

CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 02 - Muestreo, aliasing y reconstrucción

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso



**Universidad
de Valparaíso**
CHILE

Expectativas de aprendizaje

El estudiante será capaz de analizar el efecto del muestreo en una señal analógica, identificar aliasing y comprender las condiciones necesarias para su reconstrucción exacta.

Clase anterior:

- Repaso de señales analógicas **1.2**
- Teorema del muestreo **1.3**

Clase de hoy:

- Muestreo, aliasing y reconstrucción **1.3.1, 1.4**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo david.ortiz@uv.cl.

Teorema de muestreo (Shannon-Nyquist)

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x(t)$ es f_{max} , y la señal es muestreada con una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_{max}$, entonces es posible reconstruir $x(t)$ en forma exacta a partir de las muestras de $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, con $T = \frac{1}{f_s}$

Para tener una representación precisa se debe cumplir

$$f_s \geq 2f_{max}, \quad T \leq \frac{1}{2f_{max}}$$

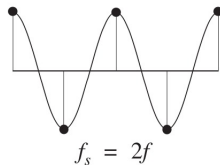
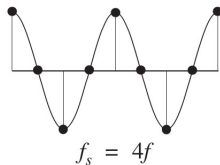
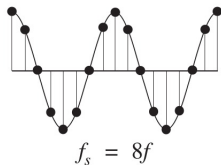
¿Cuales son las unidades?

Y nombramos

1. $(f_s)_{max} = 2f_{max} :=$ Razón de Nyquist
2. $\frac{f_s}{2} :=$ Frecuencia de Nyquist (*Cutoff frequency*)
3. $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}] :=$ Intervalo de Nyquist

Teorema de muestreo

Considere la senoide $x(t) = \cos(2\pi ft)$ de frecuencia f y el requerimiento del teorema del muestreo $f_s \geq 2f_{\max}$



¿Qué pasa con una suma de senoiales?

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t) + \cdots + A_{\max} \cos(2\pi f_{\max} t),$$

entonces,

$$2f_1 \leq 2f_2 \leq \cdots \leq 2f_{\max} \leq f_s$$

Teorema de muestreo

Un mal muestreo de la señal analógica produce un efecto conocido como *alias*. **Ver ejemplo.**

Aplicación	f_{\max}	f_s
Geofísica	500 Hz	1 kHz
Biomédica	1 kHz	2 kHz
Mecánica	2 kHz	4 kHz
Voz	4 kHz	8 kHz
Audio	20 kHz	40 kHz
Video	4 MHz	8 MHz

Table 1: Frecuencia “máxima” y frecuencia de muestreo para diferentes aplicaciones.

Nota: Acceder a la versión virtual de este documento para ver el video.

Aliasing

¿Qué pasa si no se cumple el teorema de muestreo? Consideremos nuevamente la exponencial compleja $x(t) = e^{2\pi j f t}$. Definamos una familia de sinusoides complejas y sus versiones muestreadas

$$x_m(t) = e^{2\pi j(f+m f_s)t}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \Rightarrow x_m(nT) = e^{2\pi j(f+m f_s)nT}$$

entonces, considerando $f_s T = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} x_m(nT) &= e^{2\pi j(f+m f_s)Tn} \\ &= e^{2\pi j f T n} e^{2\pi j m f_s T n} \\ &= e^{2\pi j f T n} \cdot 1 \quad (\text{con } e^{2\pi j m f_s T n} = e^{2\pi j m n} = 1) \\ &= x(nT) \end{aligned}$$

Esto significa que $x_m(nT) = x(nT)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ y que las frecuencias $f \pm f_s, f \pm 2f_s, \dots, f \pm m f_s$ serán equivalentes a f o *alias* de la frecuencia verdadera.

Frecuencia alias

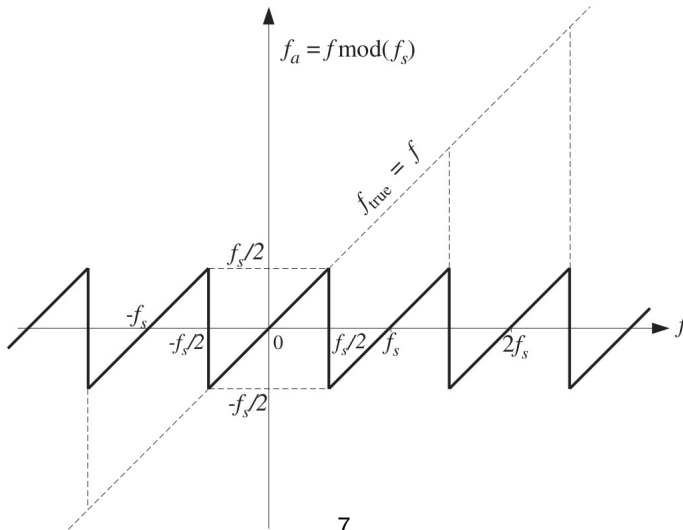
Adicionalmente, de las frecuencias *alias* únicamente una estará en el intervalo de Nyquist $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$ y esta se podrá obtener a partir de la expresión

$$f_a = f \bmod (f_s) \Rightarrow \begin{cases} f_a = f \pm m f_s & \text{La fase es importante,} \\ f_a = |f - m f_s| & \text{La fase no importa.} \end{cases}$$

La operación \bmod consiste en *restar* o *sumar* suficientes multiplos de f_s a la frecuencia f , hasta que f_a se encuentre en el intervalo de Nyquist.

La función \bmod para este caso, difiere de la función módulo (%) utilizada en matemáticas. La función \bmod para este caso hace referencia al paso a paso de encontrar la frecuencia dentro del intervalo de Nyquist, al considerar $x_m(nT) = x(nT)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Frecuencia alias



Ejercicio en clase

Ejemplo 1: Señal con $f_s = 8\text{Hz}$ y conjunto de frecuencias $\{\boxed{1}, \boxed{3}, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

		Frecuencias (f)			
		$f = 1$	$f = 3$	$f = 5$	$f = 7$
m	0	$f_a = 1 \pm 0 \cdot 8 = \boxed{1}$	$f_a = 3 \pm 0 \cdot 8 = \boxed{3}$	$f_a = 5 \pm 0 \cdot 8 = 5$	$f_a = 7 \pm 0 \cdot 8 = 7$
	1	$f_a = 1 \pm 1 \cdot 8 = \begin{cases} 9 \\ -7 \end{cases}$	$f_a = 3 \pm 1 \cdot 8 = \begin{cases} 11 \\ -5 \end{cases}$	$f_a = 5 \pm 1 \cdot 8 = \begin{cases} 13 \\ \boxed{-3} \end{cases}$	$f_a = 7 \pm 1 \cdot 8 = \begin{cases} 15 \\ \boxed{-1} \end{cases}$
	2	$f_a = 1 \pm 2 \cdot 8 = \begin{cases} 17 \\ -15 \end{cases}$	$f_a = 3 \pm 2 \cdot 8 = \begin{cases} 19 \\ -13 \end{cases}$	$f_a = 5 \pm 2 \cdot 8 = \begin{cases} 21 \\ -11 \end{cases}$	$f_a = 7 \pm 2 \cdot 8 = \begin{cases} 23 \\ -9 \end{cases}$

Ejercicio: Una señal senoidal de frecuencia $f = 10\text{ Hz}$ es muestreada a una razón de $f_s = 12\text{ Hz}$.

- ¿Qué frecuencias replicadas se generan en el espectro de la señal muestreada?
- ¿Cuál de esas réplicas aparece dentro del intervalo de Nyquist $[-6, 6]\text{ Hz}$?
- ¿Qué frecuencia se observará en la señal reconstruida?
- ¿Qué ocurriría si en cambio la señal se muestrea a $f_s = 22\text{ Hz}$?

Ejercicio en clase

Respuesta:

- a) Las réplicas aparecen en:

$$f + mf_s = 10 + 12m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Es decir: $\dots, -26, -14, -2, 10, 22, 34, \dots$

- b) Solo la réplica -2 Hz cae dentro del intervalo de Nyquist $[-6, 6]$ Hz.
- c) La señal reconstruida será interpretada como una senoidal de -2 Hz debido al *aliasing*.
- d) Si $f_s = 22$ Hz, el intervalo de Nyquist es $[-11, 11]$ Hz. En este caso, la frecuencia original de 10 Hz cae dentro del intervalo, por lo tanto **no hay aliasing** y la señal se recupera correctamente.

Ejercicios (Orfanidis)

1. Demostración vista en clase sobre aliasing. Otra versión aquí.
2. Ejemplos del libro: 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5
3. Ejercicios con solución sección 1.8: 1.1 a 1.8

Objetivo general

Profundizar en el teorema de muestreo, conocer su necesidad, y reconstrucción de señales

Clase de hoy:

- Reconstrucción analógica y aliasing (sinusoides) **1.3.1,1.4**

Próxima clase:

- Espectro de señales muestreadas (DTFT) **1.5**
- Replicación del espectro **1.5.2**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, Introduction to signal processing. Rutgers University, 1st edition, 1995. Disponible en <https://rutgers.app.box.com/s/5vsu06pp556g9dfsdvayh4k50wqpataw>.