CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 07 - Sistemas en tiempo discreto

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Expectativa de aprendizaje

Comprender cómo los sistemas en tiempo discreto transforman secuencias de entrada en salida, y analizar sus propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo, fundamentales para caracterizar sistemas LTI.

Clase anterior:

- Cuantización **2.1**

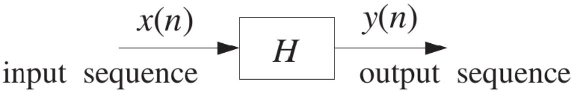
Clase de hoy:

- Sistemas en tiempo discreto **3.2**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Reglas de entrada/salida

Un sistema discreto en el tiempo, es un procesador que transforma una secuencia de entrada $x(n)$ en una secuencia de muestras $y(n)$, de acuerdo a una regla de *entrada-salida (I/O rule)* establecida.



$$\{x_0, x_1, ..., x_n, ...\} \xrightarrow{H} \{y_0, y_1, ..., y_n, ...\}$$

Si consideramos el procesamiento en bloques, podemos escribir

$$\mathbf{y} = H[\mathbf{x}], \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

es decir el mapeo de un vector $\mathbf{x}$ a un vector $\mathbf{y}$ de acuerdo a un funcional H

Para un **sistema lineal** este mapeo se convierte en la transformación lineal dada por la matriz H, i.e., $\mathbf{y} = H\mathbf{x}$. Para un sistema lineal, invariante en el tiempo, la matriz H, tendrá una estructura especial en términos de la respuesta del impulso.

- **Ejemplo:** escalamiento simple $y(n) = 2x(n)$

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \xrightarrow{H} \{2x_0, 2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n, \ldots\}$$

- **Ejemplo:** suma ponderada de tres muestras sucesivas $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 4x(n-2)$. Note que el sistema debe memorizar dos instantes previos de tiempo.

$$\begin{aligned}
n = 0; &\quad y(0) = 2x(0) + 3x(-1) + 4x(-2) = 2x_0 \\
n = 1; &\quad y(1) = 2x(1) + 3x(0) + 4x(-1) = 2x_1 + 3x_0 \\
n = 2; &\quad y(2) = 2x(2) + 3x(1) + 4x(0) = 2x_2 + 3x_1 + 4x_0 \\
n = 3; &\quad y(3) = 2x(3) + 3x(2) + 4x(1) = 2x_3 + 3x_2 + 4x_1 \\
n = 4; &\quad y(4) = 2x(4) + 3x(3) + 4x(2) = 3x_3 + 4x_2 \\
n = 5; &\quad y(5) = 2x(5) + 3x(4) + 4x(3) = 4x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x(-2) = 0, x(-1) = 0 \\
&x(0) = x_0 \\
&x(1) = x_1 \\
&x(2) = x_2 \\
&x(3) = x_3 \\
&x(4) = 0, x(5) = 0
\end{aligned}$$

Reglas de entrada/salida

- **Ejemplo:** forma matricial de suma ponderada de tres muestras sucesivas $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 4x(n-2)$.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sistemas lineales

Un sistema es lineal si cumple con las propiedades de *superposición* y *homogeneidad*. Esto significa que la salida ante una combinación lineal de entradas es igual a la combinación lineal de las salidas correspondientes a cada entrada.

Matemáticamente, un sistema es lineal si para dos entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$, y sus respectivas salidas $y_1(n)$ y $y_2(n)$, se cumple que:

$$x_1(n) \xrightarrow{H} y_1(n), \quad x_2(n) \xrightarrow{H} y_2(n)$$

$$x_{12}(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \quad \xrightarrow{H} \quad y_{12}(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

Donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Sistemas lineales

¿Cómo se testea la linealidad?

1. Del sistema general, define y_1 y y_2 en función de x_1 y x_2, respectivamente
2. Define $x_{12} = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$. Del sistema general, define y_{12} en función de x_{12}
3. Reemplaza hasta llegar a $y_{12}(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$

Ejemplo: $y(n) = 2x(n)$

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad y_1(n) = 2x_1(n), \quad y_2(n) = 2x_2(n) \\
&(2) \quad x_{12}(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \\
&(3) \quad y_{12}(n) = 2x_{12}(n) = 2[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] \\
&\qquad\; y_{12}(n) = 2a_1 x_1(n) + 2a_2 x_2(n) \\
&\qquad\; y_{12}(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)
\end{aligned}
$$

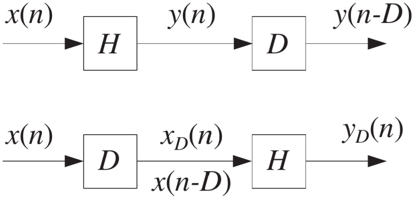
Ejemplo: $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1)$

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= 2x_1(n) + 3x_1(n-1), \quad y_2(n) = 2x_2(n) + 3x_2(n-1) \\
x_{12}(n) &= a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \\
y_{12}(n) &= 2x_{12}(n) + 3x_{12}(n-1) \\
&= 2[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] + 3[a_1 x_1(n-1) + a_2 x_2(n-1)] \\
&= 2a_1 x_1(n) + 2a_2 x_2(n) + 3a_1 x_1(n-1) + 3a_2 x_2(n-1) \\
&= a_1(2x_1(n) + 3x_1(n-1)) + a_2(2x_2(n) + 3x_2(n-1))
\end{aligned}
$$

Invarianza en el tiempo

Un sistema invariante en el tiempo es un sistema que permanece inalterado a lo largo del tiempo. Esto implica que, si una entrada es aplicada al sistema hoy y produce una cierta salida, entonces la misma salida se producirá mañana si se aplica la misma entrada.

¿Cómo se testea la invarianza en el tiempo?



1. Del sistema general, aplicamos un delay D a n, es decir $n \rightarrow n - D$. Obtenemos la expresión $y(n-D)$, es decir, tranformamos $y((n)) \rightarrow y((n-D))$
2. Agregarle un delay a los $x(n) \rightarrow x((n) - D)$ y definimos nuestro $y_D(n)$
3. comparamos si $y(n-D) = y_D(n)$

Invarianza en el tiempo

1. Del sistema general, aplicamos un delay D a n, es decir $n \to n - D$. Obtenemos la expresión $y(n - D)$, es decir, tranformamos $y((n)) \to y((n - D))$
2. Agregarle un delay a los $x(n) \to x((n) - D)$ y definimos nuestro $y_D(n)$
3. comparamos si $y(n - D) = y_D(n)$

Ejemplo: $y(n) = x(n) + 0.5x(n - 1)$

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad y(n - D) = x(n - D) + 0.5x(n - 1 - D) \\
&(2) \quad y_D(n) = x(n - D) + 0.5x(n - 1 - D) \\
&(3) \quad y(n - D) \equiv y_D
\end{aligned}
$$

Ejemplo: $y(n) = nx(n)$

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad y(n - D) = (n - D)x(n - D) \\
&(2) \quad y_D(n) = n \cdot x(n - D) \\
&(3) \quad y(n - D) \neq y_D(n)
\end{aligned}
$$

Ejemplo: (Downsampler) $y(n) = x(2n)$

Ejercicios (Orfanidis)

- Ejemplos (resueltos):
  - Ejemplos de I/O 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.7, 3.1.8–3.1.16 **(Importante: leer descripción al final de los ejemplos en la página 99)**
  - 3.2.1, 3.2.2
- Ejercicios (Solucionario): 3.1, 3.4
- **Ejemplo:** Para un vector de entrada $x(n) = [1, 1, 1, 1, 1]$, hallar el vector de salida $y(n) = 0.5y(n-1) + 2x(n) + 3x(n+1)$.
- **Ejemplo:** ¿Es $y(n) = 2x(n) + 3$ lineal e invariante en el tiempo?

Objetivo general

Entender el procesamiento de señales en sistemas discretos *LTI*.

Clase de hoy:

- Sistemas en tiempo discreto **(3.2)**

Próxima clase:

- Respuesta al impulso **(3.3)**
- Filtros FIR e IIR **(3.4)**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`