CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 14 - Transformada Z

David Ortiz, Ph.D.
Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Comprender la definición y propiedades fundamentales de la Transformada Z, su relación con la transformada de Fourier y de Laplace, y aplicar estas herramientas para analizar sistemas lineales invariantes en el tiempo en el dominio Z, interpretar funciones de transferencia H(z) y entender su rol en el diseño de filtros digitales.

Clase anterior:

- Zero padding **(9.2.4)**

Clase de hoy:

- Transformada Z **(5.1-5.3)**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Transformada Z

Es una herramienta para el análisis, diseño e implementación de filtros digitales. Dada una señal en tiempo discreto $x(n)$ o una secuencia de respuesta al impulso $h(n)$, su transformada Z está definida por la siguiente serie:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \text{ función de transferencia}$$

o, expandiendo la serie infinita

$$X(z) = \cdots + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

Note que hay tantos términos como valores no nulos de la señal $x(n)$. Los términos z^{-n} se pueden considerar como marcadores de posición para los valores $x(n)$.

$$X(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, & \text{si } x(n) \text{ es causal} \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{|n|}, & \text{si } x(n) \text{ es estrictamente anticausal} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, & \text{si } x(n) \text{ tiene partes causal y anticausal} \end{cases}$$

Propiedades de la transformada Z

1. **Linealidad**: La transformada Z de una combinación lineal de señales es igual a la combinación lineal de sus transformadas Z. Si $X_1(z)$ y $X_2(z)$ son las transformadas Z de $x_1(n)$ y $x_2(n)$, entonces:

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

2. **Retardo**: Retrasar una señal D unidades es equivalente a multiplicar su transformada Z por z^{-D}:

$$x(n-D) \xrightarrow{Z} z^{-D} X(z)$$

3. **Convolución**: La convolución en el dominio del tiempo se convierte en una multiplicación en el dominio Z:

$$y(n) = h(n) * x(n) \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

Ejemplo de transformada Z y propiedades

Ejemplo: Sea $h(n) = \{2, 3, 5, 2\}$.
Podemos escribir $h(n)$ como:

$$h(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 5\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

La transformada Z de $\delta(n)$ es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = \delta(0) z^0 = 1$$

Usando la propiedad de retardo:

$$\delta(n-1) \xrightarrow{Z} z^{-1}, \quad \delta(n-2) \xrightarrow{Z} z^{-2}, \quad \delta(n-3) \xrightarrow{Z} z^{-3}$$

Aplicando la linealidad, obtenemos:

$$H(z) = 2 \cdot z^0 + 3 \cdot z^{-1} + 5 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} = 2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^{-3}$$

Sistemas LTI (filtros)

Consideremos el sistema LTI descrito por la relación I/O

$$y(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(m-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(m-k)$$

En esta ecuación, la señal $x(m)$ es la entrada del sistema, $y(m)$ es la salida del sistema, y a_k y b_k son los coeficientes del sistema. Tomando la transformada Z de la ecuación obtenemos:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

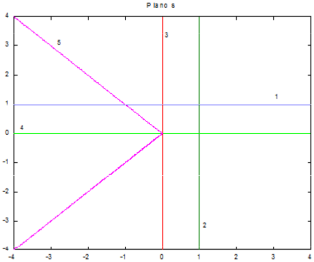
Reorganizando en términos de la razón de un polinomio numerador $Y(z)$ y un polinomio denominador $X(z)$ como:

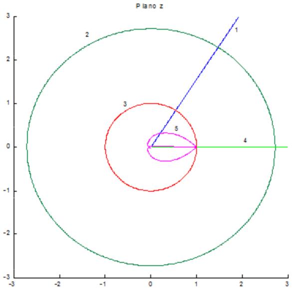
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$H(z)$ se conoce como la función de transferencia del sistema.

Relación con la transformada de Laplace y de Fourier

$$z = e^{s} = e^{\sigma} e^{j\omega} = r e^{j2\pi f}$$



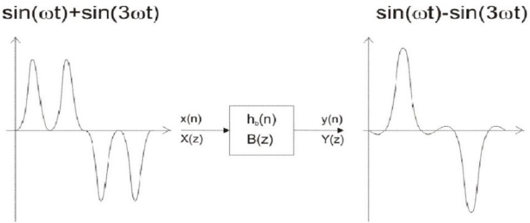


Si $r = e^{\sigma} = 1$ tenemos la DTFT, i.e.,

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j2\pi f m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) r^{-m} e^{-j2\pi f m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) (r e^{j2\pi f})^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} \end{aligned}$$

Diseño de filtros

Un filtro es un sistema LTI que modifica la amplitud y la fase de una señal de entrada



Explicación Matemática

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$|Y(z)| = |H(z)| \cdot |X(z)|$$

$$\angle Y(z) = \angle H(z) + \angle X(z)$$

Magnitud y Fase

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$H(z) = |H(z)| e^{j\angle H(z)}, \quad X(z) = |X(z)| e^{j\angle X(z)}$$

$$Y(z) = (|H(z)| \cdot |X(z)|)\, e^{j(\angle H(z) + \angle X(z))}$$

Objetivo general

Comprender la definición y propiedades fundamentales de la Transformada Z, su relación con la transformada de Fourier y de Laplace, y aplicar estas herramientas para analizar sistemas lineales invariantes en el tiempo en el dominio Z, interpretar funciones de transferencia H(z) y entender su rol en el diseño de filtros digitales.

Clase de hoy:

- Transformada Z **(5.1-5.3)**

Próxima clase:

- Diseño de filtros FIR (por ventanas) **(10)**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`