IWI Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Prof. Dr. Frank Schaefer

Sommersemester 2016

Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

Klausur Mathematik 1

(90 Punkte, 90 Minuten)

Aufgabe 1: (5 Punkte) Euklidischer Algorithmus

Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten, gemeinsamen Teiler von 34 und 21. (Andere Methoden sind nicht gefragt.)

Aufgabe 2: (3+8=11 Punkte) Äquivalenzrelation, homogene Koordinaten

a) Was versteht man unter einer Äquivalenzrelation?

b) In der Vorlesung hatten wir homogene Koordinaten für den zweidimensionalen Raum behandelt. Dabei stellen zwei Vektoren der Länge 3, z.B.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

den gleichen Punkt dar, wenn sie sich nur um einen Faktor $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ unterscheiden. Beweisen Sie, dass es sich bei dieser Relation um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 3: (5 + 5 + 8 = 18 Punkte) Rechnen mit Matrizen

Es sind drei Matrizen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$.

b) Berechnen Sie das Produkt $B \cdot A$.

c) Berechnen Sie die inverse Matrix zu C.

Aufgabe 4: (5 + 7 = 12 Punkte) Determinante, Regel von Cramer

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Determinanten, dass das LGS eindeutig lösbar ist.

b) Bestimmen Sie x_2 mit Hilfe der Regel von Cramer.

Aufgabe 5: (14 Punkte) LGS

Bestimmen Sie für das folgende LGS sämtliche Lösungen mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens. Geben Sie die Lösungsmenge mit Vektoren an.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 3 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 6x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 1x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \end{array}$$

Aufgabe 6: (4+8+3=15 Punkte) Skalarprodukt, Matrizen

Gegeben ist eine Gerade g durch den Ursprung mit dem Richtungsvektor:

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Wie berechnet man für einen beliebigen Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ die Projekion dieses Vektors auf die Gerade g? Die Projektion soll dabei auch wieder als Vektor angegeben werden.

b) Stellen Sie eine Matrix A auf, die zu einem vorgegebenen Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ die Projektion auf g liefert.

c) Begründen Sie aus der Wirkunsgweise von A heraus, warum die Matrix A keinen vollen Rang haben kann.

Aufgabe 7: (4+ 8 + 3 = 15 Punkte) Eigenwerte und Eigenvektoren

a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte von folgender Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenvektoren zu folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 13 & -4 \\ -5 & 3 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Dabei ist 1 eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynomes.

c) Ist die Matrix aus b) diagonlisierbar? Begründen Sie Ihre Behauptung!