CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 17 - Diseño de filtros IIR por transformación bilineal

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Clase anterior:

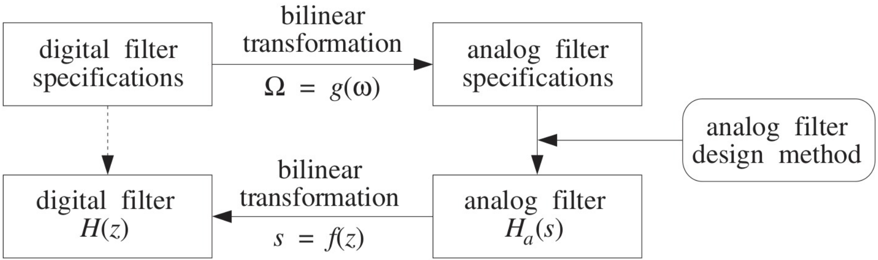
- Diseño de filtros IIR (pasa-bajas) por transformación bilineal **12.1**

Clase de hoy:

- Diseño de filtros IIR (banda, rechazo) por transformación bilineal **12.3**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Esquema de diseño



Idea: Traducir el diseño de un filtro analógico clásico a un filtro digital IIR.

$$H_a(s) \longrightarrow H(z).$$

Diseño de filtros IIR por transformación bilineal

Método:

1. Comenzar con las especificaciones de la magnitud del filtro digital.
2. Transformar a especificaciones de un filtro análogo, usando la transformación de prewarping apropiada.
3. Diseñar el filtro análogo $H_a(s)$.
4. Transformar el filtro análogo en digital usando la transformación bilineal:

$$H(z) = H_a(s)|_{s=f(z)} \rightarrow H(\omega) = H_a(\Omega)|_{\Omega=g(\omega)} \tag{1}$$

Filtros IIR de "resonancia" o "peaking" (banda)

Paso 1: Magnitud.: frecuencia de muestreo f_s, frecuencia central f_0 y ancho de banda Δf. Para frecuencia digital:

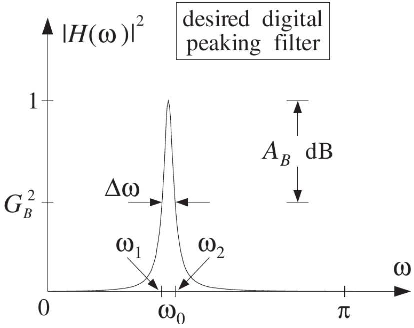
$$\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi \Delta f}{f_s}$$

En general, se puede definir como el ancho completo a un nivel G_B^2, o en decibeles:

$$A_B = -10\log_{10}(G_B^2) \Rightarrow G_B = 10^{-A_B/20}$$

Paso 2: Pre-warping.

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$



Paso 3: Filtro análogo.

$$\boxed{H_a(s) = \frac{\alpha s}{s^2 + \alpha s + \Omega_0^2}}$$

Filtros IIR de “resonancia” o “peaking” (banda)

Con $s = j\Omega$, la respuesta en frecuencia y magnitud es:

$$H_a(\Omega) = \frac{j\alpha\Omega}{-\Omega^2 + j\alpha\Omega + \Omega_0^2}$$

$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{\alpha^2\Omega^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \alpha^2\Omega^2}$$

Notar que $|H_a(\Omega = \Omega_0)|^2 = 1$. Las frecuencias de ancho de banda Ω_1 y Ω_2 satisfarán la condición de ancho de banda:

$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{\alpha^2\Omega^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \alpha^2\Omega^2} = G_B^2$$

Filtros IIR de “resonancia” o “peaking” (banda)

Forma ”cuártica”

$$\Omega^4 - \left(2\Omega_0^2 + \frac{1-G_B^2}{G_B^2}\alpha^2\right)\Omega^2 + \Omega_0^4 = 0$$

Sus dos soluciones Ω_1^2 y Ω_2^2 satisfacen las condiciones:

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 2\Omega_0^2 + \frac{1-G_B^2}{G_B^2}\alpha^2$$

$$\Omega_1^2\Omega_2^2 = \Omega_0^4$$

de donde obtenemos $\Omega_1\Omega_2 = \Omega_0^2$ y

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{\sqrt{1-G_B^2}}{G_B}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{G_B}{\sqrt{1-G_B^2}}\Delta\Omega$$

Filtros IIR de "resonancia" o "peaking" (banda)

Se puede demostrar que

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\omega_0}{2}\right), \quad \alpha = \frac{G_B}{\sqrt{1-G_B^2}}(1+\Omega_0^2)\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)$$

Paso 4: Bilineal. Ahora podemos utilizar la transformación bilineal:

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \ldots = \frac{\beta}{1+\beta}\cdot\frac{1-z^{-2}}{1-\left(2\frac{\cos\omega_0}{1+\beta}\right)z^{-1}+\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)z^{-2}}$$

con

$$\beta = \frac{G_B}{\sqrt{1-G_B^2}}\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)$$

Filtros IIR de “resonancia” o “peaking” (banda)

Si definimos

$$b = \frac{1}{1+\beta} = \frac{1}{1 + \frac{G_B}{\sqrt{1-G_B^2}} \tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}$$

podemos escribir

$$H(z) = (1-b)\frac{1 - z^{-2}}{1 - 2b\cos\omega_0\, z^{-1} + (2b-1)z^{-2}}$$

Notar que $H(z=\pm 1) = 0$. En el caso que asumamos ancho 3dB, $G_B^2 = 1/2$ y

$$\beta = \tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right), \quad b = \frac{1}{1+\beta} = \frac{1}{1+\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}$$

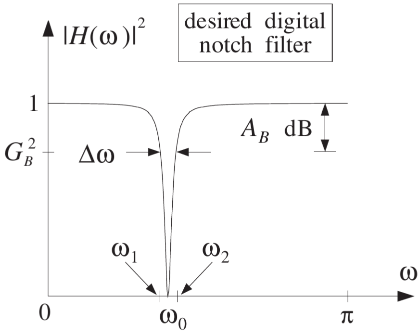
Filtros IIR de “muesca” o “notch” (rechazo)

Paso 1: Magnitud.: frecuencia de muestreo f_s, frecuencia central f_0 y ancho de banda Δf. Para frecuencia digital:

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi \Delta f}{f_s}$$

En general, se puede definir como el ancho completo a un nivel G_B^2, o en decibeles:

$$A_B = -10 \log_{10}(G_B^2) \Rightarrow G_B = 10^{-A_B/20}$$



$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$|H(\omega_1)|^2 = G_B^2 = |H(\omega_2)|^2$$

Filtros IIR de "muesca" o "notch" (rechazo)

Paso 2: Pre-warping.

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

Paso 3: Filtro análogo. El filtro de rechazo análogo es

$$H_a(s) = \frac{s^2+\Omega_0^2}{s^2+\alpha s+\Omega_0^2}, \quad \text{con } \Omega_0 \text{ la frecuencia notch.}$$

Utilizando la función prewarping, se puede demostrar que

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-G_B^2}}{G_B}(1+\Omega_0^2)\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)$$

Paso 4: Bilineal. Usando la transformación bilineal $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, se obtiene

$$H(z) = b\frac{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}{1-2b\cos(\omega_0)z^{-1}+(2b-1)z^{-2}}, \quad b = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{1-G_B^2}}{G_B}\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}$$

Ejemplo: Diseñe un filtro digital que opere con $f_s = 10\,\text{kHz}$ con frecuencia de resonancia a $1.75\,\text{kHz}$ y ancho de 3 dB de $500\,\text{Hz}$. Luego, rediseñar para que tenga $10\,\text{dB}$ de atenuación a $500\,\text{Hz}$, en vez de 3 dB. Las frecuencias digitales son:

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 1.75}{10} = 0.35\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{muestra}}\right]$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi \Delta f}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 0.5}{10} = 0.1\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{muestra}}\right]$$

Recordamos

$$H(z) = (1-b)\frac{1 - z^{-2}}{1 - 2b\cos\omega_0\, z^{-1} + (2b-1)z^{-2}}$$

$$\beta = \tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right), \quad b = \frac{1}{1+\beta} = \frac{1}{1+\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)} \tag{2}$$

(i) $A_B = 3\,\mathrm{dB}$

$$\cos\omega_0 = 0.4540, \quad \beta = \tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) = 0.1584,$$

$$b = \frac{1}{1+\beta} = 0.8633 \Rightarrow 1-b = 0.1367$$

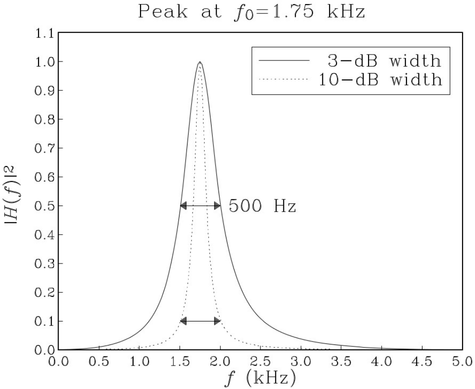
$$H(z) = \frac{0.1367(1-z^{-2})}{1-0.7838z^{-1}+0.725z^{-2}}$$

(ii) $A_B = 10\,\mathrm{dB}$

$$G_B^2 = 10^{-A_B/10} = 0.1 \Rightarrow \beta = \frac{G_B}{\sqrt{1-G_B^2}}\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) = 0.0528$$

$$b = \frac{1}{1+\beta} = 0.9499, \quad 1-b = 0.0501$$

$$H(z) = \frac{0.0501\,(1-z^{-2})}{1-0.8624\,z^{-1}+0.8872\,z^{-2}}$$



Objetivo general

Estudiar

Clase de hoy:

- Diseño de filtros IIR (banda, rechazo) por transformación bilineal **12.3**

Próxima clase:

- Diseño de filtros IIR de orden superior y análogos **12.6, 12.7**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`