

# CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

## Clase 11 - Resolución en frecuencia y ventanas

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica  
Universidad de Valparaíso



**Universidad  
de Valparaíso**  
CHILE

## Expectativa de aprendizaje

Al finalizar la clase, el estudiante será capaz de analizar el efecto del ventaneo sobre el espectro de una señal, comprender el compromiso entre resolución en frecuencia y fuga espectral, y aplicar distintas ventanas en el procesamiento espectral.

Clase anterior:

- Convolución **4.1.1-4.1.3**

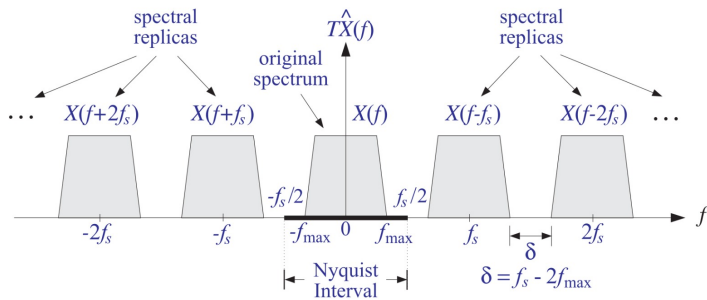
Clase de hoy:

- Resolución en frecuencia y ventaneo **9.1**

---

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo david.ortiz@uv.cl.

# Discrete Time Fourier Transform (DTFT)



Las replicas están separadas por la “banda de resguardo”  $\delta = f_s - 2f_{\max}$  y notamos que el teorema de muestreo (Nyquist,  $f_s \geq 2f_{\max}$ ) garantiza que  $\delta > 0$ , i.e., las bandas en frecuencia no se superponen. Si las replicas no se superponen, se cumple

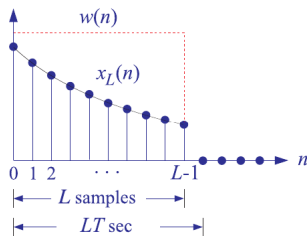
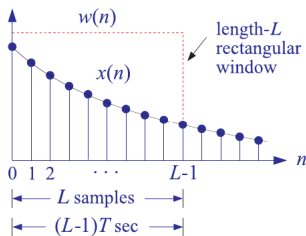
$$T\hat{X}(f) = X(f), \quad \text{para } -\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}, \quad \hat{X}(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-2\pi j f T n},$$

# Ventaneo

Sin embargo,  $\hat{X}(f)$  no se puede calcular porque requiere que  $-\infty < n < \infty$ . En la práctica, limitamos las muestras a  $0 \leq n < L - 1$ , es decir,

$$\hat{X}(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-2\pi j f T n} \Rightarrow \hat{X}_L(f) := \sum_{n=0}^{L-1} x(nT)e^{-2\pi j f T n}$$

Esto equivale a procesar  $x(nT)$  en una ventana  $w(n)$  de longitud  $L$ , o un registro de duración  $T_L = LT$



# Ventaneo

Podemos escribir

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases} \quad y \quad x_L(m) = w(m) \cdot x(m) = \begin{cases} x(m) & 0 \leq m \leq L-1 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

para este caso,  $w(n)$  se conoce como ventana cuadrada. Considerando  $\omega = 2\pi f/f_s = 2\pi fT$ , reemplazamos en la DTFT

$$\hat{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$
$$\hat{X}_L(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L(n)e^{-j\omega n} \quad \{\text{DTFT de la señal ventaneada } x_L(n)\}$$

En la medida que  $L$  aumenta,  $\hat{X}_L(\omega)$  es una mejor aproximación de  $\hat{X}(\omega)$

**NOTA IMPORTANTE:** En el libro se describe  $\hat{X}(\omega)$  sin el gorro, es decir  $X(\omega)$ . En la clase trabajaremos con  $\hat{X}(\omega)$  para facilitar el análisis

# Ventaneo

Los efectos de multiplicar por  $w(n)$  (registro finito) son:

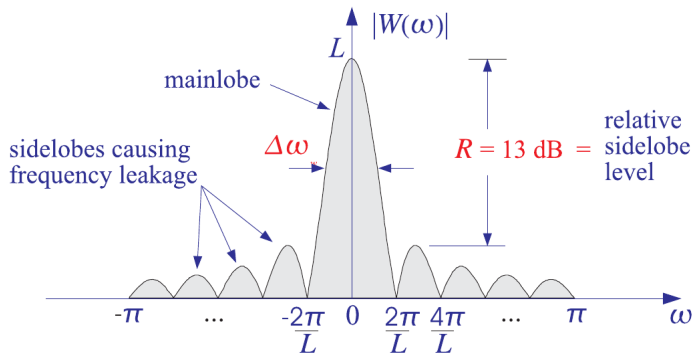
1. Se reduce la resolución de frecuencia  $\Delta f = \frac{1}{T_L}$ , **conocido como principio de incertidumbre**.
2. Se introducen frecuencias espúreas en el espectro, debido al corte abrupto de  $x(n)$ . Este fenómeno se conoce como **"Frequency leakage" o "derramamiento de frecuencias"**.

Considerando el teorema de la convolución, tenemos

$$x_L(m) = w(m) \cdot x(m) \quad \Rightarrow \quad \hat{X}_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(\omega') \hat{W}(\omega - \omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi} \hat{X}(\omega) * \hat{W}(\omega)$$

donde  $\hat{W}(\omega)$  es la DTFT de  $w(n)$  (**ventana rectangular**)

$$\hat{W}(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} w(n) e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jL\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$



Para el ancho del lóbulo principal usamos

$$\Delta\omega_w = \frac{2\pi}{L} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{muestras}} \right],$$

$$\Delta f_w = \frac{f_s}{L} = \frac{1}{LT} = \frac{1}{T_L} \text{ [Hz]}$$

Para la altura relativa del lóbulo principal usamos

$$R = 20 \log_{10} \left| \frac{\hat{W}(\omega)}{\hat{W}(0)} \right|_{\omega=\frac{3\pi}{L}}$$

$$\approx 20 \log_{10} \left( \frac{2}{3\pi} \right) = -13.46 \text{ dB}$$

# Ilustración del efecto del ventaneo

**Ejemplo:** Consideremos el caso de una senoide compleja análoga de frecuencia  $f_1$  y su versión muestreada

$$x(t) = e^{2\pi j f_1 t}, \quad -\infty < t < \infty \quad \Rightarrow \quad x(n) = e^{2\pi j f_1 n T} = e^{j\omega_1 n}, \quad -\infty < n < \infty$$

donde  $\omega_1 = 2\pi f_1 T = 2\pi f_1 / f_s$ . Su espectro (TF) será

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j (f - f_1) t} dt = \delta(f - f_1).$$

Si  $|f_1| \leq f_s/2$  (se cumple el teorema del muestreo)

$$\hat{X}(\omega) = \hat{X}(f) = \frac{1}{T} X(f) = \frac{1}{T} \delta(f - f_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T} \delta(f - f_1)}$$

Considerando la propiedad del delta de Dirac  $|a|\delta(ax) = \delta(x)$ , podemos expresar el espectro en términos de  $\omega$

$$2\pi\delta(\omega - \omega_1) = \frac{1}{T} 2\pi T \delta(2\pi T f - 2\pi T f_1) = \frac{1}{T} \delta(f - f_1) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{T} \delta(f - f_1) = 2\pi\delta(\omega - \omega_1)}$$



Así, el espectro de la señal muestreada será

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_1), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (1)$$

Por otra parte, la versión de ventaneada de la función  $x(n)$  es

$$x(n) = e^{2\pi j f_1 n T} = e^{j\omega_1 n}, -\infty < n < \infty \quad \Rightarrow \quad x_L(n) = e^{j\omega_1 n}, n = 0, \dots, L-1$$

Recordando el teorema de la convolución

$$x_L(m) = w(m) \cdot x(m) \quad \Rightarrow \quad X_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega') W(\omega - \omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * W(\omega) \quad (2)$$

e insertando (1) en (2), obtenemos el espectro

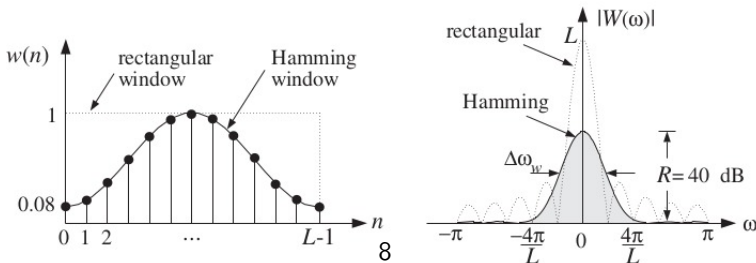
$$\begin{aligned} X_L(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega') W(\omega - \omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega' - \omega_1) W(\omega - \omega') d\omega' \\ &= W(\omega - \omega_1) \end{aligned}$$

# Otra ventana aparte de la rectangular

- El ancho del lóbulo principal determina la resolución en frecuencia.
- Por otro lado, los lóbulos laterales ocasionan la fuga de frecuencias e impiden detectar otras sinusoides de menor amplitud.

Para minimizar los lóbulos laterales, es posible utilizar otras ventanas distintas a las rectangulares. Por ejemplo la ventana *Hamming*

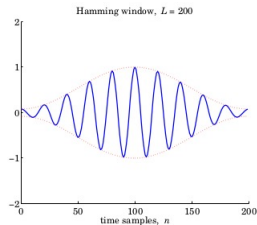
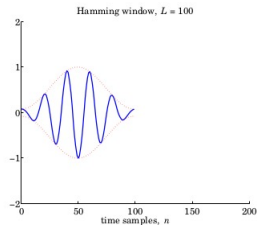
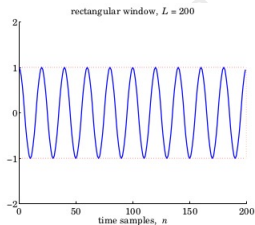
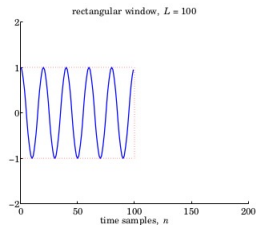
$$w(m) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi m}{L-1}\right) & 0 \leq m \leq L-1 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$



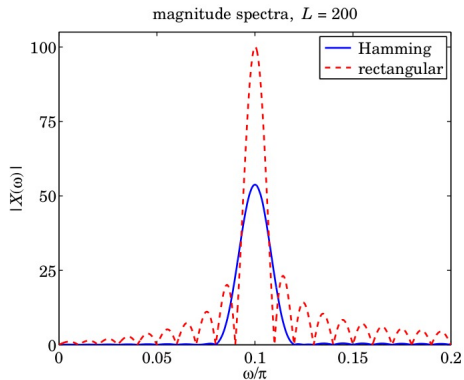
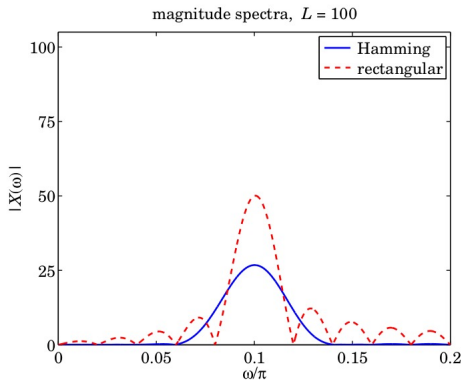
**Ejemplo** La senoide  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , donde  $f_0 = 50$  Hz, es muestreada a una tasa de  $f_s = 1$  kHz. La señal muestreada es  $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ , donde  $\omega_0 = 2\pi f_0 / f_s = 2\pi \cdot 50 / 1000 = 0.1\pi$  radianes/muestra. Una porción de longitud- $L$  de  $x(n)$  es ventaneada mediante una ventana rectangular y una ventana de Hamming, es decir, para  $n = 0, 1, \dots, L - 1$ :

$$x_L(n) = w_{\text{rec}}(n)x(n) = \cos(\omega_0 n)$$

$$x_L(n) = w_{\text{ham}}(n)x(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) \right] \cos(\omega_0 n)$$



La siguiente figura muestra los espectros correspondientes,  $|X_L(\omega)|$ , graficados sobre el subintervalo de Nyquist,  $0 \leq \omega \leq 0.2\pi$ .



## Expectativa de aprendizaje

Al finalizar la clase, el estudiante será capaz de analizar el efecto del ventaneo sobre el espectro de una señal, comprender el compromiso entre resolución en frecuencia y fuga espectral, y aplicar distintas ventanas en el procesamiento espectral.

Clase de hoy:

- Resolución en frecuencia y ventaneo **9.1**

Próxima clase:

- DFT y DFT inversa **10.1, 10.6**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing*. Rutgers University, 2010.  
Disponible en <https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/>