CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 15 - Diseño de filtros FIR (por ventanas)

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Analizar el diseño de filtros FIR a partir de una especificación ideal en frecuencia, comprender el uso de ventanas para obtener una implementación realizable, y aplicar esta técnica para construir filtros con fase lineal y respuesta ajustada en frecuencia, reconociendo las limitaciones asociadas al orden del filtro y al fenómeno de Gibbs.

Clase anterior:

- Transformada Z **(5.1-5.3)**

Clase de hoy:

- Diseño de filtros FIR (por ventanas) **(10.1.1-10.1.3)**

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Filtros FIR (Finite impulse response)

Un filtro FIR tiene una respuesta al impulso $h(n)$ que se extiende solo sobre un intervalo de tiempo finito, digamos $0 \leq n \leq M$, y es idénticamente cero más allá de ese punto,

$$\mathbf{h} := [h_0, h_1, h_2, ..., h_M, 0, 0, 0] = [h_0, h_1, h_2, ..., h_M], \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{M+1}$$

donde M se conoce como el orden del sistema (orden del filtro). La relación I/O del sistema (filtro) FIR se simplifica como

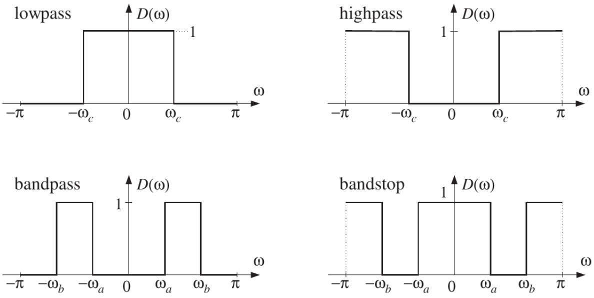
$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m)x(n-m)$$

Ventajas: Incondicionalmente estable, fase lineal

Desventajas: Es necesario un M elevado para obtener una respuesta abrupta

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso

Diseño filtros FIR por ventanas (ideales)



$$D(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(k) e^{-j\omega k}$$

$$\Updownarrow$$

$$d(k) = \int_{-\pi}^{\pi} D(\omega) e^{j\omega k} \frac{d\omega}{2\pi}$$

En general $d(k) \neq 0$ para $-\infty < k < \infty$ (recordar función *sinc* de filtro ideal)

No olvidar la replicación del espectro.

Para mantener la notación del libro, trabajaremos con frecuencias normalizadas $-\pi \geq \omega \geq \pi$.

©David Orti ersidad de Valparaíso

Diseño filtros FIR por ventanas (ideales)

La función $D(\omega)$ para un filtro ideal pasa-bajas está definida como:

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Usando la DTFT inversa:

$$\begin{aligned} d(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} D(\omega) e^{j\omega k} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega k} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{e^{j\omega_c k} - e^{-j\omega_c k}}{2\pi j k} = \frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k} \end{aligned}$$

Filtro	Expresión
Pasa-Bajas	$d(k) = \frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k}$
Pasa-Altas	$d(k) = \delta(k) - \frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k}$
Pasa-Banda	$d(k) = \frac{\sin(\omega_b k) - \sin(\omega_a k)}{\pi k}$
Rechaza-Banda	$d(k) = \delta(k) - \frac{\sin(\omega_b k) - \sin(\omega_a k)}{\pi k}$

Recordar: los filtros ideales no son realizables ya que toman infinitos valores.

La clave está en truncar $d(k)$ a un largo finito deseado (realizable). Los coeficientes se deben considerar en forma simétrica en el largo $\|k\| \leq M$. Es decir, se utilizarán $N = 2M + 1$ coeficientes

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso

Diseño filtros FIR por ventanas (rectangulares)

1. Elige N impar, donde $N = 2M + 1 \Rightarrow M = \frac{N-1}{2}$.
2. Calcula los N coeficientes $d(k)$ con las fórmulas anteriores:

$$d = [d_{-M}, \ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots, d_M] \, .$$

3. Usa un retardo de M muestras para que el filtro sea causal. Desplaza los valores de d para formar el filtro causal h:

$$h = [h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}] \, ,$$

donde

$$h_0 = d_{-M}, \quad h_1 = d_{-M+1}, \quad \ldots, \quad h_M = d_0, \quad \ldots, \quad h_{2M} = d_M \, .$$

es decir

$$h(n) = d(n - M), \quad n = 0, ..., N-1$$

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso

Ejemplo: Utilizando este método, diseñe un filtro pasa-bajas de orden $N = 11$ con frecuencia de corte:

$$\omega_c = \frac{\pi}{4}$$

Dado $N = 11$,

$$M = \frac{N-1}{2} = 5, \qquad d(k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{\pi k} \quad \text{para} \quad -5 \leq k \leq 5$$

Evaluando los valores de $d(k)$, obtenemos el vector:

$$d = \left[-\frac{\sqrt{2}}{10\pi}, 0, \frac{\sqrt{2}}{6\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}}{6\pi}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{10\pi}\right]$$

©David Ortiz Puerta Universidad de Valparaíso

Sobre la fase en el diseño de filtros por ventana

Truncando $D(\omega)$, el filtro tiene un espectro:

$$\hat{D}(\omega) = \sum_{k=-M}^{M} d(k)e^{-j\omega k} \Rightarrow D(z) = \sum_{k=-M}^{M} d(k)z^{-k}$$

Al retrasar en M muestras, obtenemos:

$$H(z) = z^{-M}\hat{D}(z) = z^{-M}\sum_{k=-M}^{M} d(k)z^{-k}$$

$$H(\omega) = e^{-j\omega M}\hat{D}(\omega) = e^{-j\omega M}\sum_{k=-M}^{M} d(k)e^{-j\omega k}$$

Ejemplo: Si $N = 7 \rightarrow M = 3$ $d = [d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3]$

$$\hat{D}(z) = d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3}$$

$$H(z) = z^{-3}\hat{D}(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_4 z^{-4} + h_5 z^{-5} + h_6 z^{-6}$$

©David Ortiz-Puerta-Universidad de Valparaíso

Sobre la fase en el diseño de filtros por ventana

La propiedad de fase lineal se deduce de la estructura de $H(\omega) = e^{-j\omega M}\hat{D}(\omega)$. Podemos escribir

$$\hat{D}(\omega) = \mathsf{sign}(\hat{D}(\omega))|\hat{D}(\omega)| = e^{j\pi\beta(\omega)}|\hat{D}(\omega)|,$$

con

$$\beta(\omega) = \frac{1 - \mathsf{sign}(\hat{D}(\omega))}{2} = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{D}(\omega) > 0, \\ 1, & \text{si } \hat{D}(\omega) < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e^{j\pi\beta(\omega)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \hat{D}(\omega) > 0, \\ -1, & \text{si } \hat{D}(\omega) < 0. \end{cases}$$

Luego,

$$H(\omega) = e^{-j\omega M}\hat{D}(\omega) = e^{-j\omega M + j\pi\beta(\omega)}|\hat{D}(\omega)|$$
$$\Rightarrow |H(\omega)| = |\hat{D}(\omega)|, \quad \arg H(\omega) = -\omega M + \pi\beta(\omega)$$

En una ventana simétrica (como la ventana rectangular), la función $\hat{D}_M(\omega)$ resulta ser **real y par** en ω debido a la simetría en el tiempo de los coeficientes $d(k)$. Es decir, cuando los coeficientes $d(k)$ son simétricos alrededor del origen (por ejemplo, $d(-k) = d(k)$), su transformada en frecuencia $\hat{D}_M(\omega)$ es real y par. En otras palabras, esta simetría en el dominio del tiempo implica que $\hat{D}_M(\omega)$ no tiene parte imaginaria, y su magnitud y fase están determinadas solo por valores reales (ya que es par en ω, no hay rotación en la fase más allá de una fase lineal constante).

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso

Aproximación de las ventanas al filtro ideal

¿Cómo se compara $\hat{D}(\omega)$ con $D(\omega)$? En general, la aproximación mejora a medida que N aumenta, en los puntos en que $D(\omega)$ es continua. En los puntos de discontinuidad de $D(\omega)$, observamos el fenómeno de Gibbs, y la aproximación es mala, independiente de N.

Ejemplo: Pasabajo con $\omega_c = 0.3\pi$. Consideremos $N = 41$;

$$M = \frac{N-1}{2} = 20 \quad \Rightarrow \quad h(n) = d(n-20) = \frac{\sin(0.3\pi(n-20))}{\pi(n-20)}, \quad n = 0, \ldots, 40$$

$$\Rightarrow \quad h(20) = d(0) = \frac{\omega_c}{\pi} = 0.3$$

(b) $N = 121 \Rightarrow M = 60$

$$h(n) = d(n-60) = \frac{\sin(0.3\pi(n-60))}{\pi(n-60)}, \quad n = 0, \ldots, 120$$

$$\Rightarrow \quad h(60) = d(0) = \frac{\omega_c}{\pi} = 0.3$$

©David Ortiz-Puerta Universidad de Valparaíso

Aproximación de las ventanas al filtro ideal

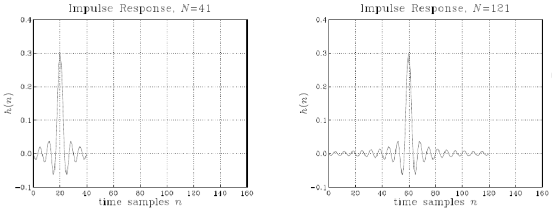
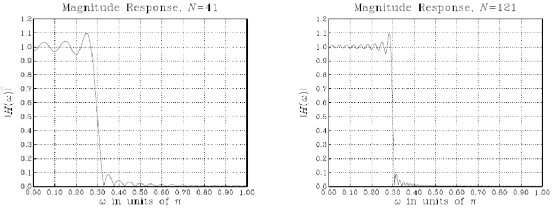


Fig. 11.1.4 Rectangularly windowed impulse responses for $N = 41$ and $N = 121$.



©David O... Valparaíso

Aproximación de las ventanas al filtro ideal

Podemos considerar la respuesta al impulso del filtro FIR ventaneado como

$$h(n) = W(n)d(n-M), \quad -\infty < n < \infty$$

con $W(n)$ la ventana rectangular de largo N. Esto implica que

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(\omega-\omega')e^{-j\omega' M} D(\omega')\, d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} W(\omega-\omega')e^{j\omega' M}\, d\omega' \quad \text{(dada la forma de } D(\omega)\text{)} \end{aligned}$$

Luego, $H(\omega)$ es la versión "difuminada" de $D(\omega)$. Por lo tanto, las oscilaciones en $H(\omega)$ son producto de la integral de $W(\omega)$.

Ejercicio: En no más de 1 página, reescribe y explica brevemente los tres efectos descritos al comienzo de la página 539-540. Luego, con tus propias palabras describe la necesidad de otros tipos de ventanas en el diseño de filtros FIR, página 539-540

© David Ortiz-Puerta. Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Analizar el diseño de filtros FIR a partir de una especificación ideal en frecuencia, comprender el uso de ventanas para obtener una implementación realizable, y aplicar esta técnica para construir filtros con fase lineal y respuesta ajustada en frecuencia, reconociendo las limitaciones asociadas al orden del filtro y al fenómeno de Gibbs.

Clase de hoy:

- Diseño de filtros FIR por ventanas **10.1.1-10.1.3**

Próxima clase:

- Diseño de filtros IIR **11**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`

©David Ortiz-Puerta Universidad