CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 18 - Diseño de filtros IIR de orden superior

David Ortiz, Ph.D.
Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Clase anterior:

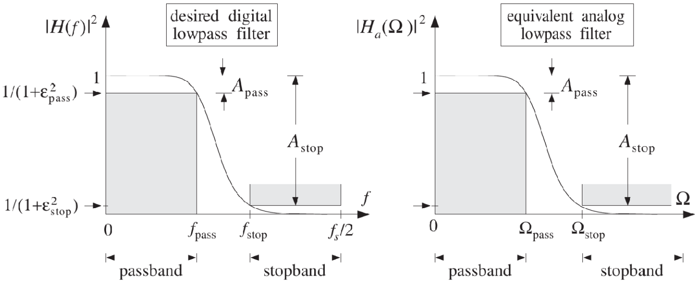
- Diseño de filtros IIR (banda, rechazo) por transformación bilineal **12.3**

Clase de hoy:

- Diseño de filtros IIR de orden superior **12.6,12.7**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Diseño de filtros IIR de orden superior



$$0 \le A(f) \le A_{pass}, \quad 0 \le f \le f_{pass} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \ge |H(f)|^2 \ge \frac{1}{1+\epsilon^2_{pass}}, \quad 0 \le f \le f_{pass}$$

$$A(f) \ge A_{stop}, \quad f_{stop} \le f \le \frac{f_s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad |H(f)|^2 \le \frac{1}{1+\epsilon^2_{stop}}, \quad f_{stop} \le f \le \frac{f_s}{2}$$

$A(f) = -10\log_{10}|H(f)|^2$ atenuación en dB del filtro.

Diseño de filtros IIR de orden superior

Los valores de $\varepsilon_{\text{pass}}$ y $\varepsilon_{\text{stop}}$ son útiles para diseñar filtros Butterworth y Chebyshev. Se cumple que:

$$\varepsilon_{pass} = \sqrt{10^{\frac{A_{pass}}{10}} - 1} \iff A_{pass} = 10\log_{10}(1+\varepsilon_{pass}^2)$$
$$\varepsilon_{stop} = \sqrt{10^{\frac{A_{stop}}{10}} - 1} \iff A_{stop} = 10\log_{10}(1+\varepsilon_{stop}^2)$$

Las especificaciones del filtro analógico equivalente son $\{\Omega_{pass}, \Omega_{stop}, A_{pass}, A_{stop}\}$, o, $\{\Omega_{pass}, \Omega_{stop}, \epsilon_{pass}, \epsilon_{stop}\}$, donde las frecuencias analógicas se obtienen al predesplazar las frecuencias digitales:

$$\Omega_{pass} = \tan\left(\frac{\omega_{pass}}{2}\right), \Omega_{stop} = \tan\left(\frac{\omega_{stop}}{2}\right) \Rightarrow \omega_{pass} = \frac{2\pi f_{pass}}{f_s}, \quad \omega_{stop} = \frac{2\pi f_{stop}}{f_s}$$

Filtros análogos Butterworth (pasa-bajas)

Paso 1 (especificaciones): Están caracterizados por solo dos parámetros: el orden del filtro N y la frecuencia de normalización Ω_0. Su respuesta en magnitud es simplemente:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{2N}}, \quad \text{con } A(\Omega) = -10\log_{10}|H(\Omega)|^2 = 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{2N}\right]$$

Los dos parámetros del filtro $\{N, \Omega_0\}$ pueden determinarse cumpliendo las condiciones:

$$A(\Omega_{pass}) = 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\Omega_{pass}}{\Omega_0}\right)^{2N}\right] = A_{pass} = 10\log_{10}(1 + \epsilon_{pass}^2)$$

$$A(\Omega_{stop}) = 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\Omega_{stop}}{\Omega_0}\right)^{2N}\right] = A_{stop} = 10\log_{10}(1 + \epsilon_{stop}^2)$$

Filtros análogos Butterworth (pasa-bajas)

$$\left(\frac{\Omega_{pass}}{\Omega_0}\right)^{2N} = 10^{A_{pass}/10} - 1 = \epsilon_{pass}^2$$
$$\left(\frac{\Omega_{stop}}{\Omega_0}\right)^{2N} = 10^{A_{stop}/10} - 1 = \epsilon_{stop}^2$$

Al tomar raíces cuadradas y dividir, obtenemos la ecuación para N:

$$\left(\frac{\Omega_{stop}}{\Omega_{pass}}\right)^{N} = \frac{\epsilon_{stop}}{\epsilon_{pass}} = \sqrt{\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}}$$

Con la solución exacta:

$$N_{exact} = \frac{\ln\left(\frac{\epsilon_{stop}}{\epsilon_{pass}}\right)}{\ln\left(\frac{\Omega_{stop}}{\Omega_{pass}}\right)} = \frac{\ln(e)}{\ln(w)}, \quad e = \frac{\epsilon_{stop}}{\epsilon_{pass}} = \sqrt{\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}}, \quad w = \frac{\Omega_{stop}}{\Omega_{pass}}$$

Filtros análogos Butterworth (pasa-bajas)

Como N debe ser un número entero

$$N = \lceil N_{exact} \rceil, \quad \Omega_0 = \frac{\Omega_{pass}}{\left(10^{A_{pass}/10} - 1\right)^{1/2N}} = \frac{\Omega_{pass}}{\epsilon_{pass}^{1/N}}$$

Dado que N se incrementa, el filtro resultante será ligeramente mejor de lo requerido.
Paso 3 (Función de transferencia): Se conoce $\{N, \Omega_0\}$. Utilizando $s = j\Omega$ y observando que $H(\Omega)^* = H(-\Omega)$, podemos escribir $|H(\Omega)|^2$ en términos de s:

$$H(s)H^*(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_0}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\Omega_0}\right)^{2N}} = \frac{1}{(s - s_i)}$$

Definiendo $H(s) = \frac{1}{D(s)}$ tenemos:

$$D(s)D^*(-s) = 1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\Omega_0}\right)^{2N}$$

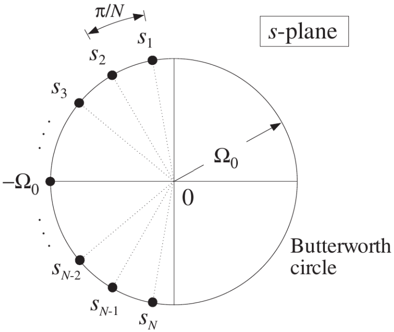
Filtros análogos Butterworth (pasa-bajas)

Para encontrar $D(s)$, determinamos todas las $2N$ raices, y elegimos todas las que están en el semi-plano izquierdo:

$$1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\Omega_0}\right)^{2N} = 0 \Rightarrow s^{2N} = (-1)^{N-1}\Omega_0^{2N},$$

donde

$$s_i = \Omega_0 e^{j\theta_i}, \quad \theta_i = \frac{\pi}{2N}(N + 1 + 2i),$$
$$i = 1, 2, \ldots, N, \ldots, 2N$$



El índice i hace que s_i esten en el semi-plano izquierdo, notamos que $\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{3\pi}{2}$ y que K es el número de polos que dependen del orden N

$$K = \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{si } N \text{ es par} \\ \frac{N-1}{2}, & \text{si } N \text{ es impar} \end{cases}$$

Filtros análogos Butterworth (pasa-bajas)

Utilizando el método de *factorización espectral*,

$$H(s) = H_0(s)H_1(s)H_2(s)\cdots H_K(s) = \frac{1}{D_0(s)D_1(s)D_2(s)\cdots D_K(s)}$$

con

$$D_i(s) = \left(1 - \frac{s}{s_i}\right)\left(1 - \frac{s}{s_i^*}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, K, \quad s_i = \Omega_0 e^{j\theta_i}, \quad \theta_i = \frac{\pi}{2N}(N - 1 + 2i)$$

Concluimos la función de transferencia análoga

$$H_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } N = 2K \\ \frac{1}{1+\frac{s}{\Omega_0}}, & \text{si } N = 2K+1 \end{cases} \qquad H_i(s) = \frac{1}{1 - 2\frac{s}{\Omega_0}\cos\theta_i + \frac{s^2}{\Omega_0^2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, K$$

Los polinomios de Butterworth $D(s)$ de órdenes 1 a 7 y frecuencia de normalización de 3 dB $\Omega_0 = 1$ se muestran a continuación. Para otros valores de Ω_0, s debe ser reemplazado por s/Ω_0 en cada entrada de la tabla. Por ejemplo, en el caso $N = 5$, tenemos $K = 2$ y los dos valores de θ_i:

$$\theta_i = \frac{\pi}{10}(4 + 2i), \quad \text{para } i = 1, 2$$
$$\theta_i = \frac{6\pi}{10}, \quad \frac{8\pi}{10}$$

Los filtros Butterworth correspondientes $H(s)$ para órdenes 1-8

N	K	$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K$	$D(s)$
1	0	–	$1 + s$
2	1	$\frac{3\pi}{4}$	$1 + 1.4142s + s^2$
3	1	$\frac{4\pi}{6}$	$(1 + s)(1 + s + s^2)$
4	2	$\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$	$(1 + 0.7654s + s^2)(1 + 1.8478s + s^2)$
5	2	$\frac{6\pi}{10}, \frac{8\pi}{10}$	$(1 + s)(1 + 0.6180s + s^2)(1 + 1.6180s + s^2)$

Filtros análogos Butterworth (pasa-bajas)

Paso 4 (Transformada bilineal): Cada sección de segundo orden analógica se transformará en una sección de segundo orden del filtro digital, de la siguiente manera:

$$H_i(z) = \left. \frac{1}{1 - 2\frac{s}{\Omega_0}\cos\theta_i + \frac{s^2}{\Omega_0^2}} \right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{G_i(1+z^{-1})^2}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}$$

donde los coeficientes del filtro G_i, a_{i1}, y a_{i2} se encuentran fácilmente como:

$$G_i = \frac{\Omega_0^2}{1 - 2\Omega_0\cos\theta_i + \Omega_0^2}, \quad a_{i1} = \frac{2(\Omega_0^2 - 1)}{1 - 2\Omega_0\cos\theta_i + \Omega_0^2}, \quad a_{i2} = \frac{1 + 2\Omega_0\cos\theta_i + \Omega_0^2}{1 - 2\Omega_0\cos\theta_i + \Omega_0^2}$$

Si $i = 1, 2, \ldots, K$, y N es impar, entonces también hay una sección de primer orden:

$$H_0(z) = \left. \frac{1}{1 + \frac{s}{\Omega_0}} \right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{G_0(1+z^{-1})}{1 + a_{01}z^{-1}}, \quad \text{donde } G_0 = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 + 1}, \quad a_{01} = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0 + 1}$$

Ejemplo 12.8.1: Utilizando la transformación bilineal y un prototipo de filtro analógico Butterworth pasa-bajos, diseñe un filtro digital pasa-bajos operando a una tasa de 20 kHz, con una banda de paso que se extiende hasta 4 kHz con una atenuación máxima en la banda de paso de 0.5 dB, y una banda de rechazo que comienza en 5 kHz con una atenuación mínima en la banda de rechazo de 10 dB.
Las frecuencias digitales en radianes por muestra son:

$$\omega_{pass} = \frac{2\pi f_{pass}}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 4}{20} = 0.4\pi, \quad \omega_{stop} = \frac{2\pi f_{stop}}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 5}{20} = 0.5\pi$$

Y sus versiones prewarp son:

$$\Omega_{pass} = \tan\left(\frac{\omega_{pass}}{2}\right) = 0.7265, \quad \Omega_{stop} = \tan\left(\frac{\omega_{stop}}{2}\right) = 1$$

Con $A_{pass} = 0.5\,\text{dB}$ y $A_{stop} = 10\,\text{dB}$ se puede calcular los parámetros $\{\epsilon_{pass}, \epsilon_{stop}\}$:

$$\epsilon_{pass} = \sqrt{10^{A_{pass}/10} - 1} = \sqrt{10^{0.5/10} - 1} = 0.3493$$

$$\epsilon_{stop} = \sqrt{10^{A_{stop}/10} - 1} = \sqrt{10^{10/10} - 1} = 3$$

Luego, el orden N nos da:

$$N_{exact} = \frac{\ln(e)}{\ln(\omega)} = \frac{\ln(\epsilon_{stop}/\epsilon_{pass})}{\ln(\Omega_{stop}/\Omega_{pass})} = \frac{\ln(3/0.3493)}{\ln(1/0.7265)} = 6.73 \implies N = 7$$

Por lo tanto, hay una sección de primer orden $H_0(z)$ y tres secciones de segundo orden. Para Ω_0:

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_{pass}}{\epsilon_{pass}^{1/N}} = \frac{0.7265}{(0.3493)^{1/7}} = 0.8443$$

Los coeficientes G_i, a_{i1}, a_{i2} serán:

i	G_i	a_{i1}	a_{i2}
0	0.4578	−0.0844	−
1	0.3413	−0.2749	0.6402
2	0.2578	−0.2076	0.2386
3	0.2204	−0.1775	0.0592

La función de transferencia resultante es:

$$H(z) = H_0(z)H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$

$$\begin{aligned} H(z) =& \frac{0.4578(1+z^{-1})^2}{1-0.0844z^{-1}} \cdot \\ & \frac{0.3413(1+z^{-1})^2}{1-0.2749z^{-1}+0.6402z^{-2}} \cdot \\ & \frac{0.2578(1+z^{-1})^2}{1-0.2076z^{-1}+0.2386z^{-2}} \cdot \\ & \frac{0.2204(1+z^{-1})^2}{1-0.1775z^{-1}+0.0592z^{-2}} \end{aligned}$$

Objetivo general

Estudiar

Clase de hoy:

- Diseño de filtros IIR (banda, rechazo) por transformación bilineal **12.3**

Próxima clase:

- Diseño de filtros IIR de orden superior y análogos **12.6, 12.7**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`