

Frank Schaefer
Mathematik für Informatiker I

Version 9.0.2
Oktober 2016

HOCHSCHULE KARLSRUHE - TECHNIK UND WIRTSCHAFT
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK UND WIRTSCHAFTSINFORMATIK

Vorwort

Dieses Skript zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1 ist im Wintersemester 2008/2009 begleitend zur Vorlesung entstanden. In der vorliegenden Version 9.0.2 wurden gegenüber der Version 9.0.1 im Abschnitt 1.2 nur zwei Beispielformeln für logische Äquivalenz ergänzt (Regeln von de Morgan). Gegenüber der Version 9.0.0 ist im Abschnitt 3.4.5.1. die Beschreibung des fehlererkennenden Codes überarbeitet worden. Sollte Ihnen ein Fehler auffallen, freue ich mich über Ihre Mitteilung ([frank.schaefer\(at\)hs-karlsruhe.de](mailto:frank.schaefer@hs-karlsruhe.de)).

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Das Reich der Zahlen	5
1.2	Der indirekte Beweis	8
1.3	Quadratische Gleichungen und Lösungsmengen	10
1.4	Fibonacci-Folgen	12
1.5	Euklidischer Algorithmus	15
2	Relationen und Funktionen	21
2.1	Zweistellige Relationen	21
2.2	Äquivalenzrelationen	25
2.3	Modulo-Rechnung (Rechnen mit Restklassen)	27
2.4	Äquivalenzklassen	35
2.5	Funktionen	36
3	Gruppen, Ringe und Körper	49
3.1	Operationen und Rechengesetze	50
3.2	Gruppen	53
3.3	Ringe und Körper	60
3.4	Polynomringe	62
3.5	Hornerschema und Interpolation	76
4	Kombinatorik	91
4.1	Permutation	91
4.2	Variation (oder Anordnung)	94
4.3	Kombination	95
4.4	Binomialkoeffizienten	101
5	Vektorräume	105
5.1	Definition eines reellen Vektorraumes	106
5.2	Lineare Unabhängigkeit	111
5.3	Basis und Dimension	116

6	Lineare Gleichungssysteme	125
6.1	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme	126
6.2	Beschreibung der Lösungsmengen	133
6.3	Determinanten	138
7	Matrizen	155
7.1	Lineare Abbildungen	156
7.2	Rechnen mit Matrizen	164
7.3	Quadratische Matrizen	170
7.4	Rotationsmatrizen	184
7.5	Skalarprodukte in Vektorräumen und Orthogonale Matrizen	197
7.6	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	217
	Literaturverzeichnis	243

Kapitel 1

Einführung

Einige wesentliche Grundbegriffe der Mathematik kennen Sie sicher schon. Andere Grundbegriffe (z.B. Mengen und Operationen mit Mengen) werden Sie in der Vorlesung Theoretische Informatik kennen lernen. Daher werden wir hier auf manche Begriffe nicht ausführlich eingehen, sondern diese uns mit ein paar Beispielen aus der Mathematik vergegenwärtigen. Wir beginnen mit den verschiedenen Zahlbereichen, die Ihnen überwiegend aus der Schule bekannt sind. Die einführenden Beispiele dienen nicht zuletzt auch zur Klärung der Schreibweisen.

1.1 Das Reich der Zahlen

Zunächst haben wir die natürlichen Zahlen, die etwas rhythmisches an sich haben:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

Wenn Sie beim Zählen darauf achten, werden Sie bemerken, dass es viel leichter fällt zu zählen, wenn man dazu eine Bewegung z.B. mit der Hand macht. Diese natürlichen Zahlen fassen wir zu einer Menge \mathbb{N} zusammen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Beachten Sie, dass wir abweichend von der DIN-Norm die Null nicht zu den natürlichen Zahlen hinzunehmen. Wenn die Null mit dabei sein soll, schreiben wir:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Die natürliche Art zu zählen beginnt sicher mit 1, aber in der Informatik werden sie sehen, dass es häufig nützlich ist, z.B. beim Zählen von Elementen einer Liste, mit der 0 anzufangen.

Innerhalb der natürlichen Zahlen können wir beliebige Elemente miteinander addieren und erhalten immer wieder eine natürliche Zahl. Man spricht daher von der Abgeschlossenheit

dieser Operation. Auch bzgl. der Multiplikation sind die natürlichen Zahlen abgeschlossen. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen liefert wieder eine natürliche Zahl. Bzgl. der Subtraktion ist das anders. Die Subtraktionsaufgabe $3 - 7 = ?$ hat im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösung. Die Erweiterung der natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen ergibt die ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Hier kann jede Subtraktionsaufgabe gelöst werden. Die ganzen Zahlen sind also bzgl. der Addition, der Multiplikation und bzgl. der Subtraktion abgeschlossen. Aber die Division ist nicht abgeschlossen. Die Divisionsaufgabe $3/5 = ?$ hat innerhalb der ganzen Zahlen keine Lösung. Erst die Erweiterung zu den rationalen Zahlen ergibt immer eine Lösung, solange nicht durch 0 geteilt wird:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad \text{ggT}(p, q) = 1 \right\} \cup \{0\}.$$

Die Bedingung, dass der Bruch mit teilerfremden Zahlen dargestellt wird, führt dazu, dass die Darstellung der rationalen Zahlen eindeutig ist. Die Brüche

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} \dots$$

stellen alle den gleichen Zahlenwert dar. Die Eindeutigkeit der Zahlendarstellung ist ein typisches Beispiel dafür, dass in den erweiterten Zahlbereichen ganz neue Fragestellungen auftauchen. Bzgl. der Abgeschlossenheit der vier Grundrechenarten haben wir es bei den rationalen Zahlen zu einem gewissen Abschluss gebracht. Alle vier Grundrechenarten sind bis auf die Division durch 0 abgeschlossen.

Die Abgeschlossenheit ist aber nicht erreicht in bezug auf weitere Operationen, wie z.B. die Quadratwurzel. Die Wurzel aus 2 ist nicht in den rationalen Zahlen enthalten. $\sqrt{2}$ ist ein Beispiel für eine sogenannte irrationale Zahl.

Sie gehört aber noch nicht zum „schlimmsten“ Typ von irrationalen Zahlen, denn $\sqrt{2}$ lässt sich durch eine Gleichung folgender Art darstellen:

$$x^2 = 2$$

In diesem Fall spricht man auch von einer algebraischen Zahl. Alle Zahlen, die sich als Lösung einer polynomialen Gleichung darstellen lassen, faßt man unter diesem Begriff zusammen.

Typische Beispiele für die noch „schlimmeren“ irrationalen Zahlen sind die Kreiszahl $\pi \approx 3,14159$ und die Eulersche Zahl $e \approx 2,71828$. Die Eulersche Zahl wurde von Leonhard Euler (1707–1783) schon mit dem Namen e abgeleitet von Exponent eingeführt. Sie war aber schon vorher bekannt. Der ebenfalls sehr berühmte Mathematiker Jakob Bernoulli (1654–1705) war schon vor Euler mit dieser Zahl vertraut. Er verdeutlichte sie an einem nicht besonders realistischen, aber doch sehr anschaulichen Beispiel. Nehmen wir an, ein

Bank verzinst Geldanlagen mit 100%. Wir legen nur genau einen Euro an. Nach einem Jahr verfügen wir also über zwei Euro. Was würde nun passieren, wenn uns die Bank die Zinsen schon nach einem halben Jahr gewährt. Nach einem halben Jahr bekommen wir natürlich nur 50% Zinsen. Aber das bedeutet, dass wir nach einem halben Jahr über 1,5 Euro verfügen und nach einem Jahr über

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2,25.$$

Würden wir z.B. schon nach einem viertel Jahr 25% Zins gutgeschrieben bekommen, so ergäbe sich:

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \approx 2,44.$$

Bei einer täglichen Verzinsung ergibt sich:

$$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2,7145.$$

Das Wachstum verlangsamt sich, und die Zahl e ergibt sich als absolute Obergrenze für den maximalen Ertrag nach einem Jahr

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

wenn der Zeitraum der Verzinsung immer kleiner gewählt wird.

Solche Zahlen werden als transzendente Zahlen bezeichnet. Sie lassen sich nicht als Nullstelle eines Polynomes beschreiben. Die irrationalen Zahlen zerfallen also in solche, die algebraisch sind, und in die transzendenten Zahlen. Zu den algebraischen Zahlen gehören aber auch alle rationalen Zahlen, da sie sich ja alle als Nullstellen von Polynomen darstellen lassen.

Alle rationalen und irrationalen Zahlen fassen wir in einem neuen Zahlenbereich, den sogenannten reellen Zahlen

$$\mathbb{R}$$

zusammen. Diese werden wir bei vielen Betrachtungen in der Vorlesung als Grundmenge verwenden.

Nur andeutungsweise sei hier erwähnt, dass die reellen Zahlen auf folgende Art und Weise charakterisiert werden können: Wenn man eine Zahlenfolge über den rationalen Zahlen betrachtet, die anschaulich gesprochen auf einen bestimmten Zahlenwert hinstrebt (konvergiert), aber der Zahlenwert selbst keine rationale Zahl ist, dann wird dieser neue Zahlenwert hinzugenommen. Die reellen Zahlen bestehen also aus allen rationalen Zahlen zusammen mit den möglichen Grenzwerten von konvergenten Folgen über den rationalen Zahlen. Und diese Grenzwerte können eben entweder algebraisch oder transzendent sein.

Zum Abschluss unserer Betrachtung der Zahlbereiche betrachten wir noch eine Gleichung, die nicht über den reellen Zahlen lösbar ist:

$$x^2 = -25.$$

Bei der Betrachtung der Lösung solcher Gleichungen kommt man zu den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Die Lösungen der obigen Gleichung heißen dann:

$$x_1 = 5\sqrt{-1}, x_2 = -5\sqrt{-1},$$

und da man für die $\sqrt{-1}$ das Zeichen i einführt, schreibt man auch:

$$x_1 = 5i, x_2 = -5i.$$

Allgemein lassen sich alle komplexen Zahlen schreiben als:

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\},$$

wobei x der Realteil und y der Imaginärteil der komplexen Zahl z genannt wird. Wir werden im Rahmen dieser Vorlesung überwiegend mit den reellen Zahlen arbeiten und die komplexen Zahlen nur in seltenen Ausnahmefällen betrachten.

1.2 Der indirekte Beweis

Bei der Betrachtung der Zahlenbereiche im vorigen Abschnitt wurde behauptet, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sei, sich also nicht als Bruch darstellen lassen würde. Diese Behauptung wollen wir in diesem Abschnitt beweisen und dazu eine in der Mathematik häufig eingesetzte Beweismethode, den indirekten Beweis, einsetzen.

Dazu betrachten wir zunächst die Methode des indirekten Beweises allgemein und formalisieren sie mit Hilfe der Aussagenlogik. Es soll eine sogenannte Implikation

$$A \implies B \quad (\text{„wenn } A \text{ gilt, dann gilt auch } B\text{“})$$

gezeigt werden. A wird in diesem Zusammenhang auch als Voraussetzung oder Prämisse und B als Schlußfolgerung oder Konklusion bezeichnet. In der Aussagenlogik gilt folgende Äquivalenz:

$$A \implies B \equiv \neg B \implies \neg A.$$

Dies läßt sich leicht an Hand der folgenden Wahrheitstafel nachvollziehen:

A	B	$A \implies B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \implies \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

In der Aussagenlogik setzen wir ja voraus, dass jede Aussage nur die Wahrheitwerte „wahr“ oder „falsch“ annehmen kann. Die beiden Zeichen A und B stehen für Aussagen und können daher nur „wahr“ oder „falsch“ annehmen, was in der Wahrheitstafel durch 0 bzw. 1 beschrieben wird. Daher gibt es für die Formel mit A und B vier verschiedene Kombinationsmöglichkeiten. Diese sind in der Wahrheitstafel alle durchgespielt und in allen vier Fällen wird den beiden Formeln $A \implies B$ und $\neg B \implies \neg A$ der gleiche Wahrheitswert zugeordnet. Damit sind die beiden Formeln in gewisser Weise gleichwertig. Man bezeichnet sie als **logisch äquivalent** und schreibt dafür:

$$A \implies B \quad \equiv \quad \neg B \implies \neg A.$$

Zwei weitere, wichtige Beispiele für logisch äquivalente Formeln sind:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \quad \text{und} \\ \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B. \end{aligned}$$

Diese werden auch als Regeln von de Morgan bezeichnet.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass man Formeln, die in der Wahrheitstafel bei allen Kombinationen immer den Wahrheitswert 1 bekommen, als Tautologien bezeichnet. Falls mindestens eine 1 in der Spalte für die Formel auftritt, dann werden sie auch als erfüllbar, andernfalls als unerfüllbar bezeichnet.

Um nun die Behauptung $A \implies B$ zu beweisen, können wir ja davon ausgehen, dass A gilt und haben zu zeigen, dass dann auch B gültig ist. Beim indirekten Beweis benutzt man nun die oben ausführlich bewiesene Äquivalenz:

$$A \implies B \equiv \neg B \implies \neg A.$$

und geht von $\neg B$ aus, und leitet daraus $\neg A$ her.

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel dazu. Wir beweisen folgende Aussage:
 „Wenn n^2 (für $n \in \mathbb{N}$) gerade ist, dann ist auch n selbst gerade.“

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis. Also zeigen wir, dass aus der Verneinung der Konklusion die Verneinung der Prämisse folgt:

„Wenn n ungerade ist, dann ist auch n ungerade.“

Das ist aber recht einfach zu zeigen:

$$\begin{aligned} n \text{ ungerade} &\implies n = 2k + 1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ &\implies n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1 \text{ mit } k' = 2k^2 + 2k \\ &\implies n^2 \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

□

Kommen wir jetzt zu einem anspruchsvolleren Beispiel. Wir wenden diese Methode an auf unsere Behauptung: „ $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl“ oder anders ausgedrückt „ $\sqrt{2}$ läßt sich nicht als Bruch darstellen“ an. Zunächst handelt es sich hier nicht um eine „wenn ... dann“-Aussage und in der folgenden Formulierung steckt schon das Wissen, wie man die Aussage beweisen kann, mit drin: „Wenn p und q teilerfremde, natürliche Zahlen sind, dann gilt immer $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$.“ Es liegt auf der Hand, dass es recht schwierig ist auf einem direkten Weg zu beweisen, dass aus der Voraussetzung „ p und q sind teilerfremde, natürliche Zahlen“ die Schlußfolgerung oder Konklusion „ $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ “ folgt. Die ganze Beweisführung ist wesentlich besser zu handhaben, wenn wir von der Verneinung der Schlußfolgerung ausgehen:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} = \frac{p}{q} &\implies 2 = \frac{p^2}{q^2} \\
 &\implies 2q^2 = p^2 \\
 &\implies 2|p^2 && 2 \text{ ist ein Teiler von } p^2 \text{ m.a.W. } p \text{ ist gerade} \\
 &\implies 2|p && \text{also ist auch } p \text{ gerade (s.o.)} \\
 &\implies 4|p^2 \\
 &\implies 4|2q^2 && \text{da ja gilt: } 2q^2 = p^2 \\
 &\implies 2|q^2 \\
 &\implies 2|q \\
 &\implies p, q \text{ sind nicht teilerfremd}
 \end{aligned}$$

Somit haben wir aus $\neg B = „\sqrt{2} = \frac{p}{q}“$ die Aussage $\neg A = „p$ und q sind nicht teilerfremd“ hergeleitet. Oft wird die gleiche Beweisidee auch noch etwas anders notiert: Man geht aus von A und $\neg B$ und leitet daraus einen Widerspruch her. Die Beweisschritte bleiben dabei letztendlich gleich.

1.3 Quadratische Gleichungen und Lösungsmengen

Schon bei sehr einfachen Berechnungen stößt man auf quadratische Gleichungen. Betrachten wir beispielsweise folgende Aufgabe: Ein Stab der Länge 1 soll auf die Länge x verlängert werden. Dabei soll das Verhältnis der neuen Länge x zur ursprünglichen Länge 1 gleich sein dem Verhältnis der Länge 1 zu dem neu hinzugekommenen Abschnitt der Länge $x - 1$ (siehe Abbildung 1.1).

Für die Unbestimmte x haben wir also folgende Gleichung:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

und somit die quadratische Gleichung:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

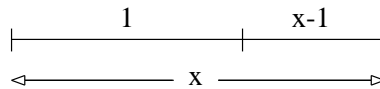


Abbildung 1.1: Goldener Schnitt

Wir suchen die Lösungsmenge, also die Menge aller Werte für x , die diese Gleichung erfüllen. Die Lösungsmenge hängt aber davon ab, welchen Grundbereich wir betrachten, das heißt, welche Werte für x wir überhaupt zulassen. Betrachten wir zunächst als Grundmenge G die reellen Zahlen:

$$G = \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe einer der beiden Lösungsformeln für quadratische Gleichungen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oder

$$x^2 + px + q = 0 \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

lassen sich leicht die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

bestimmen. Also erhalten wir die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Wenn wir genauer beschreiben, dass die reellen Zahlen als Grundbereich verwendet werden, dann schreiben wir:

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x - 1 = 0\} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

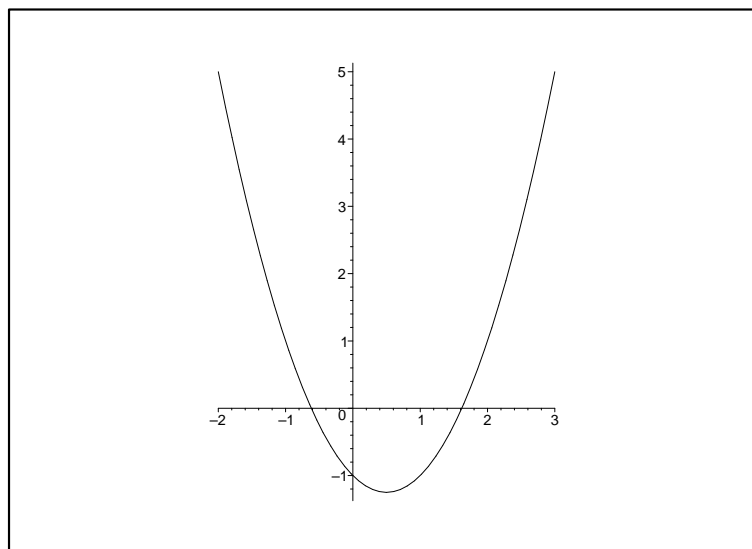


Abbildung 1.2: Quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$

(gesprochen: die Menge aller x aus \mathbb{R} , für die gilt ... ist gleich).

Betrachten wir die gleiche Gleichung über den rationalen Zahlen \mathbb{Q} , so erhalten wir als Lösungsmenge $L = \{\}$ die leere Menge.

In diesem besonderen Fall ist die eine Lösung negativ, und da wir Längen berechnen wollen, kommt als Goldener Schnitt nur die positive Lösung $x_1 \approx 1,618$ in Frage. Der Goldene Schnitt spielt in der Ästhetik eine wesentliche Rolle, da die Unterteilung der Strecke in diesem Verhältnis als besonders harmonisch empfunden wird. Er tritt auch beim regelmäßigen Fünfeck, dem Pentagramm, als Verhältnis der Diagonalen zur Seitenlänge auf.

Betrachten wir abschließend noch einmal die allgemeine Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

An der sogenannten Diskriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

also an dem Ausdruck unter der Wurzel der Lösungsformel, kann die Anzahl der Lösungen abgelesen werden: für $\Delta > 0$ gibt es zwei Lösungen, für $\Delta = 0$ gibt es eine Lösung und für $\Delta < 0$ existiert keine Lösung.

1.4 Fibonacci-Folgen

Wir betrachten die Folge von natürlichen Zahlen:

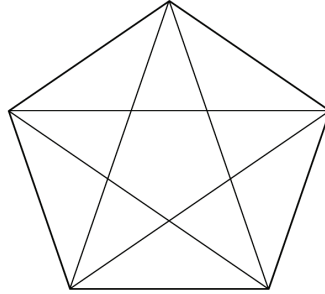


Abbildung 1.3: Pentagramm

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Sie fängt per Definition mit den beiden Folgengliedern 0 und 1 an und jedes weitere Folgenglied ergibt sich durch Addition der beiden vorhergehenden. Wir benenne die Folgenglieder mit:

$$f_0 := 0, f_1 := 1, f_2 := 1, f_3 := 2, f_4 := 3, f_5 := 5, \dots, f_n, \dots$$

Allgemein bezeichnet also f_n das n -te Folgenglied. Die Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge kann dann beschrieben werden durch:

$$f_n := f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Dies wird allgemein auch als Rekursionsvorschrift bezeichnet. Für die vollständige Beschreibung der Folge ist aber neben der Rekursionsvorschrift auch die Definition von zwei Anfangsgliedern notwendig, so dass erst

$$f_0 := 0, f_1 := 1, f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

eine vollständige Beschreibung der Fibonacci-Folge liefert. Allgemein schreibt man eine solche unendliche Folge auch als:

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Diese Folge hängt mit dem goldenen Schnitt aus dem vorigen Abschnitt zusammen. Der Quotient

$$\frac{f_n}{f_{n-1}}$$

liefert eine Annäherung an den goldenen Schnitt, die für wachsendes n immer genauer ist. Es gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned}5/3 &\approx 1,666, \\8/5 &= 1,6, \\13/8 &= 1,625, \\21/13 &\approx 1,615, \\34/21 &\approx 1,619, \\55/34 &\approx 1,617, \\89/55 &\approx 1,618.\end{aligned}$$

Die letzte Approximation ist schon auf vier Stellen genau!

Die Fibonacci-Folge ist nach dem italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa, der eben auch Fibonacci genannt wird, benannt. Er beschreibt sie in seinem Hauptwerk *LIBER-ABBACI*, das er 1202 in seiner ersten Fassung veröffentlichte. Er gilt als sehr bedeutender Mathematiker, da er auf seine weiten Reisen, die in unter anderem in den nahen Osten führten, die Dezimalzahlen kennen und schätzen gelernt hatte. In seinem Hauptwerk tritt er für ihre Verwendung ein und erst durch ihre Verbreitung konnte sich die Mathematik in Europa weiter entwickeln.

Die Fibonacci-Folge führt er an Hand eines sehr kuriosen Beispiels ein. Er betrachtet die Vermehrung von Kaninchen und dabei von folgenden Annahmen aus:

Jedes erwachsene Paar bekommt jeden Monat ein junges Paar als Nachwuchs.

Die jungen Paare bekommen erst zwei Monate nach ihrer Geburt auch wieder selbst Nachwuchs.

Keine Kaninchen sterben.

Im ersten Monat wird ein junges Pärchen Kaninchen erworben für das Experiment. Im zweiten Monat reift es heran. Im dritten Monat bekommt das Kaninchen Nachwuchs, so dass wir ein junges Paar und ein zeugungsfähiges Paar haben. Im vierten Monat reift das junge Paar heran und das zeugungsfähige Paar bringt ein neues Paar hervor. Im fünften Monat bringen die zwei zeugungsfähigen Paare neue Paare hervor und das im letzten Monat geborene reift heran, also insgesamt fünf Paare. Die gesamte Anzahl der Kaninchen lässt sich für jeden Monat durch die Fibonacci-Folge beschreiben, allerdings beginnend mit den beiden Startwerten 1 und 1.

Wenn wir ein neu geborenes Paar mit jP bezeichnen, ein heranwachsendes Paar mit rP und ein geschlechtsreifes Paar mit aP , dann können wir die Entwicklung in den ersten fünf Monaten wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{cccccc}
 jP & rP & aP & aP & aP & \\
 & & jP & rP & aP & \\
 & & & jP & rP & \\
 & & & & jP & \\
 & & & & jP & \\
 \hline
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5
 \end{array}$$

Die letzte Zeile beschreibt die Gesamtanzahl der Paare.

1.5 Euklidischer Algorithmus

Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, also eine ganze und eine natürliche Zahl. Die Zahl a heißt durch n teilbar, wenn es eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$a = b \cdot n.$$

Die Zahl n heißt dann Teiler von a und wir schreiben

$$n|a \quad (n \text{ teilt } a),$$

wie wir das beim Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, schon verwendet haben.

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, falls p genau zwei Teiler hat, nämlich sich selbst und die 1.

Bekanntlich lassen sich alle natürliche Zahlen in Primzahlen zerlegen, wie z.B.

$$\begin{array}{rclcl}
 n & = & 84 & = & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 & = & 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \\
 m & = & 110 & = & 2 \cdot 5 \cdot 11 & & \\
 k & = & 260 & = & 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 & = & 2^2 \cdot 5 \cdot 13.
 \end{array}$$

Für natürliche Zahlen ist diese Zerlegung in Primzahlen eindeutig, bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

Der größte, gemeinsame Teiler (abgekürzt ggT) zweier natürlicher Zahlen ist einfach die größte, natürliche Zahl, die beide gegebenen Zahlen teilt. Der ggT kann berechnet werden als das Produkt über alle gemeinsamen Primteiler, also z.B.:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ggT}(m, n) & = & 2 \\
 \text{ggT}(m, k) & = & 2 \cdot 5 = 10 \\
 \text{ggT}(n, k) & = & 2 \cdot 2 = 4.
 \end{array}$$

Den Sonderfall der 0 haben wir hier ausgeschlossen. In manchen Lehrbüchern wird dieser Sonderfall definiert, aber die Definitionen sind nicht einheitlich.

Die Bestimmung des ggT über die Primfaktorzerlegung ist i.A. sehr rechenintensiv. Dies liegt daran, dass das Faktorisieren für sehr große Zahlen i.A. sehr aufwändig ist. Interessanter Weise benötigt man aber für die Bestimmung des ggT die faktorisierte Darstellung der Zahlen nicht! Es gibt einen Algorithmus, mit dessen Hilfe der ggT sehr effizient bestimmt werden kann, nämlich der sog. Euklidische Algorithmus.

Dieser Algorithmus ist eigentlich nur ein wiederholtes Anwenden der Division mit Rest, die wir zunächst behandeln:

1.5.1 Division mit Rest

Zu zwei natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gibt es genau zwei Zahlen q und r aus \mathbb{N} mit $0 \leq r < m$ und

$$n = q \cdot m + r.$$

1.5.1.1 Beispiel

Wir führen eine Division mit Rest für 17 und 5 durch:

$$17 = 3 \cdot 5 + 2.$$

1.5.2 Euklidischer Algorithmus

Es seien a_0 und a_1 zwei natürliche Zahlen mit $a_0 > a_1$. Wir führen jetzt für a_0 und a_1 eine Division mit Rest durch und nehmen anschließend a_1 und den Rest als die beiden Zahlenwerte, für die wieder Division mit Rest durchgeführt wird:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_1 \cdot a_1 + a_2 \\ a_1 &= q_2 \cdot a_2 + a_3 \\ &\dots \\ a_i &= q_{i+1} \cdot a_{i+1} + a_{i+2} \\ &\dots \\ a_{j-1} &= q_j \cdot a_j + a_{j+1} \\ a_j &= q_{j+1} \cdot a_{j+1} + 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Diese fortgesetzte Division mit Rest wird solange ausgeführt, bis als Rest nur noch die Null auftritt. Dann gilt:

$$\text{ggT}(a_0, a_1) = a_{j+1}.$$

1.5.2.1 Beispiel

Wir berechnen den größten gemeinsamen Teiler von 360 und 332:

$$\begin{aligned}360 &= 1 \cdot 332 + 28 \\332 &= 11 \cdot 28 + 24 \\28 &= 1 \cdot 24 + 4 \\24 &= 6 \cdot 4 + 0.\end{aligned}$$

Der letzte Wert ungleich Null ergibt den ggT, also gilt:

$$\text{ggT}(360, 332) = 4.$$

1.5.2.2 Beispiel

Wir berechnen den größten gemeinsamen Teiler von 969 und 627:

$$\begin{aligned}969 &= 1 \cdot 627 + 342 \\627 &= 1 \cdot 342 + 285 \\342 &= 1 \cdot 285 + 57 \\285 &= 5 \cdot 57 + 0.\end{aligned}$$

Der letzte Wert ungleich Null ergibt den ggT, also gilt:

$$\text{ggT}(969, 627) = 57.$$

1.5.2.3 Beispiel

Wir berechnen den größten, gemeinsamen Teiler von 130900 und 33975:

$$\begin{aligned}130.900 &= 3 \cdot 33.975 + 28.975 & (3 \cdot 33.975 = 101.925) \\33.975 &= 1 \cdot 28.975 + 5.000 \\28.975 &= 5 \cdot 5.000 + 3.975 \\5.000 &= 1 \cdot 3.975 + 1.025 \\3.975 &= 3 \cdot 1.025 + 900 \\1.025 &= 1 \cdot 900 + 125 \\900 &= 7 \cdot 125 + 25 \\125 &= 5 \cdot 25 + 0.\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\text{ggT}(130900, 33975) = 25.$$

1.5.3 Warum liefert der Euklidische Algorithmus den ggT?

Also Vorbereitung für den Beweis, dass der Euklidische Algorithmus den ggT liefert zeigen wir folgende Aussage:

Falls t eine Teiler von a und b ist, dann gilt auch:

$$t \mid a \pm b.$$

Ferner gilt für $c, d \in \mathbb{N}$:

$$t \mid c \cdot a \pm d \cdot b.$$

Ein solcher Ausdruck $c \cdot a \pm d \cdot b$ wird auch als Linearkombination bezeichnet. Wir können also diese Aussage auch so ausdrücken, dass wir sagen: Falls t ein Teiler von a und b ist, dann teilt t auch jede Linearkombination von a und b .

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} a &= n \cdot t \\ b &= m \cdot t \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$a \pm b = nt \pm mt = (n \pm m) \cdot t.$$

Also ist t ein Teiler von $n + m$ und $n - m$. Die zweite Aussage beweist man ganz analog:

$$ca \pm db = cnt \pm dmt = (cn \pm dm)t.$$

Da $n, m, c, d \in \mathbb{N}$, so ist auch $(cn \pm dm) \in \mathbb{N}$ und somit t ein Teiler. □

Bevor wir die allgemeine Behauptung angehen, betrachten wir den Spezialfall, dass der Euklidische Algorithmus nach vier Schritten endet, wie das bei den ersten beiden Beispielen der Fall war:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_1 \cdot a_1 + a_2 \\ a_1 &= q_2 \cdot a_2 + a_3 \\ a_2 &= q_3 \cdot a_3 + a_4 \\ a_3 &= q_4 \cdot a_4 + 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Es sei t der gesuchte ggT, also $t := \text{ggT}(a_0, a_1)$. Dann ist t ein Teiler von a_0 und a_1 . Die erste Gleichung der Euklidischen Algorithmus können wir umformen zu:

$$a_2 = a_0 - q_1 \cdot a_1.$$

Da t ein Teiler von a_0 und a_1 ist, so folgt dass t ein Teiler von allen Linearkombinationen von a_0 und a_2 ist. Also ist t auch ein Teiler von a_2 . Die zweite Gleichung des Euklidischen Algorithmus können wir umformen zu:

$$a_3 = a_1 - q_2 \cdot a_2.$$

Da t ein Teiler von a_1 und a_2 ist, so muss t auch ein Teiler von a_3 sein. Analog können wir aus der dritten Gleichung weiter schliessen, dass t auch ein Teiler von a_4 ist. Wir wollen insgesamt zeigen, dass a_4 der ggT ist, und wir haben schon bewiesen, dass

$$t|a_4$$

gilt. Für den zweiten Teil des Beweises betrachten wir die Gleichungen des Euklidischen Algorithmus von unten her. Die letzte Gleichung zeigt, dass a_4 ein Teiler von a_3 ist. Da aber a_4 auch ein Teiler von sich selbst ist, haben wir insgesamt, dass a_4 ein Teiler von a_4 und von a_3 ist. Damit können wir aus der vorletzten Zeile ersehen, dass a_4 auch ein Teiler von a_2 sein muss. Jetzt wissen wir, dass a_4 ein Teiler von a_3 und a_2 ist. Dann zeigt uns aber die zweite Zeile, dass a_4 auch ein Teiler von a_1 ist. Analog zeigt die erste Zeile, dass a_4 ein Teiler von a_0 sein muss. Also ist a_4 ein Teiler von a_0 und a_1 , also insbesondere ein Teiler des ggT:

$$a_4|t.$$

Damit ist insgesamt bewiesen, dass für unseren Spezialfall

$$a_4 = \text{ggT}(a_0, a_1)$$

gilt.

Der Beweis für den allgemeinen Fall kann nun ganz analog geführt werden. Wir müssen jetzt an Stelle der Darstellung 1.2 die allgemeine Darstellung 1.1 betrachten.

Wir bemerken zunächst, dass jeder gemeinsame Teiler von a_0 und a_1 auch Teiler von a_2 ist (wg. $a_2 = a_0 - q_1 \cdot a_1$). Dies gilt auch allgemein für jede Zeile: jeder Teiler von a_i und a_{i+1} ist auch Teiler von a_{i+2} . Damit ist aber schon klar, dass kein Teiler verloren geht. Also enthält a_{j+1} alle gemeinsamen Teiler von a_0 und a_1 .

Es gilt aber auch, dass a_{j+1} selbst ein Teiler von a_0 und a_1 ist: a_{j+1} ist offensichtlich Teiler von a_j (letzte Zeile). Jeder Teiler von a_{j+1} und a_j ist aber auch Teiler von a_{j-1} (vorletzte Zeile). Insbesondere ist also a_{j+1} ein Teiler von a_j und a_{j-1} . Jeder Teiler von a_j und a_{j-1} ist Teiler von a_{j-2} (drittletzte Zeile). Also ist a_{j+1} Teiler von a_{j-1} und a_{j-2} . Schließlich kommen wir rauf bis a_0 und a_1 und wissen, dass a_{j+1} ein Teiler dieser beiden Zahlen ist.

Damit haben wir insgesamt gefunden, dass a_{j+1} alle Teiler von a_0 und a_1 enthält und gleichzeitig selbst Teiler von a_0 und a_1 ist, somit also der größte, gemeinsame Teiler sein muss!

1.5.4 Warum ist der Euklid'sche Algorithmus sehr effizient?

Es gibt eine alte Überlieferung, in der sich ein Held, der von einem König belohnt werden soll, nur wünscht, man möge ihm auf ein Schachbrett auf das erste Feld ein Reiskorn legen. Auf das zweite Feld möge man zwei Reiskörner legen, auf das dritte Feld 8 Körner usw. Es soll also die Anzahl der Körner für jedes Feld verdoppelt werden. Auf das i -te Feld kommen also 2^{i-1} Körner und somit auf das 64. und letzte Feld 2^{63} Körner. Dafür langt aber die gesamte Jahresernte an Reis bei weitem nicht aus. Die Geschichte zeigt, dass eine wiederholte Verdoppelung schon nach 64 Schritten riesige Zahlenwerte ergibt. Entsprechend liefert eine wiederholte Halbierung sehr schnell immer kleinere Zahlenwerte. Wir beweisen nun, dass sich die Größe der Zahlen beim Euklidschen Algorithmus nach zwei Iterationen mindestens halbiert! Dies zeigt, dass das Verfahren sehr effizient ist und auch für sehr große Zahlen leicht angewendet werden kann.

Betrachten wir dazu den allgemeinen Schritt:

$$a_i = q_{i+1} \cdot a_{i+1} + a_{i+2}$$

Es können nun zwei Fälle auftreten.

1. Fall:

$$a_{i+1} > \frac{a_i}{2}$$

In diesem Fall ergibt die Division mit Rest

$$a_i = a_{i+1} + a_{i+2}.$$

Damit folgt aber:

$$a_{i+2} < \frac{a_i}{2}.$$

2. Fall:

$$a_{i+1} \leq \frac{a_i}{2} \implies a_{i+2} < \frac{a_i}{2},$$

da allgemein $a_{i+2} < a_{i+1}$ ist.

Also gilt in beiden Fällen

$$a_{i+2} < \frac{a_i}{2},$$

d.h. nach zwei Iterationsschritten halbiert sich die Größe mindestens. Im Allgemeinen werden die Zahlen noch viel schneller klein!

Kapitel 2

Relationen und Funktionen

2.1 Zweistellige Relationen

Bei einer zweistelligen Relation werden jeweils bestimmten Elementen aus einer Menge A andere Elemente aus einer Menge B zugeordnet. Die beiden Mengen können dabei auch gleich sein. Vergegenwärtigen wir uns das zunächst an einem Beispiel:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}.$$

Eine zweistellige Relation besteht nun aus solchen Paaren von Elementen aus A bzw. B :

$$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_4, b_3), (a_5, b_7)\}.$$

Die Elemente aus R bestehen also immer genau aus einem Element aus A an erster Position und einem Element aus B an zweiter Position. Grafisch lassen sich solche Relationen sehr schön mit Pfeilen veranschaulichen: man verwendet einfach für jedes Element der Relation einen Pfeil von dem Element aus A zu dem zugeordneten Element aus B , wie das in Abbildung 2.1 dargestellt ist.

Um nun allgemein eine zweistellige Relation definieren zu können, führen wir das **kartesische Produkt** von zwei Mengen A und B ein:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Das kartesische Produkt beschreibt also die Menge aller möglichen Paare mit einem Element aus A an erster Position und einem Element aus B an zweiter Position.

Damit können wir eine Relation ganz allgemein als Teilmenge der Menge aller möglichen Paare beschreiben:

$$R \subseteq A \times B.$$

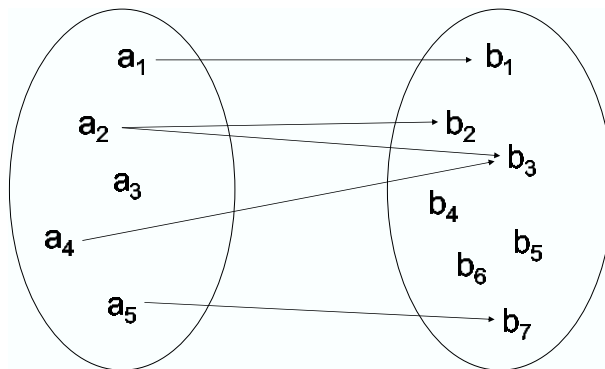


Abbildung 2.1: Beispiel einer Relation R

2.1.1 Umkehrrelation

Zu einer gegebenen Relation R auf $A \times B$ definieren wir die Umkehrrelation durch

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

Somit gilt $R^{-1} \subseteq B \times A$, was wir auch die zu R inverse Relation nennen. In der grafischen Darstellung der Umkehrrelation kehren sich die Pfeile einfach um. Es gilt offensichtlich: $(R^{-1})^{-1} = R$.

2.1.2 Schreibweise

Für die hier betrachteten zweistelligen Relationen verwenden wir an Stelle von $(x, y) \in R$ auch die sogenannte Infixschreibweise:

$$xRy.$$

Das Relationszeichen wird hier also zwischen die beiden Elemente geschrieben, obwohl es sich bei R per Definition um eine Menge von Paaren handelt. Diese Schreibweise ist Ihnen aber z.B. von der Kleiner-Relation vertraut:

$$2 < 3.$$

Der Begriff der Relation ist ja sehr allgemein. Ein wesentlich eingeschränkterer Begriff soll im Folgenden eingeführt werden:

2.1.3 Ordnungrelation

Es sei R eine zweistellige Relation auf $G \times G$, die wir in Infixschreibweise schreiben. R heißt Ordnungrelation oder auch Halbordnung auf der Menge G , falls für beliebige Elemente $a, b, c \in G$ gilt:

-
- aRa . (Reflexivität)
 - $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$. (Transitivität)
 - $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$. (Antisymmetrie)

Warum nennen wir die dritte Eigenschaft Antisymmetrie? Sie besagt, dass es keine zwei verschiedenen Elemente geben kann, die gegenseitig in Relation zueinander stehen. Aber genau solche Elemente würden in diesem Zusammenhang symmetrisch (bezüglich dieser Relation) heißen.

2.1.3.1 Beispiel

Die \leq -Relation ist eine Ordnungsrelation auf der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} , denn es gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- $x \leq x$. (Reflexivität)
- $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$. (Transitivität)
- $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$. (Antisymmetrie)

Es sind also alle drei Gesetzmäßigkeiten der Ordnungsrelation erfüllt. Beachten Sie, dass die $<$ -Relation keine Ordnungsrelation ist. Welche Gesetzmäßigkeiten sind nicht erfüllt?

2.1.4 Beobachtung:

In dem Fall der \leq -Relation über den reellen Zahlen gilt, dass zwei reelle Zahlen stets vergleichbar sind. Das bedeutet, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ stets gilt:

$$x \leq y \vee y \leq x,$$

wobei ja dieses „Oder“ nicht ausschließend ist, es kann also auch beides erfüllt sein. Die Eigenschaft, dass zwei Elemente immer vergleichbar sind, gilt nicht allgemein für Ordnungsrelationen, wie das folgende Beispiel zeigt.

2.1.4.1 Beispiel

Die Teilmengenbeziehung (Inklusion), die auch Gleichheit der Teilmengen zulässt,

$$\subseteq$$

ist auf der Potenzmenge einer beliebigen Menge G eine Ordnungsrelation. Dabei verstehen wir unter der Potenzmenge einer Menge $\mathbb{P}(G)$ die Menge aller Teilmengen von G . Für die \subseteq -Relation gelten auch hier wieder die drei Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und der Antisymmetrie.

Machen wir uns das Ganze an einem konkreten Einzelfall klar und betrachten als G die Menge $\{0, 1\}$. Dann besteht die Potenzmenge aus folgenden Elementen:

$$\mathbb{P}(G) = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Es gibt die beiden folgenden Ketten von Inklusionen:

$$\{\} \subseteq \{0\} \subseteq \{0, 1\}$$

sowie

$$\{\} \subseteq \{1\} \subseteq \{0, 1\},$$

aber die beiden Elemente $\{0\}$ und $\{1\}$ können nicht mit einander verglichen werden.

2.1.4.2 Beispiel

Wir betrachten die Menge von Tripeln von natürlichen Zahlen:

$$\{(m, n, k) \mid m, n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Auf dieser Menge führen wir eine Relation R ein:

$$(m, n, k)R(m', n', k') \iff m + n + k \leq m' + n' + k'.$$

Dabei sei die Gleichheit von Tripeln wie üblich definiert durch:

$$(m, n, k) = (m', n', k') \text{ genau dann, wenn } m = m', n = n', k = k'.$$

Wir untersuchen nun, ob es sich bei dieser Relation um eine Ordnungsrelation handelt:

- reflexiv: $(m, n, k)R(m, n, k)$ ist für alle Tripel erfüllt, da $m + n + k \leq m + n + k$ gilt. Also ist R reflexiv.
- transitiv: Es ist zu zeigen:

$$(m, n, k)R(m', n', k') \wedge (m', n', k')R(m'', n'', k'') \Rightarrow (m, n, k)R(m'', n'', k'').$$

Die linke Seite dieser logischen Implikation ist gleichbedeutend mit:

$$m + n + k \leq m' + n' + k' \wedge m' + n' + k' \leq m'' + n'' + k''.$$

Daraus folgt aber offensichtlich:

$$m + n + k \leq m'' + n'' + k''$$

und somit die logische Schlussfolgerung:

$$(m, n, k)R(m'', n'', k'').$$

Damit ist gezeigt, dass R transitiv ist.

-
- antisymmetrisch: Für die Antisymmetrie müßte gelten:

$$(m, n, k)R(m', n', k') \wedge (m', n', k')R(m, n, k) \Rightarrow (m, n, k) = (m', n', k').$$

Dazu liefern aber folgende beiden Tripel ein Gegenbeispiel:

$$(2, 3, 5)R(1, 6, 3) \wedge (1, 6, 3)R(2, 3, 5) \text{ aber } (2, 3, 5) \neq (1, 6, 3)$$

Also gilt die Antisymmetrie nicht.

Die Relation R ist also keine Ordnungsrelation.

2.1.5 Lineare Ordnung oder Totale Ordnung

Falls eine Ordnungsrelation R über einer Menge G die Eigenschaft besitzt, dass sich alle Elemente aus G miteinander vergleichen lassen, d.h. dass

$$aRb \vee bRa \text{ für alle } a, b \in G$$

gilt, dann heißt R **lineare Ordnung** oder **totale Ordnung**.

2.1.6 Strikte Ordnungsrelation

An Stelle von solchen Relationen, wie zum Beispiel \leq und \subseteq betrachtet man häufig auch Relationen, wie zum Beispiel $<$ oder \subset . Dieser Typus von Relation heißt auch strikte Ordnungsrelation. Allgemein definiert man: Wenn R eine Ordnungsrelation ist, so heißt die durch

$$aPb \iff aRb \wedge a \neq b$$

definierte Relation P strikte Ordnungsrelation.

2.2 Äquivalenzrelationen

Im vorigen Abschnitt haben wir Ordnungsrelationen betrachtet mit denen sich Elemente mehr oder minder anordnen lassen. Im Folgenden werden wir einen Typ von Relation einführen, der auf den ersten Blick von der Definition her sehr ähnlich aussieht. Wir werden aber sehen, dass diese Typen von Relationen nicht zu solchen Anordnungen sondern **immer** zu einer Einteilung der Elemente in verschiedenen Teilmengen (oder sog. Klassen) führt.

2.2.1 Äquivalenzrelation

Es sei R eine zweistellige Relation auf einer Menge G mit:

- aRa (Reflexivität).
- $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$ (Transitivität).
- $aRb \Rightarrow bRa$ (Symmetrie).

für alle $a, b, c \in G$. Dann heißt R Äquivalenzrelation auf der Menge G .

2.2.1.1 Beispiel

Auf jeder Menge ist die Relation $=$ eine Äquivalenzrelation, denn es gilt für alle Elemente x, y, z :

- $x = x$.
- $(x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$.
- $x = y \Rightarrow y = x$.

2.2.1.2 Beispiel: Kongruente Dreiecke

In der Geometrie gibt es für Dreiecke den Begriff der Kongruenz. Zwei Dreiecke heißen kongruent, falls sie durch eine Drehung, Verschiebung und Spiegelung ineinander überführt werden können. Dabei bleiben also Winkel und Längen erhalten. Auf der Menge aller Dreiecke bildet der Begriff der Kongruenz eine Äquivalenzrelation.

2.2.1.3 Beispiel: flächengleiche Rechtecke

Wir betrachten als Grundmenge

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

also Paare von reellen Zahlen. Wir definieren als zweistellige Relation:

$$(a, b)R(c, d) \text{ gdw. } a \cdot b = c \cdot d.$$

Diese Relation erfüllt alle drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation, da die Definition der Relation über die Gleichheit definiert ist und diese ja eine Äquivalenzrelation ist.

Wir können die Zahlenpaare $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ interpretieren als die Kantenlängen von Rechtecken. Dann stehen alle Rechtecke mit gleicher Fläche zueinander in Relation. Hier läßt sich auch verdeutlichen, dass die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt sind. Jedes Rechteck ist flächengleich zu sich selbst. Also ist die Relation reflexiv. Ferner ist die Relation transitiv: Wenn ein Rechteck 1 die gleiche Fläche besitzt wie Rechteck 2 und

Rechteck 2 die gleiche Fläche wie Rechteck 3, dann hat natürlich auch das erste Rechteck die gleiche Fläche wie das dritte. Die Symmetrie ist auch leicht zu sehen, denn wenn Rechteck 1 die gleiche Fläche hat wie Rechteck 2, dann gilt sicher auch umgekehrt, dass Rechteck 2 auch die gleiche Fläche wie Rechteck 1 besitzt.

2.2.1.4 Beispiel: Kreise

Wir betrachten über der Grundmenge

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

eine Relation

$$R \subseteq G \times G$$

definiert durch:

$$(a, b)R(c, d) \text{ gdw. } a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Diese Relation erfüllt sicher alle drei Gesetze einer Äquivalenzrelation. Da für alle Elemente (x, y) einer Äquivalenzklasse der Wert $r := x^2 + y^2$ konstant ist, bilden die Äquivalenzklassen Kreise mit Radius \sqrt{r} .

An diesen Beispielen sieht man schon, wie die Äquivalenzrelation dazu führt, dass die Gesamtheit aller Elemente in Teilmengen eingeteilt werden. Im letzten Beispiel bildet die Menge aller Punkte auf einem Kreis um den Ursprung eine solche Teilmenge. Jeder Punkt gehört zu genau einer Teilmenge (einem Kreis) und zwei verschiedene Teilmengen (Kreise) sind immer disjunkt, das heißt, sie haben kein einziges Element gemeinsam. Weiter unten werden wir dies allgemein betrachten, aber zunächst werden wir – recht ausführlich – unser Hauptbeispiel für die Äquivalenzrelation einführen.

2.3 Modulo-Rechnung (Rechnen mit Restklassen)

In diesem Kapitel führen wir eine für die moderne Digitaltechnik wichtige Äquivalenzrelation auf der Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ein. Wir nehmen dazu eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ her, den sogenannten Modul. Dann gibt es für jede ganze Zahl x genau einen Rest r_x mit

$$x = q_x n + r_x \text{ und } 0 \leq r_x < n.$$

Wir verwenden also hier wieder die Division mit Rest. Dies kann auch für eine weitere beliebige ganze Zahl y durchgeführt werden:

$$y = q_y n + r_y \text{ und } 0 \leq r_y < n.$$

Wir führen jetzt auf den ganzen Zahlen die Äquivalenzrelation \equiv ein:

$$x \equiv y \Leftrightarrow r_x = r_y.$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass diese Relation reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Selbstverständlich hängt die Äquivalenzrelation entscheidend von dem gewählten Modul n ab. Daher sagt man auch **äquivalent modulo n** und schreibt genauer:

$$x \equiv y \pmod{n}.$$

Betrachten wir als erstes eine kleine Eigenschaft dieser Relation. Zwei Zahlen x und y sind genau dann äquivalent modulo n , falls n die Differenz der beiden Zahlen teilt:

$$x \equiv y \pmod{n} \quad \text{g.d.w.} \quad n|(x - y).$$

Denn nach Definition haben beide Zahlen den gleichen Rest. Bei der Differenzbildung fällt dieser Rest also weg und es kann nur ein Vielfaches von n übrig bleiben, wie eine kleine Rechnung sofort ergibt:

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{n} &\Rightarrow r_x = r_y \\ &\Rightarrow x - y = q_x n + r_x - (q_y n + r_y) = q_x n - q_y n = (q_x - q_y)n \\ &\Rightarrow n|(x - y). \end{aligned}$$

Für die Umkehrung betrachten wir:

$$\begin{aligned} n|(x - y) &\Rightarrow n|(q_x n + r_x - q_y n - r_y) \\ &\Rightarrow n|(r_x - r_y) \\ \text{wegen } -n < r_x - r_y < n &\Rightarrow r_x - r_y = 0 \\ &\Rightarrow r_x = r_y \\ &\Rightarrow x \equiv y \pmod{n}. \end{aligned}$$

Etwas verwirrend wird die Modulo-Rechnung manchmal dadurch, dass verschiedene - z.T. unpräzise - Schreibweisen verwendet werden. Wir verwenden, wie eben eingeführt, für die Relation \equiv , die von dem Modul n abhängig ist, die Schreibweise $x \equiv y \pmod{n}$. Manchmal findet man aber auch für die Reste r_x und r_y die Schreibweise:

$$r_x = x \bmod n \quad \text{bzw.} \quad r_y = y \bmod n.$$

Hier ist also $\bmod n$ eine Art Operator, der einer Zahl x den Rest r_x zuordnet.

2.3.0.1 Beispiel

$$\begin{aligned} 19 &= 4 \cdot 4 + 3 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 19 &\equiv 7 \pmod{4} \\ \Leftrightarrow 4 &|(19 - 7). \end{aligned}$$

Wie schon bei den Beispielen aus der Geometrie (kongruente Dreiecke, konzentrische Kreise) angedeutet, packen wir jetzt alle zueinander äquivalente Zahlen in einer Menge zusammen. Im Gegensatz zu den Beispielen aus der Geometrie, wo wir unendlich viele Mengen haben, gibt es hier genau n solcher Mengen. Eine solche Menge mit lauter zueinander äquivalenten Elementen wird allgemein als Äquivalenzklasse bezeichnet.

2.3.0.2 Beispiel

Wir betrachten die Äquivalenzklassen für $n = 7$:

...	-14,	-7,	0,	7,	14,	...
...	-13,	-6,	1,	8,	15,	...
...	-12,	-5,	2,	9,	16,	...
...	-11,	-4,	3,	10,	17,	...
...	-10,	-3,	4,	11,	18,	...
...	-9,	-2,	5,	12,	19,	...
...	-8,	-1,	6,	13,	20,	...

In jeder Zeile stehen die zueinander äquivalenten Zahlen, die modulo 7 gerechnet gleich sind. Da in diesem konkreten Fall die Äquivalenzklassen durch die Reste definiert sind, spricht man auch von **Restklassen** an Stelle des allgemeineren Begriffes der Äquivalenzklasse.

Warum ist diese Einteilung in Äquivalenzklassen für die Digitaltechnik wichtig? Das liegt an den beiden folgenden Eigenschaften:

- Es gibt für jedes n **endlich** viele Äquivalenzklassen. Auf einem Rechner können immer nur endlich viele Zahlen dargestellt werden. Über die Wahl von n kann auch für die kleinste Hardware eine Äquivalenzklasseneinteilung gefunden werden, so dass alle Klassen eindeutig dargestellt werden. Beim Rechnen mit natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen oder gar den reellen Zahlen gibt es keine Möglichkeit, alle Elemente eindeutig und präzise darzustellen.
- Man kann mit diesen Äquivalenzklassen wieder rechnen! Ähnlich den anderen Zahlenbereichen gibt es – mit Einschränkungen – die vier Grundrechenarten für diese n Äquivalenzklassen.

Betrachten wir zunächst die Addition und bleiben bei dem Fall des Modul $n = 7$. Wenn wir zum Beispiel der einen Äquivalenzklasse die Zahl 3 hernehmen und die 3 mit der 20 aus der letzten Äquivalenzklasse in unserer Liste addieren, dann liefert die gewöhnliche Addition die 23, die wiederum einer bestimmten Äquivalenzklasse angehört. Diese Addition kann nun auf die Addition der gesamten Äquivalenzklasse übertragen werden, weil das Addieren zweier beliebiger anderer Elemente aus den beiden gleichen Äquivalenzklassen wieder auf

die gleiche Äquivalenzklasse führt, nämlich auf ein Element äquivalent zu 23. Wir können als Beispiele dafür folgende drei Additionen betrachten:

$$\begin{aligned} 3 + 20 &= 23 \\ -11 + 13 &= 2 \\ 10 + -1 &= 9 \end{aligned}$$

Es gilt allgemein: Wir betrachten bzgl. eines beliebigen Moduls n jeweils zwei äquivalente Elemente x_1 und x_2 und zwei weitere äquivalente Elemente y_1 und y_2 . Das heißt es soll gelten:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \quad \text{und} \quad y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$$

Dann gilt, dass $x_1 + y_1$ und $x_2 + y_2$ in der gleichen Äquivalenzklasse liegen. Also Gleichung geschrieben heißt das:

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}.$$

Dies berechtigt uns eine Addition der Äquivalenzklassen einzuführen, indem wir aus den beiden Klassen, die wir addieren, jeweils ein beliebiges Element auswählen, diese beiden Elemente addieren und als Summe der beiden Äquivalenzklassen einfach diejenige Äquivalenzklasse zu nehmen, in der die Summe der beiden Elemente liegt.

Für die Subtraktion und die Multiplikation gilt genau das Gleiche. Wir verknüpfen zwei Äquivalenzklassen, indem wir schauen, in welche neue Äquivalenzklasse die Verknüpfung von zwei beliebigen Elementen der beiden gegebenen Klassen fällt.

Um einfacher über die Äquivalenzklassen sprechen zu können, führen wir eine Namensgebung ein: Jede der n Äquivalenzklassen besitzt unendlich viele Elemente, aber genau *ein* Element zwischen 0 und $(n - 1)$. Diese n verschiedenen Elemente können wir als **eindeutige Namen** für die n verschiedenen Äquivalenzklassen verwenden. Im Falle des Moduls $n = 7$ hätten wir also 7 Äquivalenzklassen mit den eindeutigen Namen

0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6.

Wenn wir uns die gesamten Äquivalenzklassen noch einmal versuchen vorzustellen, dann können wir jeweils in jeder Klasse diesen Namen, der auch eindeutiger Repräsentant genannt wird, hervorheben:

...	-14,	-7,	0 ,	7,	14,	...
...	-13,	-6,	1 ,	8,	15,	...
...	-12,	-5,	2 ,	9,	16,	...
...	-11,	-4,	3 ,	10,	17,	...
...	-10,	-3,	4 ,	11,	18,	...
...	-9,	-2,	5 ,	12,	19,	...
...	-8,	-1,	6 ,	13,	20,	...

Es gibt nun zwei verschiedene Methoden, mit Äquivalenzklassen zu rechnen:

Mit eindeutigen Namen, die auch als eindeutige Vertreter der Äquivalenzklasse bezeichnet werden können, da es sich ja letztendlich um ein Element aus der Äquivalenzklasse handelt.

Mit beliebigen Vertretern der Äquivalenzklasse.

Bei der ersten Methode sind dann nur die Elemente $0, \dots, n-1$ zulässig. Bei der zweiten Methode rechnen wir mit irgendeinem Element aus der Äquivalenzklasse. Beide Rechentechniken haben ihre Berechtigung und werden bei praktischen Anwendungen verwendet.

Um die entsprechende Multiplikation genauer zu betrachten, sehen wir uns erst einmal zwei Beispiele an.

2.3.0.3 Beispiel

$n = 6$

\cdot	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

An dieser Multiplikationstafel fällt auf, dass die Umkehrung der Multiplikation, also die Division offensichtlich nicht eindeutig ist. Wenn wir beispielsweise versuchen die Gleichung $2 \cdot x = 4$ zu lösen, so gibt es zwei verschiedene Lösungen. Für die Gleichung $2 \cdot x = 5$ gibt es hingegen keine Lösung. Zum Vergleich sei daran erinnert, dass in den rationalen Zahlen \mathbb{Q} jede Gleichung der Art $a \cdot x = b$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ eindeutig lösbar ist, wenn nicht gerade $a = 0$ ist.

2.3.0.4 Beispiel

$n = 7$

\cdot	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

In dieser Tafel steht in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Zahl (ungleich 0) genau einmal. Hier gibt es also eine Tabelle für die Umkehrung der Operation, also es gibt eine eindeutige Division.

Es ist eine wesentliche Besonderheit beim Rechnen mit Äquivalenzklassen, dass die Division und damit auch das Kürzen nicht immer ausgeführt werden kann. Daher werden wir uns die Division genauer anschauen.

2.3.1 Division

Die oben beobachtete Tatsache, dass wir beim Rechnen mit Äquivalenzklassen nicht immer eine Division zur Verfügung haben, können wir uns noch einmal beim Kürzen klar machen. Es gilt:

$$15 \equiv 27 \pmod{12},$$

aber es läßt sich nicht mit 3 kürzen:

$$5 \not\equiv 9 \pmod{12}.$$

Aber es ist keineswegs so, dass niemals gekürzt werden kann, wie wir an folgendem Beispiel sehen können:

$$5 \equiv 65 \pmod{12}$$

und

$$1 \equiv 13 \pmod{12}.$$

Allgemein gilt also die Kürzungsregel nicht:

$$x \cdot y \equiv x \cdot z \pmod{n} \not\Rightarrow y \equiv z \pmod{n}.$$

Aber unter der Bedingung, dass der Modul n und die Zahl x teilerfremd sind, gilt die Kürzungsregel für x :

2.3.2 Kürzungsregel

$$x \cdot y \equiv x \cdot z \pmod{n} \Rightarrow y \equiv z \pmod{n}, \text{ falls } \text{ggT}(x, n) = 1.$$

Beweis: Es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} x \cdot y &\equiv x \cdot z \pmod{n} \\ \Rightarrow n &\mid (xy - xz) \\ \Rightarrow n &\mid x(y - z) \\ \Rightarrow n &\mid (y - z) \quad \text{da nach Voraussetzung } n \text{ und } x \text{ teilerfremd sind.} \\ \Rightarrow y &\equiv z \pmod{n}, \end{aligned}$$

womit die Kürzungsregel bewiesen wäre. □

2.3.3 Folgerung aus der Kürzungsregel

Aus der Kürzungsregel folgt: werden beim Rechnen modulo n zwei verschiedene Zahlen y und z mit einer Zahl x mit $\text{ggT}(x, n) = 1$ multipliziert, so gilt:

$$x \cdot y \not\equiv x \cdot z \pmod{n},$$

dann andernfalls würde nach der Kürzungsregel $y \equiv z \pmod{n}$ folgen.

Mit dem Euklid'schen Algorithmus haben wir ja schon ein Verfahren kennengelernt, um auch für große Zahlenwerte die Voraussetzung der Teilerfremdheit effizient zu prüfen. Zum Abschluss des Modulo-Rechnens behandeln wir jetzt noch einen kleinen Satz, dem in diesem Zusammenhang zentrale Bedeutung zukommt, den sogenannten:

2.3.4 Satz von Fermat

Es sei p eine Primzahl und x eine natürliche Zahl mit $x \not\equiv 0 \pmod{p}$. Dann gilt

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2.3.4.1 Beispiel

$p = 7$. Dann gilt: $2^6 \equiv 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{7}$.

2.3.5 Anwendungen des Satzes von Fermat

Wir wissen, dass sich durch alle Zahlen, die teilerfremd zum Modul sind, dividieren lässt. Beim Satz von Fermat ist der Modul eine Primzahl, also ist die Teilerfremdheit für alle Zahlen $\not\equiv 0$ erfüllt. Jede Zahl nicht äquivalent zur Null erfüllt nach dem Satz von Fermat:

$$x \cdot x^{p-2} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Also ist x^{p-2} das multiplikative Inverse zu x , was wir auch wie folgt notieren können:

$$x^{-1} \equiv x^{p-2} \pmod{p}.$$

2.3.5.1 Beispiel

Es sei zu berechnen:

$$\frac{3}{5} \equiv ? \pmod{7}.$$

Um besser anzudeuten, dass es sich hier um die Multiplikation der 3 mit dem inversen Element der 5 handelt, schreiben wir besser:

$$3 \cdot 5^{-1} \equiv ? \pmod{7}.$$

Um dies zu berechnen, benötigen wir also das Inverse zu 5:

$$5^{-1} \equiv 5^{p-2} \equiv 5^5 \equiv 3 \pmod{7}.$$

Somit gilt:

$$3 \cdot 5^{-1} \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Eine andere Anwendung des kleinen Satzes von Fermat besteht darin, Potenzen bei der Modulo-Rechnung besonders effizient berechnen zu können. Es gilt zum Beispiel:

$$5^{93} \equiv (5^{10})^9 \cdot 5^3 \equiv 5^3 \equiv 5^2 \cdot 5 \equiv 25 \cdot 5 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Beweis: Beweisen wir nun den Satz von Fermat, was mit einem kleinen Trick erstaunlich einfach geht. Wir betrachten zunächst die Multiplikationstafel **mod** p für alle Äquivalenzklassen ungleich 0:

\cdot	1	2	3	\dots	$p-1$
1	1	2	3	\dots	$p-1$
\dots					
a	$a \cdot 1$	$a \cdot 2$	$a \cdot 3$	\dots	$a \cdot (p-1)$
\dots					
$p-1$					

Die Werte in der ersten Zeile der Multiplikationstafel sind offensichtlich die $p-1$ vielen verschiedenen Zahlen:

$$1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Welche Werte stehen nun in der allgemeinen Zeile für a ? Es sind lauter Zahlen ungleich null. Denn wäre eines dieser Produkte $i \cdot a$ gleich 0, dann könnte man wegen $0 \cdot a = 0$ mit der Kürzungsregel beweisen, dass $i = 0$ gilt. Die 0 hatten wir aber in der Verknüpfungstabelle weggelassen.

Also kommen nur diese $p-1$ verschiedenen Werte ungleich 0 in Frage, die auch in der ersten Zeile stehen. Mit Hilfe der Folgerung aus der Kürzungsregel 2.3.3 können wir schliessen, dass diese $p-1$ vielen Zahlen

$$a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots, a \cdot (p-1)$$

alle verschieden sind. Also handelt es sich einfach um eine Vertauschung der Werte aus der ersten Zeile. Beim Multiplizieren kommt es aber nicht auf die Reihenfolge an. Also ergeben die Zahlen aus der ersten Zeile aufmultipliziert den gleichen Wert wie die Zahlen aus der a -ten Zeile:

$$a \cdot 1 \cdot a \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot \dots \cdot a \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}.$$

Jetzt wissen wir aber, dass beim Rechnen modulo einer Primzahl alle Zahlen ungleich 0 invertierbar sind, bzw. dass mit ihnen gekürzt werden kann. Also kürzen wir die Faktoren 1, 2, 3 bis $p - 1$ auf beiden Seiten und erhalten die gesuchte Gleichung:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

□

Wir haben schon gesehen, dass der kleine Satz von Fermat hilft, Inverse zu berechnen. Er wird unter anderem auch bei Faktorisierungsalgorithmen und bei Primtests verwendet.

2.4 Äquivalenzklassen

Auf der Basis einer allgemeinen Äquivalenzrelation kann nun immer eine solche Äquivalenzklasseneinteilung, wie wir sie bei der Modulo-Rechnung kennengelernt haben, durchgeführt werden.

Es sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge G . Die Relation R ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv. Dann bilden wir zu einem Element $g \in G$ die Äquivalenzklasse:

$$K_g := \{x \in G \mid xRg\}.$$

Es gelten nun zwei wesentliche Eigenschaften für die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen:

- $g \in K_g$ für alle $g \in G$, das heißt für jedes g gibt es eine Äquivalenzklasse.
- Falls zwei Äquivalenzklassen ein gemeinsames Element besitzen, sind sie identisch.

Beweis: Die erste Behauptung ist offensichtlich. Zu jedem $g \in G$ kann eine Äquivalenzklasse K_g gebildet werden, die g und somit mindestens ein Element enthält. Wir beweisen die zweite Behauptung: Seien dazu K_{g_1} und K_{g_2} zwei Äquivalenzklassen mit dem gemeinsamen Element g . Sei h_1 ein beliebiges Element aus K_{g_1} . Wir zeigen, dass h_1 dann auch in K_{g_2} liegen muß:

Da h_1 aus K_{g_1} ist, gilt

$$h_1 \equiv g_1.$$

Ferner ist auch das gemeinsame Element g in K_{g_1} , also gilt auch hierfür:

$$g \equiv g_1.$$

Da R symmetrisch ist, folgt aber

$$g_1 \equiv g.$$

Somit gilt aber wegen der Transitivität auch

$$h_1 \equiv g.$$

Nun ist aber g auch in K_{g_2} , also gilt

$$g \equiv g_2.$$

Somit gilt wieder wegen der Transitivität:

$$h_1 \equiv g_2.$$

Also gehört das beliebige Element h_1 aus K_{g_1} auch zu K_{g_2} . Damit gilt

$$K_{g_1} \subseteq K_{g_2}.$$

Die Umkehrung läßt sich genauso zeigen. Also folgt die Behauptung:

$$K_{g_1} = K_{g_2}.$$

□

Damit haben wir aber gezeigt, dass sich die gesamte Menge G in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen zerlegen läßt. Jedes Element gehört genau einer Äquivalenzklasse an. Nimmt man nun aus jeder Äquivalenzklasse ein Element als Repräsentant dieser Äquivalenzklasse, dann erhält man ein vollständiges Repräsentantensystem. Dieses Repräsentantensystem wurde bei $\mathbb{N} \bmod 7$ z.B. von den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 gebildet.

Mathematisch bezeichnet man die Menge der Äquivalenzklassen einer Menge G bzgl. der Relation R als Quotientenmenge und schreibt dafür

$$G/R.$$

Ein Beispiel dafür liefern unsere Restklassen modulo n der ganzen Zahlen. Die Menge der Restklassen schreibt sich in dieser Weise auch als:

$$\mathbb{Z}/\text{mod } n.$$

2.5 Funktionen

2.5.1 Abbildung, Funktion

Wir gehen aus von zwei Mengen D und B und betrachten eine zweistellige Relation f auf D und B . Falls f jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in B$ zuordnet, dann heißt f **Abbildung** oder **Funktion**.. Wir schreiben dafür auch:

$$\begin{array}{ccc} f : D & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

oder auch einfach

$$f(x) = y.$$

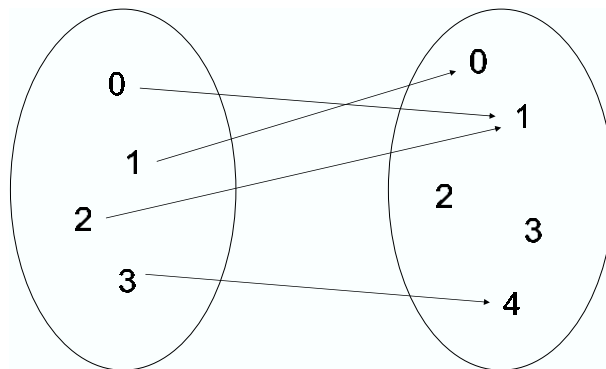


Abbildung 2.2: Beispiel einer Abbildung: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

2.5.2 Definitions-, Bild- und Wertebereich

Die Menge D heißt Definitionsbereich und die Menge B heißt Bildbereich.

Nicht alle Elemente aus B werden als Funktionswerte erreicht. Daher nennt man die Teilmenge $W \subseteq B$, die aus allen $y \in B$ besteht, für die es mindestens ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt, den Wertebereich von f .

2.5.2.1 Beispiel

Es seien $D = \{0, 1, 2, 3\}$ und $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Wir betrachten die Funktion:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

Alternativ könnten wir auch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ schreiben.

Dabei fällt auf, dass also die 0 und die 2 auf das gleiche Element abgebildet werden. Die 2 und die 3 des Bildbereiches haben kein Urbild. Der Wertebereich W ist gleich $\{0, 1, 4\}$.

2.5.3 Permutationen

Unter einer Permutation versteht man eine Umordnung einer endlichen Menge von n Elementen:

$$M = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Betrachten wir für $n = 4$ ein konkretes Beispiel, das in Abbildung 2.3 dargestellt ist.

Wenn wir diese Permutation mit dem Buchstaben p bezeichnen, können wir auch schreiben:

$$p(1) = 3, p(2) = 2, p(3) = 4, p(4) = 1.$$

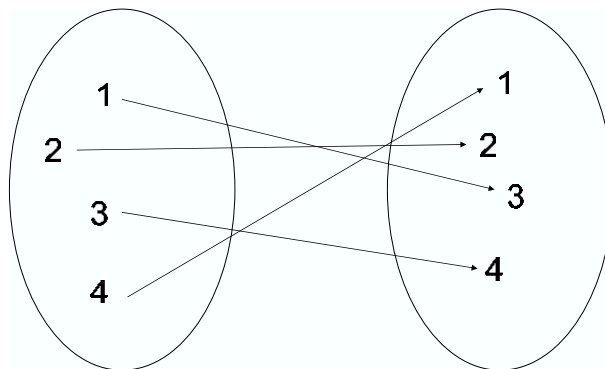


Abbildung 2.3: Beispiel einer Permutation

Aber beide Darstellungen sind etwas umständlich. Daher werden speziell für Permutationen üblicherweise die beiden folgenden Darstellungsweisen gewählt:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

oder die sogenannte Zykelschreibweise:

$$(134)(2).$$

Hierbei fängt man immer mit dem ersten Element 1 an und notiert dahinter das Element, auf das die 1 abgebildet wird. Das ist in diesem Fall die 3. Dahinter kommt das Element, auf das die 3 abgebildet wird, hier also die 4. Da die 4 wieder auf die 1 abgebildet wird, endet der Zyklus. Die kleinste Zahl, die im ersten Zyklus noch nicht verwendet wurde, ist die 2. Daher beginnt der zweite Zyklus mit der 2. Diese wird aber auf sich selbst abgebildet, daher besteht der ganze zweite Zyklus nur aus der 2.

Bei einer Permutation wird also jedem Element $1, 2, \dots, n$ wieder genau in eindeutiger Weise ein Element zugeordnet. Dies war bei unserem Beispiel $f(x) = x^2 - 2x + 1$ nicht so. Um dieses Verhalten besser charakterisieren zu können, führt man folgende Begriffe ein:

2.5.4 Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Eine Abbildung $f : D \rightarrow B$ heißt surjektiv, falls es für jedes $y \in B$ mindestens ein $x \in D$ gibt, mit $f(x) = y$.

Eine Abbildung $f : D \rightarrow B$ heißt injektiv oder umkehrbar, falls für jeweils zwei $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ stets folgt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Eine Abbildung $f : D \rightarrow B$ heißt bijektiv oder eineindeutig, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Permutationen sind also per Definition immer bijektiv. Im allgemeinen können bei Funktionen alle denkbaren Fälle auftreten:

nicht injektiv und nicht surjektiv

injektiv und nicht surjektiv

surjektiv und nicht injektiv

surjektiv und injektiv, also bijektiv

Denken Sie sich selbst für die vier Fälle einfache Beispiele mit endlichem Definitions- und Bildbereich aus.

Schon in der Definition einer Funktion oder Abbildung ganz allgemein hatten wir gefordert, dass jedem $x \in D$ genau ein Element zugeordnet sein muss. Wenn dies nicht erfüllt ist, so handelt es sich nicht um eine Funktion! Diese grundsätzliche Eigenschaft einer Funktion sollte nicht mit den drei Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv verwechselt werden!

2.5.5 Umkehrfunktion

Zu jeder bijektiven Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

gibt es die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\longrightarrow D \\ y &\longmapsto x, \quad \text{wobei } f(x) = y. \end{aligned}$$

Das ist also die Abbildung, die jedem $y \in B$ das Urbild x mit $f(x) = y$ zuordnet.

Jede Funktion ist ja grundsätzlich auch eine zweistellige Relation. Für zweistellige Relationen hatten wir in [2.1.1](#) die Umkehrrelation definiert. Also läßt sich zu jeder Funktion die Umkehrrelation bilden, aber dies ergibt im Allgemeinen keine Funktion mehr. Falls aber die Funktion bijektiv ist, dann bildet die Umkehrrelation wieder eine Funktion, die wir Umkehrfunktion nennen.

Falls f nur injektiv (= umkehrbar) ist, muß die Menge B gegebenenfalls auf den Wertebereich eingeschränkt werden, um die Umkehrabbildung zu bilden.

2.5.5.1 Beispiel

Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 2x + 1 \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Es ist zu zeigen, dass die Funktion bijektiv ist. Also müssen wir zeigen, dass die Funktion injektiv und surjektiv ist. Im Allgemeinen ist die Injektivität am einfachsten zu zeigen, indem wir die ursprüngliche Definition

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

aussagenlogisch umformen zu:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Also ergibt sich für unser Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1 &= 2x_2 + 1 \\ \Rightarrow 2x_1 &= 2x_2 \\ \Rightarrow x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Damit ist die Injektivität gezeigt. Für die Surjektivität versuchen wir die Gleichung

$$y = 2x + 1$$

nach x aufzulösen:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ y - 1 &= 2x \\ x &= \frac{y - 1}{2}. \end{aligned}$$

Da diese Rechnung für alle y ausführbar ist, gibt es zu jedem y ein passendes x . Die Funktion ist somit surjektiv.

Nach diesen Untersuchungen können wir die Umkehrfunktion sofort angeben:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto x = \frac{y - 1}{2} \end{aligned}$$

Um wieder x als freie Variable zu verwenden, können x und y auch vertauscht werden:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \frac{x - 1}{2} \end{aligned}$$

Betrachten wir noch ein paar weitere Beispiele:

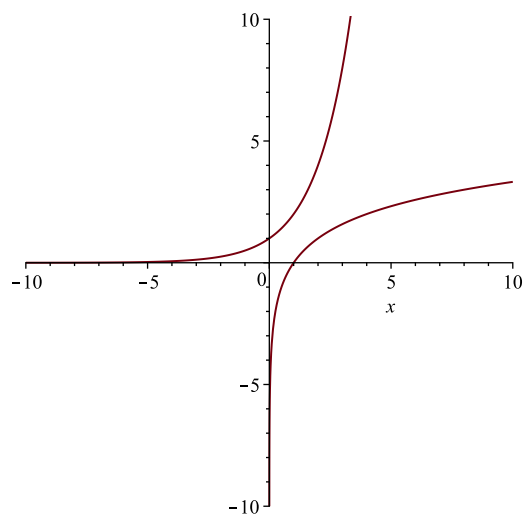


Abbildung 2.4: Die Funktion 2^x und die Logarithmusfunktion zur Basis 2

2.5.5.2 Beispiel

Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 2^x \end{aligned}$$

ist injektiv, also umkehrbar, aber nicht bijektiv. Für die Umkehrfunktion muß der Bildbereich also eingeschränkt werden. Die Einschränkung der Funktion f auf den Bildbereich $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus zur Basis 2:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_2 x \end{aligned}$$

2.5.5.3 Beispiel

Für dieses Beispiel führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

ist nicht injektiv, also nicht umkehrbar, da ja dem Bildwert x^2 die beiden Urbilder x und $-x$ zugeordnet werden. Wenn aber die Einschränkung auf \mathbb{R}_0^+

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

betrachtet wird, dann gibt es eine Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Dies kann zum Beispiel bei einer physikalischen Formel ausgenutzt werden. Die Formel

$$x(t) = \frac{1}{2}9,81t^2$$

beschreibt die Strecke $x(t)$, die bei freiem Fall nach t Sekunden erreicht ist. Da diese Funktion

$$x(t) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

bijektiv ist, kann die Umkehrfunktion gebildet werden. Damit kann für eine vorgegebene Fallhöhe von $80m$ auf einem Turm die benötigte Zeit berechnet werden.

$$80 = \frac{1}{2}9,81t^2.$$

Nach t aufgelöst ergibt sich:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{9,81}} \approx 4,04.$$

2.5.5.4 Beispiel

Betrachten wir nun eine gebrochenrationale Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \frac{2x-1}{x+3}. \end{aligned}$$

Wir untersuchen, ob diese Funktion injektiv ist und prüfen dazu wieder, ob

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2x_1-1}{x_1+3} &= \frac{2x_2-1}{x_2+3} && x_1, x_2 \neq -3 \text{ nach Voraussetzung} \\ (2x_1-1)(x_2+3) &= (2x_2-1)(x_1+3) \\ 2x_1x_2 - x_2 + 6x_1 - 3 &= 2x_2x_1 - x_1 + 6x_2 - 3 \\ 7x_1 &= 7x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Also ist f injektiv. Berechnen wir die Umkehrfunktion und bestimmen dabei den Wertebereich von f :

$$\begin{aligned}y &= \frac{2x-1}{x+3} \\xy+3y &= (2x-1) \\xy-2x &= -3y-1 \\x(y-2) &= -3y-1.\end{aligned}$$

Hier benötigen wir jetzt eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $y = 2$:

Wenn $y = 2$ ist, dann gibt es keine Lösung für x , so dass die Gleichung erfüllt ist. Damit ist klar, dass die Funktion nicht surjektiv ist, da es nicht zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein passendes Urbild x gibt.

2. Fall: $y \neq 2$:

Dann können wir durch $y - 2$ dividieren und somit folgt:

$$x = \frac{-3y-1}{y-2}.$$

Also lautet die Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\} \\x &\longmapsto y = \frac{-3x-1}{x-2}.\end{aligned}$$

Vor dem nächsten Beispiel führen wir noch sehr häufig verwendete Schreibweisen für Intervalle ein:

2.5.6 Intervalle

Die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b einschließlich der beiden Grenzen, also

$$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

schreibt man kurz als

$$[a, b]$$

und bezeichnet das als ein abgeschlossenes Intervall. Sollen die Intervallgrenzen nicht dazu gehören, also

$$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\},$$

so schreibt man kurz

$$(a, b) \text{ oder }]a, b[$$

und bezeichnet das als ein offenes Intervall. Sinngemäß gibt es dann auch die halboffenen Intervalle

$$(a, b] \text{ und } [a, b).$$

2.5.6.1 Beispiel

- Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sin(x) \end{aligned}$$

ist weder surjektiv noch injektiv.

- Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto y = \sin(x) \end{aligned}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv.

- Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sin(x) \end{aligned}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

- Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto y = \sin(x) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

2.5.6.2 Beispiel

Ein Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit Radius 1 kann beschrieben werden als

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

wobei \mathbb{R}^2 einfach für $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ steht. Gibt es hierzu eine Umkehrfunktion? Nein, denn es handelt sich hierbei gar nicht um eine Funktion, sondern nur um eine zweistellige Relation! Wir können den Kreis mit Hilfe von zwei Funktionen beschreiben:

$$\begin{aligned} k_1 : [-1, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto y = \sqrt{1 - x^2} \\ k_2 : [-1, 1] &\longrightarrow [-1, 0] \\ x &\longmapsto y = -\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Die Funktion k_1 ist immer noch nicht umkehrbar, da sie nicht injektiv ist. Die Einschränkung auf das Intervall $[0, 1]$ wäre umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion ist aber die Funktion selbst, wie man leicht nachrechnet oder an dem Graph der Funktion erkennt. Diese Darstellung ist aber etwas umständlich.

2.5.7 Parameter-Funktionen

Möchte man den ganzen Kreis oder auch kompliziertere Kurven mit Funktionen darstellen, ohne sie in obiger Art in einzelne Abschnitte zu zerlegen, dann gibt es dafür eine andere Möglichkeit mit sogenannten Parameter-Funktionen. Hierbei betrachtet man zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$. Dabei bildet man den Parameter t auf das Paar

$$t \mapsto (f(t), g(t))$$

ab. Die erste Funktion beschreibt dann den aktuellen x -Wert der Kurve und die zweite Funktion der aktuellen y -Wert. Hierbei wird der Parameter t nicht (!) im Koordinatensystem abgetragen, sondern nur die beiden Funktionen f und g .

Beispiel :

Ein Kreis mit dem Radius r kann beschrieben werden durch:

$$t \mapsto (r \cdot \sin t, r \cdot \cos t).$$

Durch die Vorgabe eines Intervalles für t kann bestimmt werden, wie oft der Kreis durchlaufen wird. Für $t = 0 \dots 10 \cdot \pi$ wird der Kreis fünf mal durchlaufen.

In Maple können mit dem Befehl bzw. der Syntax

```
plot([ sin, cos, 0..2*Pi ]);
```

solche Parameterfunktionen gezeichnet werden.

2.5.8 Verknüpfung von Abbildungen

Neben der Umkehrabbildung ist noch wesentlich, dass man unter geeigneten Voraussetzung zwei Funktionen oder Abbildungen hintereinander ausführen kann. Betrachten wir die beiden Funktionen

$$\begin{array}{ccc} f : D_1 & \longrightarrow & B_1 \\ x & \longmapsto & y \\ g : D_2 & \longrightarrow & B_2 \\ x & \longmapsto & y. \end{array}$$

Wenn wir voraussetzen, dass für den Wertebereich von f , den man auch als $f(D_1)$ schreibt, gilt:

$$W_f = f(D_1) \subseteq D_2,$$

dann gibt es zu den beiden Funktion f und g die konkatenierte oder verkettete Funktion $g \circ f$ definiert durch:

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : D_1 & \longrightarrow & B_2 \\ x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

2.5.8.1 Beispiel

Wir betrachten eine Funktion f , die einer gefahrenen Wegstrecke die Menge des dabei verbrauchten Benzins zuordnet. Z.B. wird bei einer Strecke von 250km und einer Verbrauchsfunktion f mit 8ℓ /100km eine Benzinmenge von 20ℓ zugeordnet. Eine weitere Funktion g ordnet der Menge Benzin die dafür benötigte Menge Geld zu. Bei einem Preis von 1,40 Euro/l ergeben sich also 28,- Euro. Die Verkettung der beiden Funktionen $g \circ f$ ordnet somit direkt der gefahrenen Wegstrecke die Geldmenge für den Benzinverbrauch zu.

$$\begin{array}{ccccc} & 8\ell/100\text{km} & & 1,40 \text{ Euro/l} & \\ 250\text{km} & \longrightarrow & 20\ell & \longrightarrow & 28,- \text{ Euro} \\ \text{Weg} & f & \text{Benzin} & g & \text{Geld} \end{array}$$

Durch Konkatenation erhalten wir die Funktion:

$$\begin{array}{ccc} & 12,80 \text{ Euro/100km} & \\ 250\text{km} & \longrightarrow & 28,- \text{ Euro} \\ \text{Weg} & g \circ f & \text{Geld} \end{array}$$

2.5.8.2 Beispiel

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 1 \\ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir als Verkettung der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (2x + 1)^2. \end{aligned}$$

Die Verkettung in der anderen Reihenfolge ergibt:

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2 + 1, \end{aligned}$$

also eine andere Funktion. Wir sehen damit, dass im allgemeinen

$$g \circ f \neq f \circ g$$

gilt. Also gilt hier das sogenannte Kommutativgesetz nicht. Aber die Verknüpfung ist assoziativ, was soviel besagt, dass für drei entsprechende Funktionen gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Warum gilt das hier? Wir können das beweisen indem wir zeigen, dass wir bei Anwendung der beiden Funktionen auf x jeweils den selben Funktionswert $h(g(f(x)))$ erhalten:

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))).\end{aligned}$$

Kapitel 3

Gruppen, Ringe und Körper

In diesem Kapitel werden wir die drei Grundlegenden algebraischen Strukturen Gruppen, Ringe und Körper kennen lernen. Innerhalb der Algebra unterscheidet man noch viel mehr Strukturen und studiert die Eigenschaften dieser Strukturen sehr viel tiefergehend, als wir das hier machen werden. Warum ist es sinnvoll, sich mit solchen algebraischen Strukturen zu beschäftigen? Es gibt bei den Programmier-Techniken etwas, was eigentlich ein gewisse Verwandtschaft mit solchen algebraischen Techniken hat, nämlich sogenannte abstrakte Klassen. Nehmen wir an, wir haben verschiedenste Zahlbereiche mit einer Multiplikation. Das Potenzieren läßt sich aber grundsätzlich auf die Multiplikation zurückführen:

$$\nabla^1 := \nabla$$

$$\nabla^n := \nabla^{n-1} \cdot \nabla.$$

Das heißt, wir können Algorithmen für das Potenzieren zur Verfügung stellen, ohne die Multiplikation zu kennen. Dieser Algorithmus könnte dann in so einer abstrakten Klasse implementiert werden und könnte für allerlei Multiplikationen, die auch später noch hinzugefügt werden können, verwendet werden. Für einen solchen trivialen Algorithmus scheint das noch nicht viel zu bringen. Aber stellen Sie sich einen Algorithmus vor, der sehr viel aufwändiger ist und vor allem, der vielleicht über Monate hinweg verbessert wird. Sobald eine kleine algorithmische Verbesserung an zentraler Stelle in dieser abstrakten Klasse vorgenommen worden ist, wirkt sie sich auf alle Multiplikationen, die sie verwenden aus.

Ähnlich ist es mit algebraischen Strukturen. Es gibt zum Beispiel sehr viele verschiedene Gruppen. Alle Eigenschaften, die wir allgemein über Gruppen kennen, treffen dann für jede dieser Gruppen zu und müssen nicht einzeln für jedes einzelne Beispiel einer Gruppe betrachtet werden. Man bekommt so viel leichter einen Überblick über mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge, ähnlich wie man bei einem gut aufgebauten objektorientierten Design leichter den Zusammenhang erkennt und den Überblick behält.

3.1 Operationen und Rechengesetze

Bei der Betrachtung der verschiedenen Zahlenbereiche im Abschnitt 1.1 haben wir schon darauf hingewiesen, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, ob eine Rechenart innerhalb eines Zahlenbereiches abgeschlossen ist oder nicht. Die Addition ist innerhalb der natürlichen Zahlen abgeschlossen, die Subtraktion nicht. Falls eine solche Verknüpfung abgeschlossen ist, dann bezeichnen wir sie als

3.1.1 Operationen

Sei M eine Menge. Dann heißt jede Abbildung $*$

$$\begin{aligned} * : M \times M &\longrightarrow M \\ (a, b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

eine (zweistellige) Operation mit dem Operator $*$ und den beiden Operanden $a, b \in M$. Dabei sei $M \times M$ einfach die Menge aller Paare mit Elementen aus M :

$$M \times M := \{(a, b) | a, b \in M\}.$$

Wir notieren eine Operation mit $(M, *)$.

3.1.1.1 Beispiele

Die Addition und die Multiplikation in \mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{R} sind Operationen:

$$(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot)$$

Die Subtraktion in \mathbb{N} ist keine Operation.

Die Division in \mathbb{R} ist keine Operation.

Die Division in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Operation: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, /)$

Der ggT auf den natürlichen Zahlen ist eine Operation: (\mathbb{N}, ggT)

Wie die folgenden Beispiele zeigen, können Operationen von sehr verschiedenartiger Natur sein:

3.1.1.2 Weitere Beispiele

1. Die Schnittmengenbildung \cap auf der Potenzmenge einer endlichen Menge ist eine Operation.

-
2. Die Verknüpfung von Funktionen \circ auf der Menge der bijektiven Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ist eine Operation. Betrachtet man zum Beispiel:

$$F := \{f | f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ ist bijektiv.}\}.$$

Dann liefert die Abbildung

$$\begin{aligned} \circ : F \times F &\longrightarrow F \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

eine Funktion.

Für die Verknüpfung von Funktionen hatten wir schon gesehen, dass folgende Rechenregel gilt:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Wir definieren allgemein das:

3.1.2 Assoziativgesetz

Es sei $*$ eine Operation auf einer Menge M . Dann heißt $*$ assoziativ, falls für alle $a, b, c \in M$ gilt:

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Das Assoziativgesetz hat die praktische Konsequenz, dass in allen Ausdrücken, die nur aus dem einen Operator bestehen, die Klammerung entfallen kann. Der Ausdruck

$$a * b * c$$

ist unter Geltung des Assoziativgesetzes eindeutig definiert, da es dann keine Rolle spielt, wie die Klammern gesetzt sind.

Ein sehr wichtiges, anderes Rechengesetz betrifft die Vertauschbarkeit oder das

3.1.3 Kommutativgesetz

Es sei $*$ eine Operation auf einer Menge M . Dann heißt $*$ kommutativ, falls für alle $a, b \in M$ gilt:

$$a * b = b * a.$$

3.1.3.1 Beispiel

Es sei Σ ein endliches Alphabet, Σ^* die Menge aller Wörter über dem Alphabet und \circ die Konkatenation von Wörtern. Für zwei beliebige Wörter $v, w \in \Sigma^*$ betrachten wir also:

$$v \circ w.$$

Dies ist eine Operation, die assoziativ, aber nicht kommutativ ist. Betrachten wir für $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$ die beiden Wörter $v := ma$ und $w := the$. Dann gilt:

$$ma \circ the \neq the \circ ma,$$

auch wenn die Mathematik hier unser Thema ist.

In diesem Zusammenhang haben Sie sicher auch schon das leere Wort ϵ kennen gelernt, das geradezu dadurch charakterisiert ist, dass wir es mit einem beliebigen Worte $w \in \Sigma^*$ konkatenieren können, ohne dass sich das Wort ändert:

$$w \circ \epsilon = w = \epsilon \circ w,$$

und zwar von beiden Seiten. Dies ist aber genau das Charakteristische für das

3.1.4 Neutrales Element

Es sei $*$ eine Operation auf einer Menge M . Dann heißt $e \in M$ neutrales Element, falls für alle $a \in M$ gilt:

$$a * e = a = e * a.$$

3.1.4.1 Beispiele

Wie wir gesehen haben, ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine Operation. Die Null ist hierbei ein neutrales Element. Auch (\mathbb{Z}, \cdot) ist eine Operation auf den ganzen Zahlen. Hierbei ist die 1 ein neutrales Element.

Falls für eine Operation $*$ auf einer Menge M ein neutrales Element $e \in M$ existiert, dann kann man sich fragen, ob es zu einem Element $a \in M$ ein inverses Element gibt:

3.1.5 Inverses Element

Das Element $b \in M$ heißt inverses Element zu a , falls gilt:

$$a * b = e = b * a.$$

Das inverse Element wird auch mit a^{-1} bezeichnet.

3.1.5.1 Beispiele

Bzgl. der Addition über \mathbb{Z} ist $-a$ das inverse Element zu $a \in \mathbb{Z}$.

Bzgl. der Multiplikation über $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $1/a$ das inverse Element zu $a \in \mathbb{R}$.

Bzgl. der Operation (F, \circ) ist die Identitätsabbildung $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ das neutrale Element und die Umkehrabbildung f^{-1} das inverse Element.

3.2 Gruppen

Nach diesen vorbereitenden Begriffsdefinitionen können wir jetzt definieren, was wir unter einer Gruppe verstehen. Im Prinzip faßt man bei einer Gruppe einfach vier Gesetzmäßigkeiten zusammen, die in gewisser Weise zusammen sicher stellen, dass man in einer Gruppe gut rechnen kann. Der Begriff der Gruppe wird auch das Fundament für die Definition von Ringen und Körper bilden.

3.2.1 Gruppe

Sei $*$ eine Operation auf der Menge M . Wir haben für Operationen allgemein verlangt, dass diese Verknüpfung abgeschlossen ist. Dies liefert das erste der vier folgenden Gruppenaxiome:

- Die Verknüpfung $*$ ist abgeschlossen über der Menge M .
- $a * (b * c) = (a * b) * c$ für alle $a, b, c \in M$. (Assoziativgesetz)
- Es gibt ein $e \in M$ mit $a * e = a = e * a$ für alle $a \in M$. (Neutrales Element)
- Zu jedem $a \in M$ gibt es ein $a^{-1} \in M$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. (Inverses Element)

Falls darüber hinaus gilt:

- $a * b = b * a$ für alle $a, b \in M$ (Kommutativgesetz),

dann sprechen wir von einer abelschen oder kommutativen Gruppe.

3.2.2 Bemerkung (Rechtsneutrales Element, rechtsinverses Element)

Wir haben uns die Vorgehensweise erleichtert, in dem wir bei der Definition des neutralen Elementes gleich gefordert haben, dass das neutrale Element sowohl von links als auch von rechts multipliziert das Element a unverändert läßt. Analog haben wir für das inverse Element in der Definition gefordert, dass es von links und von rechts multipliziert das neutrale Element ergibt. Beides ist eigentlich nicht notwendig. Es genügt zu verlangen, dass es ein sogenanntes Rechtsneutrales Element mit $a * e = a$ und ein Rechtsinverses a^{-1} mit $a * a^{-1} = e$ gibt. Man kann dann beweisen, dass dieses rechtsneutrale Element bzw. das rechtsinverse Element auf jeden Fall auch von links funktioniert und somit genau unser neutrales bzw. inverses Element ergibt.

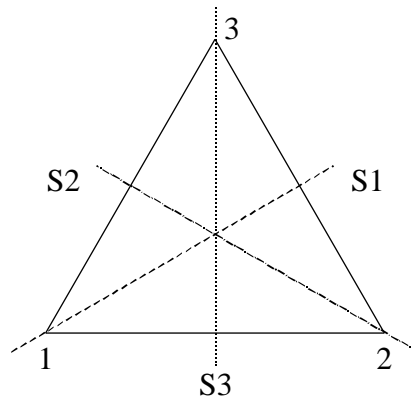


Abbildung 3.1: Gleichseitiges Dreieck mit Symmetrieachsen

3.2.2.1 Beispiel: abelsche Gruppe

Hier einige Beispiele für abelsche Gruppen:

Gruppe	Neutrales Element	Inverses Element
$(\mathbb{Z}, +)$	0	$-a$
$(\mathbb{R}, +)$	0	$-a$
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$	1	$1/a$

3.2.2.2 Beispiel

Wir betrachten die Menge K aller Kongruenzabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks auf sich selbst, also alle Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen, die ein gleichseitiges Dreieck wieder auf sich selbst abbilden. Auf sich selbst soll dabei heißen, dass das Dreieck wieder deckungsgleich ist mit der Ausgangslage.

Offensichtlich gibt es drei Drehungen um den Mittelpunkt, die zu K gehören:

Drehung um 0° : d_0

Drehung um 120° : d_1

Drehung um 240° : d_2

Außerdem kann das Dreieck an den Mittelachsen durch die drei verschiedenen Ecken gespiegelt werden:

Spiegelung an der gestrichelten Achse: s_1

Spiegelung an der gepunktstrichelten Achse: s_2

Spiegelung an der gepunkteten Achse: s_3

Damit erhalten wir $K = \{d_0, d_1, d_2, s_1, s_2, s_3\}$. Wir können alle 6 Transformationen auch mit Hilfe von Permutationen beschreiben:

$$d_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Konkatination von mehreren Abbildungen kann dann durch die Darstellung als Permutation ausgerechnet werden:

$$s_1 \circ s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = d_1.$$

Oder ein anderes Beispiel:

$$d_1 \circ s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = s_1.$$

Insgesamt erhalten wir folgende Verknüpfungstabelle:

\circ	d_0	d_1	d_2	s_1	s_2	s_3
d_0	d_0	d_1	d_2	s_1	s_2	s_3
d_1	d_1	d_2	d_0	s_3	s_1	s_2
d_2	d_2	d_0	d_1	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	d_0	d_1	d_2
s_2	s_2	s_3	s_1	d_2	d_0	d_1
s_3	s_3	s_1	s_2	d_1	d_2	d_0

Handelt es sich bei (K, \circ) um eine Gruppe?

Die Verknüpfung ist offensichtlich abgeschlossen.

Das Assoziativgesetz gilt bei der Verknüpfung von Abbildungen immer!

Mit d_0 haben wir ein neutrales Element.

Da d_0 in der Tabelle in jeder Zeile und in jeder Spalte auftritt, gibt es zu jedem Element ein inverses Element.

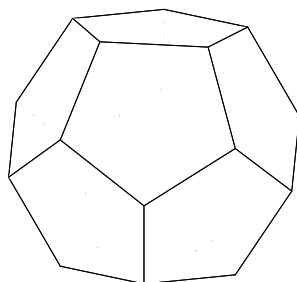


Abbildung 3.2: Dodekaeder, dessen Symmetrien eine Gruppe bilden

Das Kommutativgesetz gilt nicht:

$$s_1 \circ s_2 = d_1 \neq d_2 = s_2 \circ s_1.$$

Die Überlegungen, dass es sich um eine Gruppe handeln muß, können wesentlich allgemeiner gefaßt werden. Wenn die Gruppe nicht abgeschlossen wäre, hätten wir ja einfach eine Abbildung vergessen. Bei der Assoziativität hatten wir schon festgestellt, dass sie immer bei der Verkettung von Abbildungen gilt. Ein neutrales Element würde bei solchen Abbildungen einer geometrischen Figur auf sich selbst immer dazu gehören. Und schließlich gehört zu jeder Kongruenzabbildung doch auch deren Umkehrung wieder zu den Kongruenzabbildungen. Daher hat man über verschiedene zwei und dreidimensionale geometrische Figuren ganz allgemein die Möglichkeit Gruppen zu konstruieren. Man spricht von den sogenannten Symmetriegruppen. Beispielsweise können zum Quadrat, regelmäßigen Fünfeck, oder auch zu Würfeln, Dodekaedern (siehe Abbildung 3.2) usw. die entsprechenden Gruppen betrachtet werden.

3.2.3 Etwas Gruppentheorie

In der Gruppentheorie könnte man jetzt zum Beispiel Gesetzmäßigkeiten betrachten, die in allen Gruppen gelten. Wir wollen hier nur ein paar kleine Beispiele für solche Gesetzmäßigkeiten ansehen:

- a) Es gibt nur **ein** neutrales Element.
- b) Es gelten immer die beiden Kürzungsregeln:

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\Rightarrow b = c \\ b * a = c * a &\Rightarrow b = c \end{aligned}$$

- c) Es gibt zu jedem Element nur genau ein Inverses Element.

d) Für das Inverse zur Verknüpfung von zwei beliebigen Gruppenelementen gilt:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Beweis: Um a) zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene neutrale Elemente e und \hat{e} . Dann gilt aber, da beide das Gesetz vom neutralen Element erfüllen:

$$e = e * \hat{e} = \hat{e}.$$

Um b) zu beweisen, betrachten wir:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a * b &= a * c \\ \Rightarrow a^{-1} * (a * b) &= a^{-1} * (a * c) \\ \Rightarrow (a^{-1} * a) * b &= (a^{-1} * a) * c \\ \Rightarrow e * b &= e * c \\ \Rightarrow b &= c \end{aligned}$$

Die andere Kürzungsregel beweist man analog. Mit Hilfe der Kürzungsregel läßt sich nun auch c) leicht beweisen: Seien a^{-1} und \hat{a}^{-1} zwei inverse Elemente zu a . Dann gilt:

$$a * a^{-1} = a * \hat{a}^{-1} \Rightarrow a^{-1} = \hat{a}^{-1}.$$

Und schliesslich können wir für den Beweis von d) wiederum die Eindeutigkeit des inversen Elementes verwenden und zeigen nur, dass $b^{-1} * a^{-1}$ invers zu $a * b$ ist:

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = e.$$

□

3.2.4 Untergruppe

Es sei $(M, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq M$ eine Teilmenge von M . Wir nennen U eine Untergruppe, falls $(U, *)$ selbst wieder eine Gruppe ist. Dies ist genau der Fall, wenn für alle $a, b \in U$ auch

$$a * b \quad \text{und} \quad a^{-1}$$

wieder in U liegen.

Warum genügt das? In U müssen ja wieder die vier Gruppenaxiome gelten. Aus der obigen Forderung ergibt sich die Abgeschlossenheit und die Existenz der Inversen. Aber das Assoziativgesetz vererbt sich auf jede Teilmenge. Und aus den beiden obigen Bedingungen ergibt sich, dass es auch ein neutrales Element in U geben muss.

3.2.4.1 Beispiel

Die geraden Zahlen bilden eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Hingegen bilden die ungeraden Zahlen keine Gruppe. Sie sind bezüglich der Addition nicht abgeschlossen.

3.2.4.2 Beispiel

Wir können die Untergruppen der Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks bestimmen:

$$U_0 = \{d_0\}$$

$$U_1 = \{d_0, s_1\}$$

$$U_2 = \{d_0, s_2\}$$

$$U_3 = \{d_0, s_3\}$$

$$U_4 = \{d_0, d_1, d_2\}$$

Die Anzahl der Gruppenelemente bezeichnet man auch als die Ordnung der Gruppe. Der **Satz von Lagrange**, den wir hier nur erwähnen, besagt, dass die Gruppenordnung einer Untergruppe immer ein Teiler der Gruppenordnung ist. Dies kann im letzten Beispiel leicht nachvollzogen werden:

$$1|6, 2|6 \text{ und } 3|6.$$

Es kann also nach dem Satz von Lagrange keine Untergruppen der Ordnung 4 oder 5 geben!

3.2.4.3 Beispiel: Zyklische Gruppen

Wir haben schon das Rechnen mit Restklassen kennen gelernt. Betrachten wir nochmal den Modul $n = 7$. Dann bilden die multiplikativ invertierbaren Elemente $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zusammen mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe (Die Null muss ausgeschlossen werden, da sie nicht invertierbar ist). Man schreibt diese Gruppe auch folgendermaßen:

$$(\mathbb{Z}/\text{mod } 7)^*.$$

Dabei steht der Stern für die multiplikative Gruppe, bei der dann das neutrale Element der Addition ausgeschlossen ist.

Eine Besonderheit dieser Gruppe besteht nun darin, dass es Elemente in der Gruppe gibt, mit denen sich durch Potenzieren jedes andere Gruppenelement erzeugen läßt. Die 3 hat z.B. diese Eigenschaft:

$$3^0 \equiv 1, 3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6, 3^4 \equiv 4, 3^5 \equiv 5, 3^6 \equiv 1.$$

Alle sechs Gruppenelemente ergeben sich als Potenzen der 3. Für die 2 ist das nicht der Fall! Man spricht in diesem Fall auch von einer **zyklischen Gruppe**. Nach der Definition von Erzeugendensystemen werden wir sehr leicht eine allgemeine Definition für zyklische Gruppen geben können.

3.2.5 Erzeugendensystem

Sei $*$ eine Operation auf einer Menge M . Wir nennen eine Teilmenge $E \subseteq M$ ein Erzeugendensystem für $(M, *)$, falls sich jedes Element aus M mit diesen Elementen darstellen läßt, falls also für alle $a \in M$ gilt:

$$a = e_1 * e_2 * \cdots * e_n \text{ mit } e_i \in E.$$

Dabei müssen die Elemente e_i nicht alle verschieden sein.

3.2.5.1 Beispiele

- Σ ist ein Erzeugendensystem für $(\Sigma^* \setminus \{\epsilon\}, \circ)$, also für die Menge aller Wörter bzgl. der Konkatenation.
- $\{1\}$ ist ein Erzeugendensystem für $(\mathbb{N}, +)$.
- Die Primzahlen zusammen mit der 1 bilden ein Erzeugendensystem für (\mathbb{N}, \cdot) .

3.2.6 Zyklische Gruppen

Zyklische Gruppen sind Gruppen mit einem Erzeugendensystem, das nur aus einem Element besteht.

Alle zyklischen Gruppen sind abelsch. Angenommen a ist ein erzeugendes Element für die zyklische Gruppe. Dann lassen sich zwei beliebige Elemente b und c als Potenzen von a darstellen:

$$b = a^i, \quad c = a^j.$$

Somit gilt aber:

$$b * c = a^i * a^j = a^j * a^i = c * b.$$

Unsere Symmetriegruppe (K, \circ) ist nicht abelsch, also auch keine zyklische Gruppe!

3.2.7 Diffie/Hellman-Schlüsselaustausch

Es gilt nun ganz allgemein, dass alle Gruppen

$$((\mathbb{Z}/\text{mod } p)^*, \cdot)$$

für Primzahlen p zyklisch sind. Beim Schlüsselaustauschverfahren nach Diffie und Hellman wird eine große Primzahl festgelegt und ein Element x , so dass $\{x\}$ ein Erzeugendensystem ist. Zwei Kommunikationsteilnehmer A und B bestimmen nun Zufallszahlen a bzw. b , die sie jeweils geheim halten. Sie berechnen die dazu passenden öffentlichen Schlüssel durch:

$$y := x^a \mod p, \quad z := x^b \mod p.$$

Diese öffentlichen Schlüssel werden nun ausgetauscht, so dass A folgendes Berechnen kann:

$$z^a \equiv (x^b)^a \equiv x^{ab} \mod p.$$

B kann nun aber mit Hilfe des öffentlichen Schlüssels von A den gleichen Wert berechnen:

$$y^b \equiv (x^a)^b \equiv x^{ab} \mod p.$$

Dieser gemeinsame Wert wird dann als gemeinsamer, geheimer Schlüssel verwendet.

Für sehr große Primzahlen p ist kein effektiv durchführbares Verfahren bekannt, wie aus x^a und x^b der Wert x^{ab} berechnet werden kann. Daher kann x^{ab} dann als gemeinsamer, geheimer Schlüssel z.B. zur symmetrischen Verschlüsselung mit der AES-Verfahren verwendet werden. Eine solche Vorgehensweise wird z.B. bei SSL/TLS eingesetzt.

3.3 Ringe und Körper

Bei den Gruppen haben wir immer eine Grundmenge zusammen mit einer Operation betrachtet. Bei vielen interessanten Beispielen der Mathematik haben wir Grundbereiche mit zwei Operationen. Ein Beispiel wären die reellen Zahlen \mathbb{R} zusammen mit der Addition und der Multiplikation: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Hierbei haben also die einzelnen Operationen für sich bestimmte Eigenschaften und die beiden Operationen sind über bestimmte Eigenschaften miteinander verbunden.

3.3.1 Ring

Es sei R eine beliebige Menge mit zwei Operationen $+$ und \cdot . Wir nennen $(R, +, \cdot)$ einen Ring, falls gilt:

R ist bezüglich der beiden Operationen abgeschlossen.

$(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (die sog. additive Gruppe).

(R, \cdot) erfüllt das Assoziativgesetz.

Die beiden Operationen $+$ und \cdot zusammen erfüllen die beiden Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in R \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in R \end{aligned}$$

Analog ist auch ein Körper eine algebraische Struktur mit zwei Operationen, die aber noch etwas mehr Gesetzmäßigkeiten erfüllt:

3.3.2 Körper

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Ring, bei dem die Multiplikation \cdot die Gruppengesetze erfüllt. Genauer muß gelten:

$(K \setminus \{\text{neutrales Element bzgl. } +\}, \cdot)$ bildet eine abelsche Gruppe (die sog. multiplikative Gruppe)

Dann nennen wir $(K, +, \cdot)$ einen Körper.

3.3.2.1 Beispiele

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bildet einen Ring, aber keinen Körper.

(Die Addition bildet eine Gruppe und die Multiplikation ist assoziativ. Ferner gelten die Distributiv-Gesetze. Daher bilden die ganzen Zahlen einen Ring. Aber es gibt keine inversen Elemente bezüglich der Multiplikation. Also bilden sie keinen Körper.)

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bildet einen Körper.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bildet einen Körper.

3.3.2.2 Weitere Beispiele

Die Addition und die Multiplikation beim Rechnen mit Äquivalenzklassen modulo 6 bilden einen Ring, aber keinen Körper. Wir schreiben dafür:

$$(\mathbb{Z}/\text{mod } 6, +, \cdot)$$

Die Werte 2, 3 und 4 haben kein multiplikatives Inverses. Für Primzahlen erhalten wir Körper, wie beispielsweise:

$$(\mathbb{Z}/\text{mod } 5, +, \cdot)$$

$$(\mathbb{Z}/\text{mod } 7, +, \cdot)$$

Denn beim Rechnen modulo einer Primzahl haben wir gesehen, dass die Multiplikation invertierbar ist. Wir haben also zu jedem Element auch ein inverses Element. Alle anderen Körpereigenschaften sind offensichtlich auch erfüllt.

3.3.3 Eigenschaften von Ringen

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir bezeichnen das neutrale Element der Addition mit 0. Wir untersuchen die Multiplikation $0 \cdot a$ für ein bel. $a \in R$: Von den allgemeinen Eigenschaften eines Ringes her wissen wir nur, dass die 0 das neutrale Element der Addition ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a \cdot (b + 0) \\ &= a \cdot b + a \cdot 0. \end{aligned}$$

Damit ist aber gezeigt, dass $a \cdot 0$ ein neutrales Element bezüglich der Addition ist. Für Gruppen wissen wir aber allgemein, dass sie nur ein neutrales Element besitzen. Dies gilt insbesondere für die additive Gruppe hier, also muß $0 \cdot a = 0$ gelten. Dies haben Sie sicher genau so erwartet!

3.3.4 Nullteiler

Wir wissen, dass Ringe evtl. Nullteiler besitzen. Wir hatten gesehen, dass z.B. in $(\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}, +, \cdot)$ gilt: $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$. In einem Körper kann es hingegen keine Nullteiler geben. Wir zeigen, dass in Körpern immer folgendes gilt:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0.$$

Wir gehen dazu davon aus, dass $a \neq 0 \wedge ab = 0$. Da a ungleich 0 ist, kann a invertiert werden. Damit folgt:

$$b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0.$$

Zusammen gefaßt können wir sagen, dass es in Ringen möglicherweise Nullteiler geben kann. In Körpern können Nullteiler jedoch grundsätzlich nicht auftreten.

3.4 Polynomringe

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bilden einen Körper. Für $n + 1$ reelle Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ nennen wir den Ausdruck

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i.$$

ein Polynom über den reellen Zahlen in der Variablen x . Falls der höchste Koeffizient $a_n \neq 0$ ist, so bezeichnet man n als den Grad des Polynomes. Die Menge aller Polynome in x über \mathbb{R} schreibt man auch als:

$$\mathbb{R}[x].$$

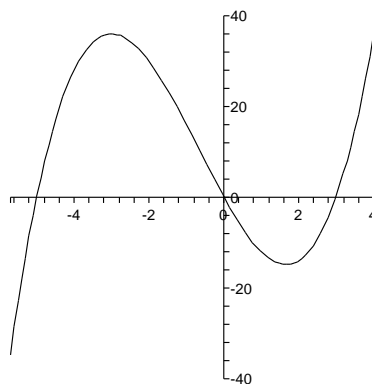


Abbildung 3.3: Das Polynom $x^3 + 2x^2 - 15x$ dargestellt als Funktion

3.4.0.1 Beispiel

Wir betrachten:

$$p := x^3 + 2x^2 - 15x \in \mathbb{R}[x].$$

Wir können ein solches Polynom als Funktion auffassen:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) = x^3 + 2x^2 - 15x \end{aligned}$$

und wie in [Abbildung 3.3](#) dargestellt zeichnen. Eine genauere Untersuchung des Polynomes ergibt ein Maximum für $x = -3$ mit $p(-3) = 36$ und ein Minimum für $x = 5/3$. Betrachten wir nun ein weiteres Polynom

$$q := 5x^2 + 2x + 4.$$

Solche Polynome können wir nicht nur als Funktionen auffassen, sondern wir können damit auch rechnen. p und q lassen sich miteinander addieren und multiplizieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} p + q &= x^3 + 7x^2 - 13x + 4 \\ p \cdot q &= 5x^5 + (2 + 10)x^4 + (4 + 4 - 75)x^3 + (8 - 30)x^2 - 60x \\ &= 5x^5 + 12x^4 - 67x^3 - 22x^2 - 60x \end{aligned}$$

Beim Addieren und Multiplizieren von Polynomen haben wir auf die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen zurückgegriffen, da die Koeffizienten der Polynome aus \mathbb{R} sind.

Allgemein kann man Polynome auch über einem beliebigen Körper $(K, +, \cdot)$ definieren, da wir ja nur die vier Grundrechenarten benötigen. Auch hier wählen wir (analog zu den Polynomen über \mathbb{R}) $n+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ und bilden damit den Ausdruck:

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Die Menge aller Polynome über K in x wird mit $K[x]$ bezeichnet. Es seien p und q zwei Polynome vom Grad n bzw. m mit $m \leq n$:

$$\begin{aligned} p &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ q &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \end{aligned}$$

Dann ist die Summe $p + q$ definiert durch:

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n.$$

Für die Multiplikation gilt:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (a_0b_0) \\ &+ (a_0b_1 + a_1b_0)x \\ &+ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ &+ \dots \\ &+ (a_0b_m + \dots + a_mb_0)x^m \\ &+ (a_1b_m + \dots + a_{m+1}b_0)x^{m+1} \\ &+ \dots \\ &+ (a_{n-m}b_m + \dots + a_nb_0)x^n \\ &+ (a_{n-m+1}b_m + \dots + a_nb_1)x^{n+1} \\ &+ \dots \\ &+ (a_nb_n)x^{n+m} \end{aligned}$$

Auf der Menge der Polynome in einer Variablen, die wir mit $K[x]$ bezeichnen, gibt es eine Addition und eine Multiplikation. Bzgl. der Addition sind alle Gruppeneigenschaften erfüllt, denn 0 liefert das neutrale Element und das Polynom $-p$, bei dem die Vorzeichen aller Koeffizienten gewechselt haben, ist das inverse Element zu p . Darüber hinaus ist die Multiplikation assoziativ und sie erfüllt zusammen mit der Addition das Distributivgesetz. Daher ist $(K[x], +, \cdot)$ selbst wieder ein Ring, ein sogenannter **Polynomring**.

3.4.0.2 Beispiel

Wir hatten ja zu Beginn dieses Abschnittes schon den Polynomring über den reellen Zahlen $\mathbb{R}[x]$ betrachtet.

$$\begin{aligned}p &= 2 + 3x - x^2 \in \mathbb{R}[x] \\q &= 1 - 4x + 2x^3 \in \mathbb{R}[x] \\p + q &= 3 - x - x^2 + 2x^3 \\p \cdot q &= 2 + (3 - 8)x + (2 \cdot 0 - 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1)x^2 + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 4)x^3 + (3 \cdot 2)x^4 - 2x^5 \\&= 2 - 5x - 13x^2 + 8x^3 + 6x^4 - 2x^5.\end{aligned}$$

3.4.1 Grad eines Polynomes, normierte Polynome

Für ein Polynom

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

hatten wir schon eingeführt, dass wir n den Grad nennen, falls $a_n \neq 0$. Wir schreiben dafür

$$\text{Grad}(p) = n$$

oder

$$\deg(p) = n. \quad (\text{engl. degree})$$

Für den Grad gilt bei der Verknüpfung von Polynomen:

$$\begin{aligned}\deg(p \cdot q) &= \deg(p) + \deg(q) \\ \deg(p + q) &\leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}.\end{aligned}$$

Das Polynom p heißt normiert, falls $a_n = 1$ gilt.

3.4.1.1 Beispiel

Wir betrachten das Rechnen in $\mathbb{Z} \bmod 2$. Die Menge der Restklassen wird auch mit $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ bezeichnet. Für diese Menge \mathbb{F}_2 und die beiden Operationen:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

sind alle Körperaxiome erfüllt. Also bildet $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ einen Körper, der daher mit \mathbb{F}_2 oder $GF(2)$ bezeichnet wird. (F kommt von dem englischen Wort field für Körper und GF von Galoisfield.) Wir hatten gesehen, dass Polynome über jedem Körper gebildet werden

können, also auch über \mathbb{F}_2 . Betrachten wir zwei Beispiele solcher Polynome und deren Verknüpfung:

$$\begin{aligned}
 p &= 1 + x + x^2 \\
 q &= 1 + x^2 \\
 p + q &= (1 + 1) + (1 + 0)x + (1 + 1)x^2 \\
 &= x \\
 p \cdot q &= 1 + x + x^2 + x^2 + x^3 + x^4 \\
 &= 1 + x + x^3 + x^4.
 \end{aligned}$$

Diese Art der Rechnung ist für Sie sehr ungewohnt, aber nicht wirklich schwierig. Die Addition von Polynomen kann durch ein einfaches XOR der entsprechenden Koeffizienten berechnet werden und auch die Multiplikation kann nach einem leicht modifizierten Multiplikationsverfahren berechnet werden:

3.4.1.2 Beispiel

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x^7 + x^5 + x^2 + x + 1 \\
 q(x) &= x^3 + x + 1.
 \end{aligned}$$

Wir berechnen $p(x) + q(x)$:

$$\begin{array}{r}
 10100111 \\
 1011 \\
 \hline
 10101100
 \end{array}$$

Das Ergebnis entspricht dem Polynom $x^7 + x^5 + x^3 + x^2$ und wurde durch ein einfaches XOR ausgeführt. Auch die Multiplikation können wir mit solchen Bitketten durchführen. Wir rechnen dazu ganz ähnlich wie beim schriftlichen Multiplizieren, aber die einzelnen Multiplikationen sind nur Shift-Operationen und aus der Addition wir wieder nur eine XOR-Operation, da es keine Überträge gibt. Wir berechnen $p(x) \cdot q(x)$.

$$\begin{array}{r}
 1011 \quad \cdot \quad 10100111 \\
 \hline
 10110000000 \\
 101100000 \\
 101100 \\
 10110 \\
 1011 \\
 \hline
 10011010001
 \end{array}$$

Wir müssen also für jede Eins der rechten Bitfolge die linke Bitfolge einmal rechtsbündig hinschreiben und zum Schluss alles bitweise mit XOR verknüpfen. Das Ergebnis der Multiplikation ergibt das Polynom $x^{10} + x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

Der Polynomring der Polynome in x über \mathbb{F}_2 heißt dann $\mathbb{F}_2[x]$

3.4.2 Division mit Rest

Seien $p, q \in K[x]$ zwei beliebige Polynome mit $q \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $s, r \in K[x]$, so dass gilt:

$$p = s \cdot q + r \quad \text{mit } 0 \leq \deg(r) < \deg(q).$$

Wir haben hier die Division mit Rest ganz allgemein für irgendeinen Körper K und dem Polynomring darüber ($K[x]$) definiert. Falls Ihnen das zu allgemein ist, können Sie die Division mit Rest auch für unsere beiden wichtigsten Beispiele $\mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{F}_2[x]$ zweimal getrennt notieren. Der Text bleibt dabei identisch.

3.4.2.1 Beispiel

Wir betrachten gewöhnliche Polynome über den reellen Zahlen:

$$\begin{aligned} p &= x^4 - 2x^3 + 3x - 1, \\ q &= x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Die Division mit Rest kann nun nach folgendem Schema durchgeführt werden:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} x^4 - 2x^3 - 1 \\ x^4 + 2x^3 - 3x^2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \\ -4x^3 - 8x^2 + 12x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 11x^2 - 9x - 1 \\ 11x^2 + 22x - 33 \end{array} \\ \hline -31x + 32 \end{array} = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4x + 11) + (-31x + 32)$$

3.4.2.2 Beispiel

Das gleiche Verfahren für die Division mit Rest läßt sich auch für Polynome in $\mathbb{F}_2[x]$ durchführen. Es seien gegeben $p = x^7 + 1$ und $q = x^4 + x$. Dann berechnen wir:

$$\begin{array}{r} x^7 + 1 \\ x^7 + x^4 \\ \hline x^4 + 1 \\ x^4 + x \\ \hline x + 1 \end{array} = (x^4 + x)(x^3 + 1) + (x + 1)$$

3.4.3 Modulo-Rechnung bei Polynomen

Analog der Modulo-Rechnung bei ganzen Zahlen können wir auch eine Modulo-Rechnung für Polynome einführen. Wir beginnen wieder mit einer Äquivalenzrelation. Es seien u und v Polynome aus einem Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$. Dann können wir bezüglich einem weiteren Polynom q , das unser Modul ist, die Division mit Rest durchführen:

$$\begin{aligned} u &= s_u q + r_u && \text{mit } 0 < \deg(r_u) < \deg(q) \\ v &= s_v q + r_v && \text{mit } 0 < \deg(r_v) < \deg(q) \end{aligned}$$

Wir definieren die Äquivalenzrelation

$$u \equiv v \Leftrightarrow r_u = r_v.$$

Analog zu den ganzen Zahlen gilt auch hier:

$$(u \equiv v \pmod{q}) \Leftrightarrow q \mid (u - v).$$

3.4.3.1 Beispiel

Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$ und rechnen modulo dem Polynom

$$q = x^2 + 1 = (x + 1)(x + 1).$$

Analog den Betrachtungen bei $\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}$, wo wir die Elemente 0, 1, 2, 3, 4, 5 als Repräsentanten verwendet haben, können wir uns als eindeutiges Repräsentantensystem auf alle Polynome vom Grad ≤ 1 beschränken:

$$0, 1, x, x + 1.$$

Die Additionstabelle sieht folgendermaßen aus:

+	0	1	x	$x + 1$
0	0	1	x	$x + 1$
1	1	0	$x + 1$	x
x	x	$x + 1$	0	1
$x + 1$	$x + 1$	x	1	0

Man sieht, dass die Addition wieder eine Gruppe bildet (es gibt ein neutrales Element, in jeder Zeile und jeder Spalte taucht jedes Element genau einmal auf...). Für die Multiplikation mit 0 und 1 ist nicht viel zu rechnen. Multiplizieren mit 0 ergibt stets 0 und Multiplikation mit 1 verändert den Multiplikator nicht. 1 ist also das neutrale Element. Betrachten wir die Multiplikation $x \cdot x$ genauer. Das ergibt x^2 , was aber ein Polynom vom

Grad > 1 ist. Somit müssen wir berechnen, zu welchem der Polynome es äquivalent ist. Dies kann durch Division mit Rest mit dem Modul q berechnet werden:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x^2 + 1 \\ \hline 1 \end{array} = (x^2 + 1) \cdot 1 + 1$$

Wir erhalten bei der Division mit Rest also das Polynom 1. Also gilt $x^2 \equiv 1 \pmod{x^2 + 1}$. Entsprechend berechnen wir $x(x+1) = x^2 + x$. Auch für dieses Polynom müssen wir wieder die Äquivalenzklasse bestimmen, zu der es gehört:

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ x^2 + 1 \\ \hline x + 1 \end{array} = (x^2 + 1) \cdot 1 + (x + 1)$$

Hier gilt also $x(x+1) \equiv x+1 \pmod{x^2 + 1}$. Ferner müssen wir noch die Multiplikation $(x+1)(x+1)$ betrachten. Hierbei gilt aber

$$(x+1)(x+1) \equiv x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{x^2 + 1}.$$

Damit haben wir aber alle Werte zusammen und können die Verknüpfungstafel für die Multiplikation aufstellen:

\cdot	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	1	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$x+1$	0

Es gibt hier also Nullteiler:

$$(x+1)(x+1) \equiv 0 \pmod{x^2 + 1}.$$

Und zu $(x+1)$ gibt es kein Inverses. Wir erhalten also bei $\mathbb{F}_2[x] \pmod{x^2 + 1}$ nur einen Ring und keinen Körper.

Ist das wirklich überraschend? Bei der Modulo-Rechnung über den ganzen Zahlen war $\mathbb{Z}_{\text{mod } 6}$ beispielsweise ein Ring, da 6 eine zusammengesetzte Zahl ist und $\mathbb{Z}_{\text{mod } 7}$ erwies sich als Körper, da 7 eine Primzahl ist. Bei Primzahlen war jede Zahl invertierbar. Und wir haben oben schon gesehen, dass sich der Modul $x^2 + 1$ zerlegen läßt:

$$x^2 + 1 = (x+1)(x+1).$$

Solche Polynome bezeichnet man als **reduzibel**. Genauer heißt ein Polynom dann reduzibel, wenn es sich in zwei Polynome zerlegen läßt, die beide vom Grad ≥ 1 sind.

Betrachten wir also ein weiteres Beispiel. Diesmal verwenden wir Polynom als Modul, das keine echten Teiler hat. Solche Polynome werden als **irreduzibel** bezeichnet. Wir wählen:

$$q = x^2 + x + 1.$$

Da es sich wieder um ein quadratisches Polynom handelt, können wir wieder als eindeutiges Repräsentantensystem

$$0, 1, x, x + 1$$

nehmen. Die Addition bleibt vollkommen unverändert. Für die Multiplikation gilt:

\cdot	0	1	x	$x + 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x + 1$
x	0	x	$x + 1$	1
$x + 1$	0	$x + 1$	1	x

Ganz analog dem Fall $\mathbb{Z}/\text{mod } p$ mit p Primzahl ergibt sich hier eine Gruppe und damit insgesamt für die Modulo-Rechnung in $\mathbb{F}_2[x]/\text{mod } q$ mit $q = x^2 + x + 1$ ein **Körper**.

Es gilt nun ganz allgemein, dass für irreduzible Polynome q

$$\mathbb{F}_2[x]/\text{mod } q$$

einen Körper bildet. Wenn q den Grad n hat, dann gibt es 2^n verschiedene Reste vom Grad kleiner n . Dies ist also die Anzahl der Elemente dieses Körpers.

3.4.4 Endliche Körper

Im Folgenden können wir die Vorgehensweise noch etwas verallgemeinern: Wir haben gesehen, dass für jede Primzahl p

$$(\mathbb{Z}/\text{mod } p, +, \cdot)$$

einen Körper mit p Elementen, also einen endlichen Körper liefert. Jetzt kam eine neue Konstruktion eines endlichen Körpers hinzu, indem wir Polynome vom Grad kleiner n über \mathbb{F}_2 betrachten:

$$(\mathbb{F}_2[x]/\text{mod } q(x), +, \cdot),$$

wobei $q(x)$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n über \mathbb{F}_2 ist. Dieser Körper besteht aus 2^n Elementen, da es über \mathbb{F}_2 so viele verschiedene Polynome vom Grad $< n$ gibt. Ohne die Details auszuführen, weisen wir darauf hin, dass die Polynomkonstruktion an Stelle von \mathbb{F}_2 auch über jedem anderen endlichen Körper mit p Elementen ausgeführt werden kann. Wir führen dazu zunächst für das Rechnen modulo einer Primzahl p eine neue Bezeichnung ein:

$$\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/\text{mod } p.$$

Wir betrachten wieder Polynome über diesem Körper, also Polynome aus $\mathbb{F}_p[x]$ und rechnen modulo einem irreduziblen Polynom $q(x)$ vom Grad n . Der Körper, den wir erhalten, wird mit

$$(\mathbb{F}_p[x]/\text{mod } q(x), +, \cdot)$$

bezeichnet und hat p^n Elemente. Im Prinzip sind das schon alle endlichen Körper, die es überhaupt gibt!

3.4.5 Effiziente Berechnung der Modulo-Reduktion in $\mathbb{F}_2[x]$

In diesem Abschnitt betrachten wir noch einmal das Rechnen mit Polynome über \mathbb{F}_2 , bei deren Koeffizienten also modulo zwei gerechnet wird. Wir haben schon gesehen, dass solche Polynome besonders einfach als Bitstrings dargestellt werden können und damit dann gerechnet werden kann. Wir betrachten das Polynom

$$p(x) := x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x].$$

Dieses Polynom läßt sich darstellen, in dem wir einfach die Koeffizienten notieren:

$$10110111.$$

Wir berechnen das Quadrat dieses Polynomes:

$$p(x)^2 \text{ mod } x^{10} + x^7 + x + 1.$$

Wir schreiben diese Rechenaufgabe als Bitstrings und berechnen nach dem gewöhnlichen, schriftlichen Multiplikationsverfahren, aber mit dem großen Unterschied, dass es keine Überträge gibt und bei der Addition immer modulo zwei gerechnet wird:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & * & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & &
 \end{array}$$

Das Ergebnis stellt jetzt das Polynom $p(x)^2$ dar. Anschliessend muss noch die Modulo-Reduktion berechnet werden. Bei der Modulo-Reduktion werden ja immer geeignete Vielfache des Modul-Polynomes $m(x)$ subtrahiert. Als Vielfache kommen aber nur

$$m(x), xm(x), x^2m(x), x^3m(x), \dots$$

in Frage, und diese entsprechen einfachen Linksshifts des Bitmusters von $m(x)$. Wir müssen also nur die Bitfolge für $m(x)$ linksbündig anlegen und mit XOR Verknüpfen:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 \hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis lautet also:

$$10100000 \cong q(x) := x^7 + x^5 \pmod{x^{10} + x^7 + x + 1}.$$

Diese Rechentechnik ist für die Handrechnung geeignet, aber sie liefert auch für die Realisierung auf Rechnern sehr effiziente Verfahren.

3.4.5.1 Beispiel: Fehlererkennende und fehlerkorrigierende Codes

Die Betrachtungen zu den endlichen Körpern und der Modulo-Rechnung haben uns in theoretische Überlegungen hineingeführt. Wo spielen solche Rechnungen nun in der Informatik eine Rolle? Ein wichtiges Beispiel dazu sind die sogenannten fehlererkennenden bzw. fehlerkorrigierenden Codes, die aus der modernen Kommunikationstechnik (W-LAN, Mobilfunk, Internet, Festplatten, CD-ROM etc.) nicht wegzudenken sind.

Wir betrachten dazu ein kleines Beispiel für einen fehlerkorrigierenden Code. Wir gehen davon aus, dass wir $k = 4$ Bits an Information übertragen wollen. Die vier zu übertragenden Bits seien in einem Vierer-Tupel

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

zusammengefasst. Diese vier Bits sollen jetzt so dargestellt werden, dass nach einer Übertragung Fehler erkannt oder gar korrigiert werden können. Betrachten wir dazu zunächst zwei ganz einfach Beispiele.

Eine einfache Möglichkeit besteht darin, ein geeignetes fünftes Bit als Prüfbit anzuhängen, so dass die XOR-Summe aller fünf bit immer gleich 1 ist. Falls also die XOR-Summe $a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$ gleich 0 ist, muss eine Eins angefügt werden. In diesem Falle gilt:

$$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus 1 = 1.$$

Falls die XOR-Summe der vier zu übertragenden Bits gleich 1 ist, muss eine Null angehängt werden. Für diesen Fall gilt:

$$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus 1 = 0.$$

In beiden Fällen können wir also das fünfte Bit a_4 mit der gleichen Formel bilden:

$$a_4 := a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus 1.$$

Es wird dann das Fünfer-Tupel

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$$

übertragen. Die fünf zu übertragenden Bits haben immer die XOR-Summe gleich 1. Falls genau ein fehlerhaftes Bit empfangen wird, dann erkennt man dies an der Quersumme, die dann fälschlicher Weise gleich 0 ist. Als Fehler kommen dabei hier nur sogenannte Bitkipper in Frage, das heißt eine 0 wird fälschlicherweise zu einer 1 oder umgekehrt. Es kann also ein Fehler erkannt werden, aber man weiß als Empfänger nicht, welches Bit falsch ist.

Ein weiteres Beispiel wäre der sogenannte Wiederholungscode. Hierbei wird das Vierer-Tupel einfach dreimal wiederholt übertragen:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_0, a_1, a_2, a_3, a_0, a_1, a_2, a_3.$$

Wenn nur ein einzelner Fehler passiert, dann kann dieser mit Hilfe der beiden anderen Wiederholungen nicht nur erkannt, sondern auch korrigiert werden. Alternativ können zwei Bitfehler auf jeden Fall erkannt, aber dann nicht mehr unbedingt korrigiert werden.

Aber diese Art der Kodierung ist natürlich nicht besonders effizient, da alle Bits im Endeffekt dreimal übertragen werden. Wie geht das besser?

Wenn wir Polynome über \mathbb{F}_2 betrachten, so ist jedem solchen Vierertupel in eindeutiger Weise ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich drei zugeordnet:

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3) \hat{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Um Übertragungsfehler erkennen oder gar korrigieren zu können, hängen wir an diesen 4 Bit Informationsvektor noch drei weitere sog. Kontrollbits an. Wie können wir diese drei Kontrollbits sinnvoll bestimmen? Wir verwenden ein irreduzibles Polynom vom Grad 3, das gleichzeitig ein Teiler von $x^7 + 1$ ist. Wir wählen zum Beispiel

$$G = 1 + x^2 + x^3.$$

Den zu übertragenden Vektor V mit $n = 7$ Bit ($k = 4$ Informationsbits und 3 Kontrollbits) errechnen wir durch:

$$V = A \cdot G$$

also mit der Polynommultiplikation. Für

$$A = (1, 0, 1, 0) \hat{=} 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = 1 + x^2$$

erhalten wir also beispielsweise:

$$V = A \cdot G = (1 + x^2)(1 + x^2 + x^3) = 1 + x^3 + x^4 + x^5 \hat{=} (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0).$$

Um die vier Bit Information $(1, 0, 1, 0)$ zu übertragen, wird also der Vektor $V = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ verschickt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sender} & \longrightarrow & \text{Empfänger} \\ V & \longrightarrow & W \end{array}$$

Der Empfänger erhält den möglicherweise fehlerhaft übertragenen Vektor W . Für einen korrekt empfangenden Vektor ergibt eine Division mit Rest durch das Polynom G immer den Rest 0:

$$\begin{array}{r} x^5 \quad +x^4 \quad +x^3 \quad \quad +1 \\ x^5 \quad +x^4 \quad \quad +x^2 \\ \hline x^3 \quad +x^2 \quad +1 \end{array} = (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1) + 0$$

Die fehlerhafte Übertragung bei einem oder zwei Fehlern kann immer daran erkannt werden, dass bei dieser Division mit Rest ein Rest ungleich 0 entsteht. Wenn beispielsweise das 5.Bit bei der Übertragung von einer 1 auf 0 gekippt ist, so ergibt die Rechnung:

$$\begin{array}{r} x^5 \quad \quad \quad +x^3 \quad \quad \quad +1 \\ x^5 \quad +x^4 \quad \quad +x^2 \\ \hline x^4 \quad +x^3 \quad +x^2 \quad +1 \\ x^4 \quad +x^3 \quad \quad +x \\ \hline x^2 \quad +x \quad +1 \end{array} = (x^3 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + x) + (x^2 + x + 1)$$

Eine analoge Rechnung können wir durch Multiplikation mit dem sogenannten Kontrollpolynom

$$H := (x^7 + 1)/G = (x^7 + 1)/(x^3 + x^2 + 1) = (x^4 + x^3 + x^2 + 1)$$

erreichen, indem wir den empfangenen Vektor W mit dem Polynom H multiplizieren und dabei modulo $x^7 + 1$ rechnen:

$$\begin{aligned} (x^5 + x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + 1) &\equiv x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 \\ &\quad + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ &\equiv x^9 + x^7 + x^2 + 1 \\ &\equiv (x^9 + x^7 + x^2 + 1) + x^2(x^7 + 1) \\ &\equiv x^7 + 1 \\ &\equiv 0 \pmod{(x^7 + 1)}. \end{aligned}$$

Alle diese Rechnungen können sehr einfach als Operationen mit Bitvektoren realisiert werden. Man benötigt dabei im Grunde genommen nur XOR-Operation und Shift-Operationen.

Wir betrachten ein paar einfache, aber sehr wesentliche Eigenschaften dieser 7 Bit Vektoren, die bei diesem Verfahren in Frage kommen. Die 7er Vektoren heißen auch **Codewörter** und alle solchen Codewörter bilden zusammen den jeweiligen **Code**. Für die Hälfte aller 4 Bit Informationsvektoren listen wir die 7 Bit Codewörter in der folgenden Tabelle auf:

0	$\hat{=}$	(0, 0, 0, 0)	$\hat{=}$	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$=$	c_0
1	$\hat{=}$	(1, 0, 0, 0)	$\hat{=}$	(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	$=$	c_1
x	$\hat{=}$	(0, 1, 0, 0)	$\hat{=}$	(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	$=$	c_2
$x + 1$	$\hat{=}$	(1, 1, 0, 0)	$\hat{=}$	(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)	$=$	c_3
x^2	$\hat{=}$	(0, 0, 1, 0)	$\hat{=}$	(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	$=$	c_4
$x^2 + 1$	$\hat{=}$	(1, 0, 1, 0)	$\hat{=}$	(1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	$=$	c_5
$x^2 + x$	$\hat{=}$	(0, 1, 1, 0)	$\hat{=}$	(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)	$=$	c_6
$x^2 + x + 1$	$\hat{=}$	(1, 1, 1, 0)	$\hat{=}$	(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)	$=$	c_7

Um die Eigenschaften dieser Codewörter beschreiben zu können, führen wir ein paar grundlegende Begriffe aus der Codierungstheorie ein.

- a) Das Hamming-Gewicht eines Codewortes ist die Anzahl Einsen, die in einem Codewort auftreten. Es gilt z.B.:

$$\text{Hamming-Gewicht } (c_2) = 3.$$

- b) Die Hamming-Distanz von zwei Codewörtern c_i und c_j ist gleich dem Hamminggewicht der XOR Summe der beiden Codewörter. Es gilt z.B.:

$$\text{Hamming-Distanz } (c_2, c_4) = \text{Hamming-Gewicht } (c_2 \oplus c_4) = 4.$$

- c) Die Minimal-Distanz eines Codes C ist das Minimum aller Hamming-Distanzen die zwischen zwei verschiedenen Codewörtern auftreten. Für unseren Code beträgt die Minimal-Distanz 3.

Es ist eine der zentralen Eigenschaften unseres Codes, dass sich je zwei Codewörter immer mindestens an drei Stellen unterscheiden. Wenn also ein Codewort bei der Übertragung 3 Fehler enthalten würde, dann könnte es als falsches anderes Codewort interpretiert werden. Enthält das übertragene Codewort maximal 2 Fehler, dann kann es zumindest als fehlerhaft identifiziert werden. Sollten wir aus den technischen Eigenschaften unseres Übertragungskanal wissen, dass wir maximal mit einem Fehler rechnen müssen, dann kann dieser Fehler sogar erkannt und korrigiert werden, weil der fehlerhafte Vektor zu genau einem Codewort die Hamming-Distanz eins hat und zu allen anderen Code-Wörtern mindestens eine Hamming-Distanz von zwei hat.

Es gilt ganz allgemein, dass ein Code mit Minimal-Distanz d

-
- $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ Fehler korrigieren **oder**
 - $d - 1$ viele Fehler erkennen kann.

Obige Konstruktion eines Codes kann verallgemeinert werden und führt auch in vielen anderen Fällen zu sehr guten Codes.

3.4.5.2 Beispiel

Wir betrachten bei diesem Beispiel Vektoren mit 7 Informationsbits. Diese Vektoren werden mit 8 Kontrollbits auf 15 Bit Codewörter erweitert. Dazu kann das Polynom

$$G := x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$$

verwendet werden. Ein solches Polynom wird auch Generatorpolynom genannt. Für G gilt:

$$G \mid (x^{15} - 1).$$

Der Code, der mit G erzeugt wird, hat die Minimaldistanz

$$d = 5.$$

Es können also 4 Fehler erkannt werden oder alternativ

$$\lfloor \frac{5-1}{2} \rfloor = 2$$

Fehler korrigiert werden.

Wie wir gesehen haben, können mit Hilfe von Polynomen über endlichen Körpern solche Codes konstruiert werden. Eine grundlegende Herausforderung in der Codierungstheorie besteht in der sogenannten Decodierung bei der Verwendung von Fehlerkorrektur. Wie finde ich zu einem fehlerhaften Vektor das Codewort mit der geringsten Hamming-Distanz? Solche Fragen werden unter anderem in der Codierungstheorie behandelt.

3.5 Horner Schema und Interpolation

Im folgenden Abschnitt wird nun wieder die Verwendung von Polynomen als Funktionen im Vordergrund stehen, nachdem wir bei den Betrachtungen über die Körper mit Polynomen als Objekten gerechnet haben. Es sei $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann ist durch das Polynom p gleichzeitig eine Funktion definiert, die jedem Element aus \mathbb{R} wieder ein Element aus \mathbb{R} zuordnet. Um anzudeuten, dass wir jetzt für die Variable x im Polynom p eine konkrete Zahl einsetzen, verwenden wir als Variable x_0 :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_0 &\longmapsto p(x_0) \end{aligned}$$

Betrachten wir ein Polynom vom Grad n :

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Wenn wir für ein bestimmtes $x_0 \in \mathbb{R}$ den Wert $p(x_0)$ auf naive Weise berechnen, benötigen wir zunächst zur Berechnung von

$$x_0, x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n$$

$n - 1$ Multiplikationen. Anschließend benötigen wir noch n Multiplikationen für die Berechnung von:

$$a_1x_0, a_2x_0^2, a_3x_0^3, \dots, a_nx_0^n.$$

Diese Werte müssen dann noch aufaddiert werden zu:

$$p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n,$$

was n Additionen benötigt. In folgender Formel deutet sich schon an, dass wir das effizienter berechnen können:

$$p(x_0) = \underbrace{\left(\dots \left(\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_n x_0 + a_{n-1}}_{b_{n-1}}} x_0 + a_{n-2}}_{b_{n-2}} \right) x_0 + \dots + a_1 \right) x_0 + a_0}_{b_0}.$$

Wir benennen bei dieser Methode also erst a_n einfach um zu b_{n-1} . Diesen Wert b_{n-1} multiplizieren wir mit x_0 und addieren a_{n-1} . Das Zwischenergebnis benennen wir mit b_{n-2} . Anschliessend multiplizieren wir das Ganze wieder mit x_0 . Dadurch ergibt sich für den Koeffizient a_n schon der Faktor x_0^2 ...

Das gesamte sich daraus ergebende Rechenverfahren können wir zusammenfassen in dem sogenannten:

3.5.1 Horner-Schema

$$+ \begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & b_{n-1} \cdot x_0 & b_{n-2} \cdot x_0 & \dots & b_2 \cdot x_0 & b_1 \cdot x_0 & b_0 \cdot x_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & a_0 + b_0x_0 \end{array} = p(x_0) =: r_0$$

Hierbei werden nur n Multiplikationen und n Additionen benötigt, um das Polynom $p(x)$ an der Stelle x_0 auszuwerten.

3.5.1.1 Beispiel

Wir betrachten das Polynom

$$p := 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 38 \in \mathbb{R}[x].$$

Wir berechnen $p(5)$:

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & -1 & 1 & 5 & -38 \\ & 10 & 45 & 230 & 1175 \\ \hline 2 & 9 & 46 & 235 & 1137 \end{array} = p(5)$$

Setzen wir 2 in das Polynom ein, so ergibt sich:

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & -1 & 1 & 5 & -38 \\ & 4 & 6 & 14 & 38 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 19 & 0 \end{array} = p(2)$$

Die 2 ist also eine Nullstelle des Polynomes $p(x)$. Mit Hilfe des Horner-Schema können aber keine Nullstellen gefunden werden! Wir können nur sehr effizient überprüfen, ob ein x_0 eine Nullstelle ist.

Wir können aus dem Hornerschema noch mehr ablesen: Die Werte in der letzten Zeile b_0, \dots, b_{n-1} liefern die Koeffizienten für das Polynom $p(x)/(x-2)$:

$$p(x) = (2x^3 + 3x^2 + 7x + 19)(x-2).$$

Dies ist nur ein Spezialfall, im Allgemeinen liefern die Koeffizienten b_0, \dots, b_{n-1} ein Polynom $q(x) := b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$ mit folgender Eigenschaft:

$$p(x) = q(x)(x - x_0) + r_0.$$

Verdeutlichen wir uns das an unserem ersten Beispiel für $x_0 = 5$:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 38 = (2x^3 + 9x^2 + 46x + 235)(x-5) + 1137.$$

Für ein gegebenes Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}$ liefert das Hornerschema das Ergebnis der Division mit Rest für $p(x)$ und $(x - x_0)$. Wir können also mit Hilfe des Hornerschemas Divisionen mit Rest ausführen, aber die Division kann nur für Polynome der Art $x - x_0$ durchgeführt werden.

An Stelle eines Induktionsbeweises oder eines Beweises mit vielen ... zeigen wir die Behauptung für ein allgemeines Polynom vom Grad 4:

$$\begin{aligned}
 (a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) &= (x - x_0)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + r_0 \\
 - \underbrace{\frac{(b_3x^4 - x_0b_3x^3)}{(a_3 + x_0b_3)x^3}}_{b_2} & \\
 - \underbrace{\frac{b_2x^3 - (b_2x^3 - x_0b_2x^2)}{(a_2 + b_2x_0)x^2}}_{b_1} & \\
 - \underbrace{\frac{b_1x^2 - (b_1x^2 - x_0b_1x)}{(a_1 + x_0b_1)x}}_{b_0} & \\
 - \frac{b_0x - (b_0x - x_0b_0)}{a_0 + x_0b_0} &= r_0
 \end{aligned}$$

Dabei wurden die Identitäten:

$$\begin{aligned}
 b_3 &= a_4 \\
 b_2 &= a_3 + x_0b_3 \\
 b_1 &= a_2 + x_0b_2 \\
 b_0 &= a_1 + x_0b_1 \\
 r_0 &= a_0 + x_0b_0
 \end{aligned}$$

verwendet, die sich direkt aus dem Horner-Schema ergeben.

Damit ergibt sich aber rein rechnerisch ein interessanter Zusammenhang. Gehen wir noch einmal aus von einem beliebigen Polynom $p(x)$ vom Grad n . Wenn wir eine Nullstelle x_0 für das Polynom kennen, dann gilt $p(x_0) = 0 = r_0$. Dann ist aber nach obiger Rechnung $(x - x_0)$ ein Teiler von $p(x)$ und das Horner-Schema liefert uns ein Polynom $p_1(x)$ vom Grad $n - 1$ mit:

$$p(x) = p_1(x)(x - x_0).$$

Falls wir eine weitere Nullstelle x_1 für $p_1(x)$ finden, dann liefert ein Anwenden des Horner-Schema auf $p_1(x)$ ein weiteres Polynom $p_2(x)$ vom Grad $n - 2$ mit:

$$p_1(x) = p_2(x)(x - x_1)$$

und somit insgesamt:

$$p(x) = (x - x_0)(x - x_1)p_2(x).$$

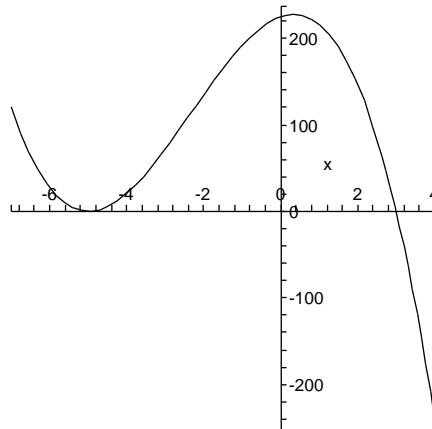


Abbildung 3.4: $-3(x-3)(x+5)^2$

Falls wir n verschiedene Nullstellen x_0, x_1, \dots, x_{n-1} für ein ansonsten unbekanntes Polynom kennen, liefert die erzielte Form:

$$p(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Das heißt, ein Polynom vom Grad n mit n verschiedenen Nullstellen zerfällt in diese n Linearfaktoren und ist durch die Nullstellen bis auf den Faktor a_n eindeutig bestimmt.

3.5.1.2 Beispiel

$$p(x) = x^3 - 67x - 126$$

besitzt die drei Nullstellen $x_1 = 9, x_2 = -2$ und $x_3 = -7$. Es gilt:

$$p(x) = (x - 9)(x + 2)(x + 7).$$

3.5.1.3 Beispiel

$$\begin{aligned} q(x) &= -3x^3 - 21x^2 + 15x + 225 \\ &= -3(x-3)(x+5)^2 \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat also nur zwei verschiedene Nullstellen, aber bei -5 eine doppelte Nullstelle. Abbildung 3.4 zeigt das Polynom mit der doppelten Nullstelle, die ein Berührungspunkt der x -Achse ist.

3.5.2 Beispiel

Wir betrachten das Polynom

$$p := 2x^4 - x^3 - 15x^2 - 9x + 10.$$

Es soll eine Division mit Rest durchgeführt werden, indem durch das Polynom $x - 3$ geteilt wird. Nur durch solche normierte Polynome vom Grad 1 kann mit Hilfe des Hornerschemas geteilt werden:

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & -1 & -15 & -9 & 10 \\ & 6 & 15 & 0 & -27 \\ \hline 2 & 5 & 0 & -9 & -17 \end{array} = p(3)$$

Aus dem Hornerschema ergibt sich das Polynom:

$$q := 2x^3 + 5x^2 - 9.$$

und es gilt:

$$p = (x - 3)q - 17,$$

oder ausgeschrieben:

$$2x^4 - x^3 - 15x^2 - 9x + 10 = (x - 3)(2x^3 + 5x^2 - 9) - 17.$$

3.5.2.1 Hornerschema und Binärzahlen

Der Wert der Binärzahl 1011 läßt sich ja berechnen durch:

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Wir betrachten das entsprechende Polynom, da genau die Binärfolge 1011 als Koeffizienten besitzt:

$$p := x^3 + x + 1.$$

Dann liefert $p(2)$ die entsprechende Dezimalzahl. Wir können also auch hier das Horner-schema einsetzen:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 4 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 11 \end{array} = p(2)$$

3.5.3 Interpolation

Bei der Interpolation liegt folgende Aufgabenstellung zu Grunde. Gegeben sind

$$\begin{array}{ll} x_0, & x_1, & x_2, & \dots, & x_n & \text{Stützstellen und} \\ y_0, & y_1, & y_2, & \dots, & y_n & \text{Werte.} \end{array}$$

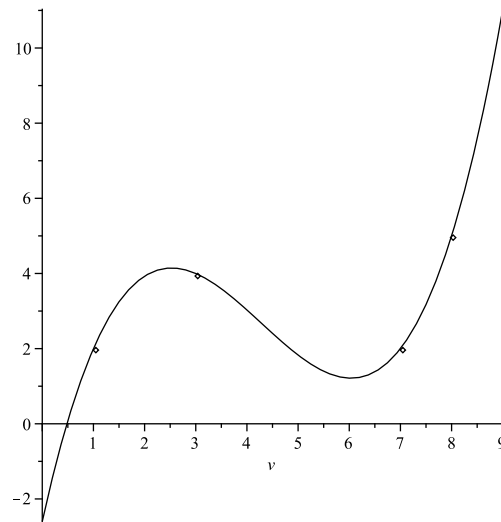


Abbildung 3.5: Interpolationspolynom für die x -Werte 1,3,7,8 und y -Werte 2,4,2,5

Gesucht ist ein Polynom p vom Grad $\leq n$ mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \dots, n$.

Grundsätzlich ist die Aufgabe recht einfach zu lösen. Betrachten wir zunächst den Fall für $n = 1$. In diesem Fall sind zwei Stützstellen und Werte gegeben: (x_0, y_0) und (x_1, y_1) . Für das Polynom $p(x) = a_1x + a_0$ mit den zwei Unbekannten a_0 und a_1 ergeben sich zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_1x_0 + a_0 \\ y_1 &= a_1x_1 + a_0. \end{aligned}$$

Analog haben wir für $n = 2$ drei verschiedene Wertepaare (x_0, y_0) , (x_1, y_1) und (x_2, y_2) . Für das Polynom

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ergeben sich mit den drei Unbestimmten auch drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 \\ y_1 &= a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 \\ y_2 &= a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind also $n+1$ lineare Gleichungen in $n+1$ vielen Unbekannten zu lösen. Wie man das allgemein macht, wird in späteren Kapiteln ausführlich erläutert werden, aber in diesem speziellen Fall gibt es wesentlich effizientere Verfahren. Eines davon, das wir hier

behandeln werden, geht auf Newton zurück und wird daher auch Newton-Interpolation genannt.

Die Grundidee liegt darin, das Polynom p vom Grad n wie folgt anzusetzen:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

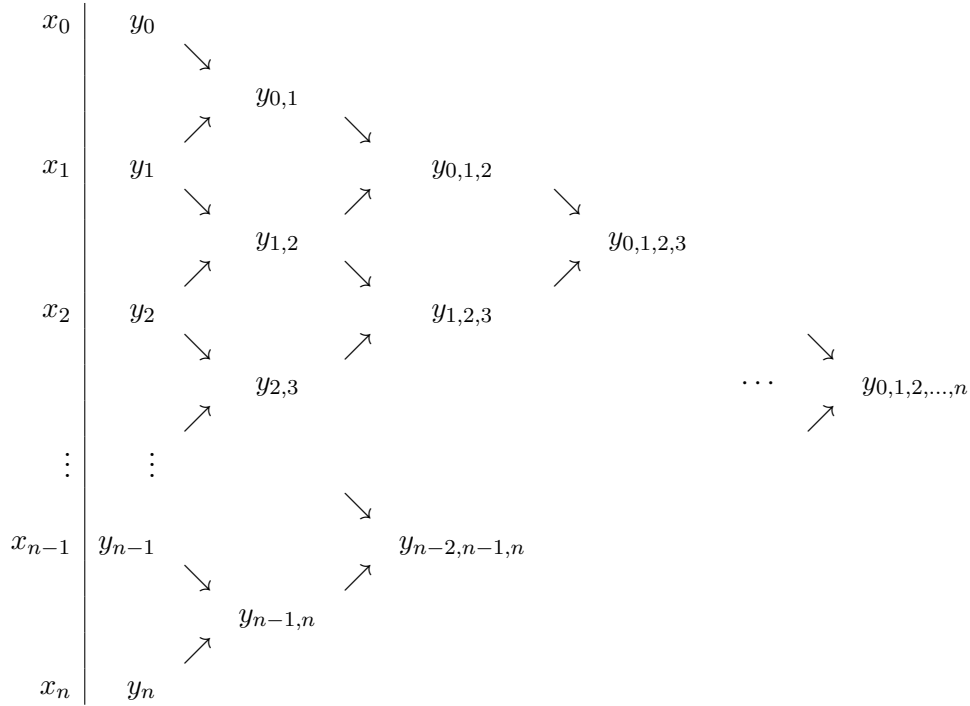
Die Forderung $p(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, n$ führt auf folgende Gleichungen für die α'_i s:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha_0 \\ y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ y_2 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha_0 + \alpha_1(x_n - x_0) + \alpha_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \alpha_n(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Auflösen nach α ergibt:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= y_0 \\ \alpha_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ \alpha_2 &= \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dabei ist die Gleichung für α_2 schon etwas umgeformt, um folgendes Schema zu erreichen:



Die neuen y -Werte aus diesem Schema berechnen sich nach folgenden Vorschriften:

$$y_{0,1} := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad y_{1,2} := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \dots, \quad y_{n-1,n} := \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

Für die Werte der nächsten Spalte gilt:

$$y_{0,1,2} := \frac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}, \quad y_{1,2,3} := \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}, \quad \dots, \quad y_{n-2,n-1,n} := \frac{y_{n-1,n} - y_{n-2,n-1}}{x_n - x_{n-2}}.$$

Schließlich erhalten wir für die nächste Spalte:

$$y_{0,1,2,3} := \frac{y_{1,2,3} - y_{0,1,2}}{x_3 - x_0}, \quad y_{1,2,3,4} := \frac{y_{2,3,4} - y_{1,2,3}}{x_4 - x_1}, \quad \dots,$$

$$y_{n-3,n-2,n-1,n} := \frac{y_{n-2,n-1,n} - y_{n-3,n-2,n-1}}{x_n - x_{n-3}}.$$

Es gilt nun, dass die obersten Werte der Spalten genau unsere gesuchten Koeffizienten α sind:

$$\alpha_i = y_{0,1,2,\dots,i}.$$

Die x_i müssen in diesem Schema nicht aufsteigend sortiert sein.

3.5.3.1 Beispiel

Betrachten wir folgende Meßwerte:

x	1	2	3	4	5
y	30	27	25	24	21

Wir suchen ein Polynom $p(x)$ vom Grad 4, das durch alle vorgegebenen $(x|y)$ -Punkte verläuft. Wir berechnen die Werte nach dem Schema von Newton:

1	30				
		-3			
2	27		$\frac{1}{2}$		
		-2		0	
3	25		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{8}$
		-1		$-\frac{1}{2}$	
4	24		-1		
		-3			
5	21				

Achtung: die so erhaltenen Koeffizienten sind nur für das Polynom in der Form von Newton korrekt. Wir erhalten also das Polynom

$$p(x) = 30 - 3(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - \frac{1}{8}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Dies kann durch Ausmultiplizieren in die gewöhnliche Darstellung gebracht werden:

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{31}{8}x^2 + \frac{7}{4}x + 31.$$

In diesem Beispiel sieht man auch, dass das Newton-Schema besonders einfach zu handhaben ist, wenn die x -Werte immer den Abstand 1 haben.

Das Schema hat darüberhinaus die Eigenschaft, dass die Berechnung sehr leicht erweitert werden kann. Nehmen wir an, zu den $n+1$ Meßwerten x_i, y_i für $i = 0, \dots, n$ käme noch ein neuer Wert hinzu: x_{n+1}, y_{n+1} . Dann kann das neue Polynom unter Verwendung der bisherigen Berechnung verwendet werden. Es sei p das Polynom zu den $n+1$ ursprünglich gegebenen Meßwerten. Das Newton-Schema wird um eine Zeile verlängert und das neue Polynom ergibt sich einfach durch:

$$p_{neu} = p + y_{0,1,2,\dots,n+1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Die Interpolation wird auch dafür verwendet, um komplizierte Funktionen durch einfache Polynome anzunähern! Man kann zu einer komplizierten Funktion eine Liste von n Wertepaaren erstellen und dann zu diesen Wertepaaren das Interpolationspolynom berechnen. I.A. erhält man ein Polynom, das die Funktion sehr gut annähert. Das Polynom besitzt dann maximal den Grad $n-1$.

3.5.4 Vollständige Induktion

Wir hatten an mehreren Stellen schon Formeln behandelt, die wir nicht so ohne weiteres für alle natürlichen Zahlen beweisen konnten. Z.B. die Formel für die Division mit Rest durch einen Linearfaktor $x - x_0$ hatten wir nur für $n = 4$ bewiesen.

Aus der speziellen Struktur der natürlichen Zahlen ergibt sich eine elegante Möglichkeit, solche Formeln für beliebige n zu beweisen. Betrachten wir die beiden folgenden Eigenschaften von natürlichen Zahlen:

- a) 1 ist eine natürliche Zahl.
- b) Falls n eine natürliche Zahl ist, dann ist auch $n + 1$ eine natürliche Zahl.

Mit Hilfe dieser beiden Eigenschaften können wir jede natürliche Zahl erreichen. Wir können zum Beispiel die Zahl 7 erreichen bzw. beweisen, dass 7 eine natürliche Zahl ist: Wir gehen von der ersten Aussage, dass 1 eine natürliche Zahl ist, aus. Wir können also in der zweiten Aussage $n = 1$ setzen und schließen, dass $n + 1 = 1 + 1 = 2$ eine natürliche Zahl ist. Dann können wir aber $n = 2$ setzen und schließen, dass 3 eine natürliche Zahl ist, usw. So können wir also aus diesen beiden Aussagen für jede gegebene natürliche Zahl beweisen, dass sie eine solche ist.

Betrachten wir nun eine allgemeine Aussage $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Wir wollen zeigen, dass diese Aussage für alle natürlichen Zahlen n gültig ist. Dazu beweisen wir zwei Aussagen:

- a) $A(1)$ ist richtig (Induktionsanfang).
- b) $A(n) \implies A(n + 1)$ (Induktionsschluss).

Da wir nun aus diesen beiden Aussagen für jede natürliche Zahl n einen Beweis für $A(n)$ zusammenbauen können, ist damit die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen bewiesen.

3.5.4.1 Beispiel

Wir betrachten als Beispiel die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Wir schreiben die Summe mit Hilfe der Summenschreibweise. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen, verwenden wir die vollständige Induktion.

- a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Formel korrekt:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

b) Induktionsschluss: Wir gehen davon aus, dass die Formel für n gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

und müssen zeigen, dass daraus auch die Formel für $n+1$ folgt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dazu betrachten wir die linke Seite der letzten Formel:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{Das war unsere Voraussetzung!} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Noch einmal kurz zu unserem allgemeinen Prinzip: Wir haben damit die Formel für $n=1$ nachgewiesen. Allgemein haben wir gezeigt, dass die Formel für $n+1$ gültig ist, wenn sie für n gilt. Da sie aber für $n=1$ gilt, ist sie damit auch für $n+1=2$ korrekt. Da sie für $n=2$ korrekt ist, gilt sie somit für $n+1=3$ und so weiter.

3.5.4.2 Beispiel

Machen wir noch ein weiteres, ganz ähnliches Beispiel und betrachten die Summe der ersten n ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1).$$

Es gilt:

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2.$$

a) Induktionsanfang: Für $n=1$ ist die Formel korrekt:

$$\sum_{j=1}^1 (2j-1) = 1^2.$$

b) Induktionsschluss: Wir gehen davon aus, dass die Formel für n gilt:

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

und müssen zeigen, dass daraus auch die Formel für $n+1$ folgt:

$$\sum_{j=1}^{n+1} (2j-1) = (n+1)^2.$$

Dazu betrachten wir wieder die linke Seite der letzten Formel:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} (2j-1) &= \sum_{j=1}^n (2j-1) + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \quad \text{Das war wieder unsere Voraussetzung!} \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

3.5.4.3 Beispiel

Kehren wir zurück zu dem Thema unseres Kapitels, den Polynomen. An Stelle von Ausdrücken in einer Variablen können in Polynomen auch mehrere Variablen vorkommen:

$$5x^2 - 2xy + y^2.$$

Das wäre beispielsweise ein Polynom in zwei Variablen. Die Menge aller Polynome in den zwei Variablen x und y über den reellen Zahlen wird mit

$$\mathbb{R}[x, y]$$

bezeichnet.

Wir demonstrieren die Beweistechnik der vollständigen Induktion für folgende Behauptung: Es gilt in $\mathbb{R}[x, y]$ ganz allgemein folgende Teilbarkeitsbedingung:

$$(x-y) \mid (x^n - y^n)$$

Wir könnten zunächst versuchen, die Aussage zu beweisen, indem wir eine Division mit Rest durchführen. Aber dazu müssen wir uns für n festlegen. Wir zeigen also die Aussage erst einmal für $n = 4$:

$$\begin{array}{rcl}
& \begin{array}{r} x^4 \\ x^4 - x^3y \end{array} & -y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + 0 \\
- & \begin{array}{r} x^3y \\ x^3y - x^2y^2 \end{array} & \\
& \begin{array}{r} x^2y^2 \\ x^2y^2 - xy^3 \end{array} & \\
- & \begin{array}{r} xy^3 \\ xy^3 - y^4 \end{array} & \\
& 0 &
\end{array}$$

Wir sehen also für $n = 4$, dass der Rest 0 ist, das heißt das die Division mit Rest glatt aufgeht und somit $(x-y)$ ein Teiler von $x^4 - y^4$ ist. Man könnte versuchen so eine Division mit Rest allgemein für n aufzuschreiben und sich mit ... zu behelfen. Hier ist aber der Beweis per vollständiger Induktion eleganter und präziser:

Beweis: Für einen Beweis durch vollständige Induktion ist zunächst zu zeigen, dass die Behauptung für $n = 1$ gilt, das ist hier aber trivial:

$$(x-y)|(x^1 - y^1).$$

Dies wird auch als der Induktionsanfang bezeichnet.

Im Weiteren gehen wir jetzt davon aus, dass

$$(x-y)|(x^k - y^k)$$

für k gilt. Dies ist die sog. Induktionsvoraussetzung. Für $k = 1$ ist deren Gültigkeit schon gezeigt. Wir leiten daraus ab, dass dies auch $k + 1$ gilt. Damit folgt aber doch auf jeden Fall, dass die Aussage für $k = 2$ gilt. Da sie damit aber für $k = 2$ schon bewiesen ist, folgt, dass sie für $k = 3$ gilt...

Also aus der Induktionsvoraussetzung müssen wir ableiten, dass

$$(x-y)|(x^{k+1} - y^{k+1})$$

gültig ist. Dazu untersuchen wir die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
(x^{k+1} - y^{k+1}) &= x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1} \\
&= x^k(x-y) + y(x^k - y^k).
\end{aligned}$$

Da aber $(x-y)$ die beiden Terme auf der rechten Seite teilt, muss es auch Teiler von $(x^{k+1} - y^{k+1})$ sein. \square

3.5.4.4 Beispiel: Fibonacci-Folge

Wir hatten im Abschnitt 1.4 die Fibonacci-Folge eingeführt. Eine wichtige Eigenschaft der Fibonacci-Folge ist folgende Formel:

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \text{ für } n \geq 1.$$

Für den Induktionsanfang müssen wir die Behauptung für $n = 1$ prüfen:

$$f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = (-1)^1.$$

Dies ist offensichtlich richtig. Dann müssen wir zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass die Aussage

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \text{ für } n \geq 1$$

für n richtig ist, sie auch für $n + 1$ gültig ist:

$$\begin{aligned} f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n) \cdot f_n - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot f_n - f_{n+1}^2 + f_{n+1} \cdot f_{n-1} - (-1)^n \text{ Einsetzen der Ind.Vor.} \\ &= f_{n+1}(f_n - f_{n+1} + f_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen!

Kapitel 4

Kombinatorik

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie oft bestimmte Kombinationsmöglichkeiten auftreten. Betrachten wir als Beispiel eine Computeranwendung, die aus 15 Rechnern aufgebaut ist. Jeder der Rechner hat dabei eine verschiedene Aufgabe. Es werden dabei zwei verschiedene Typen von Rechnern eingesetzt, 8 Rechner vom Typ 1 und 7 Rechner vom Typ 2. Zur Beschleunigung des Gesamtsystems sollen 3 Speichererweiterungen für die Rechner vom Typ 1 und 2 Speichererweiterungen für die Rechner vom Typ 2 zum Einsatz kommen. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, diese Speichererweiterungen einzusetzen? Solche kombinatorischen Fragestellungen werden im Folgenden betrachtet. Ein Typ von Kombinationsmöglichkeit haben wir schon bei den Funktionen kennen gelernt, die Permutation. Sie taucht hier sozusagen als einfachster Fall wieder auf. Wieder unterscheiden insgesamt:

Permutationen

Variationen

Kombinationen

Zusätzlich kommt noch hinzu, dass jede dieser Möglichkeiten in zwei verschiedenen Varianten auftreten kann, nämlich mit Wiederholung und ohne Wiederholung.

4.1 Permutation

Betrachten wir zunächst die Permutation ohne Wiederholungen. Solche Permutationen hatten wir ja schon als Umordnung von n Elementen mit $n \in \mathbb{N}$ kennengelernt. Wir bezeichnen die Anzahl der möglichen Umordnungen von n verschiedenen Elementen mit

$$P_n.$$

Betrachten wir zum Beispiel die Umordnung von drei Elementen $\{A, B, C\}$, so ergibt sich in lexikografischer Reihenfolge:

$$\begin{array}{lll} ABC & BAC & CAB \\ ACB & BCA & CBA \end{array} \quad P_3 = 6.$$

Gehen wir davon über zu einer Permutation von vier Elementen $\{A, B, C, D\}$, so erhalten wir:

$$\begin{array}{llll} ABCD & BACD & CABD & DABC \\ ABDC & BADC & CADB & DACB \\ ACBD & BCAD & CBAD & DBAC \\ ACDB & BCDA & CBD A & DBCA \\ ADBC & BDAC & CDAB & DCAB \\ ADCB & BDCA & CDBA & DCBA \end{array} \quad P_4 = 24.$$

Jeder Buchstabe kann als erster Buchstabe auftreten und danach können die 6 möglichen Permutationen der übrigen 3 Elemente vorkommen. Es gilt also $P_4 = 4 \cdot P_3$. Dies können wir verallgemeinern zu

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Damit ergibt sich für Permutationen die bekannte Formel:

$$P_n = n!,$$

wobei hier als vereinfachende Schreibweise die Fakultätsfunktion

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

verwendet wurde. Auch wenn das für die Betrachtung her noch keine Rolle spielt, halten wir fest, dass für die Fakultätsfunktion der 0 gilt:

$$0! = 1.$$

Neben diesem einfachen Fall von Permutationen ohne Wiederholungen betrachten wir jetzt noch den Fall von Permutationen mit Wiederholungen. Wir denken uns 5 Kugeln in einer Reihe liegend. Davon sind drei Kugeln blau und zwei sind rot. Hier treten also Wiederholungen auf, während wir bei P_n immer individuell verschiedene Objekte betrachtet haben. Für die Behandlung von Wiederholungen gehen wir zu dem Symbol P_w über. Da wir hier drei und zwei gleichartige Objekte, also Wiederholungen haben, beschreiben wir die

Anzahl Fälle, die auftreten können, mit $Pw_{5(3,2)}$. In lexikografischer Reihenfolge ergeben sich folgende Fälle:

$bbbr$
 $bbrbr$
 $bbrrb$
 $brbbr$
 $brbrb$
 $brrbb$
 $rbbbr$
 $rbbrb$
 $rbrbb$
 $rrbbb$

$$Pw_{5(3,2)} = 10.$$

Um eine Formel für Permutationen mit Wiederholungen herzuleiten, gehen wir von der Formel ohne Wiederholungen aus. In diesem speziellen Beispiel mit 5 Kugeln hätten wir ohne Wiederholungen $P_5 = 120$ Möglichkeiten. Dadurch, dass wir zwei nicht unterschiedene, rote Kugeln dabei haben, fallen jeweils $2! = 2$ viele Vertauschungen der roten Kugeln zusammen. Bei zwei roten und im übrigen lauter verschiedenen Kugeln hätten wir also

$$\frac{120}{2!}$$

Möglichkeiten. Da wir aber die übrigen drei blauen Kugeln auch nicht unterscheiden, fallen nochmals $3! = 6$ verschiedene Permutationen zu einer zusammen. Insgesamt erhalten wir:

$$\frac{\frac{120}{2!}}{3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Als allgemeine Formel erhalten wir nach der gleichen Überlegung:

$$Pw_{n(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

4.1.0.1 Beispiel

Wir betrachten die Menge aller Wörter, die aus den 10 Buchstaben

MATHEMATIK

gebildet werden können. Dabei verstehen wir unter Wort nicht ein Wort der deutschen Sprache, sondern im Sinne der theoretischen Informatik eine Folge von Buchstaben. Ferner betrachten wir nur Wörter, die aus allen zehn Buchstaben bestehen. Wieviele verschiedene Wörter können gebildet werden?

$$Pw_{10(2,2,2,1,1,1,1)} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453.600.$$

4.2 Variation (oder Anordnung)

Eine Variation stellt eine Auswahl mit Berücksichtigung der Reihenfolge dar. Wir illustrieren das wieder mit einem Beispiel.

4.2.0.1 Beispiel

Bei einem sportlichen Wettkampf sind 5 Mannschaften $\{A, B, C, D, E\}$ für die entscheidende Runde qualifiziert. Eine Mannschaft davon wird Meister und eine wird Vizemeister. Man bezeichnet dies als Variation oder Anordnung von fünf Elementen zur zweiten Klasse und die Anzahl Möglichkeiten mit $V_5^{(2)}$.

$$\begin{array}{ccccc} AB & BA & CA & DA & EA \\ AC & BC & CB & DB & EB \\ AD & BD & CD & DC & EC \\ AE & BE & CE & DE & ED \end{array} \quad V_5^{(2)} = 20.$$

Wesentlich ist hier zu beachten, dass die Fälle AB und BA unterschieden werden. Es ist ja ein Unterschied, ob A Meister und B Vizemeister wird, oder umgekehrt.

Betrachten wir die allgemeine Situation. Für die Variationen zur ersten Klasse gilt:

$$V_n^{(1)} = n.$$

Variieren wir nun das k auch noch, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} V_n^{(1)} &= n \\ V_n^{(2)} &= n \cdot (n-1) \\ V_n^{(3)} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \\ &\vdots \\ V_n^{(k)} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(k-1)) \\ &\vdots \\ V_n^{(n)} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1 = n! \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir bei der Variation von n Elementen zur n -ten Klasse wieder bei einer Permutation angekommen sind. Das ist aber auch verständlich, wenn Sie sich bei 18 Bundesliga-Vereinen für alle 18 Tabellenplätze interessieren, handelt es sich um eine komplette Permutation. Die allgemeine Formel können wir auch schreiben als:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Was wäre jetzt eine Variation mit Wiederholung? Wenn eine Mannschaft den ersten und den zweiten Platz belegen kann! Dies wäre ja der Fall, wenn es sich um Einzeldisziplinen

handelt, wie im Tischtennis z.B. Es ist ganz wesentlich, diese Variation mit Wiederholung von dem Fall ohne Wiederholung unterscheiden zu können. Die Berechnung dieses Falles ist verhältnismäßig einfach:

$$Vw_n^{(k)} = n^k.$$

4.2.0.2 Beispiel

Acht Tischtennis-Mannschaften treten in fünf Wettbewerben (Einzel, Doppel etc.) gegeneinander an. Wieviel Möglichkeiten gibt es, wenn wir hier nur den ersten Platz für jeden Wettbewerb berücksichtigen? Es gibt

$$Vw_8^{(5)} = 8^5 = 32.768$$

Möglichkeiten, da jede Mannschaft jeden Wettbewerb gewinnen kann.

Ein anderes Beispiel für eine Variation mit Wiederholung wäre der Fall, dass wir 5 verschiedene Gegenstände anstreichen wollen. Es stehen 3 verschiedene Farben zur Verfügung. Die Anzahl Möglichkeiten beträgt also:

$$Vw_3^{(5)} = 3^5 = 243.$$

Wie wir an diesem Beispiel sehen können, kann im Fall von Variationen mit Wiederholung k größer als n werden.

4.3 Kombination

Wir kommen jetzt zum letzten und klassischen Fall der Kombinatorik, den Kombinationen. Wodurch unterscheiden sich Kombinationen von Variationen? Bei den Variationen hatten wir bei der Auswahl der Mannschaften noch eine Reihenfolge berücksichtigt. Es spielte eine Rolle, welche Mannschaft Meister und welche Vizemeister wurde. Es wurden also unter fünf Mannschaften zwei ausgewählt, aber unter Berücksichtigung einer Reihenfolge.

4.3.0.1 Beispiel

Ein typisches Beispiel für eine Kombination wäre jetzt, wenn fünf Personen $\{A, B, C, D, E\}$ zwei Personen bestimmen, die eine bestimmte Aufgabe erfüllen sollen. Hier käme es jetzt nicht auf die Reihenfolge der abgeordneten Personen an. Es gäbe folgende Möglichkeiten:

$$\begin{array}{llll} AB & BC & CD & DE \\ AC & BD & CE & \\ AD & BE & & \\ AE & & & \end{array} \quad K_5^{(2)} = 10.$$

Wir bezeichnen die Anzahl Kombinationen von n Elementen zur Klasse k mit

$$K_n^{(k)}.$$

Wir hatten für Variationen festgestellt, dass $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$. Da wir bei Kombinationen nicht die Reihenfolge der k ausgewählten Elemente berücksichtigen, dividieren wir durch die Anzahl der Permutationen von k Elementen:

$$K_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Das ergibt in unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} K_5^{(2)} &= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Für Ausdrücke der Art $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ gibt es ein mathematisches Symbol:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

das als Binomialkoeffizient bezeichnet wird. Auf den Namen werden wir weiter unten noch genauer eingehen. Es gilt also allgemein für die Anzahl an Kombinationen von n Elementen zur k -ten Klasse:

$$K_n^{(k)} = \binom{n}{k}.$$

4.3.1 Kombination mit Wiederholung

Kommen wir damit zum letzten und vielleicht schwierigsten Fall, den Kombinationen mit Wiederholungen. Betrachten wir zunächst ein

4.3.1.1 Beispiel

Nehmen wir an, jemand möchte drei Tafeln Schokolade verschenken. In dem Süßwarenladen stehen 7 verschiedene Sorten zur Auswahl zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten gibt es? Hierbei kommt es nicht auf die Reihenfolge an, da das Geschenk einfach aus drei Tafeln besteht. Ferner ist die Auswahl mit Wiederholung, da man sich auch dafür entscheiden könnte, alle drei Tafeln von einer favorisierten Sorte zu wählen.

Die Anzahl der Möglichkeiten aus n verschiedenen Sorten k viele ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und mit Wiederholung auszuwählen bezeichnen wir mit:

$$Kw_n^{(k)}.$$

Betrachten wir zunächst die Kombination mit Wiederholung von fünf Elementen zur Klasse 1, 2 und 3:

Elemente	Klasse	Komb. mit Wiederholung					Anzahl
n=5	1	1	2	3	4	5	$Kw_5^{(1)} = 5$
	2	11	22	33	44	55	
		12	23	34	45		
		13	24	35			
		14	25				
		15					$Kw_5^{(2)} = 15$
	3	111	222	333	444	555	
		112	223	334	445		
		113	224	335	455		
		114	225	344			
		115	233	345			
		122	234	355			
		123	235				
		124	244				
		125	245				
		133	255				
		134					
		135					
		144					
		145					
		155					$Kw_5^{(3)} = 35$

Wir vergleichen diese Aufstellung mit einer solchen für Kombinationen ohne Wiederholungen. Dabei variieren wir aber die Anzahl Elemente und verwenden für die 1. Klasse auch 5 Elemente, für die 2.Klasse 6 Elemente und für die 3.Klasse 7 Elemente:

Elemente	Klasse	Komb. ohne Wiederholung					Anzahl
n=5	1	1	2	3	4	5	$K_5^{(1)} = 5$
n=6	2	12	23	34	45	56	$K_6^{(2)} = 15$
		13	24	35	46		
		14	25	36			
		15	26				
		16					
n=7	3	123	234	345	456	567	$K_7^{(3)} = 35$
		124	235	346	457		
		125	236	347	467		
		126	237	356			
		127	245	357			
		134	246	367			
		135	247				
		136	256				
		137	257				
		145	267				
		146					
		147					
		156					
		157					
		167					

Für die drei betrachteten Fälle haben wir also folgende Übereinstimmung:

$$\begin{aligned}
 Kw_5^{(1)} &= K_5^{(1)} = 5 \\
 Kw_5^{(2)} &= K_6^{(2)} = 15 \\
 Kw_5^{(3)} &= K_7^{(3)} = 35.
 \end{aligned}$$

Aber wie können wir das im Allgemeinen in einen Zusammenhang bringen? Wir wollen also allgemein zeigen, dass $Kw_n^{(k)} = K_{n+k-1}^{(k)}$ und somit

$$Kw_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

gilt. Bevor wir den allgemeinen Beweis führen, wenden wir diese Formel auf das oben angeführte Beispiel an. Unter 7 Sorten Schokoladen sollten drei Tafeln mit Wiederholung ausgewählt werden. Dafür ergeben sich

$$Kw_7^{(3)} = \binom{7+3-1}{3} = 84$$

Möglichkeiten.

Beweis: Wir führen für beide Kombinationen eine Art Standardmodell ein. Betrachten wir zunächst Kombinationen von n Elementen $A = \{1, 2, \dots, n\}$ zur k -ten Klasse ohne Wiederholung, d.h. eine k -elementige Teilmenge der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in der Form

$$(b_1, b_2, \dots, b_k)$$

Da die Elemente verschieden sein müssen und es auf die Anordnung gerade eben nicht ankommt, können wir sie so durchnummerieren, dass

$$b_1 < b_2 < \dots < b_k$$

gilt. Umgekehrt stellt aber auch jedes solche k -Tupel mit dieser Bedingung genau eine Kombination dar! Damit gilt: Jede Kombination von n Elementen zur k -ten Klasse ohne Wiederholung entspricht umkehrbar eindeutig einem streng monoton ansteigenden k -Tupel (b_1, b_2, \dots, b_k) von Zahlen aus $\{1, 2, \dots, n\}$ mit

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n.$$

Betrachten wir nun Kombinationen mit Wiederholung, das heißt, wiederum Zusammenfassungen von k Elementen (b_1, b_2, \dots, b_k) aus $\{1, 2, \dots, n\}$, wobei diesmal

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n$$

gilt, da auch Wiederholungen zugelassen sind. Auch hier sind die Elemente der Größe nach sortiert, aber sie können auch (alle) gleich groß sein. Jedes solche k -Tupel stellt genau eine mögliche Kombination von n Elementen zur k -ten Klasse mit Wiederholung dar.

Jetzt bringen wir die k -Tupel, die die Kombinationen von n Elementen zur k -ten Klasse mit Wiederholung darstellen in eine eindeutige Zuordnung zu den k -Tupeln, die Kombinationen von $n + k - 1$ Elementen ohne Wiederholung zur k -ten Klasse darstellen. Eine solche eindeutige Zuordnung wird zeigen, dass es genau gleich viele Möglichkeiten gibt. Gehen wir also zunächst von einem k -Tupel (b_1, b_2, \dots, b_k) mit

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n$$

aus. Durch die Vorschrift

$$c_i := b_i + i - 1 \text{ für } 1 \leq i \leq k$$

wird daraus ein k Tupel (c_1, c_2, \dots, c_k) mit

$$1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq n + k - 1.$$

Warum gilt das? Die Vorschrift für die c_i bedeutet zunächst:

$$c_1 := b_1, c_2 := b_2 + 1, c_3 := b_3 + 2, \dots$$

Da nach Voraussetzung

$$b_i \leq b_{i+1}$$

gilt, folgt immer

$$c_i = b_i + i - 1 < b_{i+1} + i = c_{i+1}.$$

Ferner gilt für den kleinsten Wert:

$$1 \leq c_1$$

und für den größten Wert gilt wegen $b_k \leq n$:

$$c_k = b_k + k - 1 \leq n + k - 1.$$

Damit sind die Bedingungen

$$1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq n + k - 1$$

alle bewiesen.

Umgekehrt läßt sich aber genauso jedem solchen k -Tupel (c_1, c_2, \dots, c_k) mit

$$1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq n + k - 1$$

durch

$$b_i := c_i - (i - 1) \text{ für alle } 1 \leq i \leq k$$

eindeutig ein k -Tupel (b_1, b_2, \dots, b_k) mit

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n$$

zuordnen. Dass die Bedingungen immer erfüllt sind, läßt sich leicht zeigen. Damit haben wir aber insgesamt gezeigt, dass

$$Kw_n^{(k)} = K_{n+k-1}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

gilt. □

Bei der in der Einleitung erwähnten Aufgabenstellung handelt es sich um zwei Kombinationen. Wir hatten acht Rechner vom Typ 1 und 7 Rechner vom Typ 2:

$$R_1^1, R_2^1, \dots, R_8^1, R_1^2, R_2^2, \dots, R_7^2.$$

Aus der Menge der 8 Rechner vom Typ 1 werden 3 ausgewählt, dabei gibt es also

$$\binom{8}{3} = 56$$

Möglichkeiten. Analog werden unter den sieben anderen Rechnern 2 ausgewählt, also

$$\binom{7}{2} = 21$$

Möglichkeiten. Da alle Möglichkeiten bzgl. der Rechner vom Typ 1 mit denen vom Typ 2 kombiniert werden können, erhalten wir insgesamt:

$$\binom{8}{3} \binom{7}{2} = 56 \cdot 21 = 1176.$$

4.4 Binomialkoeffizienten

Im letzten Abschnitt über die Anzahl Kombinationen hatten wir die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

eingeführt. Dieses Symbol ist tiefsinniger gewählt, als es heute den meisten Mathematikern bewußt ist. Man könnte dafür *k unter n* sagen, was ja genau dem kombinatorischen Tatbestand, *k* Elemente unter *n* Elementen auszuwählen entspricht. Leider hat sich aber die Sprechweise *n über k* eingebürgert.

Für den Spezialfall $k = 0$ gilt:

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner gilt die Identität:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Wir haben die gleich Anzahl Möglichkeiten, wenn wir *k* Elemente unter *n* auswählen, wie wenn wir *n - k* Elemente auswählen. Ferner gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Ein bischen komplizierter, aber sehr nützlich ist die Identität:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= \frac{n!(k+1)}{k!(n-k)!(k+1)} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(1+n)}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich leicht der Aufbau des sogenannten Pascal'schen Dreiecks einsehen:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
& & & & & \binom{0}{0} = 1 & & & & & & & \\
& & & & \binom{1}{0} = 1 & & \binom{1}{1} = 1 & & & & & & \\
& & \binom{2}{0} = 1 & & \binom{2}{1} = 2 & & \binom{2}{2} = 1 & & & & & & \\
& \binom{3}{0} = 1 & & \binom{3}{1} = 3 & & \binom{3}{2} = 3 & & \binom{3}{3} = 1 & & & & & \\
\binom{4}{0} = 1 & & \binom{4}{1} = 4 & & \binom{4}{2} = 6 & & \binom{4}{3} = 4 & & \binom{4}{4} = 1 & & & &
\end{array}$$

In den äußeren Diagonalen stehen nur Einsen und alle anderen Werte lassen sich als Summe der beiden über der jeweiligen Stelle stehenden Zahlen berechnen. Das Pascalsche Dreieck ist geeignet, um effizient alle Binomialkoeffizienten der Form $\binom{n}{k}$ für $k = 0, \dots, n$ zu berechnen. Falls nur ein einzelner Wert benötigt wird, ist folgende rekursive Berechnung effizienter:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}.$$

Warum heißen diese Werte Binomialkoeffizienten? Dass sie nach einem italienischen Mathematiker Marcello Binomi benannt sind, ist eher ein Gerücht. Richtig ist hingegen, dass diese Koeffizienten beim Potenzieren von Ausdrücken der Form $(a+b)$ (also Ausdrücken mit 2 Nomi) auftauchen. Betrachten wir zunächst ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\
&= ?.
\end{aligned}$$

Beim Ausmultiplizieren treten alle Wörter bestehend aus vier Elementen genau einmal auf:

$aaaa$ $abaa$ $baaa$ $bbaa$
 $aaab$ $abab$ $baab$ $bbab$
 $aaba$ $abba$ $baba$ $bbba$
 $aabb$ $abbb$ $babb$ $bbbb$

Wenn wir nun zählen, wie häufig ein Ausdruck der Form $a^i b^{4-i}$ auftritt, so entspricht das genau der Häufigkeit, auf wieviele Arten eine i -elementige Teilmenge aus einer 4-elementigen Menge gewählt werden kann und dies ist ja genau der Binomialkoeffizient:

$$\binom{4}{i}.$$

Die Koeffizienten von $a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4$ sind genau die Binomialkoeffizienten

$$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}.$$

Also gilt:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Betrachten wir nun allgemein $(a+b)^n$, so tritt der Ausdruck $a^{n-k}b^k$ genau $K_n^{(k)} = \binom{n}{k}$ mal auf. Dies führt auf die Formel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Ein interessanter Spezialfall der Formel ergibt sich, wenn wir a und b gleich 1 setzen:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Bei den Permutationen hatten wir den Fall mit Wiederholung betrachtet

$$Pw_{n(k_1, k_2, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}.$$

Hierbei kam es also auf die Reihenfolge gleicher Elemente nicht an. Für den Spezialfall $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ heißen die Koeffizienten

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

Polynomialkoeffizienten und werden auch als

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}$$

geschrieben. Es handelt sich hierbei nicht wirklich um einen Spezialfall, da die Folge k_1, k_2, \dots, k_r immer um so viele Einsen verlängert werden kann, bis die Bedingung $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ erfüllt ist.

Eine Anwendung dieser Koeffizienten liefert die folgende Formel: Für paarweise verschiedene, reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_r gilt:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_r = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}.$$

Kapitel 5

Vektorräume

Neben den algebraischen Begriffen Gruppe, Ring und Körper werden wir jetzt noch eine weitere Struktur, den sogenannten Vektorraum einführen. Wir orientieren uns dabei an dem sehr anschaulichen Beispiel der Vektoren in einer Ebene. Einen Punkt P in der Ebene können wir durch einen Pfeil vom Ursprung des Koordinatensystems zu dem Punkt P darstellen. Einen solchen Pfeil nennen wir Ortsvektor. Jeder Punkt P in der Ebene definiert einen Ortsvektor. Aber auch jeder Ortsvektor in der Ebene definiert genau einen Punkt.

Solche Ortsvektoren lassen sich

- addieren und
- mit einer reellen Zahl multiplizieren.

Dies wird in Abbildung 5.1 dargestellt.

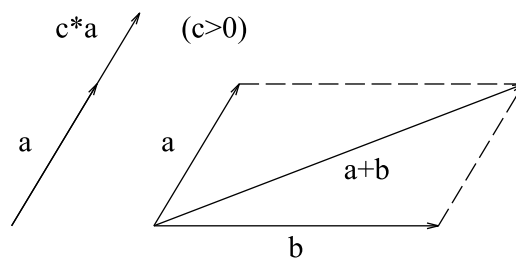


Abbildung 5.1: Rechnen mit Vektoren

Wir stellen im Folgenden die Vektoren mit

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \dots$$

dar und fassen die Gesamtheit aller Vektoren in einer Menge V zusammen. Offensichtlich ergibt die Addition zweier Vektoren wieder einen Vektor. Ferner liefert der Nullvektor $\vec{0}$, also der Vektor mit Länge 0, ein neutrales Element bzgl. der Vektoraddition. Außerdem ist $-\vec{a}$ wegen $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$ der inverse Vektor zu \vec{a} . Das Assoziativgesetz gilt auch, wie Abbildung 5.2 zeigt.

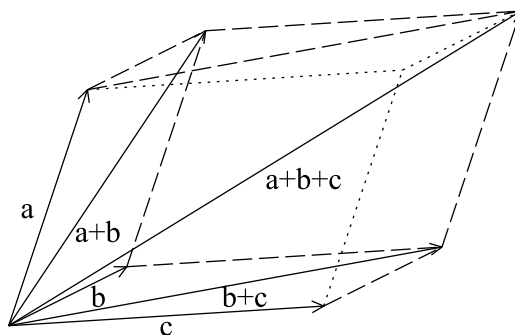


Abbildung 5.2: Assoziativgesetz der Vektoraddition

Daher bildet die Menge der Vektoren V zusammen mit der Addition $(V, +)$ eine kommutative Gruppe. Wir haben neben dieser Addition noch die Multiplikation mit einer reellen Zahl. Diese Multiplikation ist verträglich mit der Addition in dem Sinn, dass für alle Vektoren \vec{a} und \vec{b} und jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}.$$

Auch dies kann leicht für Ortsvektoren veranschaulicht werden.

5.1 Definition eines reellen Vektorraumes

Mit diesem konkreten Beispiel von Ortsvektoren haben wir einen konkreten Vektorraum kennengelernt. Da die gleiche algebraische Struktur auch bei völlig anderen Beispielen auftritt, verallgemeinert man den Begriff des Vektorraumes zu folgendem algebraischen Konzept: Als V kann eine beliebige Menge zu Grunde gelegt werden. Auf der Menge V gibt es eine Addition mit:

$(V, +)$ bildet eine kommutative Gruppe.

Außerdem gibt es noch eine Multiplikation eines beliebigen Elementes $c \in \mathbb{R}$ mit Elementen aus V :

$$c \cdot \vec{a} \in V.$$

Die Elemente aus V werden Vektoren, die Elemente aus dem Körper \mathbb{R} werden Skalare genannt. Für die beiden Verknüpfungen gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

- $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$
- $(c + d) \cdot \vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$
- $(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Dabei sind $\vec{a}, \vec{b} \in V$ beliebige Vektoren und $c, d \in \mathbb{R}$ beliebige Skalare. Die 1 ist das neutrale Element der Multiplikation in \mathbb{R} . Wir notieren einen Vektorraum als

$$(V, \mathbb{R}, +, \cdot),$$

oder auch kurz als V , falls die Operationen und der Körper der Skalaren aus dem Kontext ersichtlich sind.

5.1.1 Vektorraum

Wir betrachten hier in der Vorlesung nur die oben definierten reellen Vektorräume. Bei einem allgemeinen Vektorraum dürfen die Skalare aus einem beliebigen Körper $(K, +, \cdot)$ gewählt werden. Alles andere bleibt gleich.

5.1.1.1 Beispiel

Als Grundmenge V betrachten wir

$$V := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\},$$

also die Menge der n -Tupel über den reellen Zahlen. (Wir könnten allgemein auch einen allgemeinen Körper K zu Grunde legen.) Die Elemente werden üblicherweise als Spaltenvektoren geschrieben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Zwei solche n -Tupel sind gleich, falls alle ihre Komponenten a_i ($1 \leq i \leq n$) identisch sind. Auf diesen Vektoren lässt sich eine Addition und eine Multiplikation mit einem Skalar c definieren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad c\vec{a} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}$$

Das neutrale Element der Addition ist der Nullvektor:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Menge der n -Tupel über \mathbb{R} erfüllt mit diesen beiden Verknüpfungen alle Eigenschaften eines Vektorraumes, wie man leicht nachprüft. Er wird auch mit \mathbb{R}^n oder ausführlicher mit $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ bezeichnet.

5.1.1.2 Beispiel

Das folgende Beispiel wird in Teildisziplinen der Mathematik sehr ausführlich behandelt. Wir werden uns mit diesem Beispiel nur sehr wenig beschäftigen. Trotzdem soll es hier angeführt werden, um zu illustrieren, dass Vektorräume auch völlig andere Gestalt annehmen können. Wir betrachten die Menge der Funktionen, die auf einem Intervall $[a, b]$ definiert sind. Seien f und g solche Funktionen:

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann kann auf dieser Menge eine Addition und eine Multiplikation mit $c \in \mathbb{R}$ definiert werden:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) & a \leq x \leq b \\ (cf)(x) &= cf(x) & a \leq x \leq b \\ 0(x) &= 0 & a \leq x \leq b \end{aligned}$$

5.1.2 Linearkombination

Im Folgenden wenden wir uns wieder einer allgemeinen Konstruktion für Vektoren zu. Wir gehen aus von:

$$\begin{aligned} \text{Vektoren} &: \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \text{ aus einem Vektorraum } (V, \mathbb{R}, +, \cdot) \\ \text{Skalare} &: x_1, x_2, \dots, x_k \text{ aus } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann lässt sich folgende Summe bilden:

$$\vec{b} := x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^k x_i \vec{a}_i.$$

Wir nennen diese Summe eine Linearkombination.

5.1.3 Lineare Hülle oder Unterraum

Wenn wir die endliche Menge der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ fixieren, dann bildet die Menge aller Linearkombinationen wieder einen Vektorraum. Dies ist zu beweisen:

Die Verknüpfungen der Linearkombinationen ergeben sich aus den Vektorraumoperationen. Es ist also insbesondere zu zeigen, dass die Summe von zwei Linearkombinationen wieder eine solche Linearkombination ist. Ferner ist zu zeigen, dass eine Linearkombination multipliziert mit einer reellen Zahl wieder eine solche Linearkombination ergibt. Darüber hinaus muss man sich überlegen, dass das neutrale Element eine Linearkombination ist und dass sich alle inversen Elemente als Linearkombination darstellen lassen. Wir betrachten zwei allgemeine Linearkombinationen zu der fixierten Menge von Vektoren:

$$\vec{b}_1 = \sum_{i=1}^k x_i \vec{a}_i, \quad \vec{b}_2 = \sum_{i=1}^k y_i \vec{a}_i.$$

Dann ergibt sich für die Summe:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 + \vec{b}_2 &= \sum_{i=1}^k x_i \vec{a}_i + \sum_{i=1}^k y_i \vec{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i \vec{a}_i + y_i \vec{a}_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i + y_i) \vec{a}_i. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich die Summe wieder als Linearkombination in den $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ darstellen lässt. Eine analoge Rechnung ergibt für das Multiplizieren mit einer reellen Zahl:

$$c \cdot \vec{b}_1 = \sum_{i=1}^k (cx_i) \vec{a}_i$$

Es ist klar, dass für $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ die Linearkombination der Nullvektor ist. Also ist das neutrale Element mit dabei. Ferner ist für \vec{b} wie oben definiert der Vektor

$$-x_1 \vec{a}_1 - x_2 \vec{a}_2 - \cdots - x_k \vec{a}_k$$

das inverse Element zu diesem \vec{b} .

Die beiden Verknüpfungen erfüllen auch in der Menge aller Linearkombinationen alle Axiome eines Vektorraumes. Also bildet die Menge der Linearkombinationen selbst wieder einen Vektorraum, der auch **Unterraum** oder **lineare Hülle** (von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$) genannt wird. Diese Art von Vektorraum wird recht häufig verwendet. Der Vektorraum der Linearkombinationen V heißt auch der von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ erzeugte oder aufgespannte Vektorraum und wir schreiben:

$$V = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k].$$

Damit bedeutet $\vec{b} \in [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$, dass \vec{b} eine Linearkombination der \vec{a}_1 bis \vec{a}_k ist.

5.1.3.1 Beispiel

Wir betrachten folgende drei Vektoren aus dem \mathbb{R}^5 :

$$\vec{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die Menge aller Linearkombinationen:

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \{x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Menge bildet wieder einen Vektorraum! In diesem Fall einen dreidimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^5 .

5.1.3.2 Beispiel

Wir betrachten im dreidimensionalen Raum zwei Ortsvektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 , beide $\neq \vec{0}$, mit zwei verschiedenen Richtungen. Die beiden Vektoren liegen immer in einer Ebene. Ein Vektor $\vec{b} \in [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ ist eine Linearkombination

$$\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2.$$

Damit liegt \vec{b} in der von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 aufgespannten Ebene. Umgekehrt läßt sich auch jeder Punkt der Ebene (eindeutig) als Linearkombination von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 darstellen. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ ist also genau die von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 aufgespannte Ebene.

5.1.3.3 Beispiel

Analog dem vorigen Beispiel können wir auch drei Vektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 und \vec{a}_3 betrachten, die ungleich dem Nullvektor sind und nicht in einer Ebene liegen. Sie spannen den ganzen Anschauungsraum auf und jeder Punkt des Raumes kann als Linearkombination

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{a}_i$$

dargestellt werden.

5.1.3.4 Beispiel

Für einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ liefert $[\vec{a}]$ genau die Ursprungsgerade in Richtung \vec{a} .

5.2 Lineare Unabhängigkeit

5.2.0.1 Beispiel

Wir betrachten noch einmal das Erzeugnis von zwei Vektoren

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2].$$

Wir betrachten verschiedene Sonderfälle:

- \vec{a}_1 und \vec{a}_2 haben die gleiche Richtung, z.B.

$$\vec{a}_2 = -2\vec{a}_1.$$

Hierbei bekommen wir die von \vec{a}_1 bzw. \vec{a}_2 aufgespannte Gerade und die Darstellung eines Punktes auf dieser Gerade ist **nicht** mehr eindeutig:

$$\vec{b} = 2 \cdot \vec{a}_1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a}_2\right) = -\vec{a}_2 = 1\vec{a}_1 + \left(-\frac{1}{2}\vec{a}_2\right).$$

In diesem Fall gilt insbesondere als charakteristische Eigenschaft:

$$2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{0}$$

- Es gelte $\vec{a}_1 = \vec{0}$ und $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$. Dann erhalten wir die von \vec{a}_2 aufgespannte Gerade und es gilt hierbei als charakteristische Eigenschaft:

$$5\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 = \vec{0}.$$

Diese beiden Fälle faßt man in folgender Definition einheitlich zusammen:

5.2.1 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ heißen **linear abhängig**, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination

$$\vec{0} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k$$

dieser Vektoren darstellen läßt, ohne dass alle Skalare x_1, x_2, \dots, x_k gleich Null sind.

Diese Definition ist sogar für einen Vektor anwendbar. Dieser heißt linear abhängig, falls er selbst der Nullvektor ist.

5.2.1.1 Beispiel

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} -3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt, dass diese drei Vektoren linear abhängig sind. Aus einer solchen Gleichung ergibt sich, dass **mindestens** einer der drei Vektoren als Linearkombination der übrigen dargestellt werden kann, denn es dürfen nicht alle Koeffizienten gleich null sein. Da hier alle Koeffizienten ungleich null sind, lassen sich alle drei Vektoren mit den übrigen zwei darstellen:

$$\vec{a}_1 = \frac{5}{3}\vec{a}_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\vec{a}_3$$

$$\vec{a}_2 = \frac{3}{5}\vec{a}_1 + \left(\frac{1}{5}\right)\vec{a}_3$$

$$\vec{a}_3 = (-3)\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2$$

Es gilt allgemein: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sind genau dann linear abhängig, wenn mindestens einer dieser Vektoren Linearkombination der übrigen ist.

Beweis:

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ linear abhängig

$$\Rightarrow x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k = \vec{0} \text{ mit } x_i \neq 0 \text{ für mindestens ein } i$$

$$\Rightarrow \vec{a}_i = \left(-\frac{x_1}{x_i}\right) \vec{a}_1 + \dots + \left(-\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) \vec{a}_{i-1} + \left(-\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \vec{a}_{i+1} + \dots + \left(-\frac{x_k}{x_i}\right) \vec{a}_k,$$

Sei nun umgekehrt der Vektor \vec{a}_i als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar:

$$\begin{aligned}\vec{a}_i &= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_{i-1}\vec{a}_{i-1} + x_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + x_k\vec{a}_k \\ \Rightarrow x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_{i-1}\vec{a}_{i-1} + (-1)\vec{a}_i + x_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + x_k\vec{a}_k &= \vec{0},\end{aligned}$$

und da zumindest der Faktor von \vec{a}_i ungleich 0 ist, sind die Vektoren linear abhängig. \square

5.2.2 Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

stets

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$$

folgt.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ linear unabhängige Vektoren. Sei \vec{b} eine Linearkombination:

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_k\vec{a}_k.$$

Die Skalare x_1, x_2, \dots, x_k heißen Koordinaten von \vec{b} und sind eindeutig bestimmt! Genauer spricht man auch von den Koordinaten von \vec{b} bzgl. der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$.

Beweis: Nehmen wir an, es gäbe zweierlei Darstellungen für \vec{b} :

$$\begin{aligned}\vec{b} &= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_k\vec{a}_k \\ \vec{b} &= y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \cdots + y_k\vec{a}_k \\ \Rightarrow \vec{0} &= (x_1 - y_1)\vec{a}_1 + (x_2 - y_2)\vec{a}_2 + \cdots + (x_k - y_k)\vec{a}_k\end{aligned}$$

und dies impliziert wegen der linearen Unabhängigkeit:

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_k = y_k.$$

Damit ist gezeigt, dass eine solche Darstellung für linear unabhängige Vektoren immer eindeutig ist. \square

5.2.2.1 Beispiel

Als Anwendung unserer bisherigen Begriffe betrachten wir ein Parallelogramm mit den vier Eckpunkten A, B, C und D , wie in Abb. 5.3 dargestellt. Es gilt folgender Sachverhalt: Falls die Seite AB halbiert wird und wir den neuen Punkt E nennen, dann schneidet Verbindungsgerade von D mit E die Diagonale AC in einem Punkt S und dieser Punkt S teilt die beiden Strecken im Verhältnis 1 : 2.

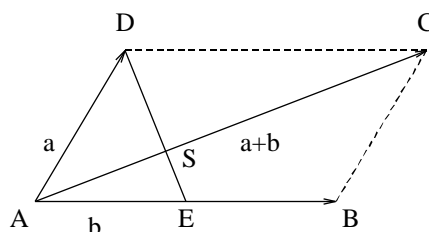


Abbildung 5.3: Parallelogramm A, B, C, D

Wir rechnen diese in einem Vektorraum nach. Dabei seien \vec{a} und \vec{b} die beiden Vektoren, die das Parallelogramm aufspannen. Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, da sich sonst kein Parallelogramm ergibt. Wir stellen zunächst folgende Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}\vec{AE} &= \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{DE} &= \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \\ \vec{AC} &= \vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

Wir wollen die Punkte auf der Geraden g durch A und C beschreiben. Jedem Ortsvektor entspricht eindeutig ein Punkt. Die Ortsvektoren, die solche Punkte auf der gesuchten Gerade beschreiben, lassen sich beschreiben durch:

$$g : m(\vec{a} + \vec{b}).$$

Dabei ergeben m mit $0 \leq m \leq 1$ Punkte zwischen A und C . Analog lassen sich die Ortsvektoren für Punkte auf der Geraden h durch D und E beschreiben:

$$h : \vec{a} + n\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right).$$

Bei Beschreibungen einer Gerade dieser Art, wird der Vektor \vec{a} auch Stützvektor und $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ Richtungsvektor der Gerade h genannt.

Für den Schnittpunkt S , der ja auf beiden Geraden liegt, müssen beide Ausdrücke gleich sein:

$$\begin{aligned} m(\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{a} + n\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ m\vec{a} + m\vec{b} &= \vec{a} + \frac{1}{2}n\vec{b} - n\vec{a} \\ m\vec{a} - \vec{a} + n\vec{a} &= \frac{1}{2}n\vec{b} - m\vec{b} \\ (m - 1 + n)\vec{a} &= \left(\frac{1}{2}n - m\right)\vec{b}. \end{aligned}$$

Da die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} linear unabhängig sind, müssen die beiden Faktoren gleich 0 sein, also gilt:

$$\begin{aligned} m - 1 + n &= 0 \\ \frac{1}{2}n - m &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$m = \frac{1}{3}, \quad n = \frac{2}{3}.$$

Für den Schnittpunkt S gilt also:

$$S = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{DE}$$

und somit die Behauptung.

5.2.2.2 Beispiel

Wir betrachten die Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} definiert durch:

$$\begin{aligned} f_0 : x &\longmapsto 1 \\ f_1 : x &\longmapsto x \\ f_2 : x &\longmapsto x^2 \\ &\vdots \\ f_k : x &\longmapsto x^k \end{aligned}$$

Für jedes k bilden die Linearkombinationen dieser Menge von Funktionen einen Vektorraum. Darüber hinaus ist die Menge dieser Funktionen linear unabhängig, das heißt aus

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot x + x_3 \cdot x^2 + \cdots + x_{k+1} \cdot x^k = 0$$

folgt

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0.$$

Dies kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Wir hatten allgemein festgestellt, dass für linear unabhängige Elemente (Vektoren) die Koeffizienten der Linearkombinationen eindeutig sind. Das bedeutet, dass für Polynomfunktionen der Art

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

die Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. (Hätten wir zwei verschiedene Darstellungen mit unterschiedlichen Koeffizienten für die gleiche Funktion, dann würde daraus eine lineare Abhängigkeit der Funktionen $1, x, x^2, x^3, \dots$ folgen.) Dies führt auf die Methode des **Koeffizientenvergleiches**.

5.3 Basis und Dimension

In diesem Abschnitt werden zwei fundamentale Begriffe für Vektorräume eingeführt: Der Begriff der Basis und der Begriff der Dimension. Für die folgende Betrachtung stellen wir zunächst ein Hilfsmittel bereit, das wir anschliessend bei einer für Vektorräume zentralen Erkenntnis verwenden werden.

5.3.1 Austauschatz

Wir betrachten k linear unabhängige Vektoren

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k.$$

Ferner sei \vec{b} eine Linearkombination davon:

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_k\vec{a}_k.$$

Falls nun $x_1 \neq 0$, dann kann diese Gleichung nach \vec{a}_1 aufgelöst werden und es gelten die zwei Aussagen:

- $\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sind linear unabhängig.
- Beide Mengen von linear unabhängigen Vektoren spannen den gleichen Raum auf:

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k] = [\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k].$$

Der Vektor \vec{b} ist also so eine Art Ersatzvektor für \vec{a}_1 .

Beweis: Wir zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit. Dafür zeigen wir, dass aus

$$y_1 \vec{b} + y_2 \vec{a}_2 + \cdots + y_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

folgt:

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0.$$

Wir setzen für \vec{b} die Linearkombination ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & y_1(x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_k \vec{a}_k) + y_2 \vec{a}_2 + \cdots + y_k \vec{a}_k = \vec{0} \\ \Rightarrow & y_1 x_1 \vec{a}_1 + (y_2 + y_1 x_2) \vec{a}_2 + \cdots + (y_k + y_1 x_k) \vec{a}_k = \vec{0} \\ \Rightarrow & y_1 x_1 = 0 \quad y_2 + y_1 x_2 = 0 \quad \dots \quad y_k + y_1 x_k = 0, \text{ da } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \text{ linear unabhängig} \\ \Rightarrow & y_1 = 0 \text{ da } x_1 \neq 0 \\ \Rightarrow & y_2 = y_3 = \cdots = y_k = 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ linear unabhängig sind.

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Vektoren den gleichen Raum aufspannen, wie die ursprünglichen $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Wir müssen also beweisen, dass

$$[\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$$

gilt. Diese Gleichheit von Mengen zeigen wir, indem wir zeigen, dass die linke Seite eine Teilmenge der rechten Seite ist und umgekehrt, dass die rechte Seite eine Teilmenge der linken Seite ist.

Es gilt offensichtlich:

$$\{\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\} \subseteq [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k],$$

da \vec{b} eine Linearkombination ist. Wenn aber alle einzelnen Elemente der linken Seite in den Linearkombinationen der rechten Seite enthalten sind, dann sind auch die Linearkombination der Elemente der Menge auf der linken Seite in der rechten Seite enthalten, also gilt dann auch:

$$[\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k] \subseteq [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k].$$

Für die Umkehrung müssen wir zeigen:

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\} \subseteq [\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k].$$

Dafür genügt es aber zu zeigen, dass sich \vec{a}_1 als Linearkombination aus den Vektoren auf der rechten Seite darstellen lässt:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{x_1} \vec{b} + \left(-\frac{x_2}{x_1}\right) \vec{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{x_k}{x_1}\right) \vec{a}_k.$$

Somit ist

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\} \subseteq [\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$$

bewiesen und es folgt damit - mit der selben Argumentation wie oben - auch

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k] \subseteq [\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k].$$

Damit ist aber die Mengengleichheit gezeigt!

□

Der folgende Begriff hat eine zentrale Bedeutung für die Vektorräume.

5.3.2 Basis

Es sei V ein Vektorraum. Eine Menge linear unabhängiger Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, die den gesamten Vektorraum V erzeugen, nennt man eine Basis des Vektorraumes. Für eine Basis gilt also:

- $V = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sind linear unabhängig.

5.3.2.1 Beispiel

Für den Vektorraum \mathbb{R}^3 liefern die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis. Diese Basis wird sehr häufig verwendet. Sie wird auch als kanonische Basis bezeichnet und ihre Vektoren als kanonische Einheitsvektoren. Wir beweisen zunächst, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{aligned} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ferner muss für eine Basis gelten, dass sich alle Vektoren aus dem Vektorraum darstellen lassen:

$$\mathbb{R}^3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Dies gilt, da sich jeder beliebige Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

darstellen läßt durch:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind die drei Vektoren linear unabhängig und erzeugen den ganzen Raum.

5.3.2.2 Beispiel

In einem Vektorraum kann es viele verschiedene Basen geben. Für den Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 haben wir beispielsweise die vier verschiedenen Basen:

$$\begin{aligned} [x^3, x^2, x, 1] &= [x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1, 1] \\ &= [(x - b), (x - b)^2, (x - b)^3, (x - b)^4] \text{ mit } b \in \mathbb{R} \\ &= [1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)] \text{ mit } x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Eine geschickt gewählte Basis erleichtert das Rechnen oft sehr wesentlich.

Mit Hilfe des oben bewiesenen Austauschsatzes können wir nun eine wesentliche Eigenschaft von Basen in Vektorräumen herleiten:

5.3.3 Anzahl der Elemente einer Basis

Sei V ein Vektorraum mit einer Basis

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n,$$

so besteht jede Basis dieses Vektorraumes aus n Vektoren. Bevor wir diese Aussage beweisen, betrachten wir einige Folgerungen daraus.

5.3.4 Dimension

Damit wird die Anzahl der Vektoren einer Basis zu einer Eigenschaft des Vektorraumes. Sei wieder

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$$

die Basis eines Vektorraumes V . Dann heißt

$$n = \text{Dimension von } V.$$

Bemerkung: Es gibt Vektorräume, für die keine endlichen Basen existieren. Ein Beispiel liefert der Vektorraum aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} .

Beweis: Wir beweisen nun, dass alle endlichen Basen eines Vektorraumes immer gleich viele Elemente enthalten. Seien

$$\begin{array}{c} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r \end{array}$$

beides Basen für einen Vektorraum V . Es ist zu zeigen, dass

$$n = r$$

gilt. Nehmen wir an, es sei $n \neq r$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass $r > n$. Dann läßt sich die zweite Basis schreiben als:

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n, \vec{b}_{n+1}, \dots, \vec{b}_r.$$

Da die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ eine Basis bilden, läßt sich \vec{b}_1 als Linearkombination darstellen:

$$\vec{b}_1 = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n.$$

Wenn alle x_i gleich Null wären, dann wäre \vec{b}_1 der Nullvektor, dann wären die $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ nicht linear unabhängig und damit keine Basis. Also muß mindestens ein $x_i \neq 0$ gelten. Durch Umnummerierung können wir erreichen, dass $x_1 \neq 0$. Dann gilt aber nach dem Austauschsatz, dass \vec{b}_1 ein geeigneter Ersatzspieler für \vec{a}_1 ist, also:

$$V = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n] = [\vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n].$$

Eine ähnliche Überlegung können wir jetzt für \vec{b}_2 durchführen. Dieser Vektor muß sich mit Hilfe der neuen Basis $\vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ darstellen lassen:

$$\vec{b}_2 = y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{a}_2 + \dots + y_n \vec{a}_n.$$

Einer der Koeffizienten y_2, \dots, y_n muß ungleich Null sein. Durch Umnummerierung erreichen wir, dass $y_2 \neq 0$ gilt. Damit bekommen wir eine neue Basis:

$$V = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n].$$

Den gleichen Prozeß führen wir noch $n - 2$ -mal durch und erhalten:

$$V = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n].$$

Dann sind aber die $\vec{b}_{n+1}, \dots, \vec{b}_r$ Linearkombinationen der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ und somit linear abhängig. Das heißt aber, dass die $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ keine Basis bilden. Also muß $n = r$ gelten. \square

5.3.4.1 Beispiel

Betrachten wir die Menge der Ortsvektoren im dreidimensionalen Raum, dann gilt: Eine Gerade bildet einen eindimensionalen Vektorraum, denn jede Basis für diese Gerade besteht aus einem Vektor. Eine Ebene bildet einen zweidimensionalen Vektorraum. Jede Basis besteht aus zwei Elementen. Der gesamte Anschauungsraum bildet einen Vektorraum der Dimension 3. Jede Basis besteht aus 3 Vektoren.

5.3.4.2 Beispiel

Wir hatten die Menge der n -Tupel über \mathbb{R} betrachtet. Diese bilden einen Vektorraum. Die n Vektoren:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis dieses Vektorraumes. Daher hat dieser Vektorraum die Dimension n . Eine Basis besteht einerseits aus linear unabhängigen Elementen und erzeugt andererseits den gesamten Vektorraum. Wir zeigen zunächst, dass diese n Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ linear unabhängig sind. Aus

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = 0$$

folgt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Andererseits erzeugen diese Vektoren auch den ganzen Raum. Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ein beliebiges n -Tupel, dann gilt:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n.$$

5.3.5 Koordinaten

Der Vektorraum der n -Tupel über \mathbb{R} , den wir ja auch mit \mathbb{R}^n bezeichnen, hat eine große Bedeutung für den Umgang mit Vektorräumen. Sei V **irgendein** n -dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es für V eine Basis mit n Elementen:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$$

Damit läßt sich jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als Linearkombination darstellen:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Die Skalare x_1, x_2, \dots, x_n heißen **Koordinaten** von \vec{x} bzgl. der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sie beschreiben den Vektor eindeutig.

Sein nun ein zweiter Vektor \vec{y} auch durch seine Koordinaten gegeben:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dann läßt sich die Summe $\vec{x} + \vec{y}$ berechnen durch:

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n + y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n \\ &= (x_1 + y_1) \vec{e}_1 + (x_2 + y_2) \vec{e}_2 + \dots + (x_n + y_n) \vec{e}_n. \end{aligned}$$

und dies ergibt als Koordinatenvektor

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Aber dies ist genau die Summation, die wir im \mathbb{R}^n eingeführt hatten. Analog läßt sich das Produkt mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ berechnen, indem der Koordinatenvektor mit c

multipliziert wird. Beide Vektorraumoperationen des \mathbb{R}^n stimmen also mit dem Rechnen in Koordinaten überein.

Für die Darstellung der Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ erhalten wir als Koordinaten bzgl. dieser Basis:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also kann jeder n -dimensionale Vektorraum über \mathbb{R} dargestellt werden als der Vektorraum der n -Tupel über \mathbb{R} , den wir mit \mathbb{R}^n bezeichnet haben. Das gleiche gilt auch allgemeiner für Vektorräume über irgendeinem Körper K . Jeder n -dimensionale Vektorraum über K kann mit n -Tupeln als K^n dargestellt werden.

5.3.5.1 Beispiel

Wir wählen im dreidimensionalen Anschauungsraum drei linear unabhängige Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ der Länge 1, die senkrecht aufeinander stehen. Dann läßt sich jeder Ortsvektor \vec{x} als Linearkombination darstellen:

$$\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

und wir erhalten den Koordinatenvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kapitel 6

Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten ein System von

- m linearen Gleichungen in
- n Unbekannten.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dabei sind die Koeffizienten a_{ij} und b_i für $i = 1..m$ und $j = 1..n$ Skalare (also Zahlenwerte) aus einem Skalarenkörper, in unserem Fall immer aus \mathbb{R} . Die Skalare der linken Seite schreibt man auch als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und nennt dies die $(m \times n)$ -Matrix des Gleichungssystems.

Beachten Sie dass der erste Index der Zeilenindex und der zweite Index der Spaltenindex ist. Dies ist zwar nur eine etwas willkürliche Festlegung, aber es erleichtert den Umgang mit Gleichungssystemen und Matrizen sehr, wenn man sich das von vorne herein so angewöhnt. Es wird in der Mathematik ziemlich durchgängig so gehandhabt.

Die Werte auf der rechten Seite können zu einem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ zusammengefaßt werden:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Unter einer Lösung des linearen Gleichungssystems verstehen wir

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

die die m Gleichungen erfüllen. Diese n Werte können wir auch als Vektor aus dem \mathbb{R}^n auffassen und als Spaltenvektor schreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Die Lösung eines solchen Gleichungssystems muß aber nicht eindeutig sein. Es kann sich auch um eine Lösungsmenge handeln. Die Lösungsmenge besteht dann aus allen Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, deren Koordinaten alle m Gleichungen erfüllen.

6.1 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Wie findet man nun systematisch solche Lösungen? Wir betrachten dazu zunächst vier Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern:

- Vertauschen von Gleichungen: Dies entspricht einem Vertauschen der Zeilen der Matrix A bzw. der Koordinaten des Vektor \vec{b} .
- Umnummerieren der Unbekannten: Dies entspricht einem Vertauschen der Spalten der Matrix A (Achtung: hier ist eine Buchführung erforderlich!).
- Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen: Dies wird zu einer entsprechenden Operation für die Zeilen von A und die Koordinaten von \vec{b} .
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$: Dies wird auf die entsprechende Zeile der Matrix A und die entsprechende Koordinate von \vec{b} angewendet.

Bevor wir aus diesen Operationen ein allgemeines Lösungsverfahren herleiten, betrachten wir einige Beispiele und studieren deren Lösungsverhalten.

6.1.0.1 Beispiel

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

Die linke Seite kann als Matrix und die rechte Seite als Vektor dargestellt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aber wir wenden in diesem Beispiel unsere Umformungsschritte auf das ursprüngliche Gleichungssystem an:

I	$2x_1$	+	$4x_2$	-	x_3	=	7
II	x_1	+	$3x_2$	+	$2x_3$	=	4
III	x_1	+	$2x_2$	-	$2x_3$	=	5
<hr/>							
I	$2x_1$	+	$4x_2$	-	x_3	=	7
II-(1/2)I			x_2	+	$5/2x_3$	=	1/2
III-II			$-x_2$	-	$4x_3$	=	1
<hr/>							
I	$2x_1$	+	$4x_2$	-	x_3	=	7
II			x_2	+	$5/2x_3$	=	1/2
III+II					$-3/2x_3$	=	3/2
<hr/>							
(1/2)I	x_1	+	$2x_2$	-	$1/2x_3$	=	7/2
II			x_2	+	$5/2x_3$	=	1/2
-(2/3)III					x_3	=	-1
<hr/>							
I-2II	x_1			-	$11/2x_3$	=	5/2
II-(5/2)III			x_2			=	3
III					x_3	=	-1
<hr/>							
I+(11/2)III	x_1					=	-3
II			x_2			=	3
III					x_3	=	-1

Wir erhalten hier den Idealfall einer eindeutigen Lösung. Diese läßt sich auch als Lösungsvektor schreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6.1.0.2 Beispiel

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

$$\begin{array}{rclclcl} \text{I} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ \text{II} & 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 15 \\ \text{III} & 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 19 \\ \hline \text{I} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ \text{II}-3\text{I} & & & -5x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ \text{III}-4\text{I} & & & -5x_2 & - & 5x_3 & = & -1 \\ \hline \text{I} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ -(1/5)\text{II} & & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \text{III}-\text{II} & & & & & 0 & = & -1 \end{array}$$

Die dritte Gleichung ist nicht erfüllbar. Daher besitzt dieses Gleichungssystem keine Lösung!

6.1.0.3 Beispiel

Nach einer entsprechenden Umformung eines Gleichungssystems mit 3 Gleichungen in 5 Unbekannten könnte folgendes System zu Stande kommen:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ & 2x_2 & & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 5 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \end{array}$$

Hier gibt es keine eindeutige Lösung sondern viele Lösungen. Um die gesamte Lösungsmenge zu beschreiben, können wir x_4 und x_5 als Parameter stehen lassen und die x_1, x_2 und x_3 in Abhängigkeit von diesen beiden Parametern bestimmen:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 3 & - & 2x_4 & + & x_5 \\ x_2 & = & 2,5 & - & 0,5x_4 & - & 1,5x_5 \\ x_3 & = & 1 & - & 3x_4 & + & 2x_5 \end{array}$$

Für eine spezielle Lösung wählen wir die beiden Parameter x_4 und x_5 und berechnen die entsprechenden x_1, x_2 und x_3 . Z.B. können wir $x_4 = x_5 = 0$ wählen und erhalten eine spezielle Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $x_4 = 1$ und $x_5 = 2$ erhalten wir:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir alle drei wichtigen Fälle, die auftreten können, an Beispielen kennen gelernt. Es kann genau eine eindeutige Lösung geben, es kann unlösbar sein oder es kann eine unendliche Menge an Lösungen geben, die wir dann über Parameter beschreiben können.

Um die Lösungsmenge eines allgemeinen Gleichungssystems zu bestimmen, bringt man mit Hilfe der vier Umformungsschritte das Gleichungssystem in folgende Form:

$$\begin{array}{cccccccl} a_{11}x_1 & & & + & a_{1k+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & + & a_{2k+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots & \\ & & & a_{kk}x_k & + & a_{kk+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \\ & & & & & & & & 0 & = & b_{k+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & 0 & = & b_m \end{array}$$

Dabei gilt $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, k$. Diese Form wird auch als **Endform** bezeichnet.

Wir werden sehen, dass diese Endform für ein System von m Gleichungen in n Unbekannten immer erreicht werden kann! Dabei sind die Unbekannten x_1, \dots, x_n möglicher Weise umnummeriert.

Wir führen hier schon eine wichtige Bezeichnung ein: Die Zahl k , die sich aus dieser Form ergibt, heißt **Rang** des Gleichungssystems. Wir werden später sehen, dass diese Definition sinnvoll ist, da sich bei jeder Umformung so eine Endform der gleiche Rang ergibt.

6.1.1 Lösungsverhalten

Beim Lösungsverhalten können wir folgende drei Fälle unterscheiden:

- Es gibt mindestens ein i mit $k + 1 \leq i \leq m$, so dass

$$b_i \neq 0.$$

Dann hat das Gleichungssystem keine Lösung. Die Lösungsmenge ist die leere Menge.

-
- Es gilt $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_m = 0$ und $k = n$. In diesem Fall erhalten wir folgende Form:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 & & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & = b_2 \\ & & \vdots \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$. In diesem Fall gibt es genau eine eindeutige Lösung:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

- Es gelte wiederum $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_m = 0$, aber dieses mal mit $k < n$. Dann erhalten wir eine mehrdeutige Lösung, die wir mit

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$$

als Parameter beschreiben können. Die übrigen x_1, \dots, x_k berechnen sich dann in Abhängigkeit von den frei wählbaren Parametern:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{1k+1}}{a_{11}} x_{k+1} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 & = & \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{2k+1}}{a_{22}} x_{k+1} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ & \vdots & \\ x_k & = & \frac{b_k}{a_{kk}} - \frac{a_{kk+1}}{a_{kk}} x_{k+1} - \dots - \frac{a_{kn}}{a_{kk}} x_n. \end{array}$$

6.1.2 Gauß-Jordan-Algorithmus

In diesem Abschnitt beschreiben wir das Verfahren, wie aus einem allg. linearen Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

die gesuchte Form erhält, aus der man die Lösungen und das Lösungsverhalten ablesen kann.

1. Schritt: Falls alle Koeffizienten $a_{ij} = 0$, dann ist die gesuchte Form für $k = 0$ bereits erreicht. Also können wir davon ausgehen, dass zumindest ein $a_{ij} \neq 0$ für irgend ein i und

j existiert. Durch Vertauschen der Gleichungen und Umnummerieren der Unbekannten können wir

$$a_{11} \neq 0$$

erreichen. Das $(-a_{i1}/a_{11})$ -fache der ersten Gleichung, die wir auch als Arbeitszeile bezeichnen, addieren wir auf die i -te Zeile für $i = 2, 3, \dots, m$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 & + & \dots & + & \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n & = & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & + & \left(a_{m2} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 & + & \dots & + & \left(a_{mn} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n & = & b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{array}$$

Den so erhaltenen Koeffizienten geben wir in Abhängigkeit von ihrer Position neue Namen:

$$a'_{11}, \dots, a'_{mn}, b'_1, \dots, b'_m.$$

2. Schritt: Falls die Koeffizienten a'_{ij} mit $i, j \geq 2$ alle gleich null sind, dann ist jetzt die gesuchte Form mit $k = 1$ erreicht, oder es gibt mindestens einen Koeffizienten ungleich null. Dann können wir die Zeilen 2 bis m und Spalten 2 bis n so umordnen, dass

$$a'_{22} \neq 0.$$

Analog dem ersten Schritt addieren wir das $(-a'_{i2}/a'_{22})$ -fache der zweiten Zeile auf die i -te Zeile jeweils für $i = 1, 3, 4, \dots, m$. Dadurch wird die zweite Spalte bis auf $a'_{22}x_2$ ausgeräumt.

3.-k. Schritt: In entsprechender Weise fährt man für die weiteren Zeilen und Spalten fort, bis für einen Wert k für die aktuellen Koeffizienten gilt:

$$a_{ij} = 0 \text{ für alle } i, j > k.$$

Dann ist mit diesem k die gesuchte Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & & & + & a_{1k+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & + & a_{2k+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & a_{kk}x_k & + & a_{kk+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \\ & & & & & & & & 0 & = & b_{k+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & 0 & = & b_m \end{array}$$

mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, k$ erreicht.

6.1.3 Rang eines Gleichungssystems

Das Verfahren ist nicht eindeutig. Aber der Wert von k ist unabhängig von der konkreten Ausführung des Gauß-Jordan-Verfahrens. Das heißt, **es wird immer das gleiche k** , das wir als Rang bezeichnet haben, erreicht.

Beweis: Um dieses für lineare Gleichungssysteme zentrale Ergebnis zu beweisen, verwenden wir die Techniken und Ergebnisse aus dem vorigen Kapitel über Vektorräume. Wir betrachten nur die linke Seite des linearen Gleichungssystems und fassen die Koeffizienten einer Gleichung, also die Zeilen des LGS, als Vektoren auf:

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

In der Form, in die wir das Gleichungssystem verwandelt haben, sieht man direkt, dass k der Anzahl der linear unabhängigen Vektoren (Zeilen) entspricht.

Wenn wir zeigen können, dass bei allen vier verschiedenen Transformationsschritten des Gauß-Jordan-Algorithmus die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren unverändert bleibt, dann ist die Aussage bewiesen. Betrachten wir also unsere vier Umformungsschritte im Einzelnen:

- Die Vertauschung von Zeilen ist nicht relevant für die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen.
- Auch das Umnummerieren der Unbekannten ändert die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren nicht. Für die Linearkombination des Nullvektors in der Definition der linearen Unabhängigkeit würde das auch nur eine Vertauschung der Zeilen bedeuten, wenn die Zeilen als Spaltenvektoren geschrieben werden.
- Beim Addieren des Vielfachen einer Zeile auf eine andere Zeile können wir zunächst festhalten, dass die gleichen Räume aufgespannt werden:

$$[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots] = [\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j + q\vec{a}_i, \dots]$$

Damit ist aber klar, dass beide Erzeugnisse gleiche Dimension haben, also sind auch die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren gleich.

- Beim Multiplizieren mit einer Zahl ungleich null ändert sich die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren auch nicht. Analog dem vorigen Punkt gilt:

$$[\dots, \vec{a}_i, \dots] = [\dots, c \cdot \vec{a}_i, \dots].$$

Und damit haben auch hier wieder beide Räume die gleiche Dimension und somit ist die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren unter den Erzeugenden auf der linken Seite gleich mit der Anzahl der linear unabhängigen Vektoren auf der rechten Seite.

Damit ist bewiesen, dass sich die Anzahl k während der gesamten Umformung nicht ändert. \square

6.2 Beschreibung der Lösungsmengen

Die Beschreibung der Lösungsmengen können wir jetzt auch noch mit Hilfe der Begriffe aus der Theorie der Vektorräume verbessern. Bisher hatten wir die Lösungsmengen einfach mit Hilfe von Parametern beschrieben. Die Lösungsmengen sind keine Vektorräume, da zum Beispiel die Summe von zwei Lösungen nicht wieder eine Lösung ergibt und im Allgemeinen $\vec{0}$ nicht zur Lösungsmenge gehört. Daher können die Begriffe aus der Vektorraumtheorie hier nicht direkt angewendet werden.

6.2.0.1 Beispiel

Betrachten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & & - & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \end{array}$$

Anwenden des Gauß-Jordan-Algorithmus ergibt:

I	1	1	0	-1	3
II	1	2	-1	0	5
III	1	0	1	-2	1
IV	3	2	1	-4	7
<hr/>					
I	1	1	0	-1	3
II-I	0	1	-1	1	2
III-I	0	-1	1	-1	-2
IV-3I	0	-1	1	-1	-2
<hr/>					
I-II	1	0	1	-2	1
II	0	1	-1	1	2
III+II	0	0	0	0	0
IV+II	0	0	0	0	0

Der Rang des linearen Gleichungssystems ist also gleich 2. Das Ergebnis können wir wieder als Gleichungen schreiben:

$$\begin{array}{rrrrrr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & + & (-2)x_4 & = & 1 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & + & (-1)x_3 & + & 1x_4 & = & 2 \end{array}$$

Wenn wir eine Beschreibung für den gesamten Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

haben möchten, können wir die beiden Gleichungen nach x_1 und x_2 auflösen und um zwei weitere sehr einfache Gleichungen für x_3 und x_4 ergänzen:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 1 & + & (-1)x_3 & + & 2x_4 \\ x_2 & = & 2 & + & 1x_3 & + & (-1)x_4 \\ x_3 & = & 0 & + & 1x_3 & + & 0x_4 \\ x_4 & = & 0 & + & 0x_3 & + & 1x_4 \end{array}$$

Dies können wir auch in Vektor-Schreibweise darstellen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung der Lösung ist nicht eindeutig, auch wenn die Lösungsmenge selbst eindeutig bestimmt ist. Für jede Wahl der Parameter von x_3 und x_4 liefert dies eine Lösung. Setzen wir z.B. $x_3 := 2$ und $x_4 := -3$ so erhalten wir eine spezielle Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir können auch $x_3 = x_4 = 0$ wählen, dann erhalten wir als spezielle Lösung einfach:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Von dieser speziellen Lösung sehen wir jetzt ab und betrachten nur die Linearkombination:

$$x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir diesen Vektor in die zwei ursprünglichen Gleichungen unseres Gleichungssystems ein, so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccccc} -x_3 + 2x_4 & + & 0 & + & x_3 & + & (-2)x_4 = 0 \\ 0 & + & x_3 - x_4 & + & (-1)x_3 & + & x_4 = 0 \end{array}$$

Es ergibt sich also für sämtliche Werte von x_3 und x_4 auf der rechten Seite für beide Gleichungen null. Allgemein erhalten wir auf diesem Weg Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems, bei dem aber die rechte Seite null gesetzt ist. Diese Lösungen bilden einen Vektorraum, was bei der Lösungsmenge des ursprünglichen, unveränderten Gleichungssystems nicht der Fall ist. Die allgemeinen Lösungen lassen sich also beschreiben als Summe einer speziellen Lösung plus die Lösung eines solchen Gleichungssystems mit rechter Seite gleich null. Daher definiert man allgemein:

6.2.1 Homogenes Gleichungssystem

Ein Gleichungssystem heißt **homogen**, falls alle Koeffizienten der rechten Seite b_1, b_2, \dots, b_m gleich null sind. Falls mindestens ein Koeffizient ungleich null ist, so heißt das Gleichungssystem **inhomogen**.

Es ist wesentlich zu beachten, dass ein solcher Nullvektor auf der rechten Seite unter dem Gauß-Jordan-Verfahren unverändert bleibt.

Ferner gibt es für jedes homogene Gleichungssystem immer die sogenannte triviale Lösung:

$$\vec{x} = \vec{0}.$$

Die gesamte Lösungsmenge kann beschrieben werden, indem man eine spezielle Lösung und den Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems bestimmt. Jede Lösung läßt sich dann darstellen als Summe der speziellen Lösung mit einer homogenen Lösung.

Ausgehend von der Form, die wir mit dem Gauß-Jordan-Verfahren erreichen:

$$\begin{array}{cccccccl}
 a_{11}x_1 & & & + & a_{1k+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{22}x_2 & & & + & a_{2k+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & a_{kk}x_k & + & a_{kk+1}x_{k+1} & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \\
 & & & & & & & & & 0 & = & b_{k+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & 0 & = & b_m
 \end{array}$$

mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, k$ schreiben wir die allgemeine Lösung des Gleichungssystems als:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_k}{a_{kk}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{k+1} \begin{pmatrix} -\frac{a_{1k+1}}{a_{11}} \\ \vdots \\ -\frac{a_{kk+1}}{a_{kk}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots \\ -\frac{a_{kn}}{a_{kk}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Benennen wir den ersten Vektor der rechten Seite als spezielle Lösung mit \vec{x}_s und die übrigen Vektoren mit $\vec{r}_{k+1}, \dots, \vec{r}_n$. so erhalten wir:

$$\vec{x} = \vec{x}_s + x_{k+1}\vec{r}_{k+1} + \dots + x_n\vec{r}_n. \quad (6.1)$$

Betrachten wir nun an Stelle des ursprünglichen, im allgemeinen inhomogenen Gleichungssystem das zugehörige homogene Gleichungssystem mit $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, so werden die Lösungen als Linearkombination

$$x_{k+1}\vec{r}_{k+1} + \dots + x_n\vec{r}_n$$

beschrieben. Diese $n - k$ vielen Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig und spannen den gesamten Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems auf. Damit bilden

$$[\vec{r}_{k+1}, \dots, \vec{r}_n]$$

eine Basis dieses Lösungsraumes des homogenen Gleichungssystems. Wir erhalten:

6.2.2 Dimension des Lösungsraumes eines hom. Gleichungssystems

Falls der Rang des Gleichungssystems gleich k ist, so hat der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungssystems die Dimension

$$n - k.$$

Die Lösungen des gesamten Systems lassen sich beschreiben durch:

$$\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_h,$$

wobei \vec{x}_s irgendeine spezielle Lösung und \vec{x}_h eine beliebige Lösung des homogenen Systems ist.

Es gilt offensichtlich, dass das allgemeine System genau dann eine eindeutige Lösung besitzt, wenn das zugehörige homogene System nur genau die triviale Lösung $\vec{0}$ besitzt.

An den beiden folgenden Beispielen im \mathbb{R}^3 wird der Zusammenhang der Dimension der homogenen Lösungsraumes mit der Lösungsmenge des LGS noch einmal dargestellt.

6.2.2.1 Beispiel

Nach Anwendung des Gauß-Jordan Verfahrens ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 1 & \boxed{4} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

An der eingerahmten Null erkennen wir, dass das LGS lösbar ist. An den Einsen in der Diagonalen erkennen wir, dass das LGS den Rang $k = 2$ besitzt. Da die Anzahl der Unbestimmten $n = 3$ ist, ergibt sich wegen $n - k = 1$ genau ein freier Parameter für die Lösungsmenge. Aus den eingerahmten Werten 1 und 4 ergibt sich die Lösungsmenge:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{-4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit den Bezeichnungen aus Gleichung 6.1 ergibt sich:

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist eine Gerade mit Richtungsvektor \vec{r}_3 . Der Vektor \vec{x}_s beschreibt einen Punkt auf der Gerade und wird auch als Stützvektor bezeichnet.

Würde die Gerade durch den Ursprung gehen, dann würde die Lösungsmenge einen Vektorraum bilden. Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen, linearen Gleichungssystems ist eine Ursprungsgerade mit dem Richtungsvektor \vec{r}_3 . Dies ist ein Vektorraum, daher können wir hier auch unseren Begriff der Dimension anwenden, in diesem Fall mit Dimension 1.

6.2.2.2 Beispiel

Für das zweite Beispiel betrachten wir:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

An den eingerahmten Nullen auf der rechten Seite erkennt man, dass das LGS lösbar ist. Der Rang des LGS ist 1. Da die Anzahl der Unbestimmten n gleich drei ist, ergibt sich hier, dass zwei freie Parameter für die Beschreibung der Lösungsmenge benötigt werden. Für die Lösungsmenge ergibt sich:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \boxed{-2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \boxed{-3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ergibt sich mit den Bezeichnungen aus der allgemeinen Beschreibung in Gleichung 6.1:

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist eine Ebene mit den beiden - stets linear unabhängigen - Richtungsvektoren \vec{r}_2 und \vec{r}_3 . Die Ebene geht auch nicht durch den Ursprung sondern besitzt den Stützvektor \vec{x}_s . Die Lösungsmenge des zugehörigen, homogenen LGS ist die Ebene durch den Ursprung und mit den beiden Richtungsvektoren \vec{r}_2 und \vec{r}_3 . Sie bildet einen Vektorraum der Dimension 2. Dabei läßt sich die Dimension mit $n - k = 3 - 1 = 2$ berechnen.

6.3 Determinanten

Die Ursprünge der Determinantenrechnung gehen auf den Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) zurück. Interessanter Weise beschäftigte sich ziemlich zeitgleich und völlig unabhängig auch der japanische Mathematiker Seki Kowa (1642-1708) mit ähnlichen Ansätzen zu einer Determinantenrechnung.

An folgendem kleinen Beispiel für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten kann man die grundlegende Bedeutung der Determinanten für lineare Gleichungssysteme bereits erkennen:

6.3.0.1 Beispiel

Wir betrachten ein allgemeines Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Unbekannten:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 = b_2 \end{array}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit a_{22} und die zweite mit $-a_{12}$, so erhalten wir:

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}a_{22}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 & = & a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{22}x_2 & = & -a_{12}b_2 \end{array}$$

Das Addieren dieser beiden Gleichungen liefert:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Durch eine analoge Vorgehensweise erhält man für x_2 :

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

Dann ist das LGS unlösbar, falls $(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)$ oder $a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ ungleich 0 sind. Falls beide Werte der rechten Seite gleich null sind, dann erfüllt jedes beliebige x_1 und jedes x_2 das LGS. Insgesamt kann also das LGS im Fall 1 unlösbar sein oder unendlich viele Lösungen besitzen.

2. Fall: $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$

Dann besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Wir haben also einen algebraischen Ausdruck gefunden, der ungleich 0 ist, gdw. das entsprechende LGS eindeutig lösbar ist. Dieser Ausdruck wird Determinante genannt.

Wir übertragen die Formel auch auf Matrizen. Die Matrix dieses Gleichungssystems lautet:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Für 2×2 -Matrizen ist die Determinante definiert durch:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Also hat das Gleichungssystem genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det A \neq 0$ gilt. Aber auch die beiden Lösungen x_1 und x_2 können wir dann mit Hilfe der Determinante ausdrücken:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Die Matrix A kann auch durch ihre Spalten ausgedrückt werden:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

Auch hierfür ist die Determinante in gleicher Weise definiert:

$$\det A = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2).$$

Das gleiche Konzept kann nun auch für allgemeine $n \times n$ -Matrizen, sogenannte quadratische Matrizen entwickelt werden. Zunächst definieren wir nur die Schreibweise.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix können wir auch über die Spaltenvektoren beschreiben:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Wir verwenden als Schreibweise für die Determinante von A :

$$\det A = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die allgemeine Formel für die Determinante (=Leibnizformel, vgl. Abschnitt 6.3.9) ist recht kompliziert und für praktische Zwecke nicht besonders geeignet. Daher werden wir diese erst am Ende dieses Abschnittes über Determinanten betrachten. Wir beginnen stattdessen mit sehr wichtigen Rechenregeln für die Determinante und behandeln anschließend Rechenverfahren zur Berechnung der Determinanten. Zuvor führen wir noch eine Operation auf Matrizen ein und behandeln noch den Zusammenhang zwischen der 2×2 -Determinante und der Fläche eines Parallelogramms.

6.3.1 Transponierte Matrix

Sei A die $(m \times n)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

so bezeichnen wir die Matrix, bei der alle Elemente an der Diagonalen gespiegelt werden, als die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man schreibt für die transponierte Matrix auch A^t .

6.3.2 2×2 -Determinante und die Fläche eines Parallelogramms

Wir betrachten zwei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mit einer kleinen Skizze kann man nachrechnen, dass das von den beiden Vektoren aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt $F = 10$ besitzt. Berechnen wir die Determinante der beiden Vektoren, so erhalten wir

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 2 - 12 = -10$$

oder in der anderen Reihenfolge:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 12 - 2 = 10.$$

In beiden Fällen gilt:

$$F = |\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|.$$

Dies lässt sich auch allgemein für zwei beliebige Vektoren aus dem \mathbb{R}^2 zeigen. Im \mathbb{R}^3 gilt dann, dass der Betrag der Determinante von drei Vektoren gleich dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spates ist:

$$Vol = |\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)|.$$

In höherdimensionalen Räumen gibt es keine anschauliche Verallgemeinerung von Fläche und Volumen. Hier kann man die Determinante als verallgemeinertes Volumen verwenden!

6.3.3 Rechenregeln für Determinanten

1. $\det A = \det A^t$ Diese Regel hat zur Folge, dass alle Regeln, die für Spalten gelten, auch für Zeilen angewendet werden können und umgekehrt.

-
2. $\det A = 0$, falls die Spalten linear abhängig sind (also insbesondere wenn eine Spalte der Nullvektor ist).
 3. $\det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots) = -\det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots)$ Die Determinante wechselt das Vorzeichen, wenn zwei Spalten vertauscht werden.
 4. $\det(\dots, \vec{a}_i, \dots) + \det(\dots, \vec{a}'_i, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_i + \vec{a}'_i, \dots)$, falls alle übrigen Spalten gleich sind.
 5. $c \cdot \det(\dots, \vec{a}_i, \dots) = \det(\dots, c\vec{a}_i, \dots)$.
 6. $\det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_i + q\vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots)$
 7. $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$, wobei \vec{e}_i für $i = 1, \dots, n$ die Standard Einheitsvektoren des \mathbb{R}^n sind.

Nebenbei sei bemerkt, dass man die Determinante auch über diese 7 Rechenregeln definieren kann. Sie bestimmen die Determinante schon eindeutig!

Wir verdeutlichen uns die Regeln für den einfachen Fall der 2×2 -Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Hier gilt offensichtlich $\det A = \det A^t$. Wenn die beiden Spalten linear abhängig sind, lässt sich auf jeden Fall eine der beiden Spalten durch die andere ausdrücken. Wir gehen hier davon aus, dass sich die zweite durch die erste ausdrücken lässt:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & ca_{11} \\ a_{21} & ca_{21} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: $\det A' = a_{11}ca_{21} - a_{21}ca_{11} = 0$. Für die nächste Regel betrachten wir die vertauschten Spalten:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -\det A.$$

Für die nächste Regel betrachten wir zusätzlich zur Matrix A noch eine Matrix, deren erste Spalte mit A übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{21}(a_{12} + b_{12}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Für die sechste Regel betrachten wir beispielsweise:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + qa_{21} \\ a_{21} & a_{22} + qa_{21} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22} + qa_{21}) - a_{21}(a_{12} + qa_{11}) \\
 &= a_{11}a_{22} + a_{11}qa_{21} - a_{21}a_{12} - a_{21}qa_{11} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Die letzte Regel ist für diesen Fall offensichtlich.

Wir können uns diese Rechenregeln teilweise auch durch die Bedeutung der Determinante für die Flächenberechnung verdeutlichen: Die zweite Regel besagt in Bezug auf die Fläche, dass diese genau dann null wird, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind.

Für die vierte Regel betrachten wir die Abbildung 6.1. Für die drei Vektoren $\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ besagt die Regel:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{b}) + \det(\vec{a}_2, \vec{b}) = \det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}).$$

Dies kann an Hand der Abbildung nachvollzogen werden, da die beiden Flächen F_1 und F_2 zusammen der von den beiden roten Linien begrenzten Fläche entspricht.

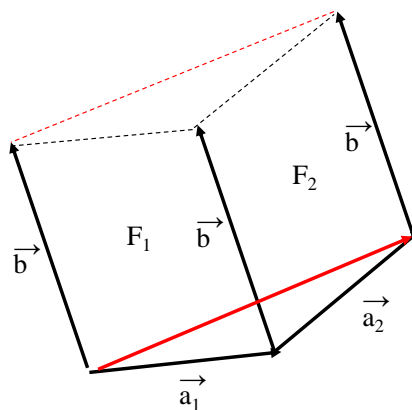


Abbildung 6.1: Verdeutlichung der vierten Rechenregel für Determinanten

Die fünfte Regel besagt in Bezug auf zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} , die ein Parallelogramm aufspannen:

$$\det(\vec{a}, c \cdot \vec{b}) = c \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}) \text{ für ein bel. } c \in \mathbb{R}.$$

Das heißt aber nichts anderes, als dass eine Verlängerung einer der beiden Vektoren um einen Faktor c die Fläche um einen Faktor c vergrößert.

Interessant ist die nächste und sechste Regel, die ja den Hauptumformungsschritt beim Gauß-Jordan-Verfahren beschreibt. Sie besagt wiederum für zwei Vektoren in der Ebene:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a} + q \cdot \vec{b}, \vec{b}) \text{ für ein bel. } q \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet für zwei Vektoren, die ein Parallelogramm aufspannen, dass eine Parallelverschiebung der einen Seite des Parallelogrammes die Fläche nicht verändert, wie das in Abbildung 6.2 dargestellt ist.

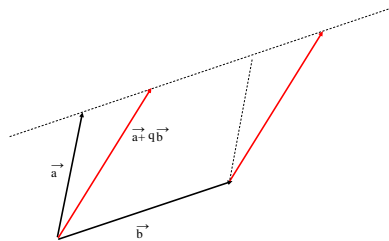


Abbildung 6.2: Verdeutlichung der sechsten Rechenregel für Determinanten

6.3.4 Berechnung der Determinante

Für 1×1 -Matrizen ist nichts zu berechnen:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

Für die 2×2 -Matrizen haben wir die Formel eingangs hergeleitet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Für 3×3 -Matrizen gibt es die **Regel von Sarrus**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Achtung: diese Regel gilt nur für 3×3 -Matrizen, es gibt keine Verallgemeinerung dazu!

6.3.4.1 Beispiel

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 - 3 \cdot (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 6 \cdot 3 = -32.$$

6.3.5 Entwicklungssatz nach Laplace

Für allgemeine $n \times n$ -Matrizen gibt es die **Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte**: Wir demonstrieren das zunächst an einer Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$A = (a_{ij})_{i=1\dots n, j=1\dots n}$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} - + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1},$$

wobei A_{i1} die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix ist, die aus A durch Streichen der ersten Spalte und i -ten Zeile entsteht. Das analoge Verfahren läßt sich auch für eine beliebige Spalte oder Zeile durchführen. Es sind dabei nur die Vorzeichen entsprechend folgenden Schema anzupassen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & \dots \\ - & + & \dots \\ + & \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Als geschlossene Formel gilt für die Entwicklung nach der i -ten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

und analog für die Entwicklung nach der j -ten Spalte:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

6.3.5.1 Beispiel

Wir berechnen die Determinante einer 4×4 -Matrix, indem wir nach der ersten Spalte entwickeln:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die vier 3×3 -Matrizen, die wir dazu verwenden, lauten:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{41} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Bis auf die Matrix A_{31} berechnen wir erst die Determinanten der Untermatrizen:

$$\det A_{11} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -18 - 14 = -32$$

$$\det A_{21} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 6 = 24$$

$$\det A_{41} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16$$

Damit lässt sich die Determinante der Matrix A leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \det A_{11} - 3 \det A_{21} + 0 \det A_{31} - 2 \det A_{41} \\ &= -32 - 3 \cdot 24 - 2 \cdot (-16) \\ &= -72 \end{aligned}$$

6.3.6 Determinanten von oberen Dreiecksmatrizen

Eine Matrix, die unterhalb der Diagonalen von links oben nach rechts unten nur Nullen enthält, nennt man obere Dreiecksmatrix. Ihre Determinante lässt sich sehr einfach berechnen:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$$

6.3.6.1 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -18$$

Ähnliches gilt natürlich auch für sogenannte Diagonalmatrizen:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$$

6.3.7 Determinanten und eindeutige Lösbarkeit

Kommen wir nun noch einmal auf die Lösbarkeit und die Lösungen eines linearen Gleichungssystems zurück. Wir betrachten ein Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Nur in diesem Fall sind Determinanten anwendbar. Dieses Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Falls die Determinante gleich Null ist, so sind die Zeilen linear abhängig. Daraus folgt, dass der Rang kleiner n ist. In diesem Fall gibt es keine oder unendliche viele Lösungen. Falls die Determinante jedoch ungleich Null ist, dann sind die Zeilen des linearen Gleichungssystems linear unabhängig. Somit ist der Rang $k=n$ und somit ist das LGS eindeutig lösbar!

6.3.7.1 Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & & & & & + & x_3 & = & -1 \\ & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Wir berechnen die Determinante der zugehörigen Matrix:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-18) - 0 - 3 - 4 = -18 - 7 = -25$$

Daraus folgt, dass dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt. Die Lösung werden wir weiter unten noch bestimmen.

6.3.8 Regel von Cramer

Die Regel von Cramer gibt eine Möglichkeit mit Hilfe der Determinante die Lösung eines eindeutig lösaren Gleichungssystems zu bestimmen. Wir beschreiben dazu die Matrix des Gleichungssystems und die rechte Seite mit Spaltenvektoren:

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), \vec{b}.$$

Dann gilt:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n).$$

Diese Methode ist nicht besonders effizient, um alle Lösungen zu bestimmen, aber wenn zum Beispiel nur eine einzelne Variable bestimmt werden muß, kann sie für praktische Zwecke sinnvoll angewendet werden.

Beweis: Bezeichnen wir die Spalten der Matrix A des Gleichungssystems mit $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, dann läßt sich das gesamte Gleichungssystem auch schreiben als:

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}.$$

Wir beweisen die Aussage nur für $i = 1$. Für die anderen i läßt sich die Aussage in der gleichen Art zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(\vec{b}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) &= \det(x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(x_i \vec{a}_i, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \det(\vec{a}_i, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= x_1 \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= x_1 \det A. \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurden die Rechenregeln für Determinanten 6.3.3 verwendet. Nachdem wir bei der ersten Umformung die Gleichung des gesamten Gleichungssystems eingesetzt haben, wurde in der zweiten Umformung die Additivität (4. Regel) und bei der dritten Umformung das Herausziehen eines Linearfaktors (5. Regel) verwendet. Da gleiche Spalten linear abhängig sind, liefert die 2. Regel, dass alle Summanden bis auf $i = 1$ entfallen. \square

6.3.8.1 Beispiel

Betrachten wir noch einmal das Beispiel von oben:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Die Determinante hatten wir mit -25 schon bestimmt. Also können wir mittels der Cramerschen Regel x_3 bestimmen:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-6) - 0 + 3 + 8 = 5$$

$$x_3 = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})}{\det A} = \frac{5}{-25} = -\frac{1}{5}.$$

Aber im allg. ist das Gauß-Jordan-Verfahren schneller, wenn alle Unbestimmten berechnet werden sollen. Außerdem kann über das Gauß-Jordan-Verfahren auch die Determinante bestimmt werden. Man muß dabei aber ein bisschen aufpassen, da das Multiplizieren einer Zeile den Wert der Determinante verändert. Diese Faktoren müssen wieder herausdividiert werden. Ferner muss der Vorzeichenwechsel beim Vertauschen von Zeilen oder Spalten berücksichtigt werden. Wir demonstrieren dies an einem Beispiel:

I	1	2	3		1
II	-2	0	1		-1
III	0	3	-1		2
I	1	2	3		1
II+2I	0	4	7		1
III	0	3	-1		2
I	1	2	3		1
II	0	4	7		1
III-(3/4)II	0	0	$-\frac{25}{4}$		$\frac{5}{4}$
I-(1/2)II	1	0	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
II	0	4	7		1
(4/5)III	0	0	-5		1
I-(1/10)III	1	0	0		$\frac{2}{5}$ ($= \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$)
II+(7/5)III	0	4	0		$\frac{12}{5}$
III	0	0	-5		1

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{2}{5} = 0,4 \quad x_2 = \frac{3}{5} = 0,6 \quad x_3 = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

ist gleich -20 . Um die Determinante der ursprünglichen Matrix zu berechnen, müssen wir dieses Ergebnis noch mit $5/4$ multiplizieren und bestätigen damit noch einmal unsere ursprüngliche Rechnung:

$$\det A = -25.$$

6.3.8.2 Fortsetzung des obigen Beispiels

Bei der obigen Berechnung von x_3 mit Hilfe der Regel von Cramer hatte die rechte Seite des LGS folgende Form:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun noch einmal x_3 mit einer anderen rechten Seite, z.B.

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zu berechnen haben, können wir analog vorgehen:

$$x_3 := \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-2}{-25} = \frac{2}{25}$$

Nehmen wir weiter an, es ist nun die Variable x_3 für eine weitere rechte Seite zu berechnen, wobei die neue rechte Seite des LGS aber einfach die Summe der beiden bisherigen sei:

$$\vec{b}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt wegen der 4. Rechenregel für Determinanten (Linearität in den einzelnen Spalten):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + (-2) = 3$$

und somit gilt hier $x_3 = -\frac{3}{25}$.

6.3.9 Allgemeine Formel für die Determinante (Leibniz-Formel)

Als nächste schauen wir uns die allgemeine Formel für die Determinante an, die auch als Leibniz-Formel bezeichnet wird. Sie ist relativ kompliziert und darüber hinaus für praktische Berechnungen nicht besonders geeignet. Bei der Entwicklung nach Laplace nach einer Zeile oder Spalte können zum Beispiel Nullen besser zur Vereinfachung ausgenutzt werden. Wir beschreiben die Matrix wieder über ihre Spaltenvektoren:

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

Eine einzelne Spalte lautet dann:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Ferner verwenden wir die Spalteneinheitsvektoren \vec{e}_i , die an der i -ten Stelle eine 1 haben und sonst aus lauter Nullen bestehen. Jeder Spaltenvektor lässt sich dann schreiben als:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{e}_i.$$

Wir berechnen die Determinante der Matrix:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \vec{e}_i, \sum_{i=1}^n a_{i2} \vec{e}_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} \vec{e}_i\right) \\ &= \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \vec{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \vec{e}_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \vec{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \det\left(\vec{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \vec{e}_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \vec{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \det(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \underbrace{\det(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n})}_{\substack{= 0, \quad \text{falls mind. zwei Indizes gleich sind} \\ = \pm 1, \quad \text{falls alle Indizes verschieden sind.}}} \\ &= \sum_{\substack{\text{Alle Permutationen von } i_1, i_2, \dots, i_n}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} (-1)^\sigma \\ &= \sum_{\substack{(12\dots n) \\ i_1 i_2 \dots i_n}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} (-1)^\sigma. \end{aligned}$$

Die Zahl σ ist dabei die Anzahl der paarweisen Vertauschungen, mit denen man die Permutation erreichen kann. Da es nur auf das Vorzeichen bei der Berechnung von -1^σ ankommt, ist es nur wesentlich, ob bei der aktuellen Permutation eine gerade oder ungerade Anzahl von paarweise Vertauschungen benötigt werden.

Anhand der Regel von Sarrus können wir uns diese Formel für den Fall $n = 3$ verdeutlichen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Bei der Darstellung der letzten Zeile liegen folgende Permutationen zu Grunde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Permutationen mit dem positiven Vorzeichen bestehen aus 0 oder 2 Vertauschungen, während die letzten drei Permutationen mit dem negativen Vorzeichen aus einer Vertauschung bestehen.

Betrachten wir abschliessend noch einmal die Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte im Licht dieser allgemeinen Formel. Die allgemeine Formel besagt, dass wir aus der Matrix A immer n Elemente miteinander multiplizieren müssen, die in n verschiedenen Spalten und n verschiedenen Zeilen stehen. Genau das tun wir auch bei der Laplace-Entwicklung auf rekursive Weise. Wir nehmen das Element a_{11} und multiplizieren es mit allen zu berücksichtigenden Kombinationen aus Spalte 2 bis n und Zeile 2 bis n . Aber dies geschieht rekursiv, in dem wir die Determinante der Matrix A_{11} betrachten. Dabei war die Matrix A_{11} die Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte aus A hervorgeht. Analoges gilt für die weiteren Elemente der ersten Spalte. Darüber hinaus sind noch die richtigen Vorzeichen zu berücksichtigen.

6.3.9.1 Beispiel: Anwendung der Determinante

Wir haben in diesem Abschnitt über Determinanten gesehen, dass wir über Determinanten nicht unbedingt zu effizienten Rechenverfahren kommen. Die meisten Ergebnisse können wir über Gaußelimination oder das Gauß-Jordan-Verfahren schneller berechnen. Warum sind Determinanten trotzdem ein sehr interessantes Hilfsmittel?

Dazu betrachten wir im Folgenden eine kleine Anwendung. Als Vorbetrachtung schauen wir erst einmal ein sehr einfaches Beispiel an, um das Grundprinzip kennen zu lernen. Danach betrachten wir die eigentliche Anwendung

Geraden in der Ebene lassen sich immer über folgende Geradengleichung darstellen:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{wobei } (a, b) \neq (0, 0).$$

Zu zwei vorgegebenen Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ lässt sich leicht eine Gerade finden, die durch die beiden Punkte verläuft. Wir bestimmen hierfür eine allgemeine Formel. Wir betrachten dazu das folgende, homogene Gleichungssystem mit drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung stellt unsere allgemeine Geradengleichung für allg. Variablen x und y dar. Die zweite und die dritte Gleichung sind die Gleichungen zu den beiden vorgegebenen Punkten. Wir haben also drei Gleichungen in den drei Unbestimmten a, b und c . Wir suchen eine nicht-triviale Lösung dieses homogenen Gleichungssystems. Diese kann nur existieren, wenn die Determinante gleich null ist. Also muss gelten:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Hierbei wurde nach der ersten Zeile entwickelt und es ergibt sich $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ und $c = x_1y_2 - x_2y_1$.

Eine ähnliche Vorgehensweise können wir nun auch für Kreise anwenden: Für einen Kreis mit dem Mittelpunkt $P_M = (x_m, y_m)$ und mit Radius r ergibt sich die Formel:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2.$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$(x^2 + y^2) + (-2x_m)x + (-2y_m)y + (x_m^2 + y_m^2 - r^2) = 0. \quad (6.2)$$

Da sich diese Gleichung mit einem beliebigen Faktor ungleich null multiplizieren lässt erhalten wir als allgemeine Kreisgleichung:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad \text{wobei } a \neq 0, d < \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \right).$$

Es gilt nun, dass ein Kreis durch drei Punkte eindeutig bestimmt ist. Wir suchen also einen Kreis, der durch drei vorgegebene Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ und $P_3 = (x_3, y_3)$ verläuft. Für die drei Punkte ergeben sich wiederum drei Gleichungen. Zusammen mit der allg. Kreisgleichung ergeben sich vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} a(x^2 + y^2) + bx + cy + d &= 0 \\ a(x_1^2 + y_1^2) + bx_1 + cy_1 + d &= 0 \\ a(x_2^2 + y_2^2) + bx_2 + cy_2 + d &= 0 \\ a(x_3^2 + y_3^2) + bx_3 + cy_3 + d &= 0 \end{aligned}$$

Auch hier erhalten wir wieder ein homogenes, lineares Gleichungssystem, für das wir eine nicht triviale Lösung suchen. Daher muss also die Determinante gleich null sein:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Berechnen wir also einen Kreis durch die Punkte $(0, 0)$, $(1, 3)$ und $(2, -1)$, dann ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y \\ 10 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7(x^2 + y^2) + 25x + 15y = 0.$$

Damit ergibt sich die Gleichung:

$$(x^2 + y^2) - \frac{25}{7}x - \frac{15}{7}y = 0.$$

Für den Mittelpunkt des Kreises ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{25}{14} \\ y_m &= \frac{15}{14}. \end{aligned}$$

Da neben dem Mittelpunkt $(x_m|y_m)$ z.B. der Punkt $(0|0)$ auf dem Kreis bekannt ist, lässt sich der Kreis leicht zeichnen oder auch sein Radius bestimmen. Für den Radius r gilt z.B.:

$$r = \sqrt{\left(\frac{25}{14}\right)^2 + \left(\frac{15}{14}\right)^2} \approx 2,0825.$$

Kapitel 7

Matrizen

Bei der Behandlung von linearen Gleichungssystemen hatten wir schon Matrizen kennen gelernt. Wir bezeichnen ganz allgemein

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m \ j=1,\dots,n}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle i und j als $(m \times n)$ -Matrix. Ferner gibt es zu n auch einen n -dimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^n , dessen Elemente wir als Vektoren bezeichnen und schreiben als:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Für $(m \times n)$ -Matrizen und Vektoren der Länge n definieren wir eine Multiplikation:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Operation ist ein m -dimensionaler Vektor. Die Operation entspricht also genau einem linearen Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten. Dabei

entspricht der Ergebnisvektor der rechten Seite des Gleichungssystems. Wir können diese Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor geeigneter Länge aber auch als Abbildung auffassen:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\longmapsto A\vec{x}. \end{aligned}$$

7.0.0.1 Beispiel

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 4 + 0 \\ 0 + 2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hier liefert die Matrix eine Abbildung vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^2 .

7.1 Lineare Abbildungen

Unsere beiden fundamentalen Operationen in einem Vektorraum waren die Addition $\vec{x} + \vec{y}$ und die Multiplikation mit einem Skalar $c \cdot \vec{x}$. Die Abbildungen, die durch die Multiplikation mit einer Matrix beschrieben werden können respektieren diese beiden Vektorraumoperationen in folgendem Sinn:

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= A\vec{x} + A\vec{y} \\ A(c \cdot \vec{x}) &= c \cdot (A\vec{x}). \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= A \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j + y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j + y_j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} = A\vec{x} + A\vec{y}. \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$A(c \cdot \vec{x}) = A \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}cx_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}cx_j \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} = c \cdot (A\vec{x}).$$

□

Eine solche Abbildung heißt lineare Abbildung. Wir definieren:

7.1.1 Lineare Abbildung

Sei f eine Abbildung von einem Vektorraum V_1 in einen Vektorraum V_2 . Falls für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\f(c \cdot \vec{x}) &= c \cdot f(\vec{x}).\end{aligned}$$

Dann nennen wir f lineare Abbildung. Wir haben bereits gesehen, dass die Multiplikation mit einer Matrix stets eine lineare Abbildung liefert. Die zwei Anforderungen, die wir an eine lineare Abbildung stellen, läßt sich auch als eine einzige Forderung zusammenfassen:

$$f(c\vec{x} + \vec{y}) = cf(\vec{x}) + f(\vec{y}).$$

7.1.2 Bemerkung

Es ist wichtig zu beachten, dass dieser Begriff von linearer Abbildung nicht mit dem Begriff einer linearen Abbildung, die über den maximalen Grad 1 eines Polynomes definiert ist, übereinstimmt. Dieser Begriff hier ist strenger, wie wir uns leicht an einem Beispiel verdeutlichen können:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto 3x + 2.\end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom, in dem x maximal vom Grad 1 auftaucht, aber es ist keine lineare Funktion, denn

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ist nicht erfüllt. Man nennt diese Art von Funktionen auch affine Funktionen. Zum Vergleich geben wir noch ein Beispiel für eine lineare Funktion g an:

$$\begin{aligned}g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto 3x.\end{aligned}$$

7.1.2.1 Beispiel: Lineare Funktion

Zu Beginn des Abschnittes 7.1 haben wir schon gezeigt, dass die Multiplikation mit einer Matrix eine lineare Abbildung darstellt. Wir demonstrieren dies hier noch mit einem Zahlenbeispiel.

Wir demonstrieren für eine Matrix A ein Beispiel für $A(c\vec{x} + d\vec{y}) = cA\vec{x} + dA\vec{y}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 + 26 + 18 \\ 14 + 0 + 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 51 \\ 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} 3 \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 4 \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \\ 3 \begin{pmatrix} 1 + 6 + 6 \\ 2 + 0 + 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 + 2 + 0 \\ 2 + 0 + 0 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 39 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 51 \\ 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.1.2.2 Beispiel: Determinante

Wenn wir die Determinante als Funktion in einer der Spalten betrachten, handelt es sich um eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{x}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{y}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n) = \\ \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{x} + \vec{y}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n). \end{aligned}$$

und

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, c \cdot \vec{x}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n) = c \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{x}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n).$$

7.1.3 Matrixdarstellung von linearen Abbildungen

Wir hatten gesehen, dass jede Matrix eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen darstellt. Erstaunlicher Weise gilt nun auch die Umkehrung. Sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung, also eine Abbildung mit der Eigenschaft $f(cx + dy) = cf(x) + df(y)$ für alle $c, d \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann läßt sich die Abbildung f bzgl. einer Basis mit Hilfe einer $m \times n$ -Matrix darstellen, das heißt es gibt eine Matrix A mit:

$$A \cdot \vec{x} = f(\vec{x})$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Sei $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n , also bestehend aus den Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ entsprechend die kanonische Basis des \mathbb{R}^m . Jedes Element \vec{x} aus dem Definitionsbereich \mathbb{R}^n läßt sich also darstellen als

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Wir betrachten zunächst die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Da $f(\vec{e}_j)$ aus dem Bildbereich ist, lassen sich alle Vektoren dieser Art darstellen als Linearkombination der $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{g}_1 + \dots + a_{m1}\vec{g}_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ f(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{g}_1 + \dots + a_{mn}\vec{g}_m = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt, dass f eine lineare Funktion ist. Wir können jetzt das Bild für einen beliebigen Vektor \vec{x} berechnen:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) \quad (\text{hier wird die Linearität von } f \text{ verwendet}) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

□

Wir sehen an dem Beweis, dass **die Spalten der gesuchten Matrix genau die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren sind**. Dies liefert also ein recht einfaches Verfahren eine solche Matrix zu konstruieren, wenn wir wissen, dass die gegebene Funktion linear ist.

7.1.3.1 Beispiel: Projektion

Wir betrachten eine Projektion vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^2 :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen zunächst, dass dies eine lineare Abbildung ist. Die allgemeine Definition der linearen Abbildung besagt, dass $f(c\vec{x} + \vec{y}) = cf(\vec{x}) + f(\vec{y})$ gelten muss. Also rechnen wir dies nach. Für die linke Seite gilt:

$$f\left(c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} cx_1 + y_1 \\ cx_2 + y_2 \\ cx_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 + y_1 + 2(cx_3 + y_3) \\ cx_2 + y_2 + 3(cx_3 + y_3) \end{pmatrix}.$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$c \cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_3 \\ y_2 + 3y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 + 2cx_3 + y_1 + 2y_3 \\ cx_2 + 3cx_3 + y_2 + 3y_3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Linearität offensichtlich erfüllt.

Wir können uns die Wirkungsweise dieser Abbildung an einem Würfel im dreidimensionalen Raum verdeutlichen. Wir betrachten die Würfecken:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Projektionen der acht Würfecken sind dann:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung des parallelen Lichtes lässt sich einfach bestimmen durch:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

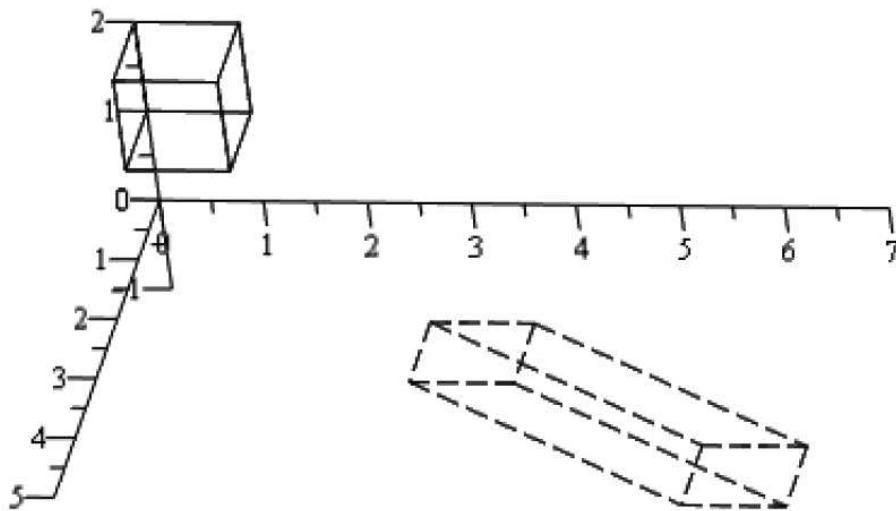


Abbildung 7.1: Projektion eines Würfels in die x/y -Ebene

Um die Matrix zu dieser Abbildung aufzustellen, untersuchen wir die Bilder der Basisvektoren:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nach der Vorgehensweise, die wir aus dem Beweis abgelesen haben bilden diese Vektoren die Spalten der gesuchten Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben hier also ein Beispiel für die Anwendung der Merkregel: die Spalten der gesuchten Matrix sind die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren. Prüfen wir die Matrix:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

7.1.3.2 Beispiel: Achsenspiegelungen

Wir betrachten die Abbildung S , die im \mathbb{R}^2 eine Achsenspiegelung an der x -Achse realisiert. Man kann sich in diesem Fall recht anschaulich klar machen, dass diese Abbildung linear ist. Abbildung 7.2 zeigt, dass es egal ist, ob die Vektoren zuerst addiert und dann gespiegelt werden oder ob sie erst gespiegelt und dann addiert werden. Analog kann man sich klar machen, dass es egal ist ob ein Vektor erst mit einer reellen Zahl multipliziert wird und dann gespiegelt wird oder umgekehrt.

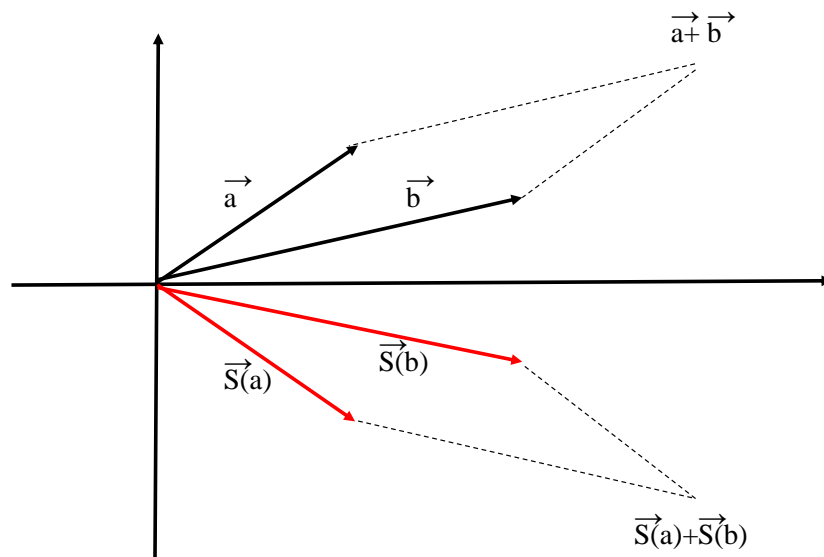


Abbildung 7.2: Additivität der Achsenspiegelung

Da also S eine lineare Abbildung ist, gibt es eine passende Matrix A und wir können diese mit unserem Standardverfahren aufstellen. Wir betrachten dazu die Bilder der Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\longrightarrow A\vec{x} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für einen allgemeinen Vektor liefert dies:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Analog können wir auch die Achsenspiegelung an der y -Achse beschreiben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.1.3.3 Beispiel: Skalierung

Ein Bild soll in x -Richtung um den Faktor α und in y -Richtung um den Faktor β skaliert werden. Für die beiden Einheitsvektoren bedeutet das:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit wird die Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

7.1.3.4 Beispiel: Scherung

Die lineare Abbildung, die das Quadrat mit den vier Eckpunkten $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ auf das Parallelogramm

$$(0,0), (1,0), (1/2,1), (3/2,1)$$

abbildet, wird auch Scherung genannt. Die Matrix dazu lautet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch diese Matrix kann leicht aufgestellt werden, indem die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren bestimmt werden.

7.2 Rechnen mit Matrizen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Verknüpfung von Matrizen. Wir betrachten zwei $(m \times n)$ -Matrizen A und B zusammen mit einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Beide Matrizen lassen sich also auf den Vektor \vec{x} anwenden. Wir untersuchen den Ausdruck

$$A\vec{x} + B\vec{x}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} A\vec{x} + B\vec{x} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n b_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{mj}x_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (a_{1j} + b_{1j})x_j \\ \sum_{j=1}^n (a_{2j} + b_{2j})x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (a_{mj} + b_{mj})x_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn wir also die Addition von Matrizen definieren durch

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

damit gilt:

$$A\vec{x} + B\vec{x} = (A + B)\vec{x}.$$

Analog definieren wir für $c \in \mathbb{R}$:

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Damit gilt dann:

$$c(A\vec{x}) = (cA)\vec{x}.$$

Die $(m \times n)$ -Matrizen bilden mit dieser Addition und Multiplikation mit einem Skalar selbst einen Vektorraum der Dimension mn . Dabei ist das Nullelement die Nullmatrix und das additive Inverse zu A ist $(-1)A = -A$.

Darüber hinaus gibt aber auch noch eine Multiplikation von Matrizen, die wir im nächsten Abschnitt ausführliche behandeln.

7.2.1 Multiplikation von Matrizen

Betrachten wir zwei Matrizen:

$$\begin{array}{lll} B : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^r \quad (r \times n) - \text{Matrix} \\ A : \mathbb{R}^r & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \quad (m \times r) - \text{Matrix} \end{array}.$$

Beide Matrizen beschreiben lineare Abbildungen. Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ liegt dann $B\vec{x} \in \mathbb{R}^r$ und schließlich $A(B\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$. Wir beweisen, dass die Hintereinanderausführung von zwei linearen Abbildungen wieder eine lineare Abbildung ist: Für zwei lineare Abbildungen f und g gilt:

$$\begin{aligned} f(c\vec{u} + d\vec{v}) &= cf(\vec{u}) + df(\vec{v}) \\ g(a\vec{x} + b\vec{y}) &= ag(\vec{x}) + bg(\vec{y}). \end{aligned}$$

Damit folgt aber für die Hintereinanderausführung dieser beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(a\vec{x} + b\vec{y}) &= f(g(a\vec{x} + b\vec{y})) \\ &= f(ag(\vec{x}) + bg(\vec{y})) \\ &= af(g(\vec{x})) + bf(g(\vec{y})) \\ &= a(f \circ g)(\vec{x}) + b(f \circ g)(\vec{y}). \end{aligned}$$

Also stellt die Verknüpfung der durch B und A beschriebenen Abbildungen wieder eine lineare Abbildung dar, und zwar von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m . Damit muß es aber auch eine Matrix C für diese Abbildung geben. Wie läßt sich nun C aus A und B berechnen?

Bevor wir dies allgemein durchrechnen, sehen wir uns ein konkretes Beispiel dazu an. Hier wird schon das Grundprinzip deutlich:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \\ 8x_1 + 9x_2 + 0x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1(5x_1 + 6x_2 + 7x_3) + 2(8x_1 + 9x_2 + 0x_3) \\ 3(5x_1 + 6x_2 + 7x_3) + 4(8x_1 + 9x_2 + 0x_3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 5 + 2 \cdot 8)x_1 + (1 \cdot 6 + 2 \cdot 9)x_2 + (1 \cdot 7 + 2 \cdot 0)x_3 \\ (3 \cdot 5 + 4 \cdot 8)x_1 + (3 \cdot 6 + 4 \cdot 9)x_2 + (3 \cdot 7 + 4 \cdot 0)x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 5 + 2 \cdot 8) & (1 \cdot 6 + 2 \cdot 9) & (1 \cdot 7 + 2 \cdot 0) \\ (3 \cdot 5 + 4 \cdot 8) & (3 \cdot 6 + 4 \cdot 9) & (3 \cdot 7 + 4 \cdot 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Man erkennt schon in etwas das Prinzip. Im folgenden bestimmen wir die exakte Vorgehensweise für die Multiplikation von Matrizen:

$$\begin{aligned}
 A(B\vec{x}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{rj}x_j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \sum_{j=1}^n b_{1j}x_j + \dots + a_{1r} \sum_{j=1}^n b_{rj}x_j \\ \vdots \\ a_{m1} \sum_{j=1}^n b_{1j}x_j + \dots + a_{mr} \sum_{j=1}^n b_{rj}x_j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (a_{11}b_{1j} + \dots + a_{1r}b_{rj})x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (a_{m1}b_{1j} + \dots + a_{mr}b_{rj})x_j \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Für die Produktmatrix $C := A \cdot B$ mit

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

soll ja $AB\vec{x} = C\vec{x}$ gelten, also das oben berechnete gleich sein mit:

$$C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

Also folgt für die einzelnen Koeffizienten c_{ij} der Matrix C :

$$c_{ij} = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}) = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$$

für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Zur Berechnung von c_{ij} wird also die i -te Zeile der Matrix A mit der j -ten Spalte der Matrix B verrechnet.

7.2.1.1 Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

An folgenden zwei Beispielen sieht man, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 19 & 19 \end{pmatrix}$$

Es können sogar Nullteiler auftreten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können auch die Matrix, die die Spiegelung an der x -Achse darstellt, multiplizieren mit der Matrix für die Skalierung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

Oder nach der Projektion in die zweidimensionale Ebene die Spiegelung anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.2.2 Bemerkung

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor läßt sich auch als Spezialfall der Multiplikation von Matrizen auffassen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren hierbei eine (2×4) -Matrix mit einer (4×1) -Matrix und erhalten eine (2×1) -Matrix.

7.2.3 Rechenregeln

Für die Addition und die Multiplikation von Matrizen gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}$$

Dabei können nur Matrizen mit gleicher Anzahl Spalten und Zeilen addiert werden. Bei der Multiplikation muß die Anzahl Spalten der ersten Matrix der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix entsprechen. Wir hatten schon das Transponieren von Matrizen eingeführt. Unter Einbeziehung dieser Operation gilt:

$$\begin{aligned} (A^t)^t &= A \\ (A + B)^t &= A^t + B^t \\ (cA)^t &= cA^t \text{ für } c \in \mathbb{R} \\ (A \cdot B)^t &= B^t \cdot A^t \end{aligned}$$

7.2.3.1 Beispiel

Betrachten wir für die letzte Rechenregel noch einmal das Beispiel aus Abschnitt 7.2.2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Nach obiger Rechenregel erhalten wir bis auf Transposition das gleiche Ergebnis, wenn wir folgendes berechnen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

7.2.3.2 Beispiel: Matrixmultiplikation

Drei Anbieter A, B und C haben jeweils einen Marktanteil von 50%, 25% bzw. 25%. Innerhalb eines Jahres ändern sich die Marktanteile wie folgt:

A : 60% der Kunden von A bleiben, 20% wechseln zu B , 20% wechseln zu C .

B : 50% der Kunden von B bleiben, 30% wechseln zu A , 20% wechseln zu C .

C : 70% der Kunden von C bleiben, 10% wechseln zu A , 20% wechseln zu B .

Die Marktanteile von A, B und C nach einem Jahr lassen sich also berechnen durch:

$$\begin{aligned} A' &= 0,6A + 0,3B + 0,1C \\ B' &= 0,2A + 0,5B + 0,2C \\ C' &= 0,2A + 0,2B + 0,7C \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Matrix

$$F := \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

können wir die Veränderung der Marktanteile durch eine Multiplikation Matrix mal Vektor berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,400 \\ 0,275 \\ 0,325 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Jahr kommt ein vierter Anbieter D hinzu. Die Marktanteile verändern sich wie folgt:

A : 50% von A bleiben, 20% wechseln zu B , 10% wechseln zu C , 20% wechseln zu D .

B : 40% von B bleiben, 20% wechseln zu A , 10% wechseln zu C , 30% wechseln zu D .

C : 60% von C bleiben, 20% wechseln zu A , 10% wechseln zu B , 10% wechseln zu D .

Somit lässt sich der Übergang im zweiten Jahr beschreiben durch:

$$\begin{aligned} A'' &= 0,5A + 0,2B + 0,2C \\ B'' &= 0,2A + 0,4B + 0,1C \\ C'' &= 0,1A + 0,1B + 0,6C \\ D'' &= 0,2A + 0,3B + 0,1C, \end{aligned}$$

wobei A, B und C die aktuelle Marktanteile sind. Diese Veränderung kann durch die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Um die Marktanteile nach dem zweiten Jahr zu berechnen, multipliziert man einfach diese Matrix G mit den Marktanteilen nach einem Jahr. Das Gleiche kann aber auch aus den ursprünglichen Marktanteilen berechnet werden, wenn man die beiden Matrizen G und F miteinander multipliziert:

$$G \cdot F = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38 & 0,29 & 0,23 \\ 0,22 & 0,28 & 0,17 \\ 0,20 & 0,20 & 0,45 \\ 0,20 & 0,23 & 0,15 \end{pmatrix}$$

Die Marktanteile nach 2 Jahren ergeben sich also durch:

$$\begin{pmatrix} 0,38 & 0,29 & 0,23 \\ 0,22 & 0,28 & 0,17 \\ 0,20 & 0,20 & 0,45 \\ 0,20 & 0,23 & 0,15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3200 \\ 0,2225 \\ 0,2625 \\ 0,1950 \end{pmatrix}$$

7.3 Quadratische Matrizen

In diesem Abschnitt betrachten wir $(n \times n)$ -Matrizen, sogenannte quadratische Matrizen. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, können diese addiert und multipliziert werden. Beide Operationen sind abgeschlossen. Ferner bildet die Addition eine abelsche Gruppenoperation, die Multiplikation ist assoziativ und die beiden Distributivgesetze sind auch erfüllt. Also bilden die $(n \times n)$ -Matrizen zusammen mit diesen beiden Operationen einen Ring, den wir auch bezeichnen mit:

$$(\mathbb{M}_n, +, \cdot) \text{ .}$$

Bezüglich der Multiplikation gibt es ein neutrales Element:

$$\mathbb{E}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Einheitsmatrix, die wir auch mit \mathbb{E}_n bezeichnen. Sei A eine Matrix aus \mathbb{M}_n , dann stellt sich die Frage, ob es zu A eine inverse Matrix A^{-1} gibt, also eine Matrix mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{E}_n.$$

Wenn wir so eine Matrix hätten, dann läßt sich ein Gleichungssystem der Art

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

sehr einfach lösen. Wir multiplizieren beide Seiten mit der inversen Matrix:

$$\begin{aligned} A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \mathbb{E}_n\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

Das heißt aber, in diesem Fall existiert nur genau eine Lösung. Daraus folgt $\det A \neq 0$. Also kann die inverse Matrix nur für Matrizen mit $\det A \neq 0$ existieren. Wir werden sehen, dass diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist. Wir definieren:

7.3.1 Reguläre und singuläre Matrizen

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{M}_n$ heißt regulär, falls

$$\det A \neq 0.$$

Andernfalls heißt sie singulär.

Wir suchen die inverse Matrix A^{-1} zur regulären Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir an,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

sei eine inverse Matrix, also eine Matrix mit

$$A \cdot B = \mathbb{E}_n.$$

Dann muß gelten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit \vec{e}_j den j -ten kanonischen Einheitsvektor und mit \vec{b}_j den j -ten Spaltenvektor der Matrix B für $j = 1, \dots, n$. Betrachten wir in obiger Gleichung die j -te Spalte, so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = A\vec{b}_j = \vec{e}_j.$$

Damit haben wir aber genau die Form, wie bei einem linearen Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten. Dabei sind b_{1j}, \dots, b_{nj} die Unbestimmten. Wir wissen, dass diese Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind, da wir von einer regulären Matrix A ausgegangen sind. Mit Hilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus können wir jeweils die eindeutigen Lösungen von

$$A\vec{b}_j = \vec{e}_j \tag{7.1}$$

für $j = 1, \dots, n$ bestimmen. Für ein einzelnes Gleichungssystem würden wir also den Gauß-Jordan-Algorithmus anwenden auf

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{array}$$

Dabei ist der Vektor auf der rechten Seite der j -te Einheitsvektor. Nach Anwendung des Algorithmus erhalten wir zunächst ein Zwischenergebnis der Form:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11}' & 0 & \dots & 0 & \star \\ 0 & a_{22}' & \ddots & \vdots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}' & \star \end{array}$$

Da die Matrix regulär ist, muss sie Rang n haben, und wir erreichen auf jeden Fall diese Diagonalform. Dividieren wir nun jede Zeile mit diesen Diagonalelementen, so erhalten wir:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1j} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & b_{2j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_{nj} \end{array}$$

Auf der rechten Seite ergibt sich die j -te Spalte der gesuchten inversen Matrix.

7.3.2 Invertieren von Matrizen

Den gleichen Algorithmus können wir für alle Spalten gleichzeitig durchführen und gehen dabei von

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}$$

aus. Nach Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens ergibt sich:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}$$

und somit die inverse Matrix auf der rechten Seite.

7.3.2.1 Beispiel

Wir berechnen die Inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

I	-1	2		1	0
II	3	2		0	1
-I	1	-2		-1	0
II	3	2		0	1
I	1	-2		-1	0
II-3I	0	8		3	1
I	1	-2		-1	0
1/8II	0	1		3/8	1/8
I+2II	1	0		-1/4	1/4
II	0	1		3/8	1/8

Damit gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Probe ergibt:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3.2.2 Beispiel

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir invertieren diese Matrix:

	1	2	3		1	0	0
	0	4	-1		0	1	0
	1	1	-2		0	0	1
	1	2	3		1	0	0
	0	4	-1		0	1	0
III - I	0	-1	-5		-1	0	1
I-(1/2) II	1	0	7/2		1	-1/2	0
	0	4	-1		0	1	0
III+(1/4) II	0	0	-21/4		-1	1/4	1
I+(2/3) III	1	0	0		1/3	-1/3	2/3
II-(4/21)III	0	4	0		4/21	20/21	-4/21
-(4/21)III	0	0	1		4/21	-1/21	-4/21
	1	0	0		1/3	-1/3	2/3
(1/4) III	0	1	0		1/21	5/21	-1/21
	0	0	1		4/21	-1/21	-4/21

Die inverse Matrix lautet also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/21 & 5/21 & -1/21 \\ 4/21 & -1/21 & -4/21 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 14 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass für eine beliebige, reguläre Matrix A eine Matrix B existiert, mit

$$AB = \mathbb{E}_n.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass zur regulären Matrix A auch eine Matrix B' mit

$$B'A = \mathbb{E}_n$$

existiert. Man betrachte dazu beispielsweise die erste Zeile von B' . Aus der Bedingung $B'A = \mathbb{E}_n$ ergeben sich für die erste Zeile von B' wieder n Gleichungen in n Unbekannten, die eindeutig lösbar sind. Da dies für alle Zeilen von B' gilt, folgt, dass es eine solche Matrix B' gibt. Wegen

$$B = \mathbb{E}_n B = (B'A)B = B'(AB) = B'\mathbb{E}_n = B'$$

sind diese beiden Matrizen B und B' gleich und werden als

$$A^{-1}$$

bezeichnet.

7.3.3 Eigenschaften der inversen Matrix

Für zwei reguläre $(n \times n)$ -Matrizen A und B gilt:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} AB(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= \mathbb{E}_n \end{aligned}$$

Also erfüllt $B^{-1}A^{-1}$ die Eigenschaft eines inversen Elementes zu AB und aus der Eindeutigkeit des Inversen Elementes folgt die Gleichheit.

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = \mathbb{E}_n^t = \mathbb{E}_n = A^t(A^t)^{-1}.$$

Multipliziert man von links $(A^t)^{-1}$, so erhält man die zweite Gleichung der Behauptung. \square

7.3.4 Die Adjunkte einer Matrix

Wir betrachten in diesem Abschnitt noch eine weitere Methode, die Inverse einer regulären Matrix zu berechnen. Die hier behandelte Methode ist im Allgemeinen weniger effizient, als die Berechnung über das Gauß-Jordan-Verfahren. Trotzdem kann sie in speziellen Fällen vorteilhaft sein, insbesondere wenn eine Formel zur Beschreibung der Inversen benötigt wird.

Wir gehen wieder aus von einer regulären, quadratischen Matrix A und suchen die inverse Matrix:

$$A^{-1} = (b_{ij}) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n),$$

die wir hier einerseits über die einzelnen Elemente b_{ij} , als auch über die Spalten \vec{b}_j beschrieben haben. Das Invertieren von Matrizen entspricht dem Lösen folgender n Gleichungssysteme

$$A\vec{b}_j = \vec{e}_j \quad j = 1, \dots, n,$$

wie wir schon in der Gleichung 7.1 hergeleitet haben. Dabei besteht ja die j -te Spalte aus folgenden Elementen:

$$\vec{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungssysteme können wir nun mit Hilfe der Regel von Cramer lösen:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{1}{\det A} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{e}_j, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det A_{ji}, \end{aligned}$$

wobei A_{ji} die Matrix ist, die durch Streichen der j -ten Zeile (!) und i -ten Spalte entsteht. Mit der Bezeichnung

$$\alpha_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

können wir die sogenannte Adjunkte zu A definieren:

$$A^* = (\alpha_{ij}).$$

Die inverse Matrix berechnet sich dann durch:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Beachten Sie, dass zur Berechnung des Elementes der i -ten Zeile und j -ten Spalte α_{ij} die Matrix A_{ji} , die durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte entsteht, betrachtet werden muss.

7.3.4.1 Beispiel

Wir betrachten die Matrix aus dem vorherigen Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante der Matrix gilt:

$$\det A = -21.$$

Wir berechnen die adjunkte Matrix $A^* = (\alpha_{ij})$. Für α_{11} gilt:

$$\alpha_{11} = 4 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = -7.$$

Beim Berechnen von α_{21} müssen wir etwas aufpassen. Das ist ja das Element in der zweiten Zeile und ersten Spalte der adjunkten Matrix. Dazu müssen in der Matrix A die erste Zeile und zweite Spalte streichen:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix beträgt 1, also gilt:

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} 1 = -1.$$

Die gesamte adjunkte Matrix lautet:

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & 7 & -14 \\ -1 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix lautet somit:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -7 & 7 & -14 \\ -1 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{1}{21} \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{21} & -\frac{4}{21} \end{pmatrix}.$$

7.3.4.2 Beispiel: Graphen und Adjazenzmatrizen

Wir betrachten einen Graphen mit 3 Knoten. Die Knoten seien wie in Abb. 7.3 dargestellt verbunden. Gesucht seien jetzt die Anzahl der Wege vom Knoten 3 zum Knoten 2 mit fest vorgegebener Länge l . Es ist natürlich einfach, diese Frage für kleine Beispiele wie $l = 5$ auszuprobieren. Man kann dazu einen Baum mit Wurzelknoten 3 ansetzen und vollständig die möglichen Wege der Länge l auflisten und abzählen, wieviel davon beim Knoten 2 enden.

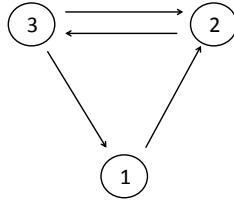


Abbildung 7.3: Graph

Wir entwickeln eine Methode dies zu berechnen, indem wir zunächst für einen beliebigen Graphen mit n Knoten eine $(n \times n)$ -Matrix aufstellen:

$$M = (m_{ij}) \quad \text{mit} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \longrightarrow i \text{ Kante im Graphen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Solche Matrizen zu Graphen werden auch Adjazenzmatrizen genannt.

Für obigen Beispielgraphen erhalten wir:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir, was passiert, wenn die Matrix M quadriert wird. M^2 hat die Matrixelemente:

$$m_{ij} := \sum_{k=1}^n m_{ik} \cdot m_{kj}.$$

Dabei beschreibt m_{kj} die Anzahl der möglichen Wege der Länge 1 vom Knoten j zu einem Zwischenknoten k und m_{ik} entsprechend die Anzahl der möglichen Wege der Länge 1 vom Zwischenknoten k zum Endknoten i . Da über alle Knoten $k = 1 \dots n$ summiert wird, erhalten wir für M^2 an der Stelle ij genau die Anzahl der möglichen Wege der Länge 2 vom Knoten j zum Knoten i .

Wenden wir dies auf obige Matrix M an, so erhalten wir mit M^2 zunächst die Anzahl aller Verbindungswege der Länge 2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vorgehensweise können wir verallgemeinern. Es seien

$$(m_{ij}^{[l_1]})$$

die Matrixeinträge der Matrix, die die Anzahl der Wege der Länge l_1 beschreiben und analog $(m_{ij}^{[l_2]})$ die Matrix der Wege der Länge l_2 . Dann ergeben sich für das Produkt dieser beiden Matrizen die Einträge:

$$\sum_{k=1}^n m_{ik}^{[l_2]} \cdot m_{kj}^{[l_1]}.$$

Hier wird also wieder über alle möglichen Zwischenknoten k aufsummiert. Summiert wird über das Produkt der Anzahl der Wege der Länge l_1 von j nach k multipliziert mit der Anzahl der Wege der Länge l_2 von k nach i . Also beschreibt allgemein die Matrix

$$M^l$$

sämtliche Wege der Länge l .

Wir können also berechnen:

$$M^4 = M^2 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

In der Matrix M^5 kann in der letzten Spalte in der Mitte die Anzahl der Wege der Länge 5 vom Knoten 3 zum Knoten 2 abgelesen werden. Für M^8 und M^{16} ergibt sich

$$M^8 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$M^{16} = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 28 \\ 28 & 37 & 49 \\ 21 & 28 & 37 \end{pmatrix}.$$

Es gibt also 49 Wege der Länge 16 von 3 nach 2.

7.3.5 Multiplikationssatz für Determinanten

Für zwei quadratische Matrizen A und B gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Beweis: Es sei C das Produkt von A und B . Dann gilt:

$$\begin{aligned} C &= AB \\ c_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \end{aligned}$$

Die Spalten der Matrix A lassen sich schreiben als:

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i.$$

Damit lassen sich die Spalten der Matrix C schreiben als:

$$\vec{c}_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \vec{e}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i \right) b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i \right) = \sum_{j=1}^n b_{jk} \vec{a}_j.$$

Versuchen wir uns zunächst dieses Ergebnis etwas zu veranschaulichen. Für die Berechnung der k -ten Spalte von C wird nur die k -te Spalte von B benötigt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

Obige Rechnung besagt nun, dass die k -te Spalte von C auch als Linearkombination der Spalten (!) von A aufgefaßt werden kann.

Nach dieser Vorarbeit können wir nun die Determinante von C berechnen:

$$\begin{aligned}
\det(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n) &= \det \left(\sum_{j=1}^n b_{j1} \vec{a}_j, \dots, \sum_{j=1}^n b_{jn} \vec{a}_j \right) \\
&= \det \left(\sum_{j_1=1}^n b_{j_1 1} \vec{a}_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n b_{j_n n} \vec{a}_{j_n} \right) \\
&= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n} \det(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_n}) \\
&= \sum_{\substack{(j_1 j_2 \dots j_n) \\ (1 2 \dots n)}} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} (-1)^\sigma \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \\
&= \det(B) \det(A),
\end{aligned}$$

wobei σ wieder die Anzahl der paarweisen Vertauschungen in der aktuellen Permutation ist. \square

Aus dem Multiplikationssatz für Determinanten ergibt sich für die Determinante einer inversen Matrix wegen $A^{-1}A = \mathbb{E}_n$ und $\det(\mathbb{E}_n) = 1$, dass

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

gilt.

7.3.5.1 Beispiel

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für das Produkt von A und B :

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -7 & 11 \end{pmatrix} \\
\det(A) &= 10 + 6 = 16 \\
\det(B) &= 3 + 2 = 5 \\
\det(AB) &= -11 + 91 = 80 = 5 \cdot 16.
\end{aligned}$$

Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(B) &= 3 + 2 = 5 \\ \det(B^{-1}) &= 3/25 + 2/25 = 1/5. \end{aligned}$$

Aus dem Multiplikationssatz für die Determinante folgt ferner, dass das Produkt von zwei regulären Matrizen stets wieder eine reguläre Matrix ist. Eine genauere Untersuchung ergibt, dass die Menge der regulären Matrizen eine (nicht kommutative) Gruppe bilden.

7.3.6 Signatur einer Permutation

Bei der Leibniz-Formel für die Determinante (siehe Abschnitt 6.3.9) hatte wir mit σ die Anzahl der paarweisen Vertauschungen einer Permutation von n Elementen bezeichnet. Dies untersuchen wir jetzt genauer. Zunächst beweisen wir, dass sich jede Permutation überhaupt durch eine Verknüpfung von paarweisen Vertauschungen darstellen lässt. Wir wissen, dass sich jede Permutation von n Elementen

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$$

in Form von Zyklen schreiben lässt:

$$p = (a_1 a_2 \dots a_{k_1}) \circ (b_1 b_2 \dots b_{k_2}) \circ (c_1 c_2 \dots c_{k_3}) \circ \dots$$

Dabei tritt jedes Element nur in genau einem Zyklus auf, die Zyklen sind also disjunkt. Daher genügt es zu zeigen, dass sich jeder Zyklus mit Hilfe von paarweisen Vertauschungen darstellen lässt. Dies ist aber sehr einfach erreichbar:

$$(a_1 a_2 \dots a_{k_1}) = (a_1 a_{k_1}) \circ (a_1 a_{k_1-1}) \circ \dots \circ (a_1 a_3) \circ (a_1 a_2).$$

Paarweise Vertauschungen entsprechen Zyklen der Länge 2. Wenn man sich klar macht, dass der Zykel $(a_1 a_2 \dots a_{k_1})$ der Permutation

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{k_1-1} & a_{k_1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k_1} & a_1 \end{pmatrix}$$

entspricht, kann man die behauptete Darstellung nachrechnen. Machen wir dazu ein kleines

7.3.6.1 Beispiel

Es gilt:

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) = (1 \ 4) \circ (1 \ 3) \circ (1 \ 2).$$

Damit können wir jetzt folgende Behauptung beweisen: Jede Permutation besteht entweder aus einer geraden oder aus einer ungeraden Anzahl von paarweisen Vertauschungen. Sie kann also niemals mit einer geraden und mit einer ungeraden Anzahl von paarweisen Vertauschungen dargestellt werden. Wir gehen wieder von einer allg. Permutation p aus

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$$

und ordnen dieser Permutation eine Matrix aus \mathbb{M}_n zu:

$$P = (p_{ij}) \quad \text{mit} \quad p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = p(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

7.3.6.2 Beispiel: Permutationsmatrix

Es sei

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann lautet die zugehörige Permutationsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt ferner: $\det(P) = 1$. Allgemein ist es leicht zu sehen, dass für die Determinanten von Permutationsmatrizen immer gilt, dass

$$\det P = \pm 1.$$

Wir haben oben gezeigt, dass sich jede Permutation p als Konkatenation von paarweisen Vertauschungen darstellen lässt. Seien t_1, t_2, \dots, t_l die geeigneten Vertauschungen. Dann gilt:

$$p = t_l \circ t_{l-1} \circ \dots \circ t_2 \circ t_1.$$

Die paarweisen Vertauschungen t_i lassen sich jeweils durch eine Permutationsmatrix T_i darstellen. Jeder dieser Matrizen T_i hat die Determinante -1 und es gilt:

$$P = T_l \cdot T_{l-1} \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1.$$

Nach dem Multiplikationssatz für Determinanten folgt daraus aber:

$$\det P = \det(T_l \cdot T_{l-1} \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1) = (-1)^l.$$

Da aber die Determinante von P eindeutig fest liegt und entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist, muß die Anzahl der paarweisen Vertauschungen l für eine bestimmte Permutation immer entweder gerade oder ungerade sein.

Damit können wir die sogenannte Signatur einer Permutation einführen:

$$\text{Signatur}(p) = \det(P) = \begin{cases} +1 & \text{falls Anzahl der paarweisen Vertauschungen gerade.} \\ -1 & \text{falls Anzahl der paarweisen Vertauschungen ungerade.} \end{cases}$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Ausdruck

$$(-1)^\sigma$$

in der Leibnizformel überhaupt eindeutig definiert ist. Er entspricht genau der Signatur der Permutation. Wegen des Multiplikationssatzes für Determinanten gilt ferner:

$$\text{Signatur}(p \circ q) = \text{Signatur}(p) \cdot \text{Signatur}(q).$$

7.4 Rotationsmatrizen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Grundlagen für wichtige Anwendungen in der Informatik, die sogenannten Rotationsmatrizen. Sie werden zum Beispiel in der Computer-Grafik, aber auch in der Robotik verwendet. Man kann sie verwenden, um Rotationen von Objekten zu beschreiben, oder um ein und das selbe Objekt mit verschiedenen, rotierten Koordinatensystemen zu beschreiben. Zunächst stellen wir ein paar Grundlagen über trigonometrische Funktionen bereit.

7.4.1 Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinusfunktion

Zunächst benötigen wir ein paar grundlegende Eigenschaften der Sinus- und der Cosinusfunktion. Der Verlauf der Funktionen ist in Abbildung 7.4 für eine Periode von 0 bis 2π dargestellt. Der Cosinus ist achsensymmetrisch und der Sinus punktsymmetrisch:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(-x) \\ \sin x &= -\sin(-x). \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich aus der Kreisdarstellung eines Kreises mit Radius r :

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{y}{r} \\ \cos a &= \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} y &= r \sin a \\ x &= r \cos a. \end{aligned}$$

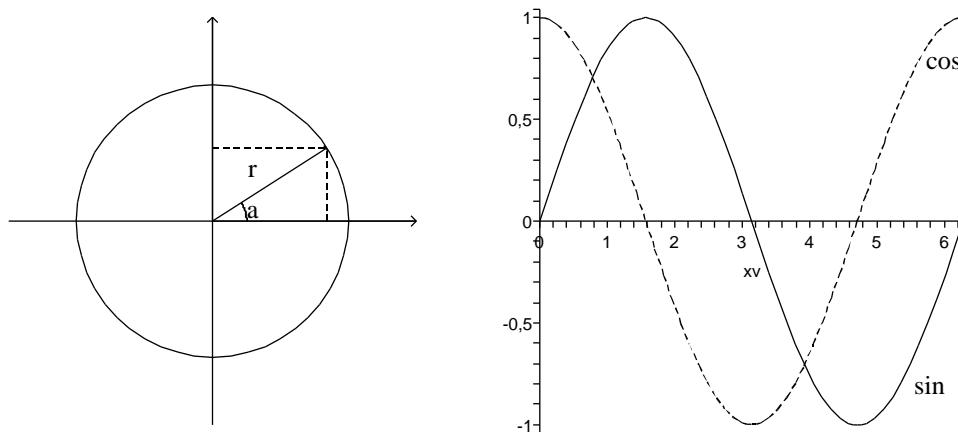


Abbildung 7.4: Sinus- und Cosinusfunktion

Wenn die Lage eines Punktes mit Hilfe des Winkels a und des Abstandes r beschrieben wird, spricht man auch von den sogenannten Polarkoordinaten (a, r) . Dabei heißt der Winkel auch Azimut. Die letzten beiden Formeln liefern uns eine Umrechnung der Polarkoordinaten in die kartesischen (x, y) -Koordinaten.

Wir betrachten die Abbildung 7.5. Wir führen die beiden Größen u und v ein:

$$\begin{aligned}\sin(x_1 + x_2) &= v \\ \cos(x_1 + x_2) &= u.\end{aligned}$$

Für die weitere Betrachtung berücksichtigen wir, dass der Winkel x_2 ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenusenlänge 1 und den beiden Katheden mit Länge $\cos x_2$ bzw. $\sin x_2$ bildet.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel x_1 im Koordinatenursprung ergeben wir:

$$\begin{aligned}\sin x_1 &= \frac{s}{\cos x_2} && \left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \right) \\ \cos x_1 &= \frac{r}{\cos x_2} && \left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \right).\end{aligned}$$

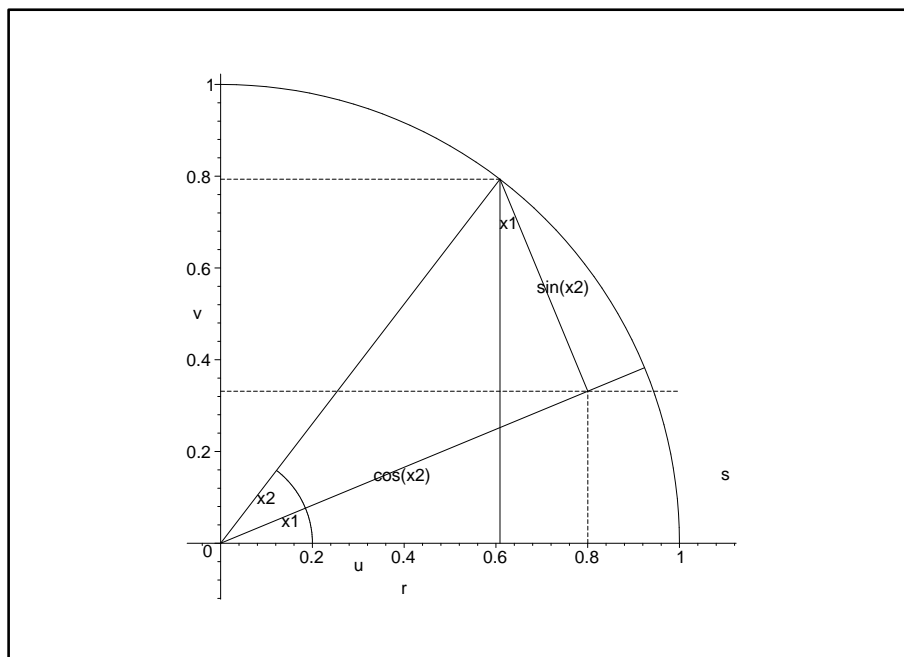


Abbildung 7.5: Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinusfunktion

Betrachten wir das kleinere, rechtwinklige Dreieck, das auch einen Winkel x_1 und die Hypothenuse mit Länge $\sin x_2$ besitzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sin x_1 &= \frac{r - u}{\sin x_2} \\ \cos x_1 &= \frac{v - s}{\sin x_2}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}r - u &= \sin x_1 \sin x_2 \\ v - s &= \cos x_1 \sin x_2.\end{aligned}$$

Setzen wir für r und s obige Ausdrücke ein und lösen nach u und v auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}u &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \\ v &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2.\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die beiden Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2.\end{aligned}$$

7.4.2 Rotation eines Koordinatensystems

Mit diesen Hilfsmitteln beschreiben wir jetzt die Rotation eines dreidimensionalen Achsensystems um die z -Achse. Wir betrachten einen Punkt $P(x|y|z)$. Es sei r der Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung und a der Winkel zwischen der Verbindungsgeraden durch P mit dem Ursprung und der X -Achse, wie in Abbildung 7.6 dargestellt.

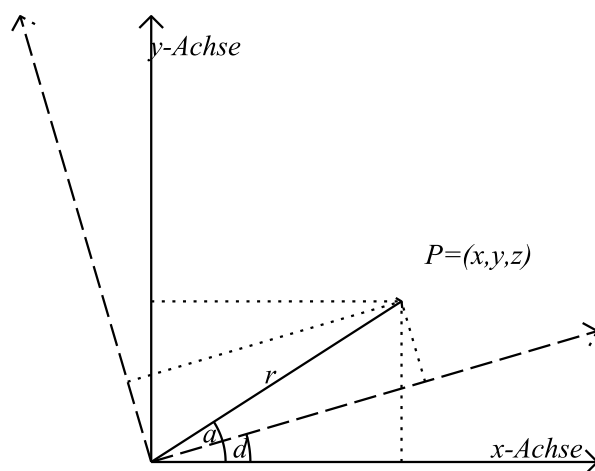


Abbildung 7.6: Rotation des Koordinatensystems um die z -Achse

Es gilt:

$$\begin{aligned} y &= r \cdot \sin a \\ x &= r \cdot \cos a \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes P bzgl. des um einen Winkel d gedrehten Koordinatensystems bezeichnen wir mit \bar{x}, \bar{y} bzw. \bar{z} . Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= r \cdot \sin(a - d) \\ \bar{x} &= r \cdot \cos(a - d) \\ \bar{z} &= z. \end{aligned}$$

Hier können wir jetzt die beiden Additionstheoreme anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= r \cdot \sin(a - d) \\
 &= r(\sin a \cos(-d) + \cos a \sin(-d)) \\
 &= y \cos d - x \sin d \\
 \bar{x} &= r \cdot \cos(a - d) \\
 &= r(\cos a \cos(-d) - \sin a \sin(-d)) \\
 &= x \cos d + y \sin d.
 \end{aligned}$$

Diese Umrechnung der Koordinaten vom (x, y, z) -Koordinatensystem in das um den Winkel d und um die z -Achse gedrehte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -Koordinatensystem läßt sich durch folgende Matrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos d & \sin d & 0 \\ -\sin d & \cos d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Rotationen um die beiden anderen Achsen lassen sich in analoger Weise darstellen. Wir erhalten insgesamt:

Rotation um die z -Achse:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos d & \sin d & 0 \\ -\sin d & \cos d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die x -Achse:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d & \sin d \\ 0 & -\sin d & \cos d \end{pmatrix}$$

Rotation um die y -Achse:

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos d & 0 & -\sin d \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin d & 0 & \cos d \end{pmatrix}$$

Die positive Drehrichtung geht dabei von der x -Achse auf die y -Achse, von der y -Achse auf die z -Achse und schliesslich von der z -Achse auf die x -Achse. Mit Hilfe der drei Rotationsmatrizen können wir Drehungen um die drei Koordinatenachsen beschreiben.

7.4.2.1 Beispiel

Für eine Drehung um einen Winkel von 90° erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

7.4.3 Rotation eines Objektes

Soll nun an Stelle einer Rotation des Koordinatensystems die Rotation von einem Objekt um einen Winkel d beschrieben werden, dann ändert sich an der Beschreibung nur das Vorzeichen von d . Die Rotation des Koordinatensystems um den Winkel d entspricht einer Rotation eines Objektes um den Winkel $-d$, wenn wir nur die Koordinaten berechnen. Die Berechnung der neuen Koordinaten nach Objektrotation um die z -Achse mit einem Winkel d lässt sich also berechnen mit der Matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(-d) & \sin(-d) & 0 \\ -\sin(-d) & \cos(-d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos d & -\sin d & 0 \\ \sin d & \cos d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen für die Rotation von Objekten um die anderen Koordinatenachsen ergeben sich analog.

7.4.4 Rotation um eine Gerade durch den Ursprung

Betrachten wir nun eine allgemeine Rotation eines Objektes um eine Drehachse mit beliebiger Richtung:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

um den Winkel α . Dies können wir beschreiben, indem wir das Koordinatensystem so transformieren, dass die Drehachse auf einer Koordinatenachse liegt.

1. Schritt: Wir transformieren das (x, y, z) -Koordinatensystem in ein $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -Koordinatensystem, so dass der Vektor \vec{q} in der \bar{x}, \bar{z} -Ebene liegt. Dies kann durch eine Rotation um die z -Achse erreicht werden.

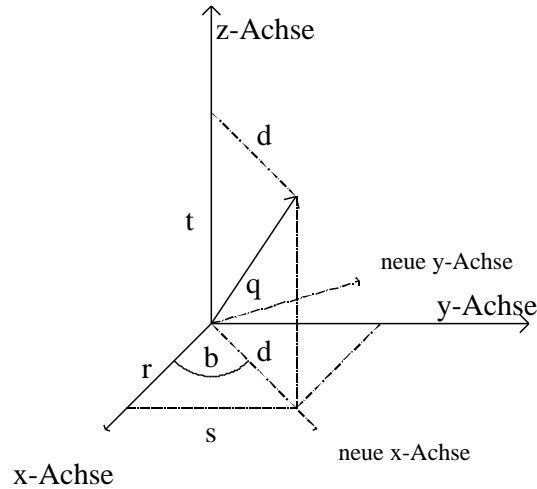


Abbildung 7.7: Rotation des Koordinatensystems um die z-Achse

Es gilt:

$$d := \sqrt{r^2 + s^2}, \quad \sin b = \frac{s}{d}, \quad \cos b = \frac{r}{d}.$$

Damit lautet die Matrix für die Koordinatentransformation um den Winkel b :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/d & s/d & 0 \\ -s/d & r/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir nennen diese Matrix R_1 .

2. Schritt: Wir transformieren jetzt das $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -Koordinatensystem in ein $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}})$ -Koordinatensystem, so dass der Vektor \vec{q} auf der $\bar{\bar{z}}$ -Achse liegt. Dies kann durch eine Drehung um die \bar{y} -Achse erreicht werden.

Es sei e die Länge des Vektors \vec{q} . Dann gilt:

$$e = \sqrt{d^2 + t^2} = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} = |\vec{q}|.$$

Ferner gilt für den Drehwinkel c , um den wir die \bar{y} -Achse drehen:

$$\sin c = \frac{d}{e}, \quad \cos c = \frac{t}{e},$$

da die Strecken t und e diesen Winkel c in einem rechtwinkligen Dreieck mit Gegenkathete d einschließen. Damit folgt für die gesuchte Drehmatrix:

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/e & 0 & -d/e \\ 0 & 1 & 0 \\ d/e & 0 & t/e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Wir nennen diese Rotationsmatrix R_2 .

3. Schritt: Schließlich kann die gesuchte Drehung des Objektes durch eine Drehung um die $\bar{\bar{z}}$ -Achse um den gewünschten Winkel α mittels

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}_{rot} \\ \bar{\bar{y}}_{rot} \\ \bar{\bar{z}}_{rot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

durchgeführt werden. Die hierbei verwendete Matrix nennen wir Rot , da sie die eigentliche Rotation ausführt.

Die gesamte Rotation um die durch den Vektor q beschriebene Achse kann durch das Produkt der drei Matrizen ausgeführt werden:

$$R_q = Rot \cdot R_2 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t/e & 0 & -d/e \\ 0 & 1 & 0 \\ d/e & 0 & t/e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r/d & s/d & 0 \\ -s/d & r/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soll anschliessend das Koordinatensystem wieder in das ursprüngliche zurückverwandelt werden, dann verwendet man die Matrix:

$$R_{\text{gesamte Rotation}} = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot Rot \cdot R_2 \cdot R_1.$$

7.4.5 Skalierungen

Neben Rotationen werden in der Computer-Grafik auch Skalierungen benötigt:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

Wir haben diese schon für den zweidimensionalen Fall behandelt. Ein Spezialfall wäre zum Beispiel die Ebenenspiegelung an der y/z -Ebene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.4.6 Translationen

Ferner sind natürlich auch einfache Verschiebungen, sogenannte Translationen wichtig. Mit der folgenden Transformation wird ein Punkt $P(x|y|z)$ um einen Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

verschoben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Bei einer entsprechenden Translation des Koordinatensystems ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Form würden die Translationen aber die Möglichkeit, die Hintereinanderausführung der Operationen immer wieder durch eine Matrix darzustellen, unmöglich machen. Eine Translation läßt sich aber nicht ohne weiteres als Matrix darstellen. Durch eine Translation des Koordinatensystems wird i.A. der Ursprung des Koordinatensystems verschoben, also auf einen Vektor ungleich dem Nullvektor abgebildet. Jede (3×3) -Matrix bildet aber als lineare Abbildung den Nullvektor auf den Nullvektor ab. Also kann eine Translation im Raum nicht durch eine (3×3) -Matrix abgebildet werden.

7.4.7 Homogene Koordinaten

Eine Abhilfe kann man dadurch schaffen, dass man zur Darstellung der Translationen homogene Koordinaten verwendet. Ein Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wird durch einen vierdimensionalen Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Dabei stellt dieser Vektor auch nur einen Punkt im \mathbb{R}^3 dar und alle Vielfachen bezeichnen den gleichen Punkt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Mittels

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x/u \\ y/u \\ z/u \end{pmatrix}$$

können für $u \neq 0$ leicht die ursprünglichen Koordinaten wieder hergestellt werden. Diese werden als kartesische oder affine Koordinaten bezeichnet.

Die in Gleichung 7.2 eingeführte Relation ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv und symmetrisch). Daher ist auch das \equiv -Zeichen berechtigt. Eine Äquivalenzrelation führt ja immer zu einer Einteilung in Äquivalenzklassen. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird in unserem Fall mit

$$\mathbb{R}^4 / \equiv$$

bezeichnet. Jede Äquivalenzklasse beschreibt bis auf eine Ausnahme genau einen Punkt. Die Ausnahme ist die Äquivalenzklasse des Vektors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser beschreibt keinen Punkt. Daher betrachten wir nur die Menge aller Äquivalenzklassen ohne den Nullvektor:

$$(\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}) / \equiv.$$

Eine Besonderheit stellen hierbei die Äquivalenzklassen mit $u = 0$ dar. Diese können nicht kartesische Koordinaten umgewandelt werden. Sie beschreiben die sogenannten Fernpunkte, die man sich zum Beispiel als Schnittpunkte von parallelen Geraden vorstellen kann. Diese besitzen keine kartesischen Koordinaten. Sie können innerhalb der projektiven Geometrie als neue, zusätzliche Punkte mithinzugenommen werden.

Die projektive Geometrie wurde aus der Entdeckung der Perspektive heraus entwickelt. Der Grundlegende Ansatz, der der Konstruktion der Perspektive zugrunde liegt, wird sehr schön durch das Bild von Albrecht Dürer (1471-1528) „Der Zeichner der Laute“ dargestellt. In der Abbildung 7.8 wird von dem sogenannten Augpunkt, der hier einfach ein Haken an der Wand ist, zu dem Punkt der Laute, der gezeichnet werden soll, einfach ein Faden

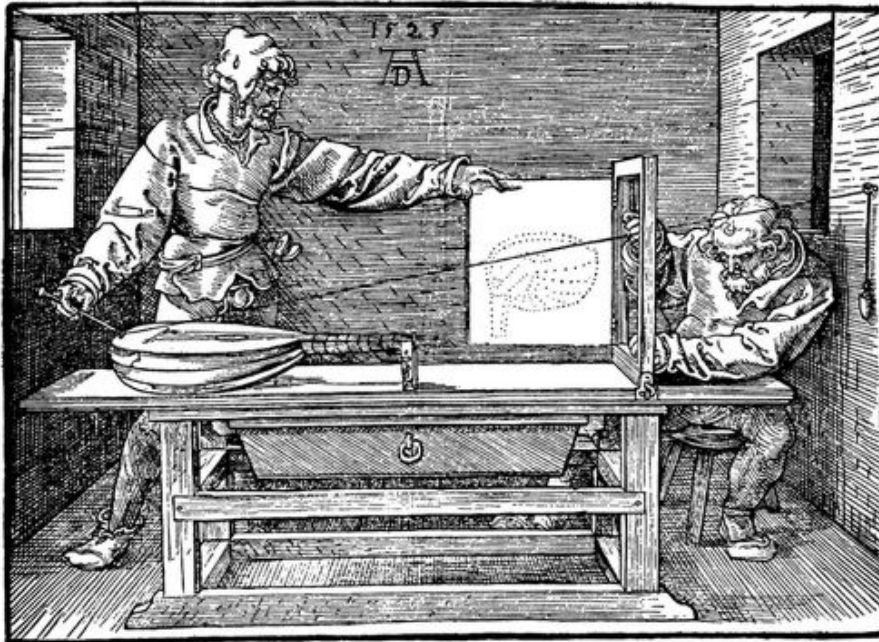


Abbildung 7.8: „Der Zeichner der Laute“ von Albrecht Dürer

gespannt. Der Schnittpunkt des Fadens mit der Projektionsebene liefert dann den Punkt in der Zeichnung.

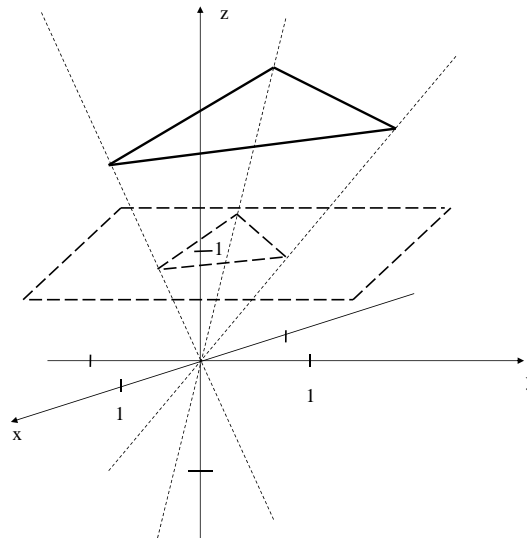
Mit diesem Modell können wir die homogenen Koordinaten noch etwas anders auffassen. Wir betrachten dazu aber den zweidimensionalen Fall:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

wird in homogenen Koordinaten darstellt durch die Äquivalenzklasse von

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man stelle sich den Augpunkt im Ursprung des dreidimensionalen Koordinatensystems vor. Nehmen wir an, ein Punkt im Raum, der gerade perspektivisch gezeichnet werden soll, liege bei $(30, 50, 10)$. Als homogene Koordinaten aufgefaßt gehören zu diesem Punkt alle Vielfachen dazu. Das sind im dreidimensionalen Raum aber gerade alle Punkte die auf der Ursprungsgerade durch den Punkt $(30, 50, 10)$ liegen, also gerade auf dem Faden zwischen Augpunkt im Ursprung und dem Punkt der gezeichnet werden soll. Wenn wir uns jetzt die Projektionsebene mit dreidimensionalen Raum gerade als die $z = 1$ -Ebene denken, dass

Abbildung 7.9: Perspektivische Projektion in die $z = 1$ -Ebene

In der Abbildung 7.9 ist diese perspektivische Projektion auf die $z = 1$ -Ebene dargestellt. Die gepunkteten Geraden durch den Ursprung stellen die Äquivalenzklassen dar. Das fett gezeichnete Dreieck ist das Objekt im dreidimensionalen Raum, das auf die $z = 1$ -Ebene projiziert wird. Diese ist gestrichelt gezeichnet, ebenso wie die Projektion, die in dieser Ebene liegt.

7.4.8 Translationen und Rotationen in homogenen Koordinaten

In den homogenen Koordinaten kann die Translation jetzt auch als Matrix dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die anderen Matrizen für Rotationen und Skalierungen können leicht für homogene Koordinaten angepaßt werden

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

indem die entsprechende 3×3 -Matrix in dieser Form erweitert wird.

7.4.8.1 Beispiel

Wir betrachten in einem dreidimensionalen Koordinatensystem eine Fahne mit einem senkrechten Fahnenmast der Höhe 4. Der Standpunkt des Fahnenmastes sei in (x, y) -Koordinaten $(2|3)$. Die Fahne der Größe 1×1 hat die vier Eckpunkte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Fahne soll um den Fahnenmast um 90° gedreht werden. Wir betrachten dabei nur die eine Ecke der Fahne, die wir gleich in homogenen Koordinaten darstellen:

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Rotation durchführen zu können, benötigen wir als erstes eine Translation des Koordinatensystems:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anschliessend führen wir eine Objektrotation um 90° durch:

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich muß das Koordinatensystem wieder in die ursprüngliche Lage zurückverschoben werden. Dazu verwenden wir die inverse Translation:

$$T^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Hintereinanderausführung der Matrizen ergibt sich:

$$RT = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}RT = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die eine Ecke der Fahne ergibt sich also:

$$T^{-1}RT\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.5 Skalarprodukte in Vektorräumen und Orthogonale Matrizen

Begriffe, wie Länge und Winkel sind nicht direkt an das Thema Matrizen gebunden, aber da wir diese dann gleich mit bestimmten Matrizen und Abbildungen verbinden werden, führen wir sie an dieser Stelle ein.

7.5.0.1 Beispiel

Wir betrachten zunächst den dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 . Hier können wir uns viele Begriffe noch anschaulich vorstellen. Es sei ein Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

in einem gewöhnlichen, rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem gegeben. Über das zweimalige Anwenden des Satz von Pythagoras kann die Länge als $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bestimmt werden. Allgemein bezeichnet man die Zordnung einer reellen Zahl oder allgemeiner gesprochen eines Skalars zu einem mathematischen Objekt als Betragsfunktion oder Norm und schreibt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(Eigentlich sind bei einer Norm noch ganz bestimmte Eigenschaften gefordert, diese werden aber von der Längenfunktion auf jeden Fall erfüllt.) Entsprechend kann zwei verschiedenen Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ein Abstand

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

als Betrag der Differenz zugeordnet werden. Ein anderer Wert, den wir zwei Vektoren zuordnen können, ist der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel α .

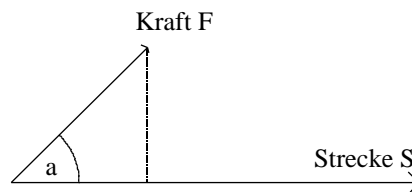


Abbildung 7.10: Arbeit als Skalarprodukt von Kraft und Strecke

In diesem Zusammenhang läßt sich dann zwei gegebenen Vektoren auch noch ein etwas aufwändigerer Ausdruck zuordnen, das sogenannte Skalarprodukt. Zu zwei Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 mit eingeschlossenem Winkel α ist das Skalarprodukt definiert als

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 := |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \alpha.$$

Ein Beispiel für ein solches Skalarprodukt ist die geleistete Arbeit längs einer Strecke \vec{S} durch eine Kraft \vec{F} , die sich als

$$w = |\vec{F}| \cos a |\vec{S}|$$

ergibt, wie in Abbildung 7.10 dargestellt.

7.5.0.2 Beispiel: Projektion

Ein anderes Beispiel, das im Zusammenhang mit Skalarprodukten häufig auftaucht, ist die senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen. Betrachten wir zwei Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 . Dabei sei der zweite Vektor normiert mit der Länge 1. Dann liefert das Skalarprodukt

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos(\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)) = |\vec{v}_1| \cos(\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2))$$

genau die Länge der Projektion von \vec{v}_1 auf \vec{v}_2 . Manchmal spricht man auch von dem Anteil oder der Komponente von \vec{v}_1 entlang \vec{v}_2 . Die senkrechte Projektion ergibt sich dann als:

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_2,$$

eben ein Vektor in Richtung von \vec{v}_2 mit der Länge $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$.

All diese Begriffe sind in dieser Form nicht so leicht zu verallgemeinern. Wir hatten als Vektorraum z.B. auch den Raum der Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ kennengelernt. Hier sind Begriffe wie Länge und Winkel nicht definiert. Im allgemeinen Fall geht man umgekehrt von einem Skalarprodukt als dem grundlegenden aus und leitet daraus Begriffe, wie Betrag, Abstand und Winkel ab.

7.5.1 Skalarprodukt

In einem Vektorraum V nennen wir eine Abbildung, die zwei beliebigen Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 eine reelle Zahl

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \in \mathbb{R}$$

zuordnet ein Skalarprodukt, falls für alle $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0.$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \text{ gdw. } \vec{v} = \vec{0}.$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1.$$

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v} = \vec{v}_1 \cdot \vec{v} + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}.$$

$$(c \cdot \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = c(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2).$$

7.5.1.1 Beispiel

Für den \mathbb{R}^3 haben wir schon

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \alpha$$

als Skalarprodukt kennen gelernt, was aber eben Begriffe, wie Winkel und Länge voraussetzt. Für integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ liefert

$$f \cdot g := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt.

Falls ein Skalarprodukt gegeben ist, können viele Begriffe sehr einfach über das Skalarprodukt definiert werden:

Betrag oder Norm: $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Abstand: $d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$.

Einheitsvektor: $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ für $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Orthogonal: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ gdw. $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Winkel: $\cos \varphi := \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$

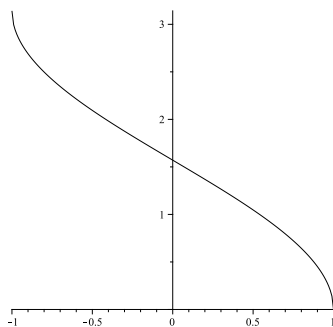


Abbildung 7.11: Die Umkehrfunktion des Cosinus: Arcuscosinus

Dabei setzt die Definition des Winkels die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| \leq |\vec{v}_1||\vec{v}_2|$$

voraus, da dann der Wert von $\cos \varphi$ immer zwischen -1 und 1 liegt. Für diese Ungleichung kann noch genauer ausgesagt werden, dass Gleichheit nur genau dann gilt, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind.

Beweis: Wir beweisen die Gleichung

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 \leq |\vec{v}_1|^2 \cdot |\vec{v}_2|^2.$$

1. Fall: Angenommen die beiden Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 sind linear abhängig. Dann haben wir bewiesen, dass sich mindestens einer der beiden Vektoren als Linearkombination des anderen darstellen lässt. Also setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an:

$$\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1.$$

Damit folgt:

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 = (\vec{v}_1 \cdot \lambda \vec{v}_1)^2 = \lambda^2 |\vec{v}_1|^4 = |\vec{v}_1|^2 \lambda^2 |\vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_1|^2 |\vec{v}_2|^2.$$

Somit ist für linear abhängige Vektoren die Gleichheit gezeigt.

2. Fall: Wir betrachten für ein Skalar $x \in \mathbb{R}$ zunächst die Linearkombination $x \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Es gilt nach den Rechenregeln für das Skalarprodukt:

$$|x\vec{v}_1 + \vec{v}_2|^2 = x^2 |\vec{v}_1|^2 + 2x\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + |\vec{v}_2|^2.$$

Da die beiden Vektoren linear unabhängig sind, gilt:

$$x\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \neq \vec{0}.$$

Daher muss aber die Länge dieser Linearkombination auch größer null sein:

$$|x\vec{v}_1 + \vec{v}_2|^2 > 0.$$

Das bedeutet, dass die quadratische Gleichung in x keine Lösung besitzt, also deren Diskriminante Δ kleiner null sein muss:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(\vec{v}_1 \vec{v}_2)^2 - 4|\vec{v}_1|^2 |\vec{v}_2|^2 < 0.$$

Somit folgt:

$$(\vec{v}_1 \vec{v}_2)^2 < |\vec{v}_1|^2 |\vec{v}_2|^2.$$

□

7.5.2 Norm

Wir haben oben die Norm oder den Betrag eines Vektors definiert als:

$$|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Allgemein verlangt man von einer Norm folgende Eigenschaften:

$$|\vec{v}| \geq 0$$

$$|\vec{v}| = 0 \text{ gdw. } \vec{v} = \vec{0}$$

$$|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| \text{ Dreiecksungleichung}$$

Diese Begriffsbildung der Norm ist aus der Längenmessung abgeleitet. Man würde diese Eigenschaften z.B. von einer Längenmessung für Stäbe erwarten. Jeder Stab hat eine Länge größer oder gleich 0. Die Länge eines Stabes ist nur genau dann gleich 0, wenn kein Stab da ist. Wenn der Stab um einen Faktor λ verlängert wird, ändert sich seine Länge genau um den Faktor λ usw.

Es gilt nun, dass jedes Skalarprodukt über die Definition $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ zu einer Norm mit den obigen vier Eigenschaften führt. Wir verzichten hier auf den Beweis.

7.5.3 Orthonormalsystem

Unter einem Orthonormalsystem von n Vektoren in einem Vektorraum V verstehen wir Vektoren

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$$

mit

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Das sind also Vektoren der Länge 1, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Für \mathbb{R}^3 liefern unsere kanonischen Einheitsvektoren ein Beispiel für ein Orthonormalsystem:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass ein Orthonormalsystem immer aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Dazu zeigen wir, dass aus

$$c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + \dots + c_n \vec{e}_n = \vec{0} \tag{7.3}$$

folgt, dass gilt: $c_j = 0$ für $j = 1, \dots, n$. Wir führen den Beweis nur für c_1 durch. Für alle anderen c_j kann dies analog gezeigt werden. Wir multiplizieren dazu die linke Seite der Gleichung 7.3 mit \vec{e}_1 und erhalten durch Anwenden der Rechenregeln für das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot (c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + \dots + c_n \vec{e}_n) &= c_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + \dots + c_n \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 \\ &= c_1 = 0 \quad \text{wegen Gleichung 7.3} \end{aligned}$$

Dabei haben wir für die rechte Seite verwendet, dass $\vec{e}_1 \cdot \vec{0} = 0$. Wie folgt das aus unseren Eigenschaften des Skalarproduktes? Es gilt:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{0} = \vec{e}_1 \cdot (0 \cdot \vec{e}_1) = 0 \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 0.$$

7.5.4 Orthonormalbasis

Falls eine Basis gleichzeitig ein Orthonormalsystem bildet, nennt man die Basis auch eine Orthonormalbasis (ONB).

7.5.5 Skalarprodukt für Vektoren in einem Orthonormalsystem

Für Koordinatenvektoren, die bezüglich einer Orthonormalbasis gegeben sind, ergibt sich eine sehr einfache Formel für das Skalarprodukt. Es seien also

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren bzgl. eines Orthonormalsystems $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n) \cdot (w_1 \vec{e}_1 + \dots + w_n \vec{e}_n) \\ &= v_1 \vec{e}_1 (w_1 \vec{e}_1 + \dots + w_n \vec{e}_n) + (v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n) \cdot (w_1 \vec{e}_1 + \dots + w_n \vec{e}_n) \\ &= (v_1 \vec{e}_1 w_1 \vec{e}_1 + \dots + v_1 \vec{e}_1 w_n \vec{e}_n) + (v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n) \cdot (w_1 \vec{e}_1 + \dots + w_n \vec{e}_n) \\ &= (v_1 w_1 + 0 + \dots + 0) + (v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n) \cdot (w_1 \vec{e}_1 + \dots + w_n \vec{e}_n) \\ &= v_1 w_1 + \dots + v_n w_n. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

7.5.5.1 Beispiel

Wir betrachten im \mathbb{R}^3 mit den kanonischen Einheitsvektoren als Basis die beiden Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 4 + 0 - 6 = -2.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{-2}{5 \cdot 3} \approx -0,133.$$

$$\varphi \approx 97,7^\circ.$$

Betrachtet man an Stelle von $\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}$ den Betrag dieses Wertes

$$\frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| |\vec{w}|},$$

dann erhält man immer den kleineren der beiden eingeschlossenen Winkel. In diesem Beispiel erhalten wir für $\cos \varphi = 2/15$ den Winkel $\varphi \approx 82,3^\circ$.

7.5.5.2 Beispiel

Wir betrachten ein Dreieck im Raum gegeben durch die drei Ecken A, B und C , welche durch die drei Ortsvektoren definiert sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Winkel γ in der Ecke C . Wir berechnen dazu die beiden Vektoren von der Ecke C nach A und von C nach B :

$$\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{CB} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für den gesuchten Winkel:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{-4 + 6 + 36}{\sqrt{44} \sqrt{49}} = \frac{38}{7\sqrt{44}} \approx 0,8184.$$

und somit gilt für den gesuchten Winkel $\gamma \approx 35,08^\circ$.

7.5.5.3 Beispiel: Oktaeder

Wir betrachten einen Oktaeder. Das ist ein regelmäßiger Körper aus 8 gleichseitigen Dreiecken. Er gehört zu den fünf Platonischen Körpern. Das regelmäßige Oktaeder kann zum Beispiel mit den 6 Ecken

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gebildet werden, wie in Abbildung 7.12 dargestellt.

Wir berechnen den Winkel zwischen zwei benachbarten Flächen. Wir betrachten dazu zwei benachbarte Dreiecke und berechnen den Winkel der Ebenen in denen die Dreiecke liegen. Konkret betrachten wir die beiden Ebenen, die von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} bzw. \vec{a} und \vec{c} aufgespannt werden.

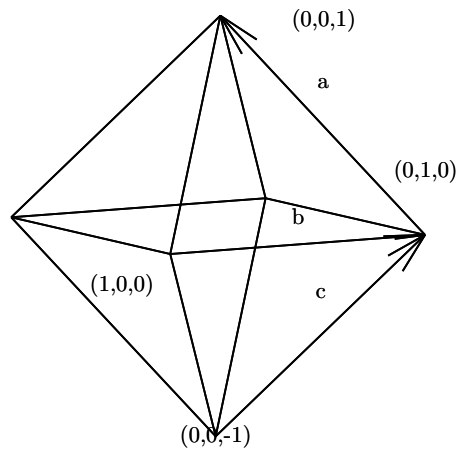


Abbildung 7.12: Oktaeder

Es gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir raten, dass der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht auf der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene steht. Die lässt sich leicht überprüfen, indem wir die zwei Skalarprodukte berechnen:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{b} = 0.$$

(Mit Hilfe des Vektorproduktes könnte ein solcher Vektor, der auf \vec{a} und \vec{b} senkrecht steht auch leicht berechnet werden, aber das Vektorprodukt wird erst später behandelt.) Entsprechend überprüfen wir für den Vektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dass er wegen

$$\vec{w} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{w} \cdot \vec{c} = 0$$

senkrecht auf der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene steht. Also können wir den Winkel zwischen zwei benachbarten Dreiecken eines Oktaeder berechnen, indem wir den Winkel zwischen \vec{v} und \vec{w} berechnen:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = -\frac{1}{3}.$$

Somit beträgt der Winkel ca. $109,5^\circ$.

7.5.6 Orthogonale Matrizen

Wir haben aus dem fundamentalen Begriff des Skalarproduktes wichtige Eigenschaften, wie Längen, Winkel und Abstände abgeleitet. Ferner haben wir schon im letzten Kapitel gesehen, dass insbesondere durch quadratische Matrizen wichtige geometrische Operationen beschrieben werden können.

Falls nun eine $(n \times n)$ -Matrix A , die ja mittels $A \cdot \vec{v}$ eine Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n beschreibt, bei dieser Transformation Skalarprodukte nicht verändert, dann bleiben Längen, Winkel und Abstände unverändert. Eine solche Matrix nennt man *orthogonal*. Das ist also genau dann der Fall, wenn gilt:

$$A\vec{v} \cdot A\vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \text{für alle } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

Folgende drei Bedingungen sind äquivalent:

- a) A ist eine orthogonale Matrix.
- b) Die Spalten, bzw. die Zeilen von A bilden ein Orthonormalsystem.
- c) $A^{-1} = A^t$.

Beweis: Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass die Vektoren bzgl. einer Orthonormalbasis gegeben sind, also das Skalarprodukt sich über

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

berechnen läßt. Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor $A\vec{v}$ kann auch als Matrixmultiplikation aufgefaßt werden. Dabei stellt \vec{v} eine $(n \times 1)$ -Matrix dar. Damit gilt

$$(A\vec{v})^t = \vec{v}^t \cdot A^t.$$

Wir betrachten das Skalarprodukt der beiden transformierten Vektoren $A\vec{v}$ und $A\vec{w}$:

$$A\vec{v} \cdot A\vec{w}.$$

Das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren kann dann auch als Matrixprodukt der beiden Vektoren berechnet werden. Der eine Vektor muß dabei transponiert werden:

$$(A\vec{v})^t \cdot A\vec{w}.$$

Damit gilt dann:

$$A\vec{v} \cdot A\vec{w} = (A\vec{v})^t \cdot A\vec{w} = \vec{v}^t A^t \cdot A\vec{w}.$$

Für eine orthogonale Matrix A gilt also

$$\vec{v}^t A^t \cdot A\vec{w} = \vec{v}^t \vec{w}$$

für alle Vektoren \vec{v} und \vec{w} . Dann gilt dies insbesondere für die kanonischen Einheitsvektoren \vec{e}_i und \vec{e}_j :

$$\begin{aligned} \vec{e}_i^t A^t A \vec{e}_j &= \vec{a}_i^t \cdot \vec{a}_j \quad \text{der } i\text{-te und } j\text{-te Spaltenvektor von } A \\ &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad \text{weil } A \text{ orthogonale Matrix ist} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Das heißt aber, die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem. Damit ist also gezeigt, dass auch der Eigenschaft a) die Eigenschaft b) folgt.

Wenn aber die Spalten einer Matrix ein Orthonormalsystem liefern, dass folgt dass die transponierte Matrix gleich der inversen Matrix ist:

$$A^t A = \mathbb{E}_n = A A^t.$$

Die Umkehrung gilt hierbei ebenso: wenn bei einer Matrix die Transponierte die Inverse ist, können wir direkt ablesen, dass die Spalten der Matrix ein Orthonormalsystem liefern. Damit ist gezeigt, dass b) genau dann gilt, wenn c) gilt.

Es fehlt uns also noch zu zeigen, dass jede Matrix A mit $A^t = A^{-1}$ auch orthogonal ist. Wir müssen also zeigen, dass für beliebige Vektoren \vec{v} und \vec{w} gilt:

$$A\vec{v} \cdot A\vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Dies ist aber jetzt - nach unseren Vorüberlegungen - leicht nachzurechnen:

$$\begin{aligned} A\vec{v} \cdot A\vec{w} &= (A\vec{v})^t A\vec{w} \\ &= \vec{v}^t A^t A\vec{w} \\ &= \vec{v}^t \mathbb{E}_n \vec{w} \\ &= \vec{v}^t \vec{w} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Äquivalenz der drei Eigenschaften bewiesen. □

Betrachten wir die Determinante einer orthogonalen Matrix A :

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= (\det A^t)(\det A) \\ &= \det(A^t A) \\ &= \det \mathbb{E} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\det A = \pm 1.$$

7.5.6.1 Beispiel: Orthogonale Matrix

Die Rotationsmatrix:

$$R = \begin{pmatrix} \cos d & \sin d & 0 \\ -\sin d & \cos d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stellt eine Drehung um die z -Achse um den Winkel d dar. Betrachten wir eine Drehung um den Winkel $-d$, so erhalten wir die transponierte Matrix:

$$R^t = \begin{pmatrix} \cos d & -\sin d & 0 \\ \sin d & \cos d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist also invers zu R :

$$R \cdot R^t = \mathbb{E}.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass die Vektoren von R ein Orthonormalsystem bilden. Durch Rotationen ändern sich Winkel und Längen nicht, daher ist es auch anschaulich klar, dass Rotationsmatrizen orthogonale Matrizen sein müssen.

7.5.6.2 Beispiel: Spiegelungen im Raum an einer Ebene durch den Ursprung

In diesem Beispiel können wir nun schon eine ganze Reihe verschiedener Konzepte, die wir bisher behandelt haben, verwenden. Es geht darum eine Matrix A aufzustellen, die eine Spiegelung an einer beliebigen Ebene E , die durch den Ursprung geht, beschreibt.

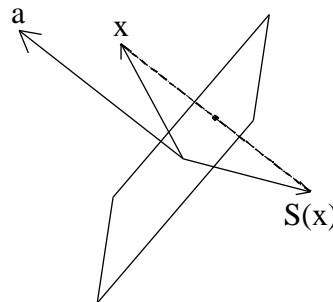


Abbildung 7.13: Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung

Die Ebene E durch den Ursprung sei gegeben durch einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht, wie in Abbildung 7.13 dargestellt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Dabei sei der Vektor \vec{a} normiert, es gelte also $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Ein Vektor \vec{x} beschreibt also genau dann einen Punkt in der Ebene E , wenn für das Skalarprodukt gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0.$$

Die folgende Abbildung S liefert die gesuchte Spiegelung:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{x} - 2(\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Wir wissen, dass wir die gesuchte Matrix A bestimmen können, in dem wir die Bilder der Einheitsvektoren betrachten. Für \vec{e}_1 gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2a_1^2 \\ -2a_1a_2 \\ -2a_1a_3 \end{pmatrix}.$$

Analoges gilt für die anderen Einheitsvektoren und somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 A &= (S(\vec{e}_1), S(\vec{e}_2), S(\vec{e}_3)) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - 2a_1^2 & -2a_1a_2 & -2a_1a_3 \\ -2a_1a_2 & 1 - 2a_2^2 & -2a_2a_3 \\ -2a_1a_3 & -2a_2a_3 & 1 - 2a_3^2 \end{pmatrix} \\
 &= E - 2\vec{a}\vec{a}^t.
 \end{aligned}$$

Von der Anschauung her müßte die Matrix A orthogonal sein, da eine Spiegelung die Winkel und Längen etc... nicht verändert. Rechnen wir das exemplarisch für die beiden ersten Spalten der Matrix A nach:

$$\begin{aligned}
 S(\vec{e}_1) \cdot S(\vec{e}_1) &= (1 - 2a_1^2)^2 + 4a_1^2a_2^2 + 4a_1^2a_3^2 \\
 &= 1 - 4a_1^2 + 4a_1^4 + 4a_1^2a_2^2 + 4a_1^2a_3^2 \\
 &= 1 - 4a_1^2 + 4a_1^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
 S(\vec{e}_1) \cdot S(\vec{e}_2) &= -2a_1a_2 + 4a_1^2a_1a_2 - 2a_1a_2 + 4a_2^2a_1a_2 + 4a_1a_2a_3^2 \\
 &= -4a_1a_2 + 4a_1a_2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Analog kann nachgerechnet werden, dass auch die beiden anderen Spaltenvektoren der Matrix A die Länge 1 besitzen und alle Spaltenvektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen.

7.5.6.3 Beispiel

Betrachten wir zur Spiegelung an einer Ebene noch ein kleines Beispiel. Die Spiegelebene durch den Ursprung E sei durch den Normalenvektor \vec{a} gegeben und gespiegelt werden soll ein Punkt, der beschrieben wird durch den Vektor \vec{x} :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Unsere Formeln gelten nur für normierte Vektoren:

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann berechnet sich der an der Ebene E gespiegelt Punkt durch:

$$\begin{aligned}
 S(\vec{x}) &= \vec{x} - 2(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot 29 \cdot \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt zwischen \vec{x} und $S(\vec{x})$ lässt sich durch

$$\frac{1}{2}(\vec{x} + S(\vec{x})) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =: \vec{v}$$

berechnen. Dieser Punkt muss in der Ebene liegen, was sich leicht überprüfen lässt:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

7.5.7 Vektor- oder Kreuzprodukt (nur im \mathbb{R}^3)

Zum Abschluss dieses Abschnittes behandeln wir noch einen Spezialfall, den es nur im dreidimensionalen \mathbb{R}^3 gibt, das sogenannte Vektor- oder Kreuzprodukt. Dieses taucht in der Physik, Technik und auch in der Geometrie häufiger auf. Im Gegensatz zum Skalarprodukt, das ja eine reelle Zahl ergibt, ist das Ergebnis hier wieder ein Vektor.

Das Vektorprodukt für zwei beliebige Vektoren \vec{a} und \vec{b} aus dem \mathbb{R}^3 ist durch die drei folgenden, grundlegenden Regeln eindeutig bestimmt:

- a) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} .
- b) \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. (Ein Rechtssystem nennt man die Anordnung von drei Vektoren in der Art, dass Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand in dieser Reihenfolge in Richtung der drei Vektoren zeigen können.)

c) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$, wobei der Winkel immer kleiner π gemessen werden kann.

Aus der dritten Bedingung sehen wir, dass das Vektorprodukt gleich 0 wird, falls entweder mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist, oder der Winkel zwischen den beiden Vektoren 0° oder 180° beträgt. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die beiden Vektoren parallel sind. Das Vektorprodukt ist also genau der Nullvektor, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind.

Das Vektorprodukt nimmt seinen größten Wert an, wenn der Winkel 90° beträgt.

Der Betrag des Vektorproduktes $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ beschreibt auch den Flächeninhalt des Parallelogrammes, das von den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird.

Da es zu einem Vektor \vec{a} unendliche viele Vektoren \vec{b} gibt, die unterschiedliche Parallelogramme mit gleichen Flächeninhalt aufspannen, ist das Vektorprodukt nicht umkehrbar. Bevor wir zu konkreten Berechnungen des Vektorproduktes kommen, verdeutlichen wir uns noch wichtige Rechenregeln. Aus den grundlegenden Eigenschaften folgt sofort:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

Das Vektorprodukt ist also insbesondere nicht kommutativ. Für einen skalaren Faktor n gilt:

$$n(\vec{a} \times \vec{b}) = (n\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (n\vec{b}),$$

da die Verlängerung einer Seite eines Parallelogramms um einen Faktor n immer zu einer Vervielfachung der Fläche um den Faktor n führt. An drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer Ebene kann man sich klar machen, dass das Assoziativgesetz **nicht** gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Es gilt aber das Distributivgesetz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

7.5.8 Berechnung des Vektorproduktes mit Koordinaten

Wir stellen die beiden Vektoren mit Koordinaten bzgl. der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dar:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \\ \vec{b} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Wir gehen dabei davon aus, dass es sich um eine Orthonormalbasis handelt, also dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben. Darüberhinaus sollen sie ein Rechtssystem bilden. Wenn $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ein Rechtssystem bilden, dann bilden auch die zyklischen Vertauschungen

$$\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1$$

bzw.

$$\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2$$

Rechtssysteme. Damit gilt aber $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0}$ für $i = 1, 2, 3$ und ferner:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Wenden wir also unsere Rechenregeln auf $\vec{a} \times \vec{b}$ an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\ &= a_1 b_1 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_1 b_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + a_1 b_3 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad a_2 b_1 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + a_2 b_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + a_2 b_3 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad a_3 b_1 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + a_3 b_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + a_3 b_3 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) + \\ &= a_1 b_2 \vec{e}_3 - a_2 b_1 \vec{e}_3 - a_1 b_3 \vec{e}_2 + a_3 b_1 \vec{e}_2 + a_2 b_3 \vec{e}_1 - a_3 b_2 \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Um sich die Vorzeichenverteilung leichter merken zu können, kann man die Zeilenentwicklung der Determinante in folgender (mathematisch nicht ganz sauberer) Notation verwenden:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Oder man verwendet folgende Merkregel, die Sie vielleicht schon aus der Schule kennen: Man schreibt die beiden Vektoren, für die das Kreuzprodukt berechnet werden soll, in folgender Weise zweimal untereinander:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

Dann streicht man die erste und die letzte Zeile:

$$\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

Jetzt kann man auf jeden der 2×2 -Unterblöcke einfach die Rechenregel für 2×2 -Determinanten anwenden und erhält das Vektorprodukt. Der erste 2×2 -Unterblock ergibt die erste Komponente usw.:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3 \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

7.5.8.1 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7.5.8.2 Beispiel: Abstand zweier windschiefer Geraden

Zwei windschiefe Geraden seien gegeben durch

$$g_1 : \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}_1, \quad g_2 : \vec{r}_2 + \lambda \vec{a}_2.$$

Die zwei Richtungsvektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 legen eine Schar von parallelen Ebenen fest. In einer dieser Ebenen liegt die Gerade g_1 und in einer anderen Ebene g_2 . Wir nennen diese beiden Ebenen E_1 und E_2 . Der Abstand der beiden Geraden entspricht nun genau dem Abstand dieser beiden Ebenen. Der Normalenvektor dieser Ebenen, der also senkrecht auf den Ebenen steht, berechnet sich durch:

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2.$$

Der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ verbindet einen Punkt der Ebene E_1 mit einem Punkt der Ebene E_2 . Der folgende Ausdruck d

$$d = \left| (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

liefert die Länge des Vektors $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ in Richtung des Normalenvektors \vec{n} und somit den gesuchten Abstand der beiden Geraden. Setzen wir für \vec{n} das Vektorprodukt ein, so erhalten wir für den Abstand d :

$$d = \left| (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \right|.$$

7.5.9 Determinanten und Volumen

Wir betrachten zunächst zwei Vektoren in der Ebene \vec{a} und \vec{b} . Diese spannen ein Parallelogramm auf, dessen Fläche wir berechnen.

Bevor wir die Fläche berechnen, wollen wir noch eine Beschreibung der Fläche geben. Zu der Fläche gehören alle Punkte, die sich durch folgende Ortsvektoren beschreiben lassen:

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad \text{mit } 0 \leq \lambda, \mu \leq 1.$$

Mit Hilfe des Kreuzproduktes können wir das Parallelogramm in die (x, y) -Ebene des dreidimensionalen Raumes einbetten und durch zwei Vektoren beschreiben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

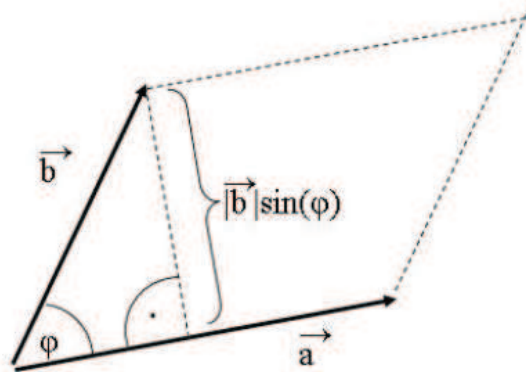


Abbildung 7.14: Berechnung der Fläche des Parallelogrammes

Der Betrag des Kreuzproduktes liefert die Fläche des Parallelogrammes:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Somit gilt im zweidimensionalen Raum für die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

dass sich die Fläche als Determinante berechnen lässt:

$$F = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = |\det(\vec{a}, \vec{b})|.$$

Falls man die Rechnung ohne Kreuzprodukt direkt im zweidimensionalen Raum mit Hilfe des Skalarproduktes ausführt, wird sie etwas aufwändiger:

$$\begin{aligned} F &= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \\ F^2 &= \vec{a}^2 \vec{b}^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \vec{a}^2 \vec{b}^2 \left(1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} \right) \\ &= \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + a_2^2 b_2^2 - (a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2) \\ &= (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \det(\vec{a}, \vec{b})^2. \end{aligned}$$

Auch hierbei erhalten wir:

$$F = |\det(\vec{a}, \vec{b})|.$$

Die Determinante ohne Betragsfunktion ergibt für zwei Vektoren im zweidimensionalen Raum ein orientiertes Volumen, also ein Volumen mit Vorzeichen.

Führen wir eine analoge Betrachtung für den dreidimensionalen Raum durch. Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ drei Vektoren im \mathbb{R}^3 . Falls die drei Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie einen sogenannten Spat auf, wie wir ihn zum Beispiel bei dem Assoziativgesetz der Vektoraddition betrachtet haben (siehe Abbildung 5.2). Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass das Kreuzprodukt von \vec{b} und \vec{c} einen Vektor ergibt, der senkrecht auf den beiden Vektoren steht und dessen Länge genau die Fläche des Parallelogrammes ergibt. Sei $\vec{n} := \vec{b} \times \vec{c}$ und $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n}$ der normierte Vektor. Dann ergibt

$$|\vec{a} \cdot \vec{n}_0|$$

die Länge der senkrechten Projektion von \vec{a} auf \vec{n} und somit die Höhe des Spates.

Das Volumen des Spates V läßt sich also berechnen als

$$\begin{aligned} V &= |\vec{a} \cdot \vec{n}_0| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \\ &= |\vec{a} \cdot \frac{(\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \end{aligned}$$

und somit als:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$

Die ist aber gleich

$$V = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Die Determinante der drei Vektoren ergibt also wieder ein orientiertes Volumen. Für drei Vektoren, die ein Rechtssystem bilden, ist das Volumen positiv. Das Produkt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

wird auch als Spatprodukt bezeichnet.

Die Determinantenfunktion kann also für n Vektoren in einen n -dimensionalen Raum als verallgemeinertes, orientiertes Volumen angesehen werden. Viele der im Abschnitt 6.3.3 auf Seite 141 behandelten sieben Rechenregeln sind für ein solches orientiertes Volumen recht anschaulich. So besagte zum Beispiel die zweite Regel, dass das Volumen für linear abhängige Vektoren gleich null ist. Die siebte Regel besagt, dass das Volumen für n Einheitsvektoren gleich 1 ist. Die fünfte Regel besagt, dass sich das Volumen um einen Faktor

c vergrößert, wenn einer der Vektoren um den Faktor c vergrößert wird. Die sechste Regel läßt sich zumindest für Parallelogramme und das Spat veranschaulichen.

Die Betrachtung läßt sich nun ausdehnen auf Matrizen. Wir betrachten eine (3×3) -Matrix:

$$B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Wir betrachten im \mathbb{R}^3 einen Spat aufgespannt von den drei Vektoren

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3.$$

Der Spat hat das Volumen:

$$V := |\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)|.$$

Wir wenden die Matrix B auf dieses Spat, also auf die 3 Vektoren an und erhalten nach der Transformation durch die Matrix einen neuen Spat aufgespannt durch $B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, B\vec{a}_3$. Das Volumen des neuen Spates ist:

$$V_A := |\det(B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, B\vec{a}_3)|.$$

Die drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ können wir zu einer Matrix A zusammen fassen:

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3).$$

Dann gilt:

$$B \cdot A = B(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = (B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, B\vec{a}_3).$$

Damit läßt sich aber das Volumen des transformierten Spates leicht ausrechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} V_A &= |\det(B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, B\vec{a}_3)| \\ &= |\det(BA)| \\ &= |\det(B) \det(A)| \quad \text{Multiplikationssatz für Determinanten} \\ &= |\det(B)| |\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)| \\ &= |\det(B)| \cdot V. \end{aligned}$$

Das heißt, das Volumen des Spates verändert sich bei der Anwendung der Matrix B genau um den Faktor $|\det(B)|$. Daher wird die Determinante auch Volumenverzerrungsfaktor genannt. Für Matrizen mit Determinante 1 gilt, dass sie das Volumen erhalten, also volumentreu sind.

7.6 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Es sei A eine quadratische $(n \times n)$ -Matrix, $\vec{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Falls

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

gilt, dann heißt λ Eigenwert und \vec{v} Eigenvektor zur Matrix A . Falls \vec{v} ein Eigenvektor ist, dann gilt wegen der Linearität, dass auch jedes Vielfache $c\vec{v}$ Eigenvektor ist, wie folgende Rechnung zeigt:

$$A \cdot (c\vec{v}) = c \cdot (A\vec{v}) = c \cdot \lambda\vec{v} = \lambda \cdot (c\vec{v}).$$

Der Eigenwert bleibt dabei gleich.

7.6.0.1 Beispiel

Verdeutlichen wir uns an einem ganz einfachen Beispiel, dass Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren die Wirkung einer Matrix A charakterisieren. Wir betrachten noch einmal die Spiegelung an der x -Achse, die durch folgende Matrix dargestellt werden kann:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für diese Matrix A gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. 1 ist ein Eigenwert für A und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu A .

Gleichzeitig sind der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und seine Vielfachen genau die Vektoren, die unter dieser Abbildung unverändert bleiben. Es gibt noch weitere Eigenvektoren, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist auch -1 ein Eigenwert und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu A . Wie wir schon gesehen haben, sind auch alle Vielfachen dieses Vektors Eigenvektoren.

Hierbei steht diese Eigenvektoren senkrecht zur Spiegelungsachse ($= x$ -Achse). Der gespiegelte Vektor zeigt zwar in die entgegengesetzte Richtung, aber er ist parallel zum ursprünglichen Vektor. Diese beiden Vektoren sind bis auf Vielfaches die einzigen Eigenvektoren und 1 und -1 die beiden einzigen Eigenwerte.

Betrachten wir eine weitere Spiegelung:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also wieder die beiden Eigenwerte 1 und -1. Über die Eigenvektoren und Eigenwerte können wir die Spiegelachse und die Spiegelrichtung bestimmen. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

der Eigenvektor zu dem Eigenwert +1 ist, zeigt in Richtung der Spiegelachse und der dazu senkrecht stehende Vektor

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix},$$

der Eigenvektor zu dem Eigenwert -1 ist, zeigt in Spiegelrichtung.

7.6.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Zu einer gegebenen Matrix A suchen wir einen Vektor \vec{v} und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Die rechte Seite läßt sich schreiben als:

$$\lambda\vec{v} = \mathbb{E}\lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{v}.$$

Damit können wir die Gleichung $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ schreiben als

$$A\vec{v} - \mathbb{E}\lambda\vec{v} = (A - \lambda\mathbb{E})\vec{v} = \left(A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \vec{v} = 0.$$

Als Eigenvektoren lassen wir nur Vektoren ungleich Null zu. Dieses homogene Gleichungssystem besitzt aber nur genau dann eine solche Lösung ungleich null, wenn die Determinante der Matrix

$$A - \lambda\mathbb{E} = A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

gleich Null ist. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\det(A - \lambda \mathbb{E}) = 0.$$

Diese Gleichung in der Unbestimmten λ wird auch als **charakteristisches Polynom** zur Matrix A bezeichnet. Die Nullstellen dieses Polynomes liefern die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Das charakteristische Polynom einer $(n \times n)$ -Matrix besitzt den Grad n und somit erhalten wir maximal n reelle Eigenwerte.

Nachdem man die Eigenwerte bestimmt hat, kann man durch Lösen des homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i \mathbb{E})\vec{x} = 0$$

die Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ_i bestimmen. Der Raum der Eigenvektoren kann auch mehrdimensional sein, wenn ein Eigenwert eine mehrfache Nullstelle ist.

7.6.1.1 Beispiel

Betrachten wir als Beispiel für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren die eben schon verwendete Spiegelungsmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir stellen das charakteristische Polynom $\det(A\vec{x} - \lambda\mathbb{E}\vec{x}) = 0$ auf:

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \right| &= \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \left(-\frac{1}{2} - \lambda \right) - \frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - 1 = 0. \\ \lambda^2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynomes:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Um nun zu dem ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ den Raum der Eigenvektoren zu bestimmen, setzen wir λ_1 in das homogene Gleichungssystem ein:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Im Allgemeinen können wir mit Hilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge bestimmen. Aber in diesem konkreten Fall ist klar, dass die zweite Zeile der Matrix linear abhängig ist von der ersten, also genügt es die Gleichung zu betrachten, die sich aus der ersten Zeile ergibt:

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$$

oder einfacher:

$$-x + \sqrt{3}y = 0.$$

Also

$$x = \sqrt{3}y.$$

Somit liefert

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und alle Vielfachen davon einen Eigenwert. Um zu einer einheitlichen Darstellung zu kommen, gibt man den Eigenvektor häufig normiert an:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1| &= \sqrt{3+1} = 2 \\ \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -1$ ergibt sich das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Somit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y &= 0 \\ x + \frac{\sqrt{3}}{3}y &= 0 \\ x &= -\frac{\sqrt{3}}{3}y \end{aligned}$$

Also erhalten wir als zweiten Eigenvektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normieren ergibt:

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{9}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

7.6.2 Diagonal- und Dreiecksmatrizen

Wir hatten im Abschnitt 6.3.6 schon gesehen, dass die Determinante für obere (oder auch untere) Dreiecksmatrizen besonders einfach zu berechnen ist. Dies liefert auch eine besonders einfache Behandlung des charakteristischen Polynomes. Wir betrachten die obere Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lautet dann:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{E}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot (a_{33} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Und somit sind die Eigenwerte einfach die Diagonalelemente:

$$\lambda_1 = a_{11}, \dots, \lambda_n = a_{nn}.$$

Dies gilt auch für Diagonalmatrizen.

7.6.3 Diagonalisierung von Matrizen

Eigenwerte und Eigenvektoren finden vielfache Anwendungen, z.B. in der Computergrafik und in der Robotik, aber auch bei Bildauswertungen und Auswertungen großer Datenmengen (big data). In diesem Abschnitt behandeln wir noch ein weitreichendes Ergebnis, das bei vielen solcher Anwendungen zum Tragen kommt.

Es sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit n verschiedenen, reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gibt es zu diesen n Eigenwerten auch n verschiedenen, linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Aus diesen n Eigenvektoren können wir nun eine invertierbare Transformationsmatrix B bilden:

$$B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n).$$

B^{-1} sei die dazu inverse Matrix. Dann gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Das heißt, die lineare Abbildung, die durch die Matrix A dargestellt wird, kann nach einer Transformation des Koordinatensystems mit Hilfe der Matrizen B und B^{-1} als sogenannte Diagonalmatrix dargestellt werden, also mit Hilfe einer Matrix, die nur in der Diagonalen Werte ungleich null besitzt. Die Werte dieser Diagonalmatrix sind dann genau die Eigenwerte.

Um diese Eigenschaft zu beweisen untersuchen wir die Matrix D definiert durch

$$D := B^{-1}AB.$$

Wir wissen, dass die Spalten dieser Matrix D die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren sind. Daher schauen wir uns $D \cdot \vec{e}_i$ an. Dazu betrachten wir

$$B^{-1}AB\vec{e}_i$$

in drei Schritten: Die Matrix B bildet einen kanonischen Einheitsvektor \vec{e}_i einfach auf den i -ten Eigenvektor ab

$$B \cdot \vec{e}_i = \vec{v}_i,$$

da die Matrix B ja spaltenweise aus den Eigenvektoren aufgebaut ist. Als nächstes wird die Matrix A angewendet, aber diese bildet ja nach Voraussetzung jeden Eigenvektor auf ein Vielfaches von sich selbst ab:

$$A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i.$$

Dabei ist der Faktor genau der Eigenwert. Für den dritten Schritt müssen wir B^{-1} betrachten. Da aber B die Einheitsvektoren auf die Eigenvektoren abbildet, muss B^{-1} umgekehrt Eigenvektoren wieder auf die Einheitsvektoren abbilden. Es gilt also:

$$B^{-1}\lambda_i\vec{v}_i = \lambda_i B^{-1}\vec{v}_i = \lambda_i \vec{e}_i.$$

Somit erhalten wir insgesamt:

$$D\vec{e}_i = B^{-1}AB\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i.$$

Also gilt:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Etwas allgemeiner als oben formuliert ist nun diese Diagonalisierung manchmal auch möglich, wenn A weniger als n Eigenwerte besitzt und diese ggf. Mehrfachnullstellen des charakteristischen Polynomes sind. Dies ist genau dann möglich, falls es zu den Mehrfachnullstellen auch mehrere linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Es müssen zum Aufstellen der Matrix B eben insgesamt n linear unabhängige Eigenvektoren gefunden werden.

Wir verdeutlichen uns die Diagonalisierung und die Bedingungen, wann eine solche möglich ist, an verschiedenen Beispielen.

7.6.3.1 Beispiel

Wir betrachten die (2×2) -Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda \mathbb{E}) = 0$ ergibt hier:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{E}) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)^2 - 9 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \\ &= (\lambda - 8)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Dies ergibt die beiden Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2.$$

Da wir für die (2×2) -Matrix zwei verschiedene, reelle Eigenwerte gefunden haben, ist diese Matrix diagonalisierbar. Wir berechnen als nächstes den Eigenvektor zu dem Eigenwert $\lambda_1 = 8$. Dazu setzen wir den Eigenwert $\lambda_1 = 8$ in $A - \lambda \mathbb{E} = \vec{0}$ ein und lösen dieses homogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir erhalten zu dem Eigenwert 8 einen Eigenvektor durch:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir für den Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

und somit eine Eigenvektor:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix B bestehend aus zwei linear unabhängigen Eigenvektoren ergibt sich:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse einer (2×2) -Matrix läßt sich leicht berechnen durch:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Also lautet die inverse Matrix zu B :

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D.$$

Führen wir für die Diagonalmatrix die Bezeichnung D ein, so ist obige Gleichung äquivalent zu:

$$A = BDB^{-1}.$$

Das heißt, wenn wir an Stelle eines Koordinatensystems mit den kanonischen Einheitsvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 übergehen zu einem Koordinatensystem mit einer Basis bestehend aus den Eigenvektoren der Matrix A

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann wird die Matrix A bezüglich des neuen Koordinatensystems zu einer Diagonalmatrix D .

Wir verdeutlichen uns den Übergang von dem einen Koordinatensystems zu dem anderen an einem Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix B^{-1} leistet nun die Transformation vom Koordinatensystem mit Basis \vec{e}_1, \vec{e}_2 auf das Koordinatensystem mit Basis \vec{v}_1, \vec{v}_2 , denn es gilt:

$$B^{-1} \cdot \vec{v}_1 = \vec{e}_1, \quad B^{-1} \cdot \vec{v}_2 = \vec{e}_2.$$

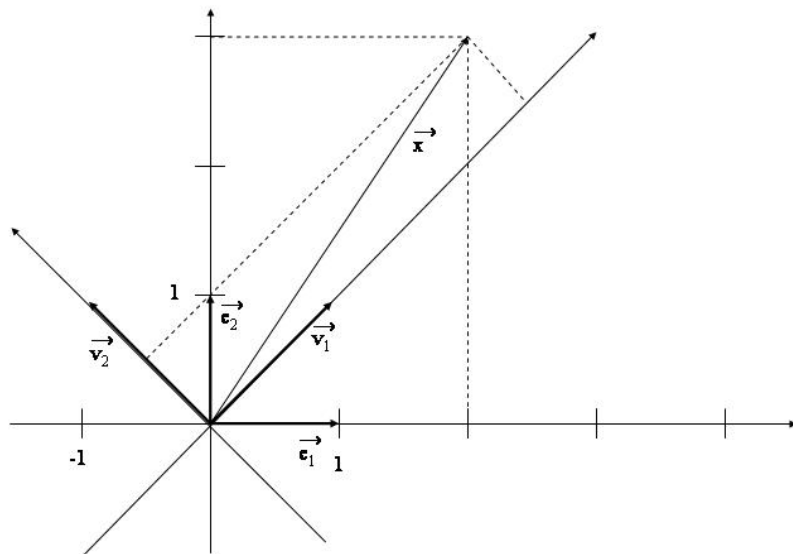


Abbildung 7.15: Transformation des Koordinatensystems mit Eigenvektoren als Basis

Wir berechnen B^{-1} angewendet auf den Vektor \vec{x} :

$$B^{-1} \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Diese neuen Koordinaten des Punktes, der durch den Vektor \vec{x} beschrieben wird, lassen sich in [Abbildung 7.15](#) anschaulich ablesen. In diesem neuen Koordinatensystem kann die Abbildung, die ursprünglich durch A beschrieben wurden, jetzt durch Anwenden der Diagonalmatrix D ausgeführt werden:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis kann mittels B wieder im ursprünglichen Koordinatensystem dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \end{pmatrix},$$

was natürlich Folgendem entspricht:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

7.6.3.2 Beispiel: Spiegelung

Im vorigen Beispiel haben wir nur die Transformation des Koordinatensystems betrachtet. An Hand des sehr einfachen Beispiels der Spiegelung, die wir am Beginn dieses Kapitels betrachtet haben, können wir auch die Wirkungsweise der Matrix im transformierten Koordinatensystem besonders einfach darstellen. Wir betrachten also noch einmal die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wie oben ausführlich dargestellt, besitzt diese Matrix die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, sowie die Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix aus den Eigenvektoren und ihre Inverse lauten:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalisierung ergibt:

$$B^{-1}AB = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: D.$$

Daraus folgt:

$$A = B \cdot D \cdot B^{-1}.$$

Also kann die Matrix A ausgeführt werden, indem erst durch die Matrix B^{-1} in ein anderes Koordinatensystem gewechselt wird und dort die Diagonalmatrix D angewendet wird. Anschliessend kann durch Anwenden der Matrix B wieder in das ursprüngliche Koordinatensystem zurückgewechselt werden.

In Abbildung 7.16 wird der Punkt $P(1|4)$ als Vektor $\vec{x} = (1, 4)^t$ bzgl. der Standardbasis \vec{e}_1, \vec{e}_2 dargestellt. Mit B^{-1} transformieren wir \vec{x} in das Koordinatensystem mit der Basis bestehend aus Eigenvektoren:

$$B^{-1}\vec{x} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,83 \\ 0,85 \end{pmatrix} =: \vec{x}_n.$$

Bezüglich diesem (gedrehten) Koordinatensystem wird die Spiegelung zu einer einfachen Spiegelung an der x -Achse mit Matrix D :

$$D\vec{x}_n \approx \begin{pmatrix} 0,83 \\ -0,85 \end{pmatrix},$$

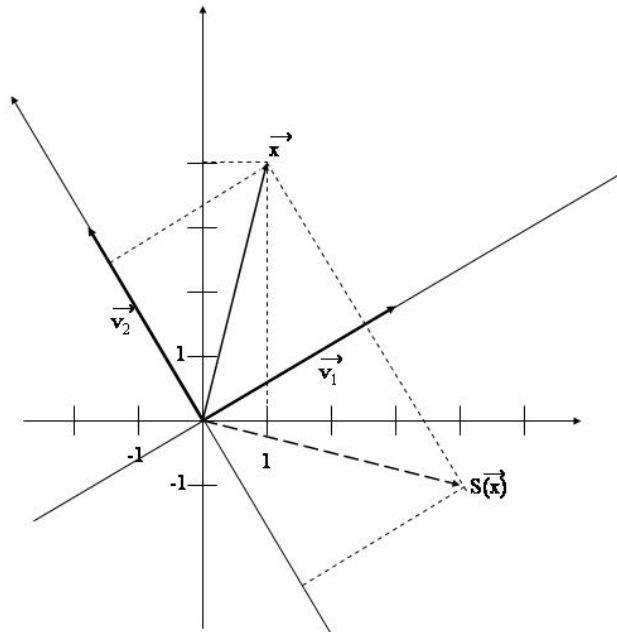


Abbildung 7.16: Transformation des Koordinatensystems mit Eigenvektoren als Basis

wie in der Abbildung darstellt. Falls das Ergebnis wieder mit Koordinaten im ursprünglichen Koordinatensystem dargestellt werden soll, so wird die Matrix B angewendet:

$$B\vec{x}_n \approx \begin{pmatrix} 4, 0 \\ -1, 1 \end{pmatrix},$$

was natürlich $A\vec{x}$ entspricht und in der Abbildung nachvollzogen werden kann.

Zum Abschluss dieses Beispiels stellen wir den Vorgang noch schematisch in Abbildung 7.17 dar.

Diese Abbildung entspricht den Formeln $B^{-1}AB = D$ bzw. $BDB^{-1} = A$.

7.6.3.3 Beispiel

Wir betrachten folgende (3×3) -Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix lautet:

$$\det(A - \lambda \mathbb{E}_3) = 0.$$

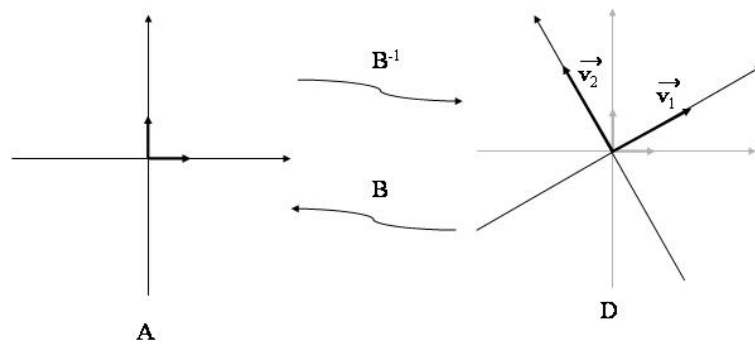


Abbildung 7.17: Transformation des Koordinatensystems

Wir berechnen die Determinante durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda E_3) &= \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 & -3 \\ -3 & 5 - \lambda & -3 \\ -6 & 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-1 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 - \lambda & -3 \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda^3 + 12\lambda - 16 \\
 &= -(\lambda + 4)(\lambda - 2)^2.
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynomes und somit die Eigenwerte der Matrix A lauten:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4.$$

2 ist also eine doppelte Nullstelle. Von daher ist es nicht klar, ob sich die Matrix A diagonalisieren lässt. Berechnen wir die Eigenvektoren zu A :

Für die Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ setzen wir λ in den Ausdruck $A - \lambda \mathbb{E} = \vec{0}$ ein. Daraus ergibt sich das folgende homogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrr} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den beiden linear unabhängigen, zugehörigen Eigenvektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da wir für die doppelte Nullstelle $\lambda_1 = 2$ auch zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden haben, ist die Matrix A diagonalisierbar.

Wir berechnen noch den Eigenvektor für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -4$. Auch hierzu betrachten wir wieder das entsprechende, homogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrr} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ist der dritte Eigenvektor:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle drei Eigenvektoren sind - wie immer - nur bis auf ein skalares Vielfaches bestimmt. Wir können nun die Transformationsmatrix B aus den drei Eigenvektoren zusammensetzen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertieren dieser Matrix liefert:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also eine Diagonalmatrix, bei der die Eigenwerte in der Diagonale stehen. Die doppelte Nullstelle taucht in der Diagonale zwei mal auf.

7.6.3.4 Beispiel

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine (4×4) -Matrix, die nicht diagonalisierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom dieser Matrix gilt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{E}_4) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 ((-3-\lambda)(3-\lambda) + 5) \\ &= (2-\lambda)^2 (\lambda^2 - 4) = 0 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2.$$

Dabei ist 2 eine dreifache Nullstelle. Für die Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ergibt sich das folgende homogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dabei sind in dieser Umformung nicht nur Zeilen, sondern auch die zweite und dritte Spalte vertauscht worden. Wir sind also von den ursprünglichen Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 übergegangen zu neuen Variablen $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 \end{pmatrix}$$

Dies muss bei der Berechnung der Lösungsraumes dieses Gleichungssystems berücksichtigt werden. Wir lesen aus der Endform des Gleichungssystems die Lösung für die $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4$ ab:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{pmatrix} = \hat{x}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{x}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies können wir wieder umsortieren zu:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Lösungsraum ist nur zweidimensional. Für eine Diagonalisierung der Matrix bräuchten wir aber zu der dreifachen Nullstelle $\lambda_1 = 2$ drei linear unabhängige Eigenvektoren. Zwei linear unabhängige, zugehörige Eigenvektoren sind z.B.:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen wir abschliessend noch einen Eigenvektor für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -2$: Auch hierzu betrachten wir wieder das entsprechende, homogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccc}
 4 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -5 \\
 0 & 0 & 1 & 5 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Damit ist der dritte Eigenvektor:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.6.4 Hauptachsentransformation

Im Folgenden behandeln wir noch eine weitere Anwendung der Diagonalisierung von Matrizen. Sie ist aus der Geometrie und veranschaulicht die Koordinatentransformation. Speziell betrachten wir im Folgenden Ellipsen. Das Verfahren läßt sich aber auch für Hyperbeln und Parabeln oder im dreidimensionalen für Quadriken anwenden.

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 7$$

ist die Gleichung einer Ellipse. Meistens verwendet man die Standardform mit 1 auf der rechten Seite:

$$\frac{1}{7}x_1^2 + \frac{1}{7}x_1x_2 + \frac{1}{7}x_2^2 = 1.$$

Um eine später symmetrische Matrix zu bekommen, schreiben wir die Gleichung noch einmal um in:

$$\frac{1}{7}x_1^2 + \frac{1}{14}x_1x_2 + \frac{1}{14}x_2x_1 + \frac{1}{7}x_2^2 = 1.$$

Betrachten wir zu einer (2×2) -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Gleichung:

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Diese Gleichung wird ausmultipliziert zu:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2x_1 + dx_2^2 = 1.$$

Daher lässt sich obige Gleichung der Ellipse durch folgende Matrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} 1/7 & 1/14 \\ 1/14 & 1/7 \end{pmatrix},$$

wobei sich die Ellipsengleichung dann schreiben lässt als

$$\vec{x}^t S \vec{x} = 1 \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Alle quadratischen Gleichungen (ohne lineare Terme) lassen sich also durch (2×2) -Matrizen darstellen. Genauer können sie immer durch symmetrische Matrizen, also Matrizen mit $A^t = A$, dargestellt werden. Symmetrische $(n \times n)$ -Matrizen haben immer n reelle Eigenwerte und n orthogonale Eigenvektoren!

Bestimmen wir zunächst zu der Matrix S die Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{7} - \lambda & \frac{\sqrt{1}}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} - \lambda \end{pmatrix} \right| &= \left(\frac{1}{7} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{14} \\ &= \lambda^2 - \frac{2}{7}\lambda + \frac{1}{49} - \frac{1}{49 \cdot 4} \\ &= \lambda^2 - \frac{4}{14}\lambda + \frac{3}{14 \cdot 14} \\ &= \left(\lambda - \frac{3}{14} \right) \left(\lambda - \frac{1}{14} \right) = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3}{14}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{14}$. Ein Eigenvektor zu λ_1 lautet:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können ihn auch normiert, also als Einheitsvektor, darstellen:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der normierte Eigenvektor zu λ_2 lautet:

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektoren haben das Skalarprodukt null. Dies kann leicht nachgerechnet werden, gilt aber für alle Eigenvektoren zu symmetrischen Matrizen.

Daher lassen sich symmetrische Matrizen insbesondere immer diagonalisieren. Wir bilden die Matrix:

$$B := (\vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

Dies ist eine orthogonale Matrix, da die Spalten normiert und orthogonal sind. Damit ändert diese Matrix das Skalarprodukt und somit insbesondere Winkel und Längen nicht. Die Matrix B liefert eine Transformation des Koordinatensystems, so dass S zu einer Diagonalmatrix wird:

$$B^{-1} \cdot S \cdot B = \begin{pmatrix} 3/14 & 0 \\ 0 & 1/14 \end{pmatrix} =: D$$

Diese Gleichung kann immer auch umgeformt werden zu:

$$S = B \cdot D \cdot B^{-1}.$$

Für die orthogonale Matrix B gilt allgemein $B^t = B^{-1}$. Somit können wir die Gleichung der Ellipse umformen zu:

$$\begin{aligned} \vec{x}^t \cdot S \cdot \vec{x} &= 1 \\ \vec{x}^t \cdot (B \cdot D \cdot B^{-1}) \cdot \vec{x} &= 1 \\ (\vec{x}^t \cdot B) \cdot D \cdot (B^{-1} \cdot \vec{x}) &= 1 \\ (B^t \cdot \vec{x})^t \cdot D \cdot (B^{-1} \cdot \vec{x}) &= 1 \\ (B^{-1} \cdot \vec{x})^t \cdot D \cdot (B^{-1} \cdot \vec{x}) &= 1 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt für einen Vektor \vec{x} genau dann, wenn die letzte Gleichung gilt. Dies können wir folgendermaßen interpretieren: \vec{x} beschreibt einen Punkt auf der durch S beschriebenen Ellipse genau dann, wenn der transformierte Punkt

$$B^{-1} \vec{x}$$

auf der durch die Diagonalmatrix D beschriebenen Ellipse liegt. Diese hat die Gleichung:

$$\frac{3}{14} \hat{x}_1^2 + \frac{1}{14} \hat{x}_2^2 = 1.$$

Im allgemeinen lautet die Gleichung:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1.$$

In dieser Form kann aus der Gleichung die Form und die Lage der Ellipse aber sehr einfach abgelesen werden. Es handelt sich um Ellipse in sogenannter Normallage. Dies hat den

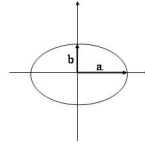


Abbildung 7.18: Ellipse in Normallage

Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und sie ist spiegelsymmetrisch sowohl zur x -Achse, als auch zur y -Achse, wie in Abbildung 7.18 dargestellt.

Die Gleichung der Ellipse in Normallage lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b).$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe einer quadratischen Matrix dargestellt werden:

$$(x, y) \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Die Eigenvektoren dieser Matrix zeigen in Richtung des längsten bzw. kürzesten Durchmessers. Wir vergleichen diese Matrix mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten bei Vergleich die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{a^2} = \lambda_1, \quad \frac{1}{b^2} = \lambda_2.$$

Also lassen sich der größte und der kleinste Radius a bzw. b der Ellipse aus den beiden Eigenwerten leicht berechnen:

$$a := \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad b := \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Für unser Beispiel erhalten wir:

$$a := \sqrt{\frac{14}{3}} \approx 2,16, \quad b := \sqrt{14} \approx 3,74.$$

Aus den Eigenwerten und den Eigenvektoren kann also die genaue Lage und Größe der ursprünglich gegebenen Ellipse abgelesen werden. Der große Durchmesser ist b und der kleine Durchmesser ist a . Die Richtung des kleinen Durchmessers ist durch \vec{e}_1 gegeben und die Richtung des großen Durchmessers ist \vec{e}_2 . Dies waren die normierten Eigenvektoren.

7.6.4.1 Beispiel: Ellipse

Betrachten wir nun noch eine andere Ellipse:

$$\frac{5}{32}x^2 - \frac{3}{16}xy + \frac{5}{32}y^2 = 1.$$

Wir stellen diese Ellipse wieder mit Hilfe einer Matrix dar:

$$(x, y) \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & -\frac{3}{32} \\ -\frac{3}{32} & \frac{5}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Auch hier wird die Gleichung durch eine symmetrische Matrix dargestellt. Wir berechnen zunächst die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \frac{5}{32} - \lambda & -\frac{3}{32} \\ -\frac{3}{32} & \frac{5}{32} - \lambda \end{array} \right| &= \left(\frac{5}{32} - \lambda \right)^2 - \frac{9}{32^2} \\ &= \lambda^2 - \frac{10}{32}\lambda + \frac{25}{32^2} - \frac{9}{32^2} \\ &= \lambda^2 - \frac{10}{32}\lambda + \frac{16}{32^2} \\ &= \left(\lambda - \frac{8}{32} \right) \left(\lambda - \frac{2}{32} \right). \end{aligned}$$

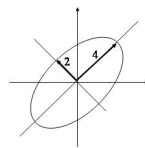


Abbildung 7.19: Ellipse $\frac{5}{32}x^2 - \frac{3}{16}xy + \frac{5}{32}y^2 = 1$

Somit erhalten wir die beiden Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}, \quad \lambda_2 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Aus den Eigenwerten können wir die Radien der Ellipse berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} &= \frac{1}{16} \Rightarrow a = 4 \\ \frac{1}{b^2} &= \frac{1}{4} \Rightarrow b = 2\end{aligned}$$

Die beiden zugehörigen Eigenvektoren lassen sich leicht bestimmen:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit wissen wir die Richtungen und die Größe des kürzesten bzw. längsten Radius und können die Ellipse, wie in Abbildung 7.19 dargestellt, zeichnen.

7.6.5 Eigenvektoren und homogene Koordinaten

Wir hatten im Abschnitt 7.4.7 homogene Koordinaten eingeführt. Zum Beispiel läßt sich ein zweidimensionaler Punkt $P(x|y)$ in homogenen Koordinaten darstellen als:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt, dass jedes Vielfache des Vektors \vec{p} den gleichen Punkt darstellt. Sei nun A eine (3×3) -Matrix, die eine Abbildung für solche homogenen Dreiervektoren liefert. Wenn \vec{v} ein Eigenvektor der Matrix A ist, dann gilt per Definition:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Aber in homogenen Koordinaten beschreiben \vec{v} und $\lambda\vec{v}$ den gleichen Punkt! Also beschreibt jeder Eigenvektor einen Fixpunkt der Abbildung, d. h. einen Punkt der von der Abbildung nicht verändert wird.

7.6.5.1 Beispiel: Fixpunkte einer Abbildung

Wir betrachten die Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 3 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Da es sich um eine untere Dreiecksmatrix handelt, können wir die Eigenwerte direkt ablesen:

$$\lambda_1 = 20, \quad \lambda_2 = 18.$$

Dabei ist der erste Eigenwert ein doppelter.

Zur Berechnung der Eigenvektoren betrachten wir wieder die entsprechenden homogenen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rrr} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Für den ersten (doppelten) Eigenwert erhalten wir als Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir zwei linear unabhängige Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gefunden und jede Linearkombination davon ist ein Eigenwert und entspricht damit einem Fixpunkt der durch A dargestellten Abbildung. Also gilt wegen

$$v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 1 \end{pmatrix},$$

dass jeder Punkt $Q(0|v)$ ein Fixpunkt der Abbildung ist.

Untersuchen wir den zweiten Eigenwert. Wir betrachten das homogene LGS:

$$\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also haben wir einen weitere Fixpunkt gefunden:

$$P(-2|3).$$

Die Gesamtheit aller Fixpunkte dieser Abbildung sind also alle Punkte auf der y -Achse zusammen mit dem einzelnen Punkt $(-2|3)$. Jede Gerade durch den Punkt $(-2|3)$ schneidet die y -Achse in einem weiteren Punkt. Damit liegen zwei Fixpunkte auf der Geraden und somit werden alle Punkte dieser Geraden wieder auf die gleiche Gerade abgebildet, das heißt sie wandern nur diese Gerade entlang, wie das in Abbildung 7.20 für die beiden rechten Eckpunkte der Hauswand angedeutet ist.

7.6.6 Normale und symmetrische Matrizen

In diesem Abschnitt geben wir noch ein paar Hinweise, unter welchen Bedingungen reelle Eigenwerte und reelle Eigenvektoren existieren. Ein $n \times n$ -Matrix A heißt normal, falls gilt:

$$AA^t = A^tA.$$

Normale Matrizen besitzen immer n linear unabhängige Eigenvektoren. Falls die Eigenwerte reell sind, dann sind die Eigenvektoren darüberhinaus orthogonal. Da wir die Eigenvektoren immer normieren können, kann dann die Transformationsmatrix für die Diagonalisierung als orthogonale Matrix gewählt werden.

Eine $n \times n$ -Matrix heißt symmetrisch, falls

$$A = A^t$$

gilt, also falls die Einträge der Matrix symmetrisch zur Diagonalen sind. Wir hatten schon im Zusammenhang mit den Ellipsen gesehen, dass sich diese immer als symmetrische Matrizen darstellen lassen. Ferner gilt für jede beliebige Matrix A , dass A^tA und AA^t symmetrische Matrizen sind!

Wir hatten im Zusammenhang mit der Hauptachsentransformation schon darauf hingewiesen, dass symmetrische Matrizen immer n reelle Eigenwerte und n orthogonale Eigenvektoren besitzen. Es gilt aber auch die Umkehrung: eine Matrix mit n reellen Eigenwerten und n orthogonalen Eigenvektoren ist immer symmetrisch. Diese Umkehrung beweisen wir hier:

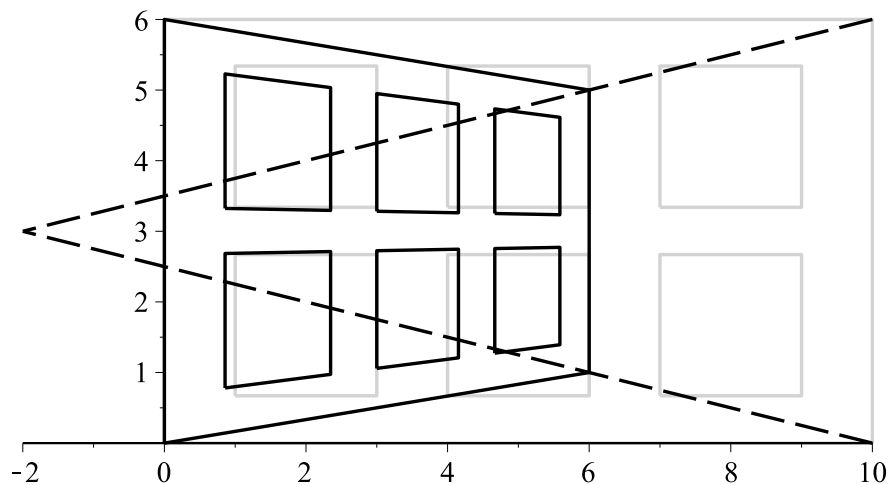


Abbildung 7.20: Perspektive mit Fixpunkt $P(-2|3)$ und Fixgerade auf y -Achse

Beweis: Sei also A eine Matrix die mit einer orthogonalen Matrix E diagonalisierbar ist. Dann gilt:

$$A = E \cdot D \cdot E^{-1},$$

wobei D die Diagonalmatrix ist. Für jede orthogonale Matrix gilt aber:

$$E^{-1} = E^t.$$

Also folgt:

$$A = E \cdot D \cdot E^t.$$

Somit gilt:

$$A^t = (EDE^t)^t = (DE^t)^t E^t = (E^t)^t D^t E^t = EDE^t = A.$$

Also ist A symmetrisch. □

Literaturhinweise

Neben einem Skript bieten natürlich auch Lehrbücher ein wichtiges Hilfsmittel um sich in die Mathematik einzuarbeiten. Das Lehrbuch

*Peter Stingl: Mathematik für Fachhochschulen
Technik und Informatik
7. Auflage, Hanser Verlag, 2004*

kommt in der Darstellung und im Aufbau des Stoffes dem Skript am nächsten. Im Lehrbuch

*Klaus Dürrschnabel: Mathematik für Ingenieure
Eine Einführung mit Anwendungs- und Alltagsbeispielen
1. Auflage, Teubner-Verlag, 2004*

wird der Schwerpunkt etwas stärker auf das praktische Rechnen gelegt. Dafür werden weniger Beweise geführt. Schließlich möchte ich noch auf das zweibändige Werk:

*Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
11. Auflage, Vieweg-Verlag, 2007*

hinweisen. Hier werden die einzelnen Themen ausführlicher dargestellt. Auch hier werden die Beweise - vergleichbar dem Buch von Peter Stingl - teilweise geführt. Der größere Umfang beruht hauptsächlich auf einer ausführlicheren Darstellung der Sachverhalte.

Mein persönlicher Favorit unter den vielen einführenden Lehrbüchern ist das zweibändige Werk, von dem aber der erste Band den Stoff der Vorlesung komplett abdeckt:

*Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1 und 2
6. Auflage, Springer-Verlag, 2001*

Zusätzlich könnte noch die folgende Aufgabensammlung sehr interessant sein:

Dietlinde Lau: Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie
2. Auflage, Springer-Verlag, 2011

Das Buch enthält viele Aufgaben, die sehr gut zum Stoff der Vorlesung passen. Auch das dazu passende Lehrbuch ist für die Vorlesung geeignet:

Dietlinde Lau: Algebra und Diskrete Mathematik 1
3., korrigierte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag 2011

Alle fünf Lehrbücher enthalten wesentlich mehr Stoff, als in der einführenden Vorlesung in die Mathematik im ersten Semester behandelt werden kann. Teilweise decken sie den Stoff für das zweite Semester (Analysis) auch mit ab.

Speziell für die lineare Algebra möchte ich noch ein weiteres Lehrbuch erwähnen:

Günter Gramlich: Lineare Algebra
3., aktualisierte Auflage, Hanser-Verlag 2011

Hier wird nur die lineare Algebra als Teil unserer Vorlesung behandelt. Das Lehrbuch zeichnet sich aber dadurch aus, dass es diesen Stoff anschaulich darstellt und auf viele abstraktere Zusammenhänge der lineare Algebra nicht eingeht.

Als letztes sei auf ein recht umfangreiches Lehrbuch verwiesen:

Dirk Hachenberger: Mathematik für Informatiker
2., aktualisierte Auflage, Pearson Studium 2008

Dieses Buch ist besonders geeignet für Studierende, die sich auch in den höheren Semestern besonders mit Anwendungen der Mathematik in der Informatik beschäftigen möchten und ein sehr umfangreiches Kompendium zur Mathematik für Informatiker suchen.

Sämtliche Bücher sind in der Bibliothek erhältlich und können bei Bedarf in weiteren Exemplaren beschafft werden.