CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 12 - DFT y DFT inversa

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Comprender el funcionamiento de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su inversa, así como su interpretación matricial como proyección sobre bases complejas, y aplicar estas herramientas para analizar y reconstruir señales en el dominio discreto de la frecuencia.

Clase anterior:

- Resolución en frecuencia y ventaneo **(9.1)**

Clase de hoy:

Importante: secciones de la primera edición del libro de Orfanidis

- DFT y DFT inversa **(9.2.3, 9.6)**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

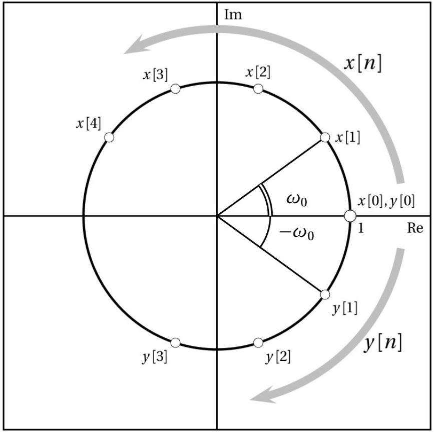
Exponencial compleja discreta

El ingrediente principal de la DFT es la exponencial compleja discreta, la cual representa un comportamiento oscilatorio y toma la forma de la secuencia

$$
\begin{aligned}
x(n) &= Ae^{j(\omega n+\phi)} \\
&= A\left[\cos(\omega n+\phi) + j\sin(\omega n+\phi)\right]
\end{aligned}
$$

donde $A \in \mathbb{R}$ es la amplitud, ω es la frecuencia y ϕ es la fase. Note que $x(n)$ solo es periódica cuando $\omega = 2\pi(M/N)$ con $M, N \in \mathbb{Z}$.

Recordar: si $c \in \mathbb{C}$, donde $c = a + ib$, $|c| = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\phi = \arg(c) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$



Discrete fourier transform DFT

La **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** de N puntos de una secuencia de largo L se define como la DTFT evaluada en N puntos a frecuencias equiespaciadas, en el intervalo $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Estas frecuencias DFT se definen como (en radianes/muestra):

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

La DFT de N puntos es entonces:

$$X(k) = X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}, \quad \forall k = 0, ..., N-1$$

Importante: La longitud L de la secuencia a transformar y la división de las frecuencias a estudiar en N partes, puede ser tratadas independientemente. Si $L < N$, se puede aplicar *zero padding* de $N - L$; si $L > N$, se puede implementar una emboltura (*wrapping*). Sin embargo, muchos autores asumen $L = N$, (Lo cual es conveniente para el cálculo de la *FFT*). Sin pérdida de generalidad, lo que sigue supone que $L = N$.

Discrete fourier transform DFT, forma matricial

Para cada número de frecuencia $k = 0, ..., N-1$, podemos reescribir

$$W_N^{kn} = e^{-2\pi jkn/N} \Rightarrow \boldsymbol{W} \in \mathbb{C}^{N\times N}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N.$$

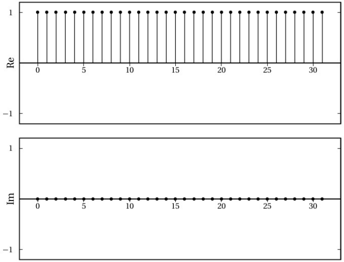
Esto quiere decir que, para cada k, podemos redefinir las exponenciales como un vector (secuencia) compleja de tamaño $\mathbb{C}^N$.

$$\boldsymbol{w}^k := [W_N^0, W_N^k, W_N^{2k}, ..., W_N^{(N-1)k}] \in \mathbb{C}^N.$$

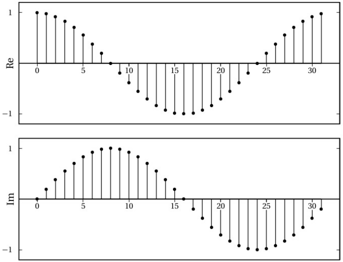
Además, esto nos indica que la DFT puede ser escrita como un producto punto (o interior, recordar ágebra lineal), i.e.,

$$X_k = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^k \rangle, \quad k = 0, ..., N-1, \quad \text{y en forma matricial } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}$$

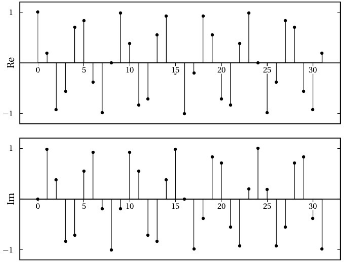
o en otras palabras, la proyección de la secuencia de entrada $\boldsymbol{x}$ en los círculos complejos.



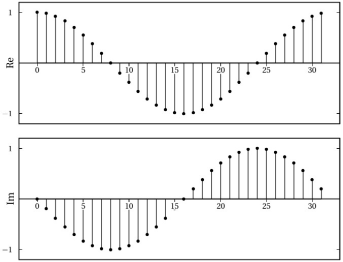
Basis vector $\boldsymbol{w}^{(0)} \in \mathbb{C}^{32}$



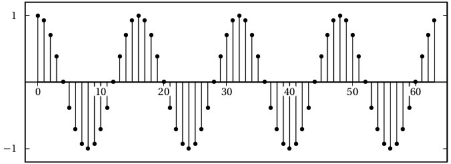
Basis vector $\boldsymbol{w}^{(1)} \in \mathbb{C}^{32}$



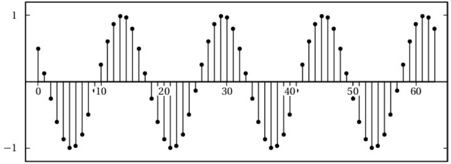
Basis vector $\boldsymbol{w}^{(7)} \in \mathbb{C}^{32}$



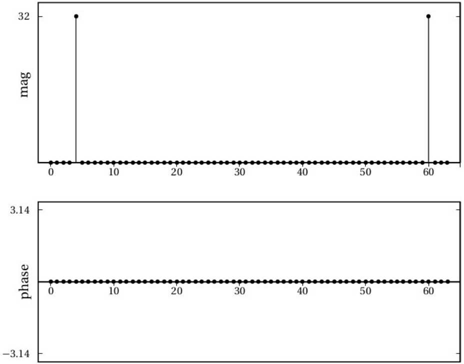
Basis vector $\boldsymbol{w}^{(31)} \in \mathbb{C}^{32}$

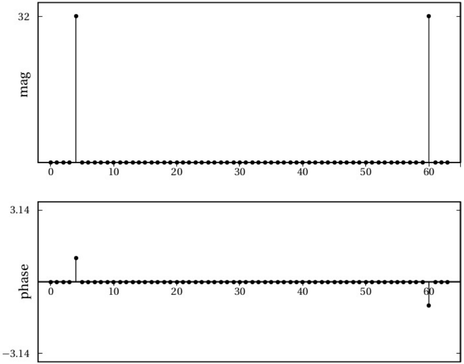


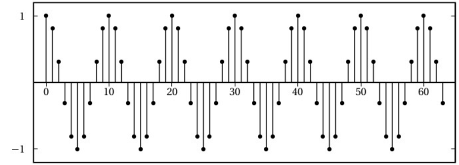
$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, 63$$



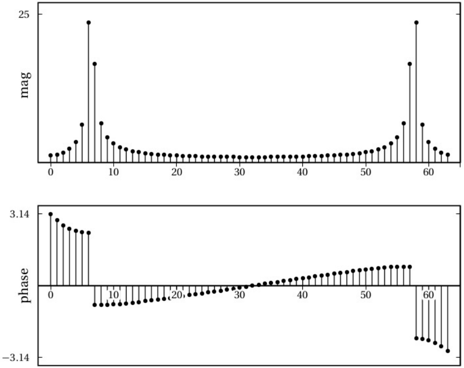
$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n + \frac{\pi}{3}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots 63$$







$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots 63$$



Una pregunta interesante: ¿aplicar una ventana para este caso ayudaría a reducir las magnitudes espúreas?

Discrete fourier transform DFT

Ejemplo: La matriz de la DFT de 4 puntos será

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

La DFT de una secuencia de $L = 4 = N$ será

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ x_0 - jx_1 - x_2 + jx_3 \\ x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ x_0 + jx_1 - x_2 - jx_3 \end{bmatrix}$$

Inverse discrete fourier transform, iDFT

La matriz $\boldsymbol{W}$ es cuadrada $\boldsymbol{W} \in \mathbb{C}$ y no singular, por lo tanto tiene inversa. Así la iDFT se puede escribir

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X}, \quad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, n = 0, ..., N-1$$

La matriz $\boldsymbol{W}^{-1}$, puede ser obtenida sin la necesidad de hacer la inversión. Aprovechando que es una matriz ortonormal (unitaria)

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^* = I_N$$

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}^{-1}$$

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}^{-1}$$

Ejemplo: considere la secuencia compleja $X = [6, 8+4j, -2, 8-4j]$, encuentre la transformada inversa

$$x = \mathsf{IDFT}(X) = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}^{*}X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 8+4j\\ -2\\ 8-4j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 0\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$$

Bonificación 6 evaluación 2: para el vector $x = [5, 0, 4]$, obtener la matriz W de la DFT, el vector resultante X, la matriz inversa W^{1} y nuevamente el vector x. Sea detallado con el procedimiento/paso a paso

Ejercicios (Orfanidis)

IMPORTANTE: primera edición del libro de Orfanidis

- Demostración de cómo obtener la matriz inversa de la DFT.
- Ejemplos: Formas matriciales Sección 9.4. Ejemplo 9.6.1
- Ejercicios Sección 9.10, página 523: 9.12, 9.13, 9.14, 9.17, 9.22,9.23, 9.24

Objetivo general

Comprender el funcionamiento de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su inversa, así como su interpretación matricial como proyección sobre bases complejas, y aplicar estas herramientas para analizar y reconstruir señales en el dominio discreto de la frecuencia.

Clase de hoy:

- DFT y DFT inversa **(10.1, 10.6)**

Próxima clase:

- Zero padding

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010.
2. Prandoni, Paolo, and Martin Vetterli. *Signal processing for communications.* EPFL press, 2008. Disponible en `https://www.sp4comm.org/download.html`.