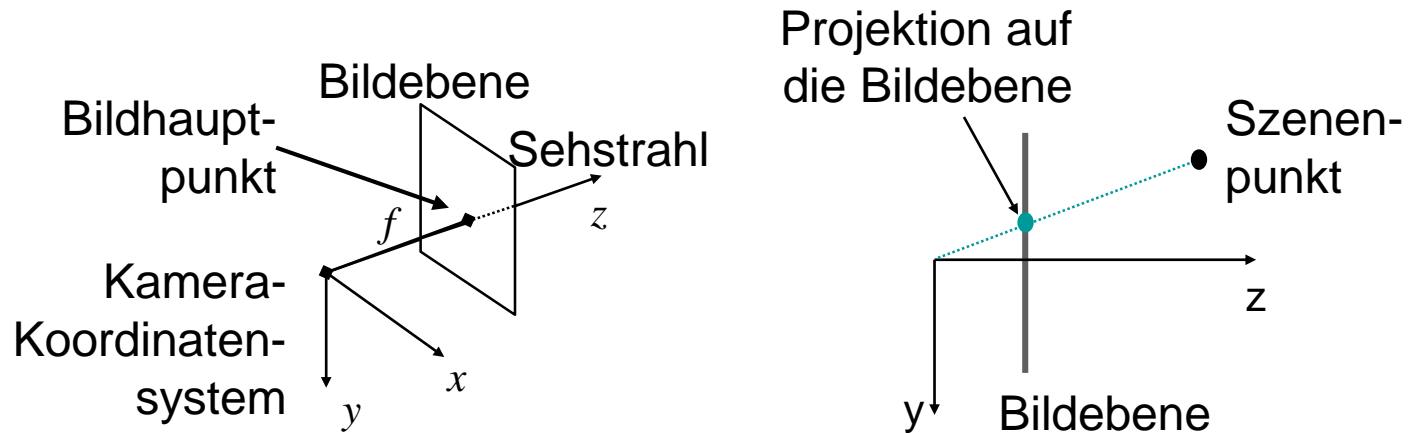
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Das Lochkameramodell ist durch die **Zentralprojektion** beschreibbar:



Die Zentralprojektion $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat folgende Parameter:

- f **Brennweite** (Abstand Ursprung Koordinatensystem und Bildebene)
- (c_x, c_y) **Bildhauptpunkt** (Durchstoßpunkt der z -Achse im Bild in Pixeln)
- d_x, d_y Breite und Höhe eines Pixels in der Einheit des Kamerakoordinatensystems

Die Zentralprojektion

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Mit diesen Parametern lassen sich 3D-Szenenpunkte

$$(x_c, y_c, z_c)^T \in \mathbb{R}^3$$

(gegeben im Kamerakoordinatensystem) auf die Bildebene projizieren:

$$x = \frac{f}{d_x} \cdot \frac{x_c}{z_c} + c_x \quad y = \frac{f}{d_y} \cdot \frac{y_c}{z_c} + c_y$$

Alternativ: Matrix in homogenen Koordinaten

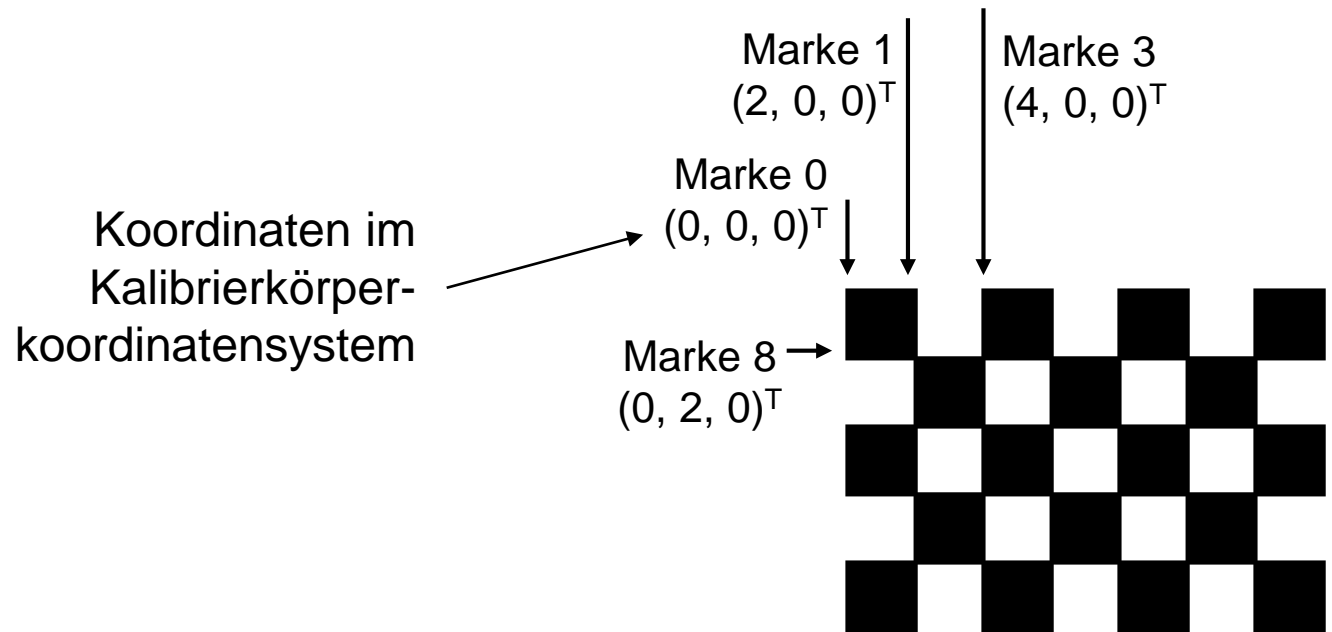
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{d_x} & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \frac{f}{d_y} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei nach Anwendung der Matrix-Vektor-Multiplikation noch skaliert werden muss:

$$x = \frac{x_i}{w_i} \quad \text{und} \quad y = \frac{y_i}{w_i}$$

Parameterschätzung...

Wenn die Entscheidung für ein Kameramodell gefallen ist, müssen noch die Parameter des Modells bestimmt werden. Dazu wird ein Kalibrierkörper benötigt, z.B. ein Schachbrettmuster



Kalibrierkörper: IDs und Koordinaten der Marken
z.B. Schachbrettmuster
Größe der Quadrate 2 cm

Koordinatentransformation I

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

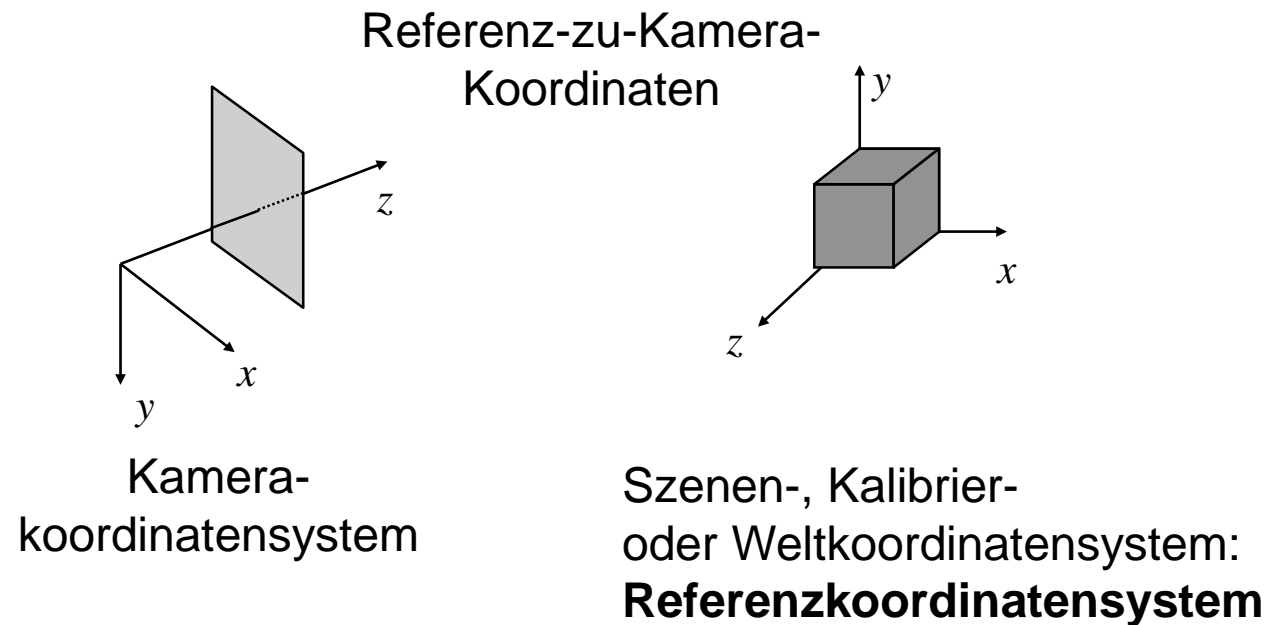
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Da die Kalibriermarken im Koordinatensystem des Kalibrierkörpers (manchmal auch in Welt- oder Szenenkoordinaten) gegeben sind, benötigen wir noch eine Transformation ins Kamerakoordinatensystem:



Koordinatentransformation II

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Koordinatentransformationen $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind affine Transformationen und insgesamt durch sechs Parameter beschreibbar:

R 3x3 Rotationsmatrix, geg. z.B. durch die Eulerwinkel

ω Drehung um die x -Achse

φ Drehung um die y -Achse

κ Drehung um die z -Achse

\vec{t} 3D-Translationsvektor geg. durch die Komponenten

t_x Verschiebung längs der x -Achse

t_y Verschiebung längs der y -Achse

t_z Verschiebung längs der z -Achse

Im Einzelnen...

Koordinatentransformation III

Kapitel 7

3D Vision

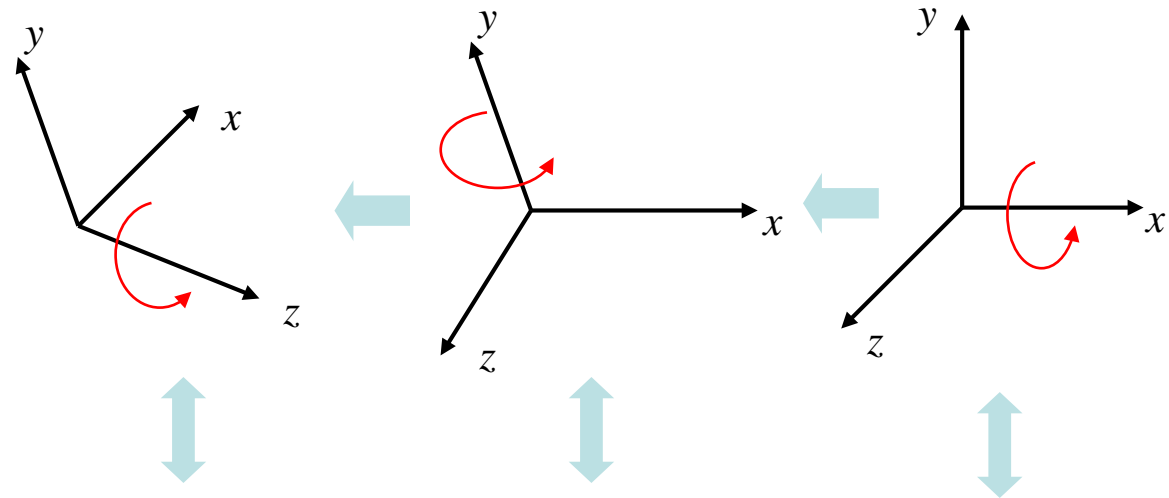
Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo



$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \varphi & \cos \kappa \sin \varphi \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega & \cos \kappa \sin \varphi \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega \\ \sin \kappa \cos \varphi & \sin \kappa \sin \varphi \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega & \sin \kappa \sin \varphi \cos \omega - \cos \kappa \sin \omega \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \omega & \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zusammen mit der Translation

$$(t_x, t_y, t_z)^T \in \mathbb{R}^3$$

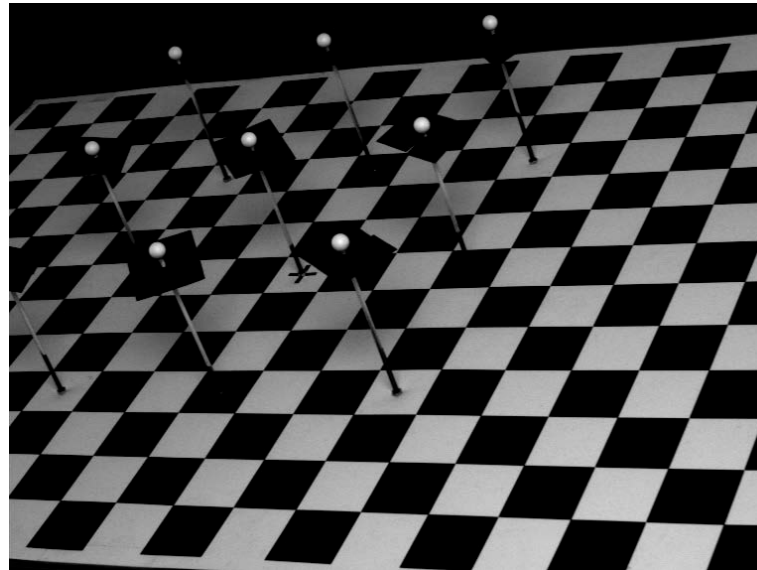
ergibt sich folgende Abbildungsvorschrift, mit der ein Punkt von Szenenkoordinaten \vec{x}_s in einen Punkt in Kamerakoordinaten \vec{x}_c transformiert werden kann:

$$\vec{x}_c = R\vec{x}_s + \vec{t}$$

Alternativ: In homogener Koordinatenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_c \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} R & \vec{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \vec{x}_s \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zurück zur Kalibrierung: Von dem Kalibrierkörper wird nun eine Aufnahme gemacht:



Die Marken können mit Methoden der Bildverarbeitung (z.B. Hough-Transformation) im Bild lokalisiert werden, d.h. die Pixelpositionen (= Bildkoordinaten \vec{x}_i) der Marken können bestimmt werden.

Für jede der Marken liegen uns also jeweils folgende zwei Gleichungen vor:

$$\begin{array}{ccc} \text{bekannt} & & \text{bekannt} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \vec{x}_i = P(T(\vec{x}_s)) & \end{array}$$

Unbekannt sind allerdings die Parameter der Transformation T (in der Regel 6) und Projektion P (mindestens 5):

Optimierungsproblem!

Die Optimierung wird in der Regel iterativ durchgeführt (Gauß-Newton etc.) mit Startwerten, die z.B. durch Kamera- und Objektivbeschreibung bekannt sind.

Verzeichnungen

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

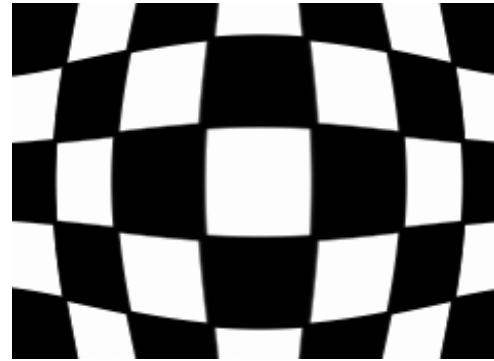
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Oft reicht die Modellierung als Lochkameramodell nicht aus. Hier z.B. muss eine **radiale Verzeichnung** mit modelliert werden:



Einige Verfahren modellieren auch **Scherungen**, **tangentiale Verzeichnungen** etc.

Die Abbildungskette wird dadurch ggf. um einen weiteren nichtlinearen Anteil V mit zusätzlichen Unbekannten erweitert:

$$\begin{array}{ccc} \text{bekannt} & & \text{bekannt} \\ & \swarrow & \searrow \\ & \vec{x}_i = V(P(T(\vec{x}_s))) & \end{array}$$

Verzeichnungen

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

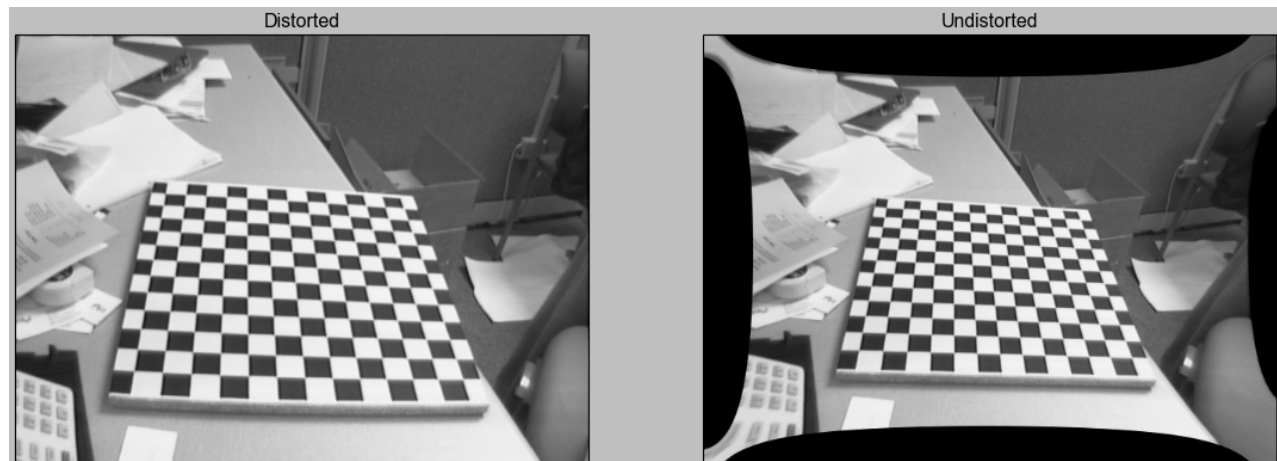
AR

Stereo

Wenn die Verzeichnungen bei der Kalibrierung berücksichtigt werden, können sie vor der Weiterverarbeitung der Bilder korrigiert werden:

$$I' = V^{-1}(I)$$

So entstehen **entzernte Bilder** I' , die dem Lochkameramodell genügen!



Kalibriermarken...

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Die Kalibriermarken müssen den Bildbereich, in dem später gemessen werden soll, abdecken!

Durch **räumliche Verteilung** der Kalibriermarken (nicht alle in einer Ebene) lässt sich die Parameteroptimierung robustifizieren.

Die **Mindestanzahl** erforderlicher Kalibriermarken ist durch die Anzahl der zu bestimmenden Parameter gegeben (jede Marke liefert zwei Gleichungen).

Grundsätzlich: Besser mehr als zu wenig, denn das führt zu einem überbestimmten Gleichungssystem...

Intrinsische und extrinsische Parameter

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Wir erhalten quasi als »Abfallprodukt« eine Transformation vom Referenz- ins Kamerakoordinatensystem. Die entsprechenden Parameter nennt man **extrinsische Parameter**.

Die Parameter, die das Kameramodell beschreiben (einschließlich der Verzeichnungsparameter), heißen auch **intrinsische Parameter**.

Exkurs: Zusammenhang mit Computer Graphik

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

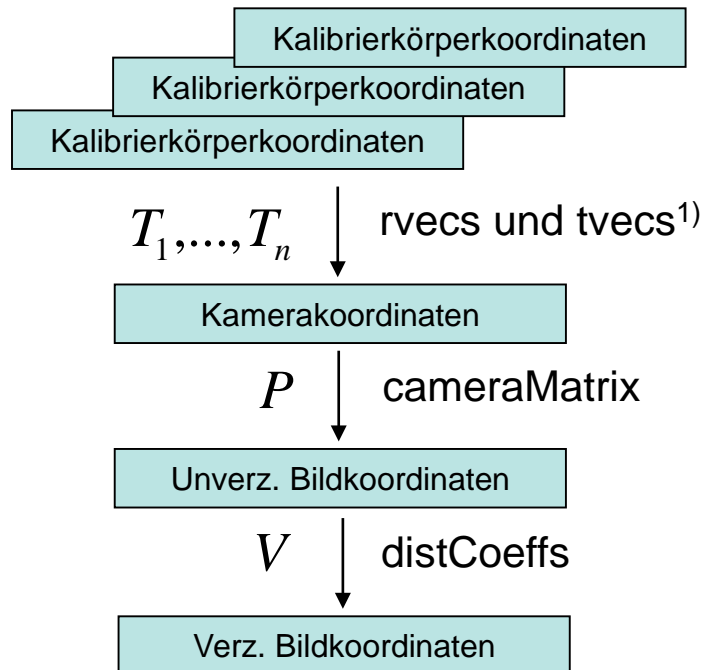
Kalibrierung

Beispiel

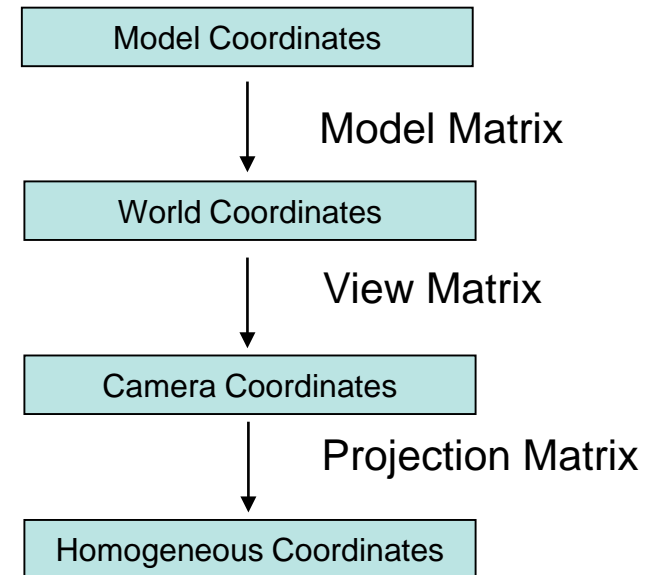
AR

Stereo

Computer Vision OpenCV



Computer Graphik OpenGL²⁾



1) rvecs und tvecs: Für n verschiedene Ansichten vom Kalibrierkörper jeweils die Rotation (gegeben in Rodrigues-Winkeln) und Translation

2) <http://www.opengl-tutorial.org/beginners-tutorials/tutorial-3-matrices/>

Bestimmung der Kalibriermarken

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

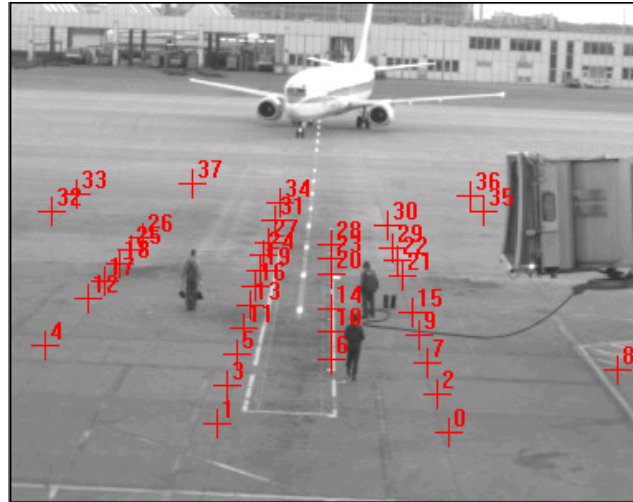
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Die Pixelpositionen müssen nicht aus einem einzelnen Bild bestimmt werden:



Hier wurden die Marken nacheinander manuell auf dem Rollfeld positioniert. Als Referenzebene diente hier das Rollfeld.

Bekannte Verfahren, beide als open source verfügbar:

- Roger Tsai (1987): Lochkamera plus radiale Verzeichnung
- Zhang (2000): zusätzlich Scherung und ???

Positionsbestimmung im Andocksystem

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

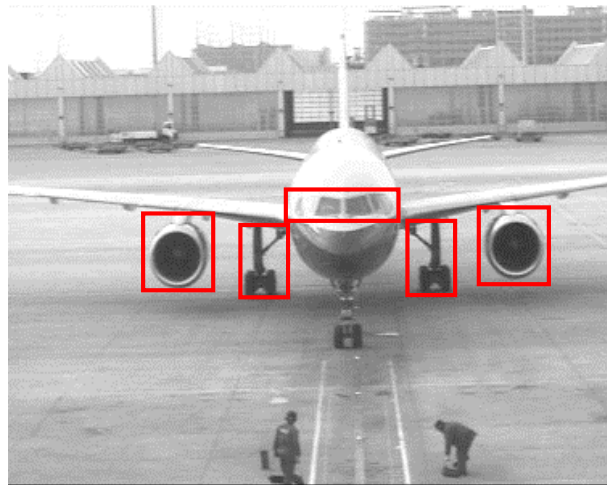
AR

Stereo

Kalibriert können wir die Kamera als geometrisches Messinstrument verwenden...

Die Messung erfolgt in zwei Schritten:

1. **Positionsbestimmung des Flugzeugs im Bild (2D)**
2. Rückrechnen der Position auf das Rollfeld (2D \Rightarrow 3D)



Lösungsmöglichkeit für Schritt 1: **Schablonenanpassung**
(engl. template matching)

Schablonenanpassung

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

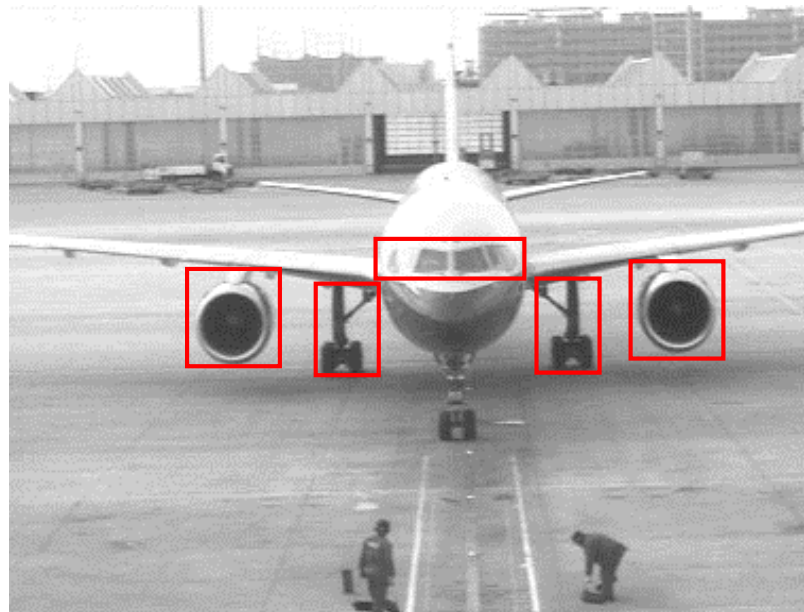
AR

Stereo

Idee: Modelliere das Flugzeug durch (eine feste Anordnung von) **Schablonen**



Schablonenanpassung: Suche für die Schablonen diejenige Pixelposition, an der sie am besten zum Bild passt:



Kreuzkorrelation I

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Zur Schablonenanpassung

Bild I :



Schablone S
mit Breite B und
Höhe H :



wird die Schablone wie ein Operatorfenster über das Bild geschoben und an jeder Position z.B. die **Kreuzkorrelation**

$$KK(I, S) = \frac{\left(\sum_{x=0}^{B-1} \sum_{y=0}^{H-1} I(x, y) S(x, y) \right)}{\sqrt{\left(\sum_{x=0}^{B-1} \sum_{y=0}^{H-1} I^2(x, y) \right) \left(\sum_{x=0}^{B-1} \sum_{y=0}^{H-1} S^2(x, y) \right)}}$$

$\langle I, S \rangle$

$\|I\| \cdot \|S\|$

berechnet. Die Summation läuft über den Bildbereich der Schablone S und den Bildbereich von I , der von der Schablone S abgedeckt ist (bei $(0,0)$ beginnend).

Kreuzkorrelation II

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

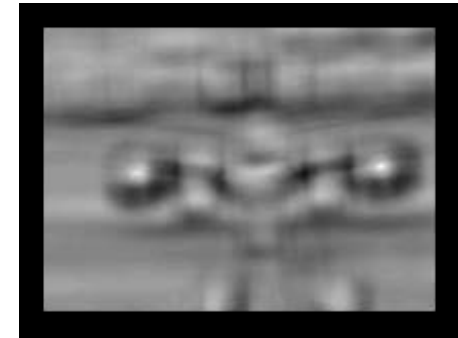
AR

Stereo

Beispiel:



Bild I mit
Schablone S



Kreuzkorrelations-
bild

Aus der Schwarz'schen Ungleichung (Gleichheit gilt genau bei linearer Abhängigkeit)

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

lässt sich ableiten, dass die Kreuzkorrelation immer im Intervall $[-1, 1]$ liegt, wobei die Werte -1 und 1 maximale Korrelation, also maximale Ähnlichkeit bedeuten.

In diesem Fall ist das Bild I ein Vielfaches von S

$$I = \alpha S \text{ für } \alpha \neq 0$$

Bemerkung: Es gibt alternative Maße für die Übereinstimmung, wie z.B. den **Korrelationskoeffizienten**:

$$\rho(I, S) = \frac{\text{cov}(I, S)}{\sqrt{\text{var}(I) \text{var}(S)}} = \frac{\left(\sum_{x=0}^{B-1} \sum_{y=0}^{H-1} (I(x, y) - \bar{I})(S(x, y) - \bar{S}) \right)}{\sqrt{\left(\sum_{x=0}^{B-1} \sum_{y=0}^{H-1} (I(x, y) - \bar{I})^2 \right) \left(\sum_{x=0}^{B-1} \sum_{y=0}^{H-1} (S(x, y) - \bar{S})^2 \right)}}$$

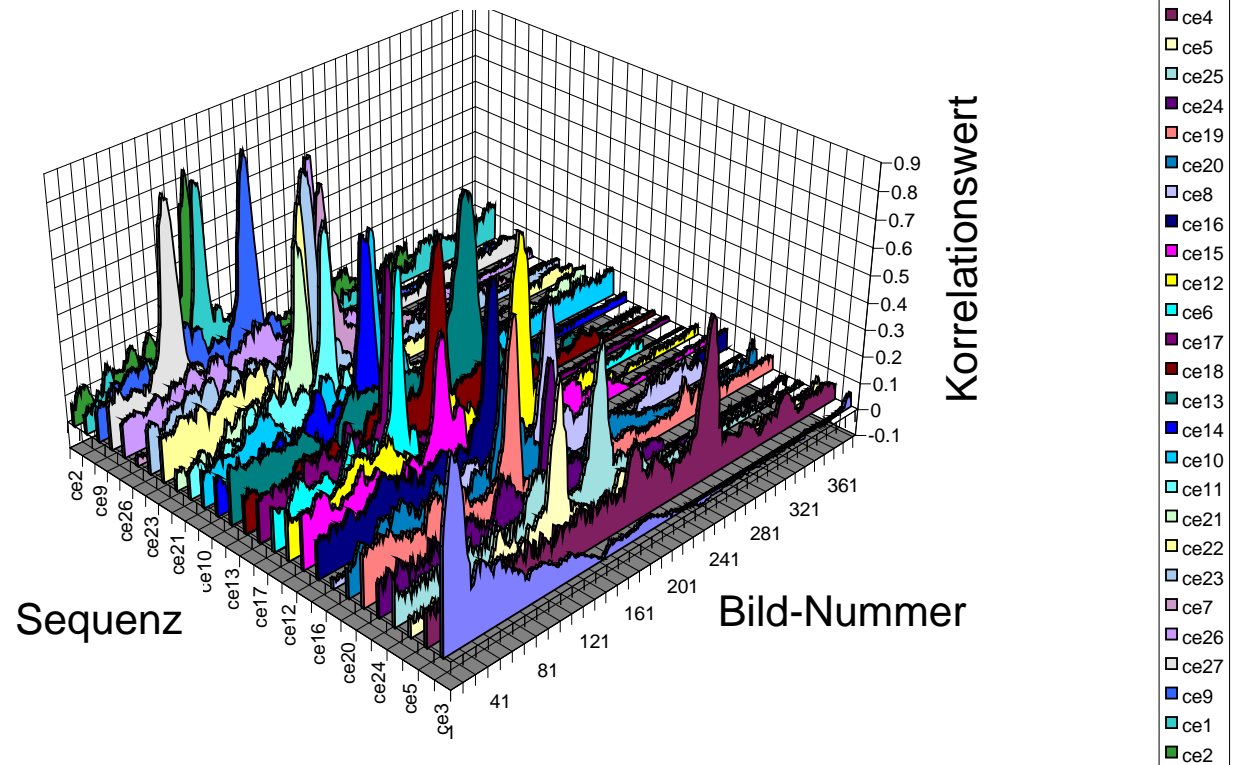
Der Korrelationskoeffizient ist bezüglich der mittleren Helligkeit von Bild \bar{I} und Schablone \bar{S} normiert.

Der Korrelationskoeffizient liegt immer im Intervall $[-1, 1]$, wobei die Werte -1 und 1 maximale Korrelation, also maximale Ähnlichkeit bedeuten.

Beispiel: Initialisierung der Positionsbestimmung

Die (hier mehrteilige) Schablone liegt auf einer **festen Bildposition:**

Korrelationsverlauf für verschiedene Sequenzen



Beispiel: Verfolgung der Position

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

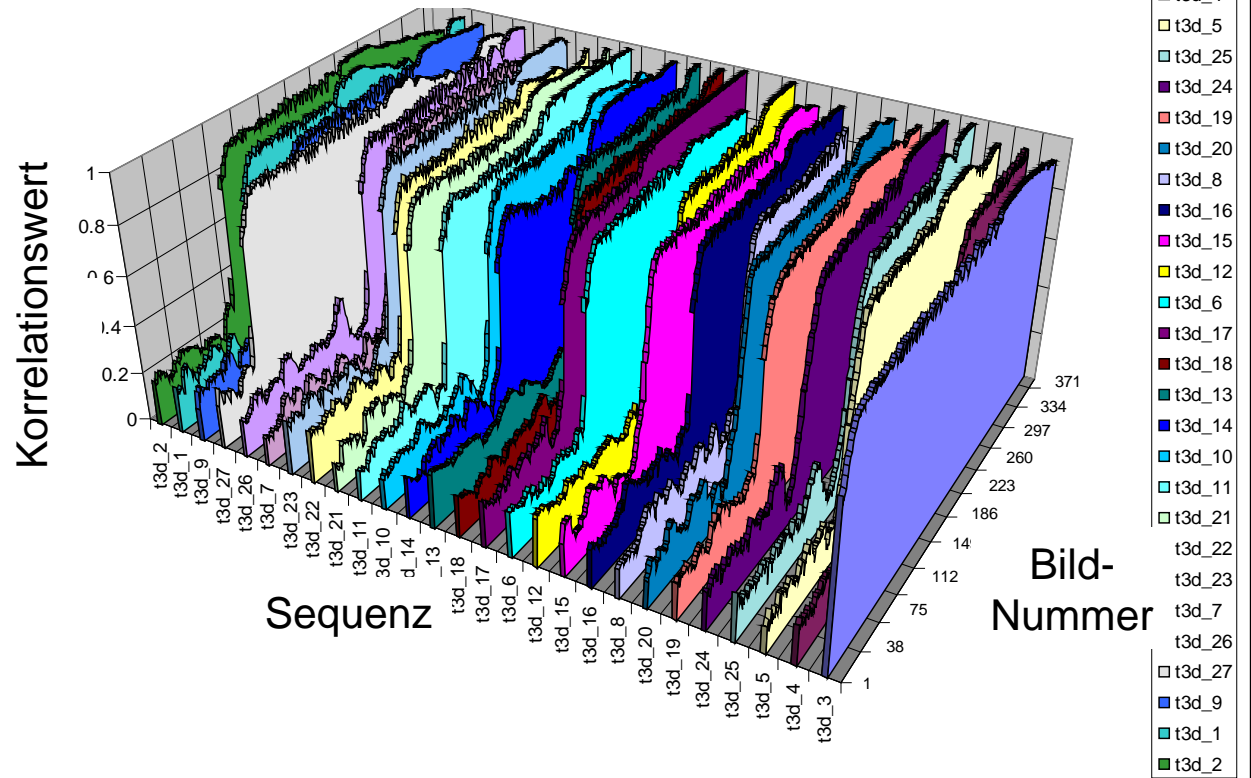
AR

Stereo

Die
Schablonen-
anpassung
wird nur in der
Nähe der
letzten
Position
durchgeführt!

Die (hier mehrteilige) Schablone wird **mitgeführt** und bei Bedarf skaliert:

Korrelationsverlauf für verschiedene Sequenzen



Rückrechnen der Position

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

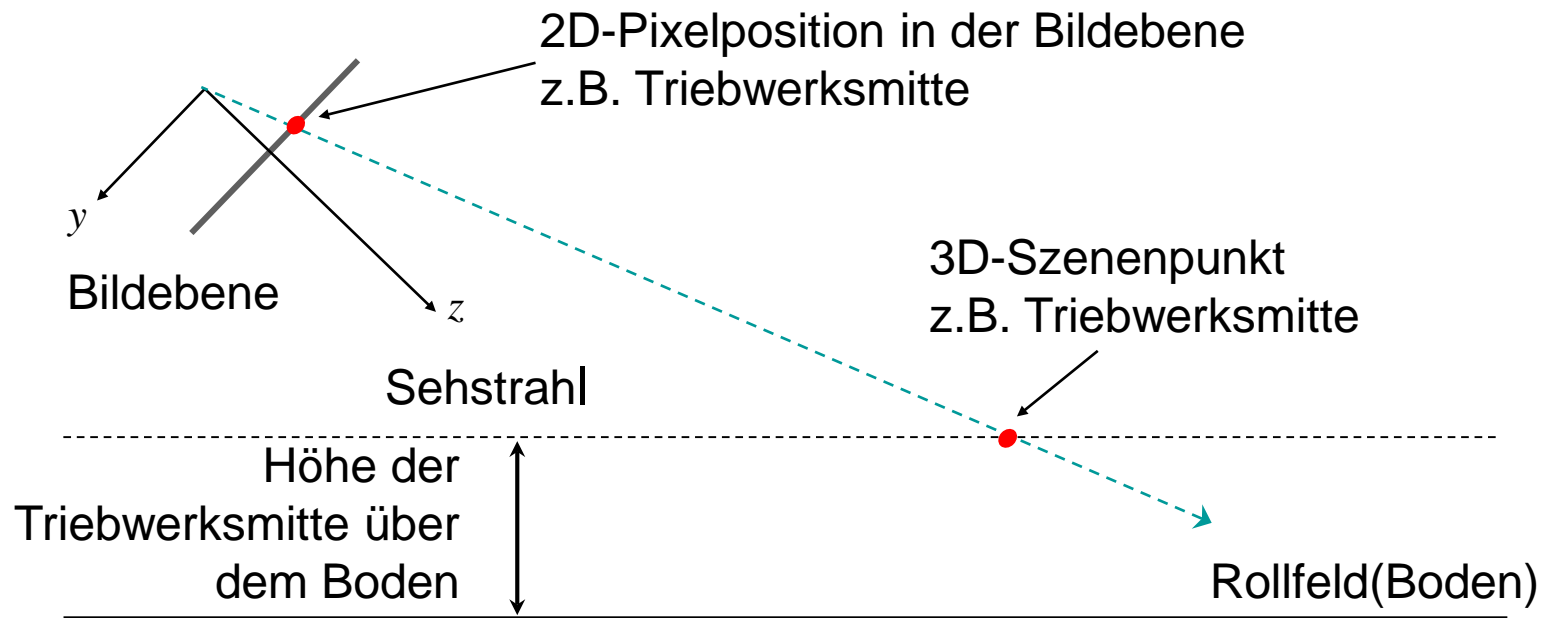
Beispiel

AR

Stereo

Zur Erinnerung: Die Messung erfolgt in zwei Schritten:

1. Positionsbestimmung des Flugzeugs im Bild (2D)
- 2. Rückrechnen der Position auf das Rollfeld (2D \Rightarrow 3D)**



Voraussetzung hier: Bekannte Transformation zwischen Kamera und Rollfeld.

Rückrechnen der Position

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

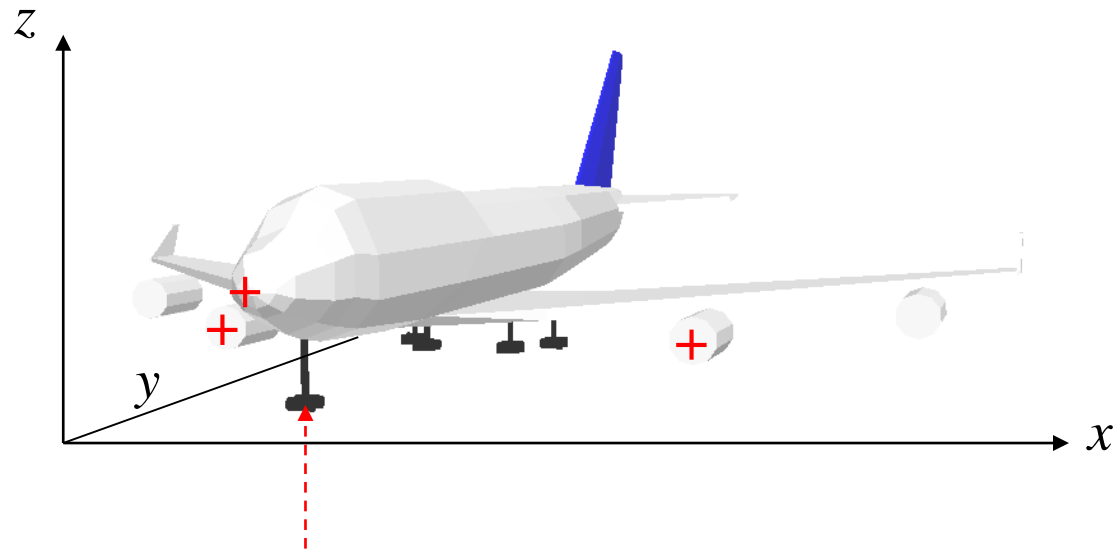
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

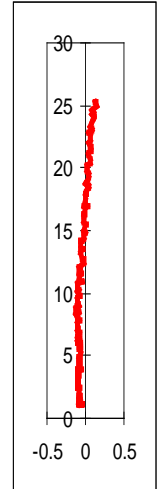
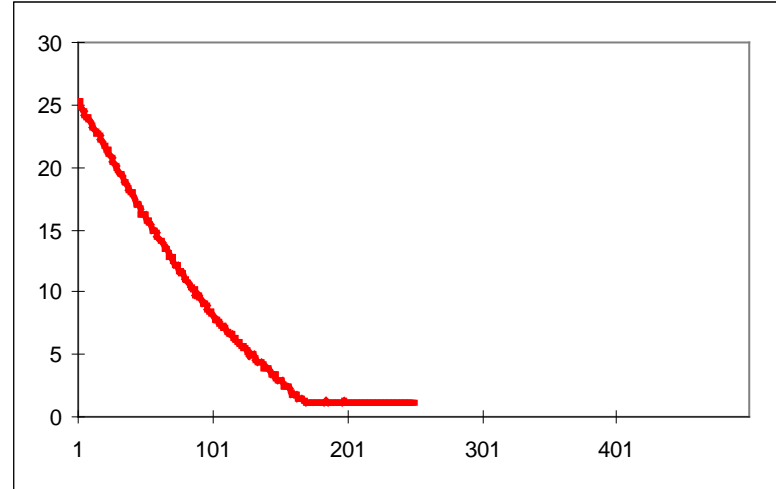
Wenn die 3D-Position von mehreren Objektpunkten bekannt ist, kann – durch Modellwissen – auf die Position und Orientierung des Flugzeugs auf dem Rollfeld geschlossen werden.



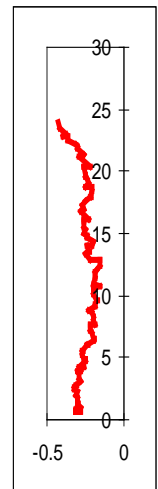
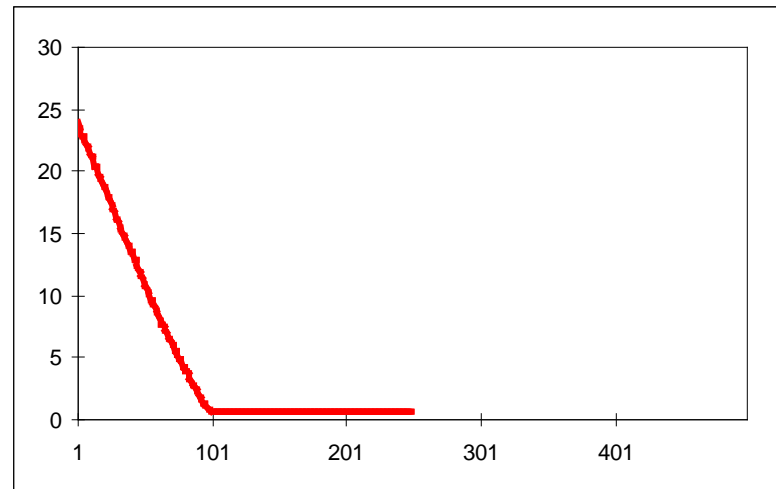
In diesem speziellen Fall gibt es nur drei Freiheitsgrade (xy -Verschiebung auf dem Rollfeld und einen Drehwinkel), die x - und y -Positionen von zwei Punkten sind ausreichend.

Ergebnisse – Andockvorgang

Sequenz 1

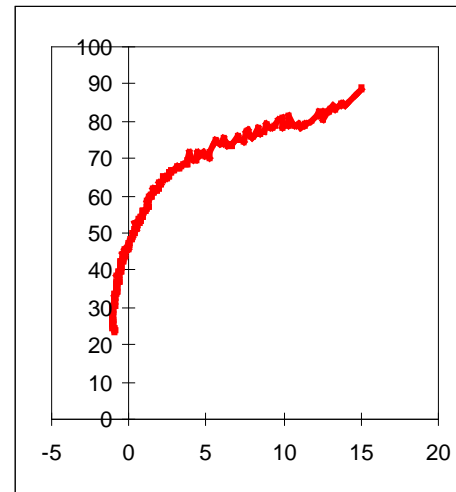


Sequenz 2

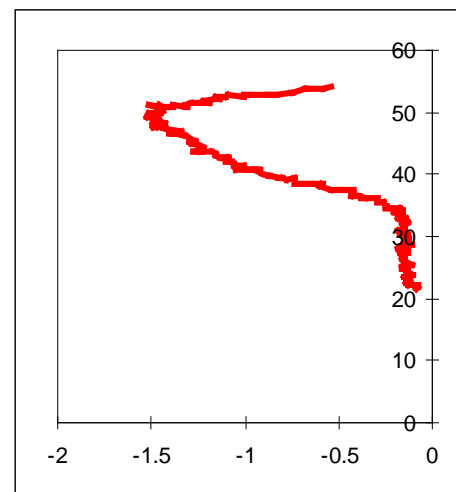


Ergebnisse – Push Back Achswinkel

Sequenz 3



Sequenz 4



Noch ein Wort zur Projektplanung...

Kapitel 7

3D Vision

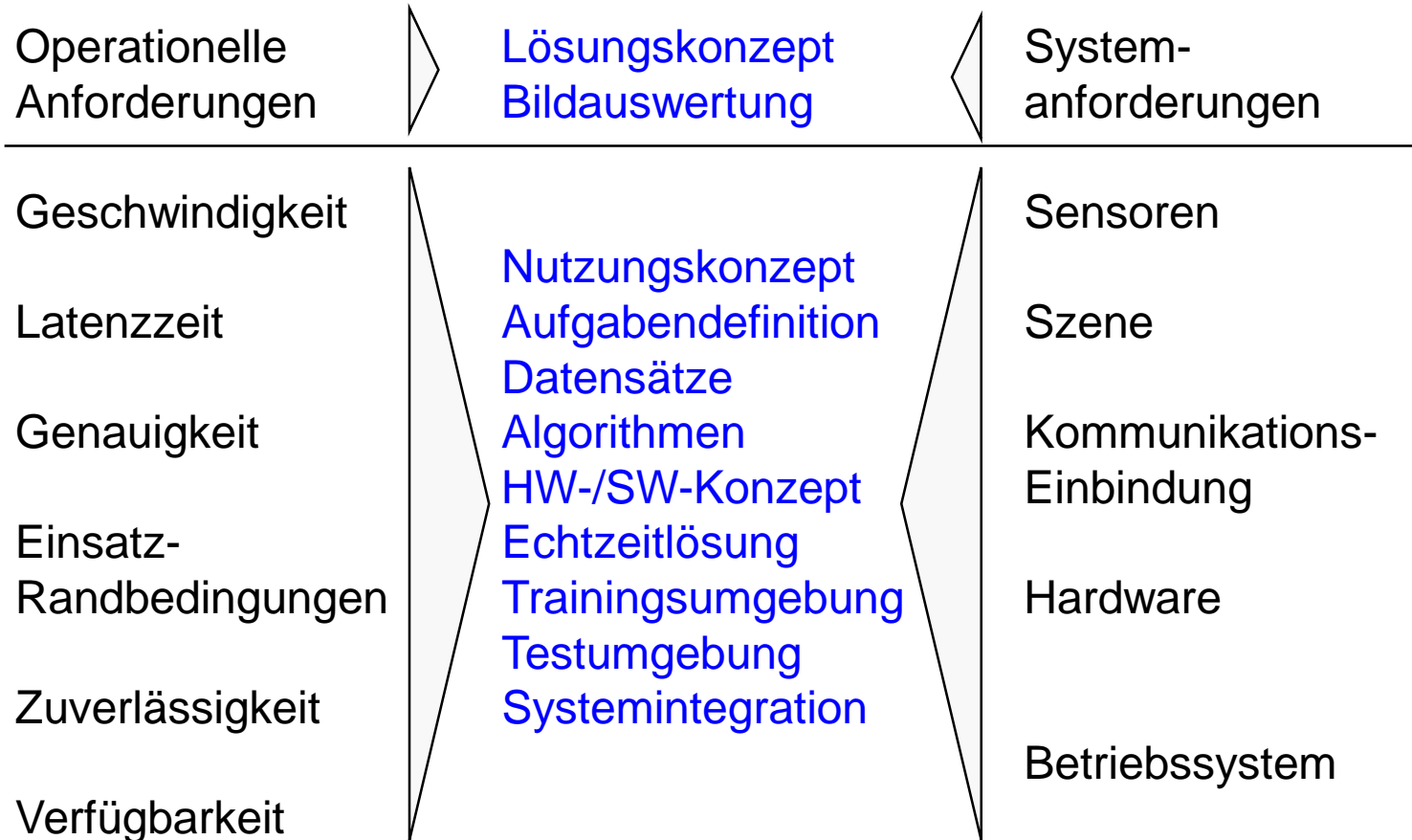
Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo



Konsequentes Projektmanagement ist bei Computer Vision Systemen doppelt wichtig, weil es de facto keine universellen Lösungen gibt!!!

Zusammenfassung und Ausblick

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Im letzten Abschnitt haben wir folgende Themen besprochen:

- Kameramodelle
- Kalibrierung
- Koordinatentransformationen und
- Schablonenanpassung

Wir haben außerdem einen kleinen Einblick in die Bildfolgenauswertung bekommen...

Jetzt: Ein weitere modellbasierte Anwendung: Augmented Reality

Augmented Reality

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

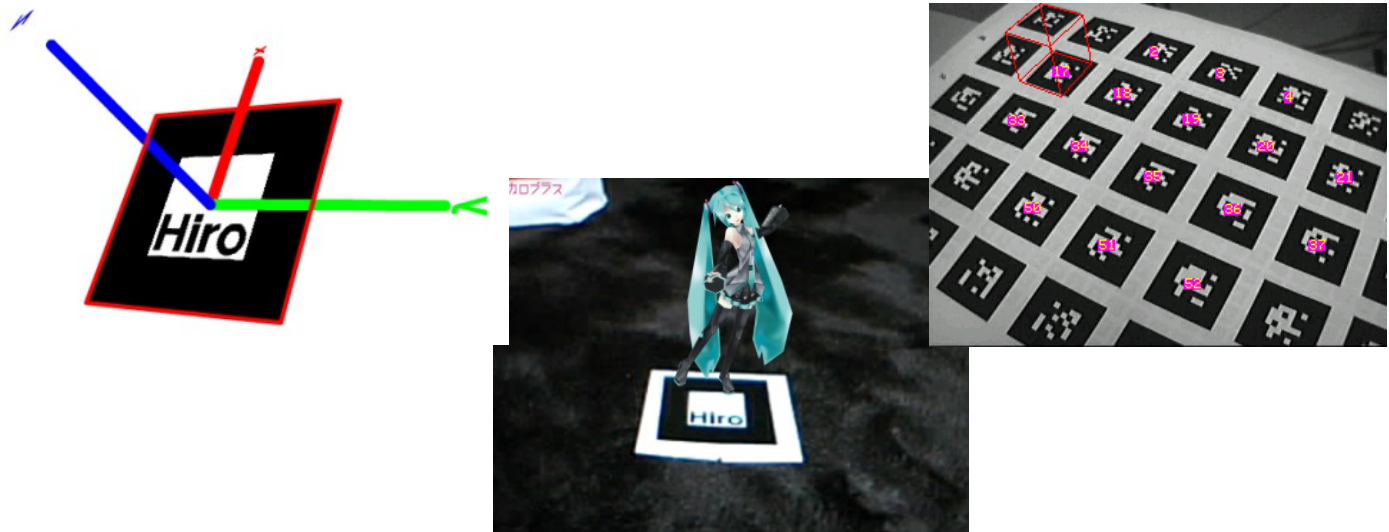
Stereo

In der Computer Vision wird differenziert zwischen

- markerbasierter AR
- markerloser AR

Markenbasierte Beispiele massig auf YouTube.

Die Idee ist immer: Definiere durch ein Koordinatensystem durch einen Marker und augmentiere es. Hier ARToolKit



Zusammenfassung und Ausblick

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

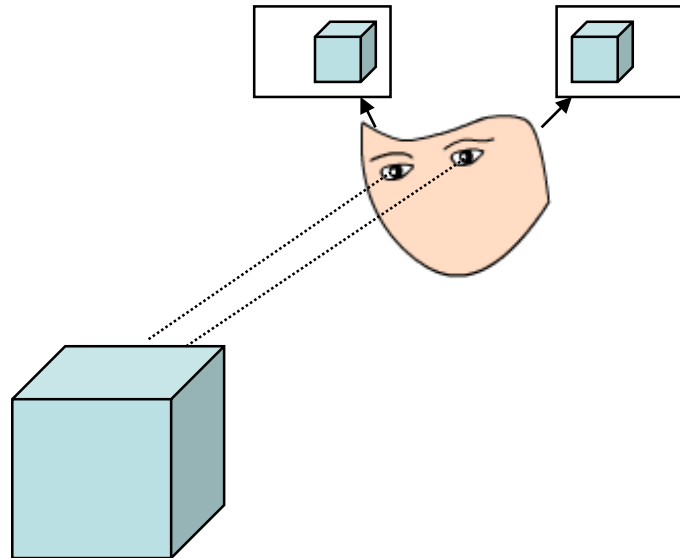
Stereo

Bisher: Monokular gewonnene 3D-Informationen (nur mit Modellwissen möglich)

Ausblick: Stereo

Die Idee...

- Wenn wir einen räumlichen Gegenstand betrachten, sehen wir den Gegenstand mit dem rechten Auge weiter links, mit dem linken Auge weiter rechts.



Stereokamerasysteme

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Mit Stereokamerasystemen

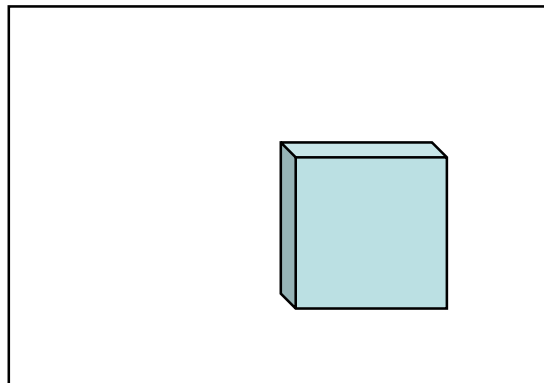


Bumblebee von Point Gray

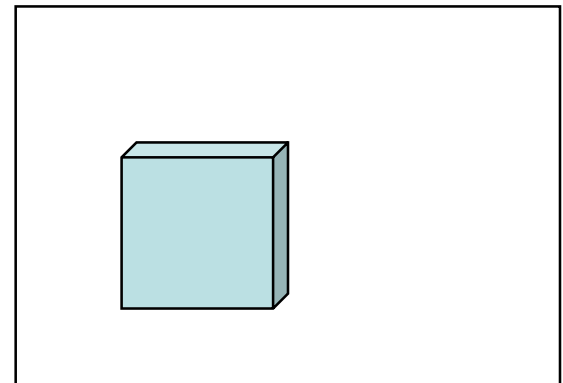


© Fraunhofer IIS/Kurt Fuchs

ist das ebenso:



Linkes Bild



Rechtes Bild

Triangulation

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

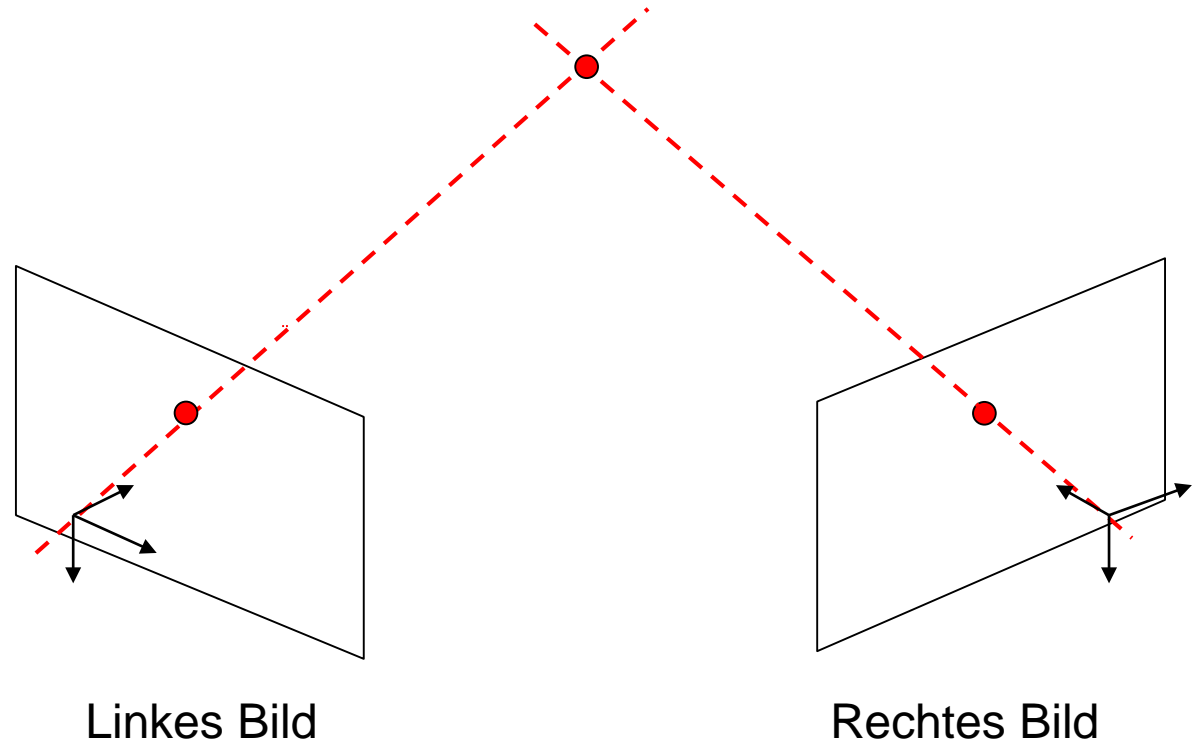
Beispiel

AR

Stereo

Wenn ein Objektpunkt in beiden Bildern gefunden wurde, kann die 3D-Position bestimmt werden:

3D-Position = Schnittpunkt der Geraden durch Pixelposition und den Projektionszentren (=Ursprung der Kamerakoordinatensysteme)



Voraussetzung: Es liegt eine Zentralprojektion vor

Epipolargeometrie

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

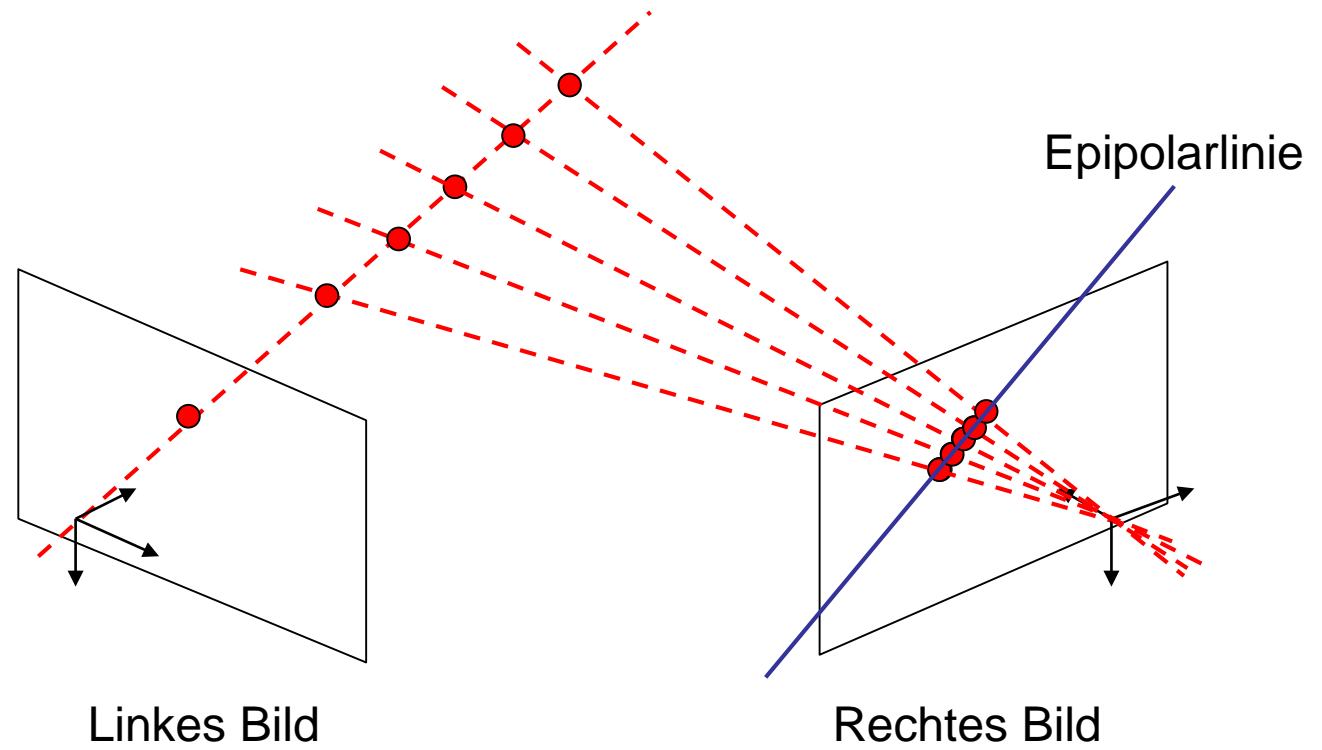
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Umgekehrt: Wurde im linken Bild ein Objektpunkt gefunden, so kann der entsprechende Objektpunkt im rechten Bild nur auf der **Epipolarlinie** liegen.



Epipole

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

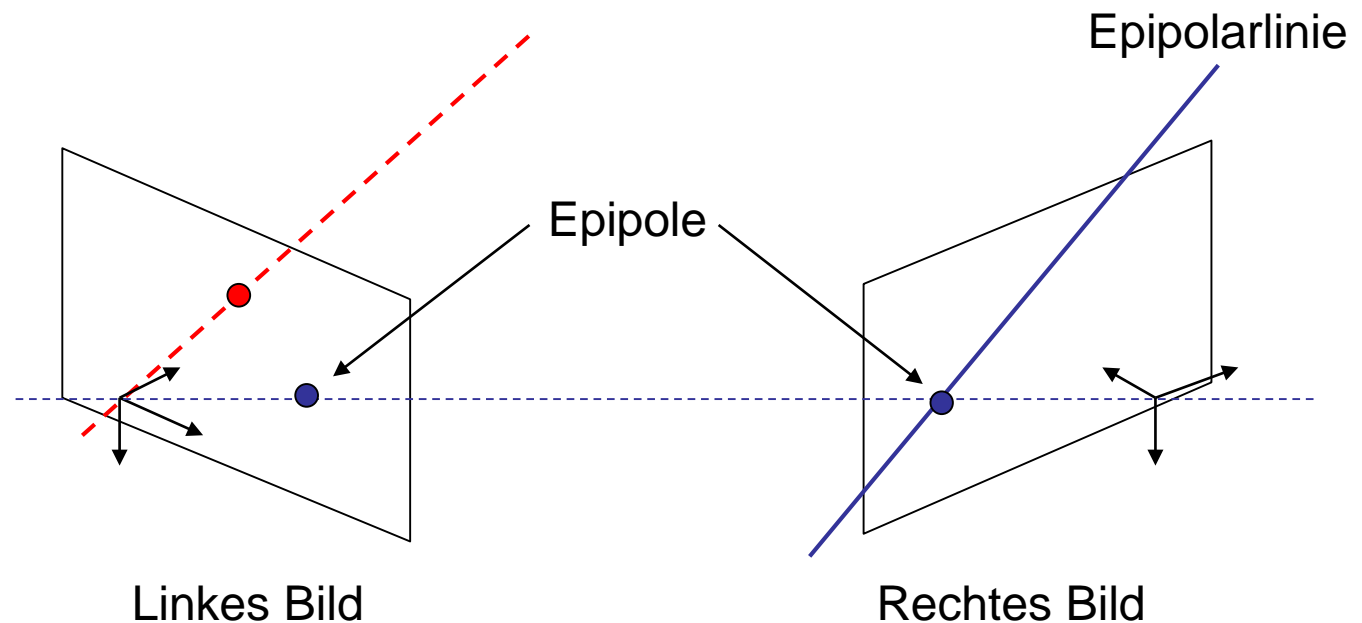
Beispiel

AR

Stereo

Die **Epipolarlinie** kann berechnet werden, denn sie ist die Schnittgerade von

- Bildebene und
- der Ebene, in der die **Epipole** (=Schnittpunkte der Verbindungsgeraden der Projektionszentren und den Bildebenen) und die Pixelposition im linken Bild liegt.



Stereo – das grundsätzliche Vorgehen

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Liegt eine Zentralprojektion vor und ist die Orientierung der Kameras zueinander bekannt, so gelten folgende Prinzipien:

- Wird ein Objektpunkt in beiden Bildern gefunden, so lässt sich die 3D-Position aus dem Schnitt zweier Geraden im (dreidimensionalen) Raum bestimmen.
- Wird ein Objektpunkt in einem der beiden Bilder gefunden, so muss der Objektpunkt im anderen Bild auf der Epipolarlinie liegen.

Bemerkung: Im Zusammenhang mit der Epipolargeometrie spielt die so genannte **Fundamentalmatrix** (3x3-Matrix) eine große Rolle:

- Die Fundamentalmatrix beschreibt die Lage aller Epipolarlinien.
- Die Fundamentalmatrix selbst lässt sich (ohne Kenntnis der Kameraorientierung) aus wenigen korrespondierenden Punkten bestimmen (7- oder 8-Punkt-Algorithmus).
- Die Fundamentalmatrix lässt sich nutzen, um die relative Orientierung der Kameras zueinander zu bestimmen: Stichwort: **Selbstkalibrierung**.

Wie hängen Fundamentalmatrix und Epipolarlinien zusammen?

Berechnung der Epipolarlinie

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Erinnerung: Die Abbildung eines 3D Punkts auf das Bild kann durch die Hintereinanderausführung einer Transformation und T einer Projektion P geschrieben werden:

$$\vec{x}_i = P(T(\vec{x}_s))$$

In homogenen Koordinaten können die beiden Abbildungen als Matrizen geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{f}{d_x} & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \frac{f}{d_y} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R & \vec{t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die damit Hintereinanderausführung als Matrix(-produkt):

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \underbrace{PT}_{\tilde{P}} \vec{x}_s \\ &= \tilde{P} \vec{x}_s \end{aligned}$$

Transformation und Projektion

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

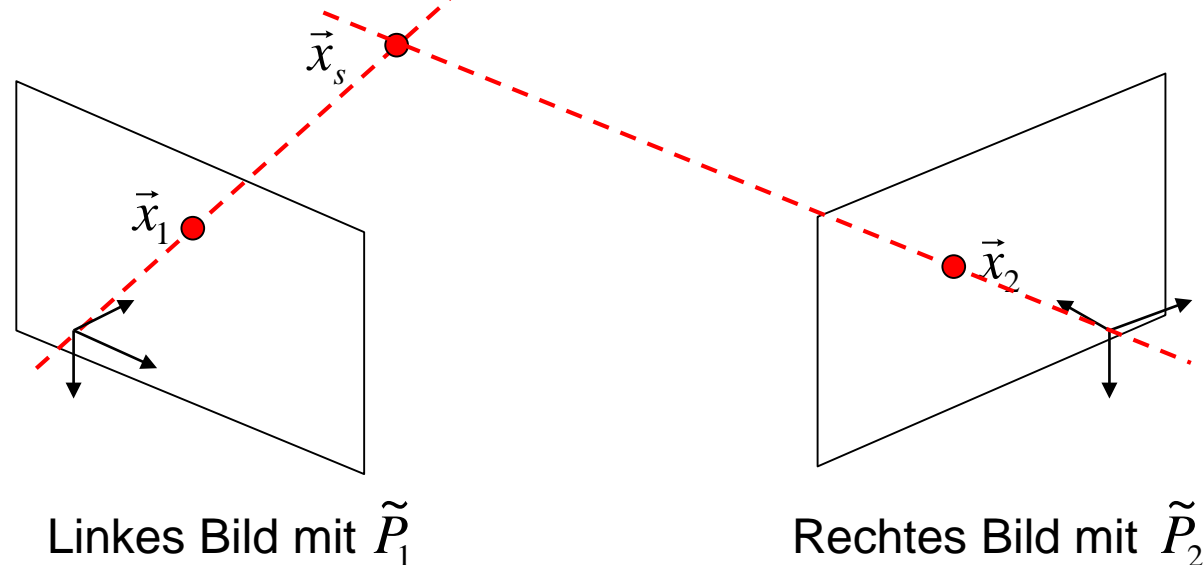
AR

Stereo

Die Matrix \tilde{P} ist folglich eine 3x4-Matrix:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix}$$

Für ein Stereokamerasystem gibt es also zwei solche (Projektions-)Matrizen \tilde{P}_1 und \tilde{P}_2



Idee der Epipolarlinienberechnung

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

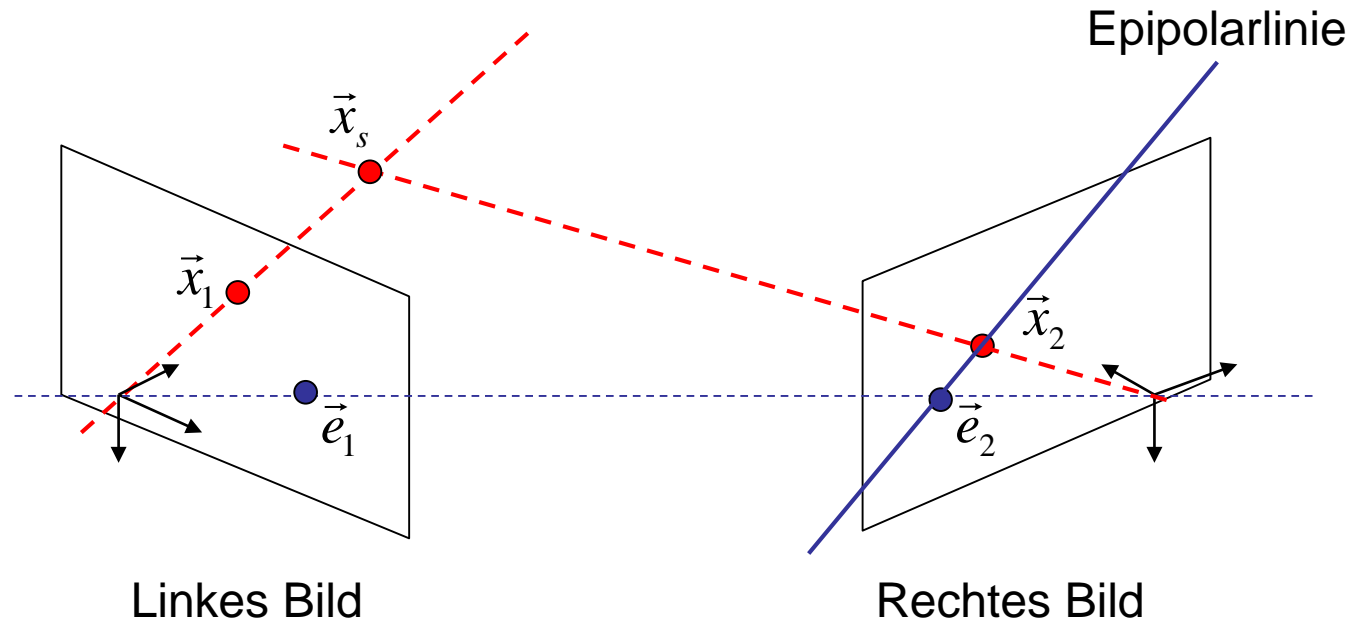
Beispiel

AR

Stereo

Gesucht: Zu einem gegebenen Bildpunkt \vec{x}_1 ist die Epipolarlinie gesucht.

Idee: Wähle zum Bildpunkt \vec{x}_1 einen beliebigen Objektpunkt \vec{x}_s und berechne hierzu den entsprechenden Punkt \vec{x}_2



Herleitung der Fundamentalmatrix

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Sieht aus wie
*little bit of
magic*, ist aber
eine
Erkenntnis der
projektiven
Geometrie...

Die sogenannte Pseudoinverse $\tilde{P}_1^+ = \tilde{P}_1^T (\tilde{P}_1 \tilde{P}_1^T)^{-1}$ der Projektionsmatrix \tilde{P}_1 vom linken Bild liefert einen Punkt auf der Geraden durch \vec{x}_1

$$\vec{x}_s = \tilde{P}_1^+ \vec{x}_1$$

und Anwenden der Projektionsmatrix \tilde{P}_2 vom rechten Bild liefert schließlich den gesuchten Punkt im rechten Bild:

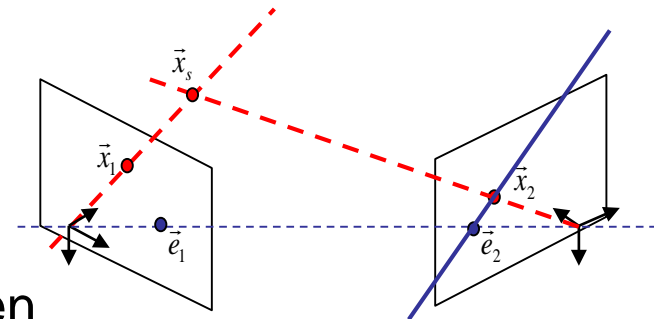
$$\vec{x}_2 = \tilde{P}_2 \tilde{P}_1^+ \vec{x}_1$$

Ein weiterer Punkt auf der Epipolarlinie ist der Epipol \vec{e}_2 , der sich durch

$$\vec{e}_2 = \tilde{P}_2 \vec{o}_1$$

berechnen lässt.

Dabei ist \vec{o}_1 der Ursprung vom linken Kamerakoordinatensystem (in Szenenkoordinaten)



Herleitung der Fundamentalmatrix

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Jetzt fehlt nur noch eine Formel, die die Gerade durch \vec{x}_2 und \vec{e}_2 beschreibt.

Dazu berechnen wir das Kreuzprodukt $\vec{l}_2 = \vec{e}_2 \times \vec{x}_2$ aus \vec{x}_2 und \vec{e}_2 , dann ist die Epipolarlinie (in homogenen Pixelkoordinaten!) durch die Gleichung

$$\vec{x}^T \vec{l}_2 = 0$$

gegeben. Weil \vec{x}_2 auf der Epipolarlinie liegt, gilt insbesondere

$$\vec{x}_2^T \vec{l}_2 = 0$$

Noch mal langsam: Wir haben

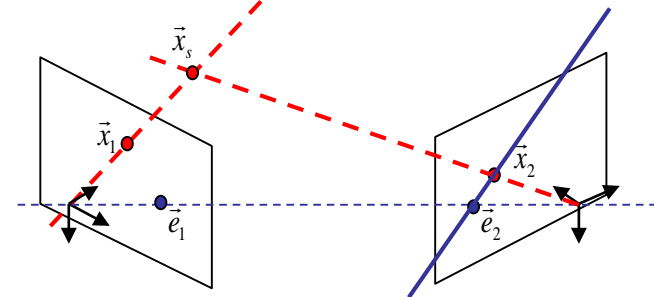
$$\vec{l}_2 = \underbrace{(\tilde{P}_2 \vec{o}_1)}_{\vec{e}_2} \times \underbrace{(\tilde{P}_2 \tilde{P}_1^+ \vec{x}_1)}_{\vec{x}_2}$$

konstruiert. Das können wir auch schreiben als

$$\vec{l}_2 = S_{\tilde{P}_2 \vec{o}_1} \tilde{P}_2 \tilde{P}_1^+ \vec{x}_1$$

mit einer Matrix $S_{\tilde{P}_2 \vec{o}_1}$

Sieht magic aus, ist aber nicht schwer, siehe z.B. Kreuzprodukt auf Wikipedia!



Herleitung der Fundamentalmatrix

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

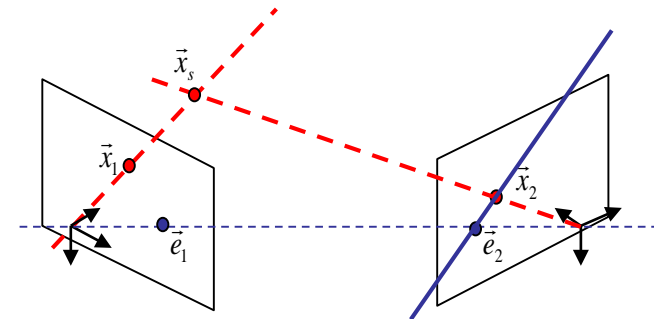
Stereo

Damit ist dann die Gleichung $\vec{x}_2^T \vec{l}_2 = 0$ der Epipolarlinie

$$\underbrace{\vec{x}_2^T S_{\tilde{P}_2 \tilde{o}_1} \tilde{P}_2 \tilde{P}_1^+}_{=F} \vec{x}_1 = 0$$

Der Gag an der Sache: Die **Fundamentalmatrix** F ist vollkommen unabhängig von \vec{x}_1 und \vec{x}_2 und kann deshalb für jedes Pixel aus dem linken Bild verwendet werden!!!

Die F -Matrix enthält die gesamte Information über die Epipolargeometrie!



Herleitung der Fundamentalmatrix

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

In anderen Worten: Wenn \vec{x}_1 ein beliebiges Pixel aus dem linken Bild ist, dann ist die Menge derjenigen Pixel \vec{x}_2 , die die Gleichung (**Epipolarbedingung**)

$$\vec{x}_2^T F \vec{x}_1 = 0$$

erfüllen, gerade die Epipolarlinie. Ausgeschrieben sieht das so aus:

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Bestimme also für ein Bildpaar die Fundamentalmatrix

$$F = S_{\tilde{P}_2 \tilde{O}_1} \tilde{P}_2 \tilde{P}_1^+$$

denn dann sind alle Epipolarlinien bekannt!

Berechnung der Fundamentalmatrix

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Bei bekannter Kalibrierung lässt sich die Fundamentalmatrix

$$F = S_{\tilde{P}_2 \tilde{O}_1} \tilde{P}_2 \tilde{P}_1^+$$

direkt aus den beiden Projektionsmatrizen und einem Projektionszentrum berechnen.

Den Aufwand der Kalibrierung kann man sich jedoch sparen, wenn man ausreichend viele korrespondierende Bildpunkte kennt!

Ausmultipliziert ergibt sich aus $\vec{x}_2^T F \vec{x}_1 = 0$ nämlich folgende Gleichung:

$$x_2 x_1 f_{11} + x_2 y_1 f_{12} + x_2 f_{13} + y_2 x_1 f_{21} + y_2 y_1 f_{22} + y_2 f_{23} + x_1 f_{31} + y_1 f_{32} + f_{33} = 0$$

Wenn man ausreichend viele Paare von \vec{x}_1 und \vec{x}_2 hat, lässt sich so ein lineares Gleichungssystem über den Unbekannten f_{ij} aufstellen.

Aber: Weil die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

in homogenen Koordinaten gegeben ist, lässt sich F nur bis auf einen Skalierungsfaktor bestimmen, wir können also o.B.d.A. den Eintrag $f_{33} = 1$ setzen.

Damit bleiben nur acht Unbekannte übrig, für die der 8-Punkt-Algorithmus acht korrespondierende Punktepaaire braucht.

Der 7-Punkt-Algorithmus nutzt zusätzlich die Bedingung

$$\det F = 0$$

und benötigt daher nur sieben korrespondierende Punkte.

Bestimmung der korrespondierenden Punkte

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Um die korrespondierenden Punkte zu finden, müssen

1. zunächst charakteristische Punkte ausgewählt werden und
2. die korrespondierenden Punkte im rechten Bild wiedergefunden werden.

Letzteres wird i.d.R. durch Schablonenanpassung o.ä. realisiert, die Auswahl geeigneter Punkte erfolgt durch diverse Ansätze

- SURF
- SIFT
- HOG-Features

Beispiel

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo



Linkes Bild mit
markanten
Punkten

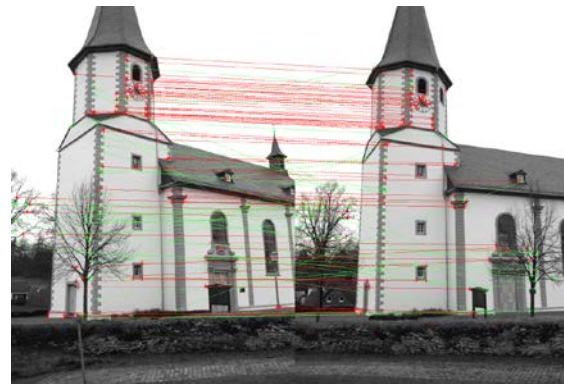


Rechtes Bild mit
markanten
Punkten



Mutmaßliche Korrespondenzen als
Vektoren

Problem: Oft sind inkorrekte Korrespondenzen enthalten, daher werden robuste Algorithmen zur Schätzung von F verwendet: RANSAC u.ä.



Korrespondenzen (rot) nach
RANSAC, mit denen F berechnet
wird.

Bildquelle Wikipedia, von .gs8 (talk) -
Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17988978>

Triangulation

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

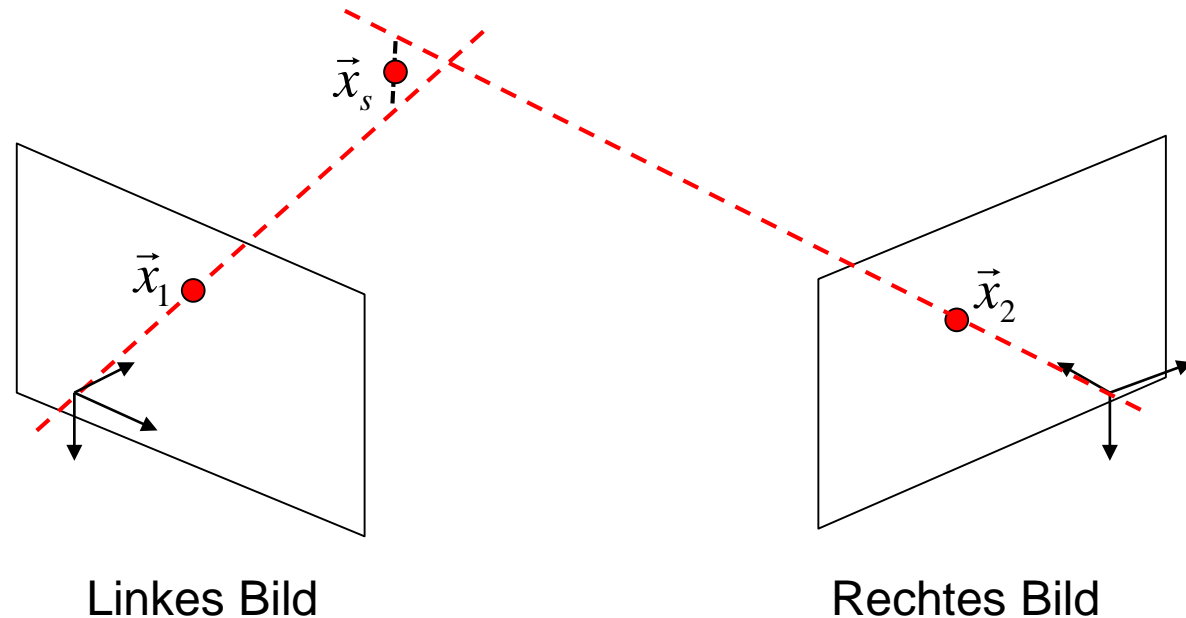
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Wenn schließlich korrespondierende Bildpunkte gefunden sind, kann die 3D Position des entsprechenden Szenenpunkts durch den Schnitt der Geraden berechnet werden.



54

In der Praxis werden sich die Geraden allerdings nicht genau schneiden, man wählt also z.B. den Punkt, der den Abstand zu beiden Geraden minimiert.

Essentielle Matrix

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Die Essentielle Matrix (E -Matrix) steht in engem Zusammenhang zur F -Matrix.

Sie beschreibt ebenfalls die Epipolargeometrie zweier Bilder, es gilt also auch immer die Epipolarbedingung

$$\vec{x}_2^T E \vec{x}_1 = 0$$

sobald \vec{x}_1 auf der Epipolarlinie von \vec{x}_2 liegt.

Im Gegensatz zur Berechnung der F -Matrix werden für die E -Matrix die Projektionsmatrizen P_1 und P_2 benötigt, die Kameras müssen also kalibriert sein.

Der Zusammenhang ergibt sich aus

$$F = P_2^{-1T} E P_1^{-1}$$

wobei die Projektionsmatrizen hier nur aus den ersten drei Spalten bestehen (die letzte Spalte mit Nullen weglassen!)

Rekonstruktion der Projektionsmatrizen

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

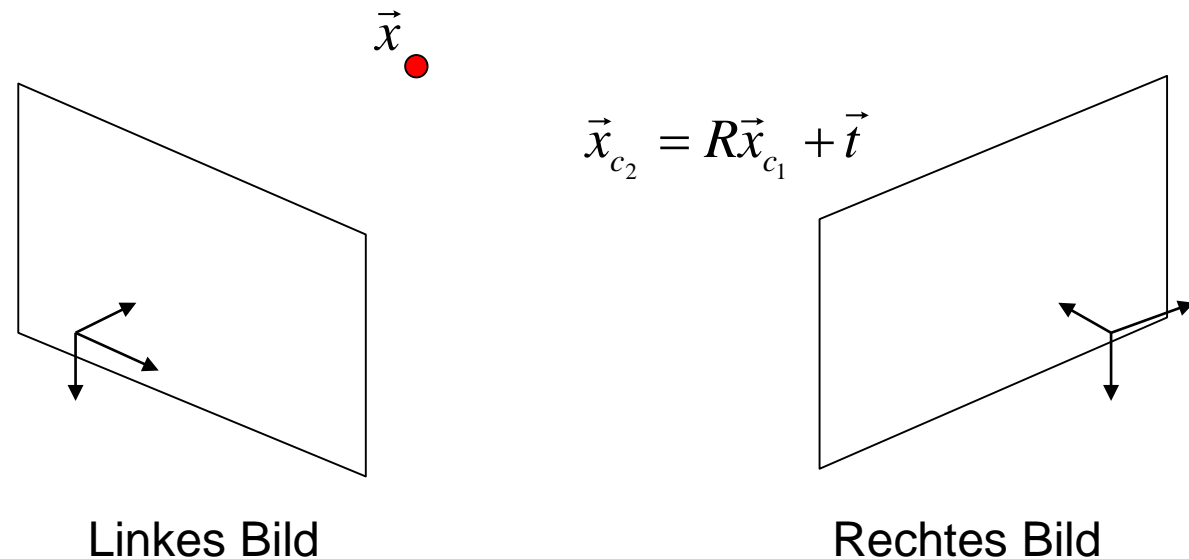
Beispiel

AR

Stereo

Aus der F -Matrix kann man

- Die Transformation von einem Kamerasystem ins andere Kamerasystem berechnen und
- dabei die noch Projektionsmatrizen rekonstruieren.



Dabei wird i.d.R. das Szenenkoordinatensystem mit dem Kamerakoordinatensystem des linken Bilds assoziiert (**kanonische Kamera**).

Rekonstruktion der Projektionsmatrizen

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Für die Berechnung der Bewegung wird die F -Matrix in die E -Matrix umgerechnet,

$$E = P_2^T F P_1$$

und auf die E -Matrix eine Singulärwert-Zerlegung

$$E = U \Lambda V^T$$

angewandt, womit sich die Bewegung $\vec{x}_2 = R\vec{x}_1 + \vec{t}$ vom linken Kamerakoordinatensystem ins rechte berechnen lässt:

Siehe z.B. in Multiple View Geometry Gl. 13.22 und 13.23...

...oder ein Beispiel mit OpenCV...

Baggio et. Al. Mastering OpenCV with Practical Computer Vision Projects. Birmingham [u.a.] : Packt Publ. 2012.

Beispiel aus OpenCV

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

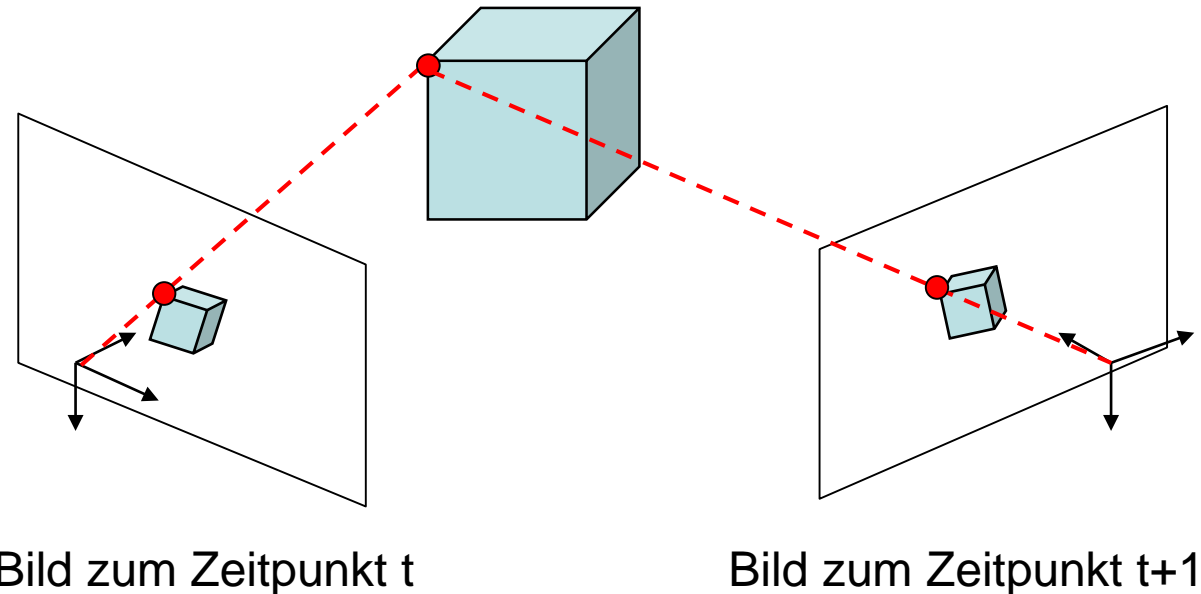
Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

In dem Beispiel wird **Structure from Motion** realisiert. Darunter versteht man das Gewinnen von 3D Informationen aus monokularen, bewegten Kameras.



Wir betrachten die beiden zeitlich aufeinanderfolgenden Aufnahmen als Stereo-Kamerasystem.

E -Matrix mit OpenCV

Kapitel 7

3D Vision

Motivation

Kalibrierung

Beispiel

AR

Stereo

Zunächst Berechnung der E -Matrix aus zwei Listen von korrespondierenden Punkten

```
vector<Point2f>imgpts1, imgpts2;

// read or calculate imgpts1 and imgpts2
:

Mat F = findFundamentalMat(imgpts, imgpts2, FM_RANSAC, 0.1, 0.99,
status);

Mat_<doulbe> E = K.t() * F * K;
```

Dabei wird die Kameramatrix K benötigt (entspricht in der Vorlesung der Matrix P ohne die letzte Spalte) ...

Bewegung der Kamera

Bewegung berechnen und Transformationsmatrizen ebenfalls:

```
SVD svd(E);
Matx33d W(0,-1.0,1,0,0,0,0,1);
Mat_<double> R = svd.u * Mat(W) * svd.vt;
Mat_<double> t = svd.u.col(2);
Matx34d P1 (1, 0, 0, 0,
            0, 1, 0, 0,
            0, 0, 1, 0);
Matx34d P2 (R(0,0), R(0,1), R(0,2), t(0),
            R(1,0), R(1,1), R(1,2), t(1),
            R(2,0), R(2,1), R(2,2), t(2));
```

Die Matrizen $P1$ und $P2$ entsprechen hier den Transformationen vom Szenen- in die Kamerakoordinatensysteme.

Berechnung der Kamera-Orientierung gegenüber einer Ebene aus der Homographie

1. Projektive Abbildung einer Ebene: Homographie

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\Delta_x^{-1} & 0 & u_0 \\ 0 & c\Delta_y^{-1} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & t_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & t_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \lambda \cdot \vec{p} = \vec{K}_{\text{int}} \cdot \vec{P} \cdot \vec{K}_{\text{ext}} \cdot \vec{X}$$

Objektpunkte seien ausschließlich in einer Ebene: Annahme o.E.d.A.: $Z_0=0$

Dann wird

$$\lambda \cdot \vec{p} = \vec{K}_{\text{int}} \cdot \vec{P} \cdot \vec{K}_{\text{ext}} \cdot \vec{X} \quad \text{zu}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\Delta_x^{-1} & 0 & u_0 \\ 0 & c\Delta_y^{-1} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & t_x \\ R_{21} & R_{22} & t_y \\ R_{31} & R_{32} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -c\Delta_x^{-1}R_{11} + u_0R_{31} & -c\Delta_x^{-1}R_{12} + u_0R_{32} & -c\Delta_x^{-1}t_x + u_0t_z \\ c\Delta_y^{-1}R_{21} + v_0R_{31} & c\Delta_y^{-1}R_{22} + v_0R_{32} & c\Delta_y^{-1}t_y + v_0t_z \\ R_{31} & R_{32} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{H} \cdot \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{H} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} -c\Delta_x^{-1}R_{11} + u_0R_{31} & -c\Delta_x^{-1}R_{12} + u_0R_{32} & -c\Delta_x^{-1}t_x + u_0t_z \\ c\Delta_y^{-1}R_{21} + v_0R_{31} & c\Delta_y^{-1}R_{22} + v_0R_{32} & c\Delta_y^{-1}t_y + v_0t_z \\ R_{31} & R_{32} & t_z \end{bmatrix}$$

Berechnung der Kamera-Orientierung gegenüber einer Ebene aus der Homographie

2. Bestimmung der Kammerkonstanten aus der Homographie mit $x_H=y_H=u_0=v_0=0$

Für die Spaltenvektoren der in

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\Delta_x^{-1} & 0 & u_0 \\ 0 & c\Delta_y^{-1} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & t_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & t_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \\ 1 \end{bmatrix}$$

enthaltenen Rotationsmatrix

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{bmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} R_{12} \\ R_{22} \\ R_{32} \end{bmatrix}, \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \end{bmatrix} \quad \blacktriangledown$$

gilt wechselseitige Orthogonalität $\vec{r}_1^T \vec{r}_2 = 0, \vec{r}_1^T \vec{r}_3 = 0, \vec{r}_2^T \vec{r}_3 = 0$.

Bestimmung der Kammerkonstanten mit erster Orthogonalitätsbedingung

$$\tilde{H} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} -\frac{c}{\Delta x} R_{11} & -\frac{c}{\Delta x} R_{12} & -\frac{c}{\Delta x} t_x \\ \frac{c}{\Delta y} R_{21} & \frac{c}{\Delta y} R_{22} & \frac{c}{\Delta y} t_y \\ R_{31} & R_{32} & t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} & \tilde{h}_{13} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} & \tilde{h}_{23} \\ \tilde{h}_{31} & \tilde{h}_{32} & \tilde{h}_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r}_1 = \begin{bmatrix} -\lambda \frac{\Delta x}{c} \tilde{h}_{11} \\ -\lambda \frac{\Delta y}{c} \tilde{h}_{21} \\ \lambda \tilde{h}_{31} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} \lambda \frac{\Delta x}{c} \tilde{h}_{12} \\ \lambda \frac{\Delta y}{c} \tilde{h}_{22} \\ \lambda \tilde{h}_{32} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_1^T \vec{r}_2 = \lambda^2 \left\{ \left(-\frac{1}{c} \right)^2 (\Delta x^2 \tilde{h}_{11} \tilde{h}_{12} + \Delta y^2 \tilde{h}_{21} \tilde{h}_{22}) + (\tilde{h}_{31} \tilde{h}_{32}) \right\} = 0 \Rightarrow c = \pm \sqrt{-\frac{(\Delta x^2 \tilde{h}_{11} \tilde{h}_{12} + \Delta y^2 \tilde{h}_{21} \tilde{h}_{22})}{\tilde{h}_{31} \tilde{h}_{32}}}$$

Berechnung der Kamera-Orientierung gegenüber einer Ebene aus der Homographie

3. Bestimmung der Rotationsmatrix

Spaltenvektoren der Rotationsmatrix sind Einheitsvektoren des gedrehten Koordinatensystems

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_3| = 1$$

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} -\Delta x \frac{\lambda}{c} \tilde{h}_{11} \\ -\Delta y \frac{\lambda}{c} \tilde{h}_{21} \\ \lambda \tilde{h}_{31} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} -\Delta x \frac{\lambda}{c} \tilde{h}_{12} \\ -\Delta y \frac{\lambda}{c} \tilde{h}_{22} \\ \lambda \tilde{h}_{32} \end{bmatrix} \quad \text{wobei } c = \pm \sqrt{\frac{-(\Delta x^2 \tilde{h}_{11} \tilde{h}_{12} + \Delta y^2 \tilde{h}_{21} \tilde{h}_{22})}{\tilde{h}_{31} \tilde{h}_{32}}} \quad \text{aus voriger Orthogonalitätsbedingung}$$

Bestimmung von λ so, dass $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = 1$:

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2 \frac{\tilde{h}_{11}^2}{c^2} + \Delta y^2 \frac{\tilde{h}_{21}^2}{c^2} + \tilde{h}_{31}^2}} = \pm c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2 \tilde{h}_{11}^2 + \Delta y^2 \tilde{h}_{21}^2 + c^2 \tilde{h}_{31}^2}} \quad \text{Einsetzen} \rightarrow \vec{r}_1, \vec{r}_2 \text{ von } \lambda \text{ und } c$$

Bestimmung von \vec{r}_3 aus weiterer Orthogonalitätsbedingung: $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \rightarrow \vec{R} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3]$

Berechnung der Kamera-Orientierung gegenüber einer Ebene aus der Homographie

4. Bestimmung der Translation

Die dritte Spalte der Homographiematrix \tilde{H} lautet $\tilde{h}_3 = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{13} \\ \tilde{h}_{23} \\ \tilde{h}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{\Delta x \cdot \lambda} t_x \\ \frac{c}{\Delta y \cdot \lambda} t_y \\ \frac{1}{\lambda} t_z \end{bmatrix}$

Mit c und λ aus vorheriger Rechnung ist Translationsvektor $\tilde{t} = \begin{bmatrix} -\tilde{h}_{13} \Delta x \frac{\lambda}{c} \\ \tilde{h}_{23} \Delta y \frac{\lambda}{c} \\ \tilde{h}_{33} \lambda \end{bmatrix}$ bestimmt.

Mit dem Translationsvektor und der Rotationsmatrix wird die Lage des persp. Zentrums berechnet.

$$\text{mit } \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -X_{PZ} \\ -Y_{PZ} \\ -Z_{PZ} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_{PZ} \\ Y_{PZ} \\ Z_{PZ} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} X_{PZ} \\ Y_{PZ} \\ Z_{PZ} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$