CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 16 - Diseño de filtros IIR por transformación bilineal

David Ortiz, Ph.D.
Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Clase anterior:

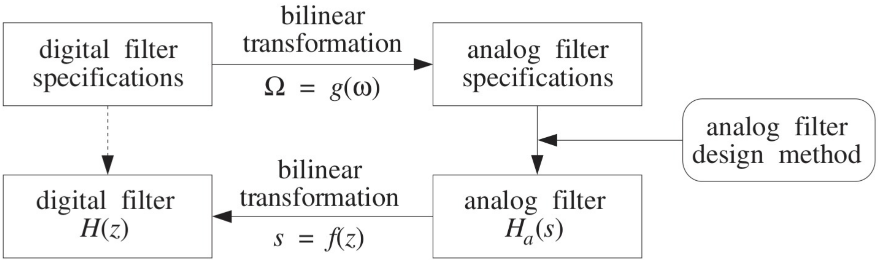
- Diseño de filtros FIR por ventanas **11.1.1-11.1.3**

Clase de hoy:

- Diseño de filtros IIR (pasa-bajas) por transformación bilineal **12.1**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Esquema de diseño



Idea: Traducir el diseño de un filtro analógico clásico a un filtro digital IIR.

$$H_a(s) \longrightarrow H(z).$$

Diseño de filtros IIR por transformación bilineal

Comenzamos suponiendo una tranformación (lineal) entre el plano $\mathcal{Z}$ y el $\mathcal{S}$

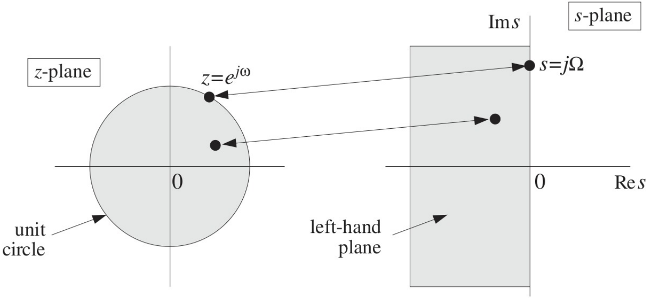
$$s = f(z) \tag{1}$$

Luego, hallamos la correspondencia entre la frecuencia digital física $\omega = 2\pi f/f_s$ análoga equivalente Ω reemplazando $s = j\Omega$ y $z = e^{j\omega}$ en (1),

$$j\Omega = f(e^{j\omega})$$

lo cual puede escribirse como:

$$\Omega = g(\omega)$$



En general se utiliza la transformación bilineal dada por

$$s = f(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Diseño de filtros IIR por transformación bilineal

Esto corresponde a una relación entre las frecuencias:

$$j\Omega = f(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = j\,\frac{\sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} = j\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Por lo tanto, $\Omega = g(\omega) = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \Rightarrow \omega = 2\tan^{-1}\Omega$. Esta relación no lineal entre la frecuencia análoga y la digital se conoce como "frequency warping". Así, para los diferentes tipos de filtros:

1. Pasa-bajos: $s = f(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow \Omega = g(\omega) = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
2. Pasa-altos: $s = f(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \Rightarrow \Omega = g(\omega) = -\cot\left(\frac{\omega}{2}\right)$
3. Pasa-banda: $s = f(z) = \frac{1-2cz^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}} \Rightarrow \Omega = g(\omega) = \frac{c-\cos\omega}{\sin\omega}$
4. Elimina-banda: $s = f(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-2cz^{-1}+z^{-2}} \Rightarrow \Omega = g(\omega) = \frac{\sin\omega}{c-\cos\omega}$

Nota: la transformación bilineal preserva la estabilidad del filtro análogo

Diseño de filtros IIR por transformación bilineal

Método:

1. Comenzar con las especificaciones de la magnitud del filtro digital.
2. Transformar a especificaciones de un filtro análogo, usando la transformación de prewarping apropiada.
3. Diseñar el filtro análogo $H_a(s)$.
4. Transformar el filtro análogo en digital usando la transformación bilineal:

$$H(z) = H_a(s)\big|_{s=f(z)} \rightarrow H(\omega) = H_a(\Omega)\big|_{\Omega=g(\omega)} \tag{2}$$

Diseño de filtros de 1er orden (pasa-bajas y -altas)

Paso 1: Magnitud. Dada la frecuencia de corte f_c y frecuencia de muestreo f_s, diseñar

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

La frecuencia digital es $\omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s}$. Por convención, se define la frecuencia de corte como el punto donde la ganancia es -3 dB:

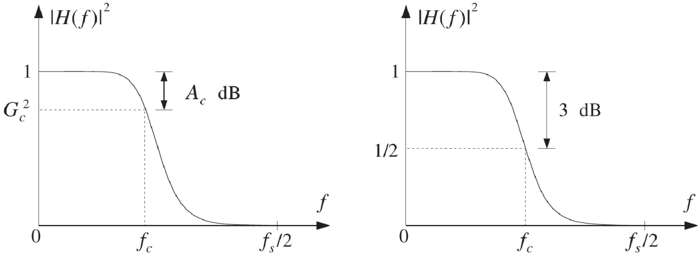
$$\frac{|H(\omega_c)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -10\log_{10}\left(\frac{|H(\omega_c)|^2}{|H(0)|^2}\right) = 3 \text{ dB}$$

Notar que, si $|H(0)| = 1$, entonces $|H(\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$. En general, podemos considerar ω_c como la frecuencia tal que $|H(\omega_c)|^2 = G_c^2 < 1$. En dB:

$$A_c = -10\log_{10}(G_c^2) = -20\log_{10} G_c \Rightarrow G_c = 10^{-A_c/20}$$

$$|H(\omega_c)|^2 = G_c^2 = 10^{-A_c/10}$$

Diseño de filtros de 1er orden (pasa-bajas y -altas)



Paso 2: Pre-warping. Aplicar el prewarping a la frecuencia de corte:

$$\Omega_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right)$$

Paso 3: Filtro análogo. Diseñar el filtro pasa-bajos (tomando $s = j\Omega$)

$$H_a(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \quad \left(H_a(s=0) = \frac{\alpha}{\alpha} = 1\right); \quad H_a(\Omega) = \frac{\alpha}{j\Omega + \alpha} \Rightarrow |H_a(\Omega)|^2 = \frac{\alpha^2}{\Omega^2 + \alpha^2}$$

Diseño de filtros de 1er orden (pasa-bajas y -altas)

Paso 4: Bilineal. Para cumplir con el requerimiento de frecuencia de corte:

$$|H(\omega_c)|^2 = |H_a(\Omega_c)|^2 = \frac{\alpha^2}{\Omega_c^2 + \alpha^2} = G_c^2; \quad \text{(Considernado } H(\omega) = H_a(\Omega)|_{\Omega = g(\omega)}\text{)}$$

Resolviendo para α:

$$\alpha = \frac{G_c \Omega_c}{\sqrt{1 - G_c^2}} = \frac{G_c}{\sqrt{1 - G_c^2}} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

Y usando la transformación bilineal tenemos

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{\alpha(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1} + \alpha(1 + z^{-1})} = b\frac{1 + z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

donde

$$a = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad b = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

Si ω_c se toma como la frecuencia de corte de 3 dB, entonces $G_c^2 = 1/2$ y $\alpha = \Omega_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$

Ejemplo: Filtro pasa-bajos con $f_s = 10$kHz y frecuencia de corte de 3 dB $f_c = 1$kHz.

$$\omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = 0.2\pi \quad [\text{rad/muestra}]$$

$$\Omega_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = 0.3249$$

En este caso,
$G_c^2 = 0.5 \Rightarrow \alpha = \frac{G_c}{\sqrt{1-G_c^2}} \tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = 0.3249$.
Para a y b:

$$a = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.5095, \quad b = \frac{1-a}{2} = 0.2453$$

Entonces,

$$H(z) = 0.2453 \frac{1+Z^{-1}}{1-0.5095Z^{-1}}$$

Rediseña: a 1kHz, su atenuación sea $G_c^2 = 0.9$, que corresponde a $A_c = -10\log_{10}(0.9) = 0.46$dB. ω_c corresponde a una atenuación $G_c^2 = 0.9$.

$$\alpha = \frac{G_c}{\sqrt{1-G_c^2}}\Omega_c = \frac{G_c}{\sqrt{1-G_c^2}} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

se obtiene:

$$\alpha = 0.3249 \cdot \frac{\sqrt{0.9}}{\sqrt{1-0.9}} = 0.9748$$

Los coeficientes del filtro y la función de transferencia correspondiente son:

$$a = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.0128, b = \frac{1-a}{2} = 0.4936,$$

$$H(z) = 0.4936 \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-0.0128z^{-1}}$$

Objetivo general

Estudiar

Clase de hoy:

- Diseño de filtros IIR (pasa-bajas) por transformación bilineal **12.1**

Próxima clase:

- Diseño de filtros IIR (banda, rechazo) por transformación bilineal **12.3**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`