CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 01 - Señales analógicas y muestreo

David Ortiz, Ph.D.
Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Expectativas de aprendizaje

El estudiante será capaz de analizar señales analógicas en el dominio del tiempo y la frecuencia, interpretar la respuesta al impulso y el efecto del filtrado, y comprender los fundamentos del muestreo.

Clase anterior:

- Introducción al curso

Clase de hoy:

- Repaso de señales analógicas **1.2**
- Teoréma del muestreo **1.3**

Esta presentación es una recopilación de los textos de **Vetterli** y **Orfanidis**, y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Señales analógicas

Señal continua: descripción formal de un fenómeno que evoluciona en el tiempo o el espacio y la representaremos por una función $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Transformada de Fourier

$$X(\Omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

Del dominio "físico" t al dominio de la "frecuencia" Ω.

Transformada inversa de Fourier

$$x(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

Del dominio de la "frecuencia" Ω al domínio "físico" t.

Observación: La frecuencia ordinaria f, expresada en [Hz] o [ciclos/segundo], se relaciona con Ω mediante la ecuación $\Omega = 2\pi f$.

Usamos la notación Ω para denotar la frecuencia física en unidades de [rads/seg], y reservamos la notación ω para denotar la frecuencia digital en [rads/muestra].

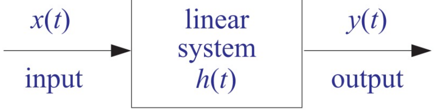
Sistemas continuos

Definición: sistema continuo en el timepo

Un sistema $T : V \to V$ es una transformación cuya entrada es una señal $x(t) \in V$ y cuya salida es otra señal $y(t) \in V$, i.e., $y := T(x)$

Definición:Respuesta al impulso

Una función $h(t)$ es llamada *respuesta al impulso* de un sistema T lineal, invariante, y continuo en el tiempo, cuando una entrada $\delta(t)$ produce una salida h, i.e., $h := T(\delta)$



Filtrado de señales analógicas

Considerando la definición de una señal arbitraria $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$ tenemos

$$y = Tx = T\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t-t')dt'}_{\text{def. señal arbitraria}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t')T\delta(t-t')dt'}_{\text{Linealidad de T}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt'}_{\text{respuesta al impulso}} = h{*}x$$

Definición: filtro y filtrado

La *respuesta al impulso* h es usualmente conocida como *filtro*, mientras que la convolución $h * x$ se le conoce como *filtrado* de una señal.

Definición de la convolución o *filtrado* de una señal $x(t)$

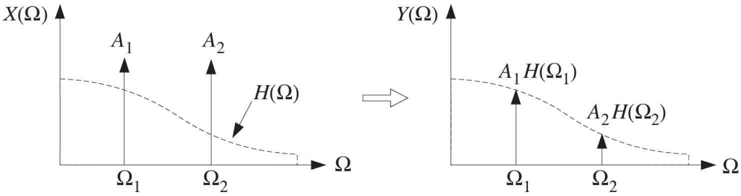
$$y = h * x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt', \qquad Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega).$$

Filtrado de señales analógicas

Un filtro afecta la **magnitud** y **fase** de una senal de entrada, i.e.,

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega) \text{ where } H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)}, \quad X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)},$$

$$\Rightarrow Y(\Omega) = (|H(\Omega)| \cdot |X(\Omega)|)\, e^{j(\angle H(\Omega) + \angle X(\Omega))}$$



Ejercicio

Considere una función compuesta por la suma de dos sinusoides complejas con frecuencias Ω_1 y Ω_2, y amplitudes A_1 y A_2. Encuentre el espectro de la señal de salida $Y(\Omega)$ luego de ser filtrada por un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$. **Solución:** definamos la señal compleja como

$$x(t) = A_1 e^{j\Omega_1 t} + A_2 e^{j\Omega_2 t}$$

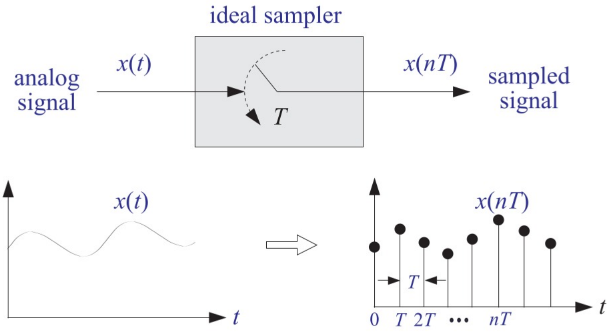
El espectro de entrada se obtiene aplicando la transformada de Fourier:

$$X(\Omega) = 2\pi A_1 \delta(\Omega - \Omega_1) + 2\pi A_2 \delta(\Omega - \Omega_2)$$

El espectro de salida es el producto con la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= H(\Omega)X(\Omega) = H(\Omega)\left[2\pi A_1 \delta(\Omega - \Omega_1) + 2\pi A_2 \delta(\Omega - \Omega_2)\right] \\ &= 2\pi A_1 H(\Omega_1)\delta(\Omega - \Omega_1) + 2\pi A_2 H(\Omega_2)\delta(\Omega - \Omega_2) \end{aligned}$$

Teorema de muestreo



¿Cómo elegir T? ¿Cuál es su efecto en el espectro?

Teorema de muestreo (Shannon-Nyquist)

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x(t)$ es f_{max}, y la señal es muestreada con una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_{max}$, entonces es posible reconstruir $x(t)$ en forma exacta a partir de las muestras de $x(nT), n \in \mathbb{Z}^+$, con $T = \frac{1}{f_s}$

Un mal muestreo de la señal analógica produce un efecto conocido como *aliasing*

Ejercicios

1. **Demostrar el teorema de convolución:**

   $$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega), \text{ donde } H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\Omega t}dt, \quad X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt,$$

2. **Descripción, definición matemática, diferencias y aplicaciones de Convolución, correlación cruzada y autocorrelación. Cap 4 libro de Vetterli**
3. Demuestre que la expresión

   $$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

   es la transformada de Fourier inversa, es decir, que permite recuperar la función $x(t)$ a partir de su transformada de Fourier $X(\Omega)$.
4. Discuta bajo qué condiciones se garantiza la existencia de la transformada de Fourier de una función $x(t)$, y en qué espacios funcionales se puede asegurar que es posible aplicar la fórmula de inversión para recuperar $x(t)$ a partir de $X(\Omega)$. **sec. 4.4.2 Vetterli**

Objetivo general

Repasar conceptos acerca de una señal analógica y definir su muestreo

Clase de hoy:

- Repaso de señales analógicas **1.2**
- Teoréma del muestreo **1.3**

Próxima clase:

- Muestreo, aliasing y reconstrucción **1.3.1, 1.4**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 1st edition, 1995. Disponible en `https://rutgers.app.box.com/s/5vsu06pp556g9dfsdvayh4k50wqpataw`.
2. Vetterli, Martin, Jelena Kovačević, and Vivek K. Goyal. Foundations of signal processing. Cambridge University Press, 2014. `https://www.fourierandwavelets.org/FSP_v1.1_2014.pdf`