CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 05 - Reconstrucciones ideales y tipo escalera

David Ortiz, Ph.D.
Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaiso

Expectativa de aprendizaje

El/La estudiante será capaz de comprender cómo se reconstruye una señal analógica a partir de muestras digitales, interpretar el papel del reconstructor ideal y su efecto en el dominio de la frecuencia.

Clase anterior:

- Prefiltros antialias **1.5.3**

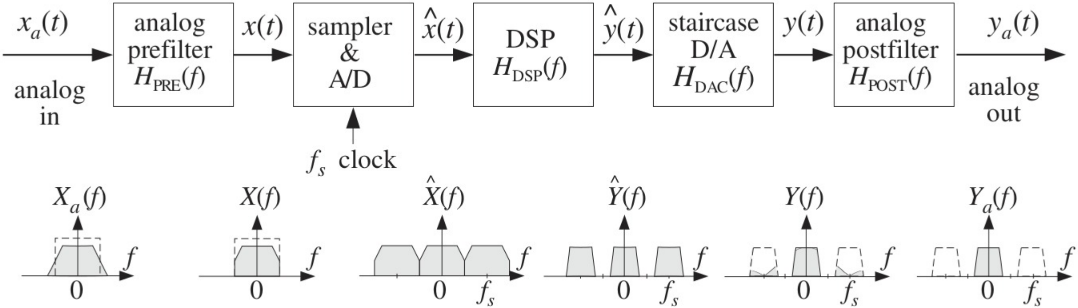
Clase de hoy:

- Reconstrucciones ideales **1.6**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

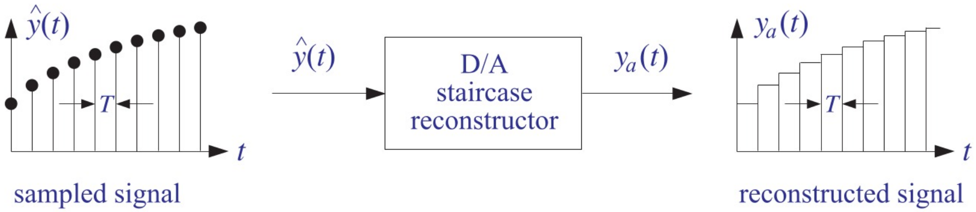
© David Ortiz-Puerta Universidad ... iso

Componentes típicos de un sistemas DSP



©David ... de Valparaiso

Reconstrucción analógica



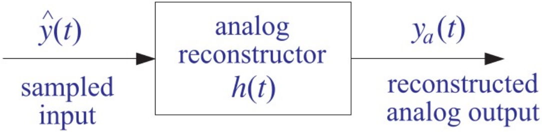
¿Cómo rellenar los espacios entre muestras?

Toda forma razonable de rellenar los espacios entre muestras corresponde a un proceso de reconstrucción, el cual suele suavizar la señal muestreada. Por esta razón, cualquier reconstructor puede interpretarse como un filtro pasa-bajas $h(t)$.

©David Ortiz Puerta Valparaiso

Reconstrucción analógica

¿Cuál es la naturaleza de $h(t)$?



Sabemos que (Clase 03):

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT), \qquad (1)$$

y que la señal análoga $y_a(t)$, será la salida del filtro (reconstructor) $h(t)$. En otras palabras, será la convolución,

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t')\hat{y}(t')dt'. \qquad (2)$$

©David Universidad de Valparaiso

Reconstrucción analógica

Reemplazando (1) en (2), tenemos

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)h(t-nT), \quad \textbf{Demos}. \tag{3}$$

Esta expresión establece que la forma como son llenados los espacios entre muestras es comenzar en la muestra actual $y(nT)$ e interpolar desde ella, siguiendo la forma de $h(t)$, hasta la siguiente muestra. En el dominio de la frecuencia tenemos

$$Y_a(f) = H(f)\hat{Y}(f), \quad \hat{Y}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - mf_s)$$

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaiso

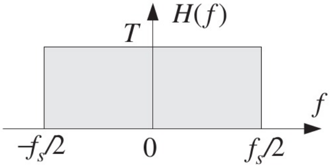
Reconstructor ideal

Recordemos: Si el espectro de $Y(f)$ es de banda limitada y las replicas no se superponen (ver banda de resguardo δ Clase 03), entonces

$$T\hat{Y}(f) = Y(f), \quad \text{para } -\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}.$$

Además, el espectro del filtro reconstructor ideal $H(f)$ será

$$\boxed{H(f) = \begin{cases} T, & \text{if } |f| \leq f_s/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}}$$



eliminando las otras réplicas y dejará la central.

©Davi Universidad de Valparaiso

Reconstructor ideal

Y así, en el intervalo de Nyquist tendremos

$$Y_a(f) = H(f)\hat{Y}(f) = T \cdot \frac{1}{T} Y(f) = Y(f)$$

De esta forma demostramos que el espectro de la señal reconstruida $Y_a(f)$ es igual al de la señal muestreada $Y(f)$, o también $y_a(t) = y(t)$. Para obtener la respuesta al impulso de un reconstructor ideal, basta con calcular la transformada inversa de Fourier de $H(f)$, i.e.,

$$h(t) = \frac{sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} \tag{4}$$

Observación: Un filtro ideal es imposible de implementar.

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaiso

Reconstrucción en escalera

Reconstructor ideal:

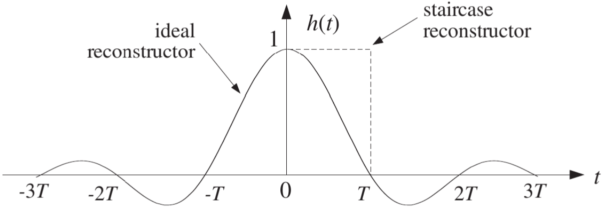
$$h(t) = \frac{sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}$$

$$H(f) = \begin{cases} T, & \text{si } |f| \leq \frac{f_s}{2} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Reconstructor en escalera[1]:

$$h(t) = u(t) - u(t-T) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

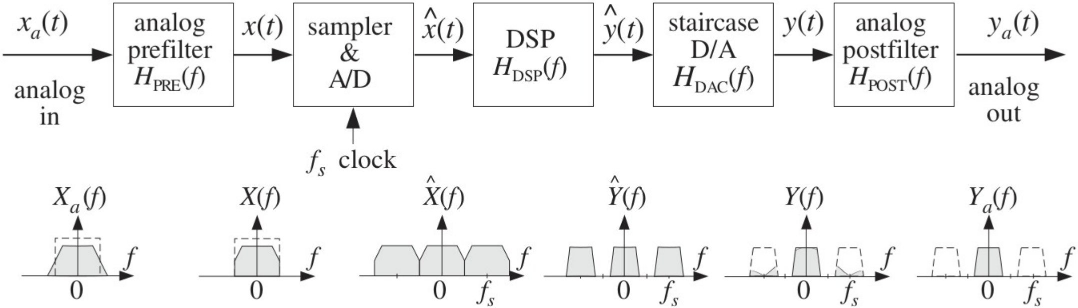
$$H(f) = \frac{1}{2\pi j f}\left(1 - e^{-2\pi j f T}\right) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-\pi j f T}$$



[1] La transformada de Fourier del reconstructor (filtro pasa-bajas) puede obtenerse a partir de la transformada de Laplace, i.e., $H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}$

©David de Universidad de Valparaiso

Recapitulando



©David ... de Valparaiso

Ejercicio 1.23

©David Ortiz Puerta Universidad de Valparaiso

Considere un filtro de reconstrucción D/A arbitrario con respuesta al impulso $h(t)$ y correspondiente respuesta en frecuencia $H(f)$. La señal analógica a la salida del reconstructor está relacionada con las muestras temporales de entrada $x(nT)$ mediante

$$x_a(t) = \sum_n x(nT)h(t - nT)$$

Demuestre este resultado de dos maneras:

a. Usando la convolución en el dominio del tiempo.

b. Partiendo de $X_a(f) = H(f)\hat{X}(f)$ y aplicando transformadas de Fourier inversas.

Solución: (a) Usando la convolución en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\hat{x}(t')\,dt' \\ &= \sum_n x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\delta(t'-nT)\,dt' \\ &= \sum_n x(nT)h(t-nT) \end{aligned}$$

(b) Usando el dominio de la frecuencia:

$$X_a(f) = H(f)\hat{X}(f) = \sum_n x(nT)\left[e^{-2\pi i f nT} H(f)\right]$$

Utilizando el teorema del retardo para transformadas de Fourier, reconocemos el término entre corchetes como la transformada de Fourier de $h(t-nT)$. Así, al pasar al dominio del tiempo:

$$x_a(t) = \sum_n x(nT)h(t-nT)$$

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaiso

Ejercicios (Orfanidis)

1. Demostrar (4). Es decir, la transformada de Fourier inversa de

$$H(f) = \begin{cases} T, & \text{si } |f| \leq f_s/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{es} \qquad h(t) = \frac{sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}$$

2. **Dar una explicación detallada de porque un filtro ideal no se puede implementar.**
3. Considerando las ecuaciones (1) y (2), obtenga (3). Es decir, a partir de

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT) \qquad \text{y} \qquad y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t')\hat{y}(t')dt',$$

obtenga

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)h(t - nT).$$

Para el ejercicio 1 utilice la identidad $e^{\pi i f_s t} - e^{-\pi i f_s t} = 2i \sin(\pi f_s t)$

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaiso

Objetivo general

Aprender a reconstruir una señal digital en una analógica

Clase de hoy:

- Reconstrucciones ideales y tipo escalera **1.6**

Próxima clase:

- Cuantización **2.1**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 1st edition, 1995. Disponible en `https://rutgers.app.box.com/s/5vsu06pp556g9dfsdvayh4k50wqpataw`.

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso