CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 03 - Espectro de señales muestreadas y replicación

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Expectativa de aprendizaje

Comprender cómo se representa el espectro de una señal muestreada mediante la DTFT, y analizar el fenómeno de replicación espectral como consecuencia del muestreo. Aplicar esta comprensión para identificar condiciones que evitan aliasing y vincular las expresiones matemáticas con su interpretación espectral.

Clase anterior:

- Reconstrucción analógica y aliasing (sinusoides) **1.3.1, 1.4**

Clase de hoy:

- Espectro de señales muestreadas (DTFT) **1.5**
- Replicación del espectro **1.5.2**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Espectro de señales muestreadas

Para analizar el espectro de una señal $x(t)$, muestreada en instantes $t = nT$, emplearemos la Transformada en tiempo discreto de Fourier o *Discrete time Fourier Transform (DTFT)*. Para esto definimos una señal muestreada $\hat{x}(t)$ como

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT), \tag{1}$$

y definimos su transformada de Fourier

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) e^{-2\pi j f t} dt. \tag{2}$$

Reemplazando (1) en (2), obtenemos la *DTFT*,

$$\hat{X}(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-2\pi j f T n}, \quad f \in \mathbb{R} \quad \textbf{Demos.} \tag{3}$$

Considerar la relación $e^{2\pi i f T n} = e^{2\pi i (f/f_s) n} = e^{j\Omega T n} = e^{j\omega n}$. **ver sección 1.4.3 del libro de Orfanidis**

Espectro de señales muestreadas

1. $\hat{X}(f)$ es una función **periódica** de f con periodo f_s, por lo tanto, $\hat{X}(f + f_s) = \hat{X}(f)$. Esto se deduce del hecho de que $e^{-2\pi i f T n}$ es periódico en f. Debido a esta periodicidad, uno puede restringir el intervalo de frecuencia a solo un periodo, a saber, el intervalo de Nyquist, $[-f_s/2, f_s/2]$.
2. **Serie de Fourier:** Matemáticamente, la Ecuación (3) puede interpretarse como una expansión en serie de Fourier de la función periódica $\hat{X}(f)$, donde las muestras $x(nT)$ corresponden a los coeficientes de Fourier. Así, es posible recuperar $x(nT)$ a partir de $\hat{X}(f)$ mediante la serie de Fourier inversa:

$$x(nT) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} \hat{X}(f) e^{2\pi i f T n} \, df = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(\omega) e^{i\omega n} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Espectro de señales muestreadas

1. $\hat{X}(f)$ es una función **periódica** de f con periodo f_s, por lo tanto, $\hat{X}(f+f_s) = \hat{X}(f)$. Esto se deduce del hecho de que $e^{-2\pi i f T n}$ es periódico en f. Debido a esta periodicidad, uno puede restringir el intervalo de frecuencia a solo un periodo, a saber, el intervalo de Nyquist, $[-f_s/2, f_s/2]$.
2. **Serie de Fourier:** Matemáticamente, la Ecuación (3) puede interpretarse como una expansión en serie de Fourier de la función periódica $\hat{X}(f)$, donde las muestras $x(nT)$ corresponden a los coeficientes de Fourier. Así, es posible recuperar $x(nT)$ a partir de $\hat{X}(f)$ mediante la serie de Fourier inversa:

$$x(nT) = \frac{1}{f_s}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \hat{X}(f)e^{2\pi i f T n}\,df = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(\omega)e^{i\omega n}\frac{d\omega}{2\pi}$$

Espectro de señales muestreadas

1. **Aproximación numérica:** La ecuación (3) también puede entenderse como una aproximación numérica al espectro en frecuencia de una señal analógica $x(t)$, utilizando la definición de integral:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i f t}dt \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-2\pi i f nT} \cdot T$$

o equivalentemente,

$$X(f) \simeq T\hat{X}(f)$$

Esta aproximación se vuelve exacta en el límite continuo:

$$X(f) = \lim_{T \to 0} T\hat{X}(f)$$

Replicación del espectro

¿Qué pasa con el espectro de una señal continua que es muestreada?¿Cómo se relaciona el espectro de la señal análoga $X(f)$ y la discreta $\hat{X}(f)$?

Definimos una función de muestreo: $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Luego

$$\hat{x}(t) = \sum_{n} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n} x(t)\delta(t - nT) = x(t)\sum_{n} \delta(t - nT) = x(t)s(t).$$

Recordando la expansión en series de Fourier (compleja) y aprovechando la periodicidad de $s(t)$, tenemos

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi jmt}{T}}, \quad \text{Recordar } f_s = \frac{1}{T}$$

Recordar

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nx}{T}}, \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}\, dx$$

Replicación del espectro

Luego

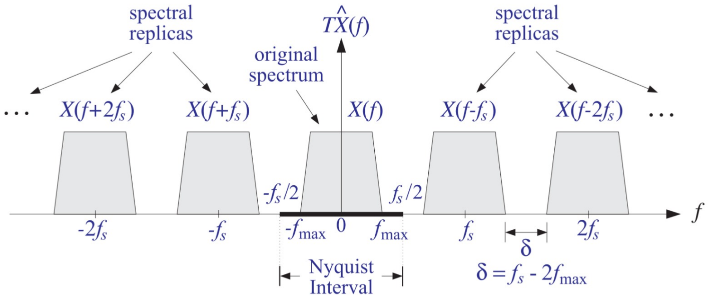
$$\hat{x}(t) = x(t)s(t) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)e^{2\pi j m f_s t}.$$

Usando la propiedad de la Tranformada de Fourier $x(t)e^{2\pi j m f_c t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f - f_c)$ obtenemos

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_s)$$

Ver demostración alterna en libro de orfanidis

Replicación del espectro



Las replicas están separadas por la "banda de resguardo" $\delta = f_s - 2f_{max}$ y notamos que el teorema de muestreo (Nyquist, $f_s \geq 2f_{max}$) garantiza que $\delta > 0$, i.e., las bandas en frecuencia no se superponen. Si las replicas no se superponen, se cumple

$$T\hat{X}(f) = X(f), \quad \text{para } -\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$$

Ejercicio en clase

Considere la señal $x(t) = e^{2\pi j f_0 t}$, cuya transformada de Fourier es $X(f) = \delta(f - f_0)$. Encontrar el espectro de $\hat{x}(t) = x(nT)$. **Nota: extisten dos formas**

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j f_0 T n}\delta(t - nT)$$

tendrá un espectro de Fourier dado por

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0 - m f_s)$$

Por lo tanto, el espectro de la sinusoide muestreada consiste en todas las frecuencias del conjunto replicado $\{f_0 + m f_s,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

Ejercicios (Orfanidis)

- Deducir la expresión (3) a partir de (1) y (2).
- Demostrar la replicación del espectro
- Ejemplos del libro: 1.5.1, 1.5.2 (ayudantía)
- Ejercicios con solución sección 1.8: 1.10 al 1.12
- Demuestre que la señal $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ se puede escribir como $s(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j m f_s t}$.

Objetivo general

Conocer como es el espectro de las señales muestreadas y su replicación en frecuencia

Clase de hoy:

- Espectro de señales muestreadas (DTFT) **1.5**
- Replicación del espectro **1.5.2**

Próxima clase:

- Prefiltros antialias **1.5.3**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 1st edition, 1995. Disponible en `https://rutgers.app.box.com/s/5vsu06pp556g9dfsdvayh4k50wqpataw`.