1 Testataufgaben

1.1 Implementierung von Potenzreihen

Viele praktisch relevante reelle Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x),\ D \subseteq \mathbb{R}$, besitzen eine sogenannte Potenzreihendarstellung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \qquad (1)$$

Dabei sind die reellen Koeffizienten a_k von der Funktion f abhängig. Anschaulich bedeutet die Formel (1) folgendes: Für eine beliebige reelle Zahl $x \in D$ nähern sich die endlichen Summen

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

für wachsendes $n \in \mathbb{N}$ beliebig nahe dem tatsächlichen Funktionswert $f(x)$ an. Das hat zur Folge, dass für feste $x \in D$ und hinreichend großes n die "Restsumme" $a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots$ vernachlässigbar klein wird.

a) Schreiben Sie drei Funktionen, welche die in (a) bis (c) durch Reihendarstellungen angegebenen Funktionen implementieren. Versuchen Sie für höhere Effizienz mit möglichst wenigen Gleitpunktoperationen +, * auszukommen! Was sind geeignete Schleifenabbruchbedingungen, die eine sehr hohe Genauigkeit des Ergebnisses sicherstellen? Stellen Sie zu jedem Schritt k die Zwischenergebnisse der Reihenentwicklung übersichtlich in einer Tabelle auf dem Bildschirm dar. **(9 Punkte)**

   (a) $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ für $x \in [-1, 1]$

   (c) $\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$ für $x \in (0, 2]$

b) Vergleichen Sie die Ergebnisse ihrer Funktionen mit denen der entsprechenden Standardfunktionen `sin(x)`, `atan(x)` und `log(x)` aus der `<math.h>`-Bibliothek für verschiedene x-Werte. **(1 Punkt)**

Hinweis: Vergessen Sie beim Kompilieren nicht die Option `-lm` zum Linken der Mathe-Bibliothek.
[1] Die nicht in der Vorlesung eingeführte Funktion `pow(x)` soll nicht verwendet werden!

[1] http://openbook.rheinwerk-verlag.de/c_von_a_bis_z/020_c_headerdateien_003.htm

2 Präsenzaufgaben

1. Vervollständigen Sie den Programmausschnitt

```
double d1, d2;
float f1, f2;
f2 = d1 = 0.1;
d2 = f1 = 0.1;
```

zu einem Programm, indem anschließend mit geeigneten `if`-Abfragen getestet wird, ob folgende Aussagen wahr sind:

a) $f1 = f2$ c) $d1 = d2$
b) $f1 \neq f2$ d) $d1 \neq d2$

Geben Sie die richtigen Antworten mit Begründung bereits vor der Programmausführung an. Ersetzen Sie abschließend in den obigen Zuweisungen 0.1 durch 0.25. Wie lautet das Ergebnis nun und warum?

2. Schreiben Sie eine Funktion, die <u>eine</u> der unten stehenden Reihenentwicklungen mithilfe einer Schleife und einem geeigneten Abbruchkriterium implementiert.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{oder} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

3. Schreiben Sie ein Programm, das zu zwei vorgegebenen ganzen Zahlen $k > 0$ und $n \geq 0$ die k-fache Fakultät (Multifakultät)

$$n!^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{, falls} \quad n = 0, \\ n & \text{, falls} \quad 0 < n \leq k, \\ n \cdot (n-k)!^{(k)} & \text{, falls} \quad n > k, \end{cases}$$

mithilfe von Schleifen näherungsweise berechnet. Ihr Programm soll für verschiedene Werte von n und k funktionieren!

4. Schreiben Sie ein Programm, das zu einer vorgegebenen ganzen Zahl $n \geq 0$

(a) die Superfakultät $SF(n) = \prod_{k=1}^{n} k!$ oder
(b) die Hyperfakultät $HF(n) = \prod_{k=1}^{n} k^k$

mithilfe von Schleifen näherungsweise berechnet. Ihr Programm soll für verschiedene Werte von n funktionieren!