Optimización Computacional

Marion Forestier, Maximiliano Espíndola

1. Introducción

La empresa ABC, dedicada a la venta de inmuebles, desea lanzar una campaña publicitaria para su nuevo proyecto de viviendas. Se ha determinado utilizar cinco medios: televisión (en horario tarde y noche), diarios, revistas y radio. Cada tipo de anuncio tiene una estimación de alcance en clientes potenciales, un rango de calidad (0 a 100), y un rango de costo proporcional a la calidad.

2. Modelo Matemático

2.1. Variables de decisión

Sea:

- x_1: cantidad de anuncios en televisión (tarde)
- x_2: cantidad de anuncios en televisión (noche)
- x_3: cantidad de anuncios en diarios
- x_4: cantidad de anuncios en revistas
- x_5: cantidad de anuncios en radio
- q_i: nivel de calidad asociado al tipo de anuncio i $(i = 1, ..., 5)$
- c_i: costo asociado al tipo de anuncio i $(i = 1, ..., 5)$

2.2. Relación Costo-Calidad

Implementamos un funccion para modelizar el crecimiento lineal del costo unitario con respecto a la calidad:

$$c_i(q_i) = a_i \cdot (q_i - q_i^{\text{mín}}) + c_i^{\text{mín}}$$

donde $a_i = \dfrac{c_i^{\text{máx}} - c_i^{\text{mín}}}{q_i^{\text{máx}} - q_i^{\text{mín}}}$

2.3. Función Objetivo

Queremos maximizar la calidad de la exposición de todos los anuncios, pero minimzando su costo total.

$$\text{Maximizar: } Z = \sum_{i=1}^{5} q_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{5} c_i(q_i) \cdot x_i$$

2.4. Restricciones

- **Cantidad máxima de anuncios:**

$$x_1 \leq 15, \quad x_2 \leq 10, \quad x_3 \leq 25, \quad x_4 \leq 4, \quad x_5 \leq 30$$

- **Otras restricciones:**

$$\begin{aligned} c_1(q_1)x_1 + c_2(q_2)x_2 &\leq 3800 \quad \text{(Televisión)} \\ c_3(q_3)x_3 + c_4(q_4)x_4 &\leq 2800 \quad \text{(Diarios + Revistas)} \\ c_3(q_3)x_3 + c_5(q_5)x_5 &\leq 3500 \quad \text{(Diarios + Radio)} \end{aligned}$$

Parámetros conocidos

Medio	$q_i^{\text{mín}}$	$q_i^{\text{máx}}$	$c_i^{\text{mín}}$	$c_i^{\text{máx}}$	Máximo de anuncios
Televisión tarde	65	85	160	200	15
Televisión noche	90	95	300	350	10
Diario	40	60	40	80	25
Revista	60	80	100	120	4
Radio	20	30	10	20	30

Cuadro 1. Parámetros de calidad, costo y máximos por tipo de anuncio

3. Formulación del modelo de programación lineal

Objetivos:

1. Maximizar la calidad total:

$$\text{Maximizar } Q = q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4 + q_5x_5$$

2. Minimizar el costo total:

$$\text{Minimizar } C = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$$

Dado que no se puede optimizar simultáneamente dos funciones contradictorias en una programación lineal simple, se puede:

- Combinar ambos objetivos en una sola función:

$$\text{Maximizar } Z = \lambda \cdot Q - (1 - \lambda) \cdot C$$

donde $\lambda \in [0, 1]$ representa la importancia relativa asignada a la calidad frente al costo.

4. Restricciones

Dominios de las variables (calidad y cantidad de anuncios):

$$\begin{cases} x_1 \leq 15, \quad x_2 \leq 10, \quad x_3 \leq 25, \quad x_4 \leq 4, \quad x_5 \leq 30 \\ 65 \leq q_1 \leq 85, \quad 90 \leq q_2 \leq 95, \quad 40 \leq q_3 \leq 60, \\ 60 \leq q_4 \leq 80, \quad 20 \leq q_5 \leq 30 \end{cases}$$

Relación costo - calidad (lineal):

$$\begin{cases} c_1 = 2q_1 - 170 \\ c_2 = 10q_2 - 600 \\ c_3 = 2q_3 - 40 \\ c_4 = q_4 + 40 \\ c_5 = q_5 - 10 \end{cases}$$

Restricciones presupuestarias por grupo de medios:

- Televisión:
$$c_1x_1 + c_2x_2 \leq 3800$$
- Diarios y revistas:
$$c_3x_3 + c_4x_4 \leq 2800$$
- Diarios y radio:
$$c_3x_3 + c_5x_5 \leq 3500$$

5. Consistencia local

- **Consistencia de nodo:** Cada variable cumple con sus dominios predefinidos, tanto en calidad como en cantidad. Por lo tanto, se cumple la consistencia de nodo.
- **Consistencia de arco:** Las relaciones entre la calidad y el costo de cada tipo de anuncio son funciones lineales y dentro de los rangos especificados. Por lo tanto, toda asignación válida de q_i tiene un valor correspondiente de c_i, cumpliendo así la consistencia de arco.

2.5. Consistencia local mediante *AC-3*

El algoritmo *AC-3* se aplicó sobre los dominios enteros de las variables de cantidad $\langle x_1, \ldots, x_5 \rangle$, empleando los **costos unitarios máximos** ($q_i = q_i^{\text{máx}}$) para cada medio, de modo que cualquier valor que superase el presupuesto en el *peor caso* fuese eliminado. Las restricciones binarias incorporadas fueron:

- **Televisión:** $c_1x_1 + c_2x_2 \leq 3\,800$.
- **Diario + Revista:** $c_3x_3 + c_4x_4 \leq 2\,800$.
- **Diario + Radio:** $c_3x_3 + c_5x_5 \leq 3\,500$.

Cuadro 2. Dominios antes y después de *AC-3*.

Variable	Dominio inicial	Dominio final	Poda (%)
x_1 (TV-tarde)	0–15	0–15	0
x_2 (TV-noche)	0–10	0–10	0
x_3 (Diario)	0–25	0–25	0
x_4 (Revista)	0–4	0–4	0
x_5 (Radio)	0–30	0–30	0

Resultados. La salida del script (`AC_3.py`) fue:

```
¿Quedó consistente? -> True
```

No se eliminó ningún valor; sin embargo, AC-3 certifica que los dominios son nodo- y arco-consistentes (ninguna combinación inicial viola las desigualdades de presupuesto en su escenario más estricto).

Discusión. La falta de poda indica que los *topes presupuestarios son holgados*: por ejemplo, con costos máximos $(c_1, c_2) = (200, 350)$, el par $(x_1 = 15, x_2 = 0)$ todavía cuesta sólo 3 000 u.m. ($<$3 800). El modelo queda listo para la fase de optimización, donde la búsqueda se concentrará en maximizar la utilidad neta sin necesidad de medidas adicionales de consistencia.

Mejoras posibles. Para obtener mayor reducción de dominios podría: (i) discretizar las calidades q_i e incluirlas en AC-3, (ii) usar costos promedio en vez de máximos, o (iii) añadir una restricción global de presupuesto total.

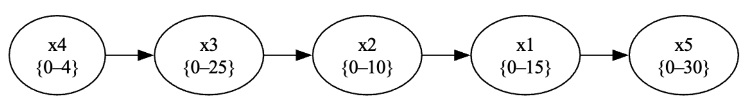

Figura 1. Árbol de búsqueda *después* de aplicar AC-3. No se eliminó ningún valor de los dominios (poda = 0 %), lo que confirma que el modelo es nodo- y arco-consistente antes de la optimización.