CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 09 - Causalidad y estabilidad

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Estudiar las definiciones de causalidad y estabilidad en sistemas LTI

Clase anterior:

- Respuesta al impulso **3.3**
- Filtros FIR e IIR **3.4**

Clase de hoy:

- Causalidad y estabilidad **3.5**

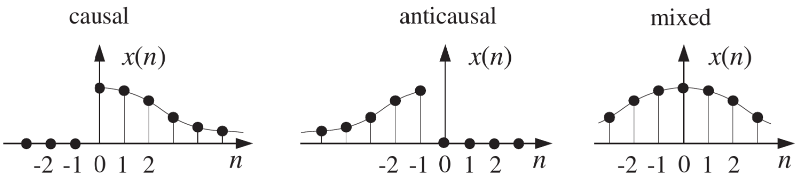
Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Causalidad en señales

Causalidad (Fisolofía, física, computación, etc): relación entre las causas y efectos

Para señales discretas:

- $x(n)$ es **causal** si $x(n) = 0$ para $n < 0$, cumple causa (pasado o presente) -efecto (presente)
- $x(n)$ es **anticausal** si $x(n) = 0$ para $n \geq 0$, viola causa (pasado)-efecto (pasado)
- $x(n)$ es **mixta** si no es ni **causal** ni anticausal, viola causa-efecto (tanto pasado, como presente)



La causalidad nunca debe ser confundida con la correlación.

Causalidad en sistemas LTI

Un sistema LTI es **causal/anticausal/mixto** si $h(n)$ es **causal/anticausal/mixto**.

En general, los sistemas LTI y los filtros FIR e IIR que hemos visto en clase, son **causales** ya que toman la información del pasado o presente (causa) para dar una solución (efecto) en el presente. Recordemos su definición bajo la convolución

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m)x(n-m), \qquad \underbrace{y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)}_{h(n)=0 \text{ para } n<0}$$

Sin embargo, los filtros FIR e IIR pueden ser anticausales cuando toman muestras de entrada en el futuro $x(n+1), x(n+2)$ **o mixtos** $x(n+1), x(n), x(n-1)$

Causalidad en sistemas mixtos y anticausales

Recordemos la definición de convolución para la respuesta al impulso sobre una señal arbitraria

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad \text{(Forma Directa)}$$

$$y_n = \cdots + h_{-2}x_{n+2} + h_{-1}x_{n+1} + h_0x_n + h_1x_{n-1} + h_2x_{n-2} + \cdots$$

A pesar de que esta expresión pueda ser un sistema LTI, toma valores infinitos en el pasado $(-\infty < n)$ e infinitos del futuro $(n < \infty)$ de la señal de entrada o sea $x(n+1), x(n+2)$, los cuales no están disponibles (además, hay infinitos valores de $h(n)$).

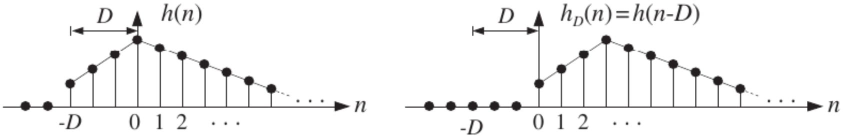
Causalidad en sistemas mixtos y anticausales

Por otro lado, si el sistema no es causal (anticausal/mixto) y, además, los coeficientes de $h(n)$ son finitos, el sistema se puede transformar en causal retardando $h(n)$, i.e.,

$$h_D(n) = h(n-D), \quad \text{donde} \quad h(n) \neq 0 \quad \text{para} \quad -D \leq n \leq -1 \tag{1}$$

Reemplazando (1) en la relación I/O de la convolución obtenemos

$$y(n) = \sum_{m=-D}^{\infty} h(m)x(n-m) \Rightarrow y_D(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_D(m)x(n-m)$$



Causalidad

Ejemplo: Considera el filtro típico de suavizado de 5 coeficientes, cuyos coeficientes de filtro son $h(n) = 1/5$ para $-2 \leq n \leq 2$. La ecuación convolucional I/O correspondiente se convierte en

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-2}^{2} h(m)x(n-m) = \frac{1}{5}\sum_{m=-2}^{2} x(n-m) \\ &= \frac{1}{5}[x(n+2) + x(n+1) + x(n) + x(n-1) + x(n-2)] \end{aligned}$$

Su parte anticausal tiene una duración $D = 2$ y puede hacerse causal con un retraso temporal de dos unidades, lo que resulta en

$$y_2(n) = y(n-2) = \frac{1}{5}[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)]$$

Estabilidad

Un sistema LTI es estable si $h(n)$ tiende a cero lo suficientemente rápido cuando $n \leftarrow \infty$, de tal forma que $y(n)$ no diverja. Esto es, que $|y(n)| \leq B$, si $|x(n)| \leq A$, para $A, B \in \mathbb{R}$ y sean finitos.

Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Nota: Todos los filtros FIR son estables

Ejemplo 1: $h(n) = (0.5)^n u(n)$ (estable y causal)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n = \frac{1}{1-0.5} < \infty, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo 2: $h(n) = -(0.5)^n u(-n-1)$ (inestable y anticausal)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-1}^{-\infty} (0.5)^n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^m = \infty$$

Ejemplo 3: $h(n) = 2^n u(n)$ (inestable y causal), $h(n) = -2^n u(-n-1)$ (estable y anticausal)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n = \sum_{m=1}^{\infty} (0.5)^m = \frac{0.5}{1-0.5} < \infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} x^m = \frac{x}{1-x}$$

Ejercicios (Orfanidis)

- Ejemplos (resueltos): 3.5.1, 3.5.2
- Ejercicios (Solucionario): 3.14, 3.15, 3.16
- Con tus propias palabras, has un resumen, no menor a un cuarto de página ni mayor a media página, acerca de la compatibilidad entre causalidad y estabilidad presentada en la página 116 del libro.

Objetivo general

Estudiar las definiciones de causalidad y estabilidad en sistemas LTI

Clase de hoy:

- Causalidad y estabilidad **3.5**

Próxima clase:

- Convolución **4.1.1-4.1.3**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 1st edition, 1995. Disponible en `https://rutgers.app.box.com/s/5vsu06pp556g9dfsdvayh4k50wqpataw`.