CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 08 - Respuesta al impulso

David Ortiz, Ph.D.
Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Estudiar con mayor detalle la respuesta al impulso y sus tipos

Clase anterior:

- Sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo **3.2**

Clase de hoy:

- Respuesta al impulso **3.3**
- Respuesta al impulso finita a infinita (FIR/IIR) **3.4**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Impulso

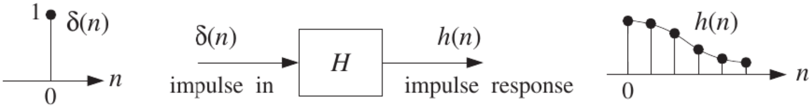
Definición: delta de Kronecker

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Nota: El **delta de Kronecker** es discreto, definido solo para valores enteros, y es 1 cuando $n = 0$, y 0 en otros casos. El **delta de Dirac** es continuo, una distribución que es infinita en $t = 0$ y 0 en otros valores, con integral 1 en todo el dominio.

Respuesta al impulso

Un sistema LTI está caracterizado en forma única por su respuesta al impulso. La respuesta al impulso $h(n)$ (discreta) se define como la respuesta del sistema H cuando su entrada es $\delta(n)$ (discreto), i.e., $h(n) = H(\delta(n))$,



$$\{1, 0, ..., 0, ...\} \xrightarrow{H} \{h_0, h_1, ..., h_n, ...\}$$

Ver clase 01 para comparación con sistema continuo, donde $y(t) = T(x(t))$, para T un sistema LTI y su respuesta al impulso $h(t) = T(\delta(t))$

Respuesta al impulso

Notar que una **secuencia** $x(n)$ **arbitraria** se puede escribir como

$$x(n) = \cdots + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \cdots.$$

Como el sistema es LTI

$$y(n) = \cdots + x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + x(2)h(n-2) + \cdots.$$

O en forma compacta

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad \text{(Forma LTI)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad \text{(Forma Directa)} \end{aligned}$$

Filtros FIR (Finite Impulse Responce)

Un filtro FIR tiene una respuesta al impulso $h(n)$ que se extiende solo sobre un intervalo de tiempo finito, digamos $0 \leq n \leq M$, y es idénticamente cero más allá de ese punto,

$$\mathbf{h} := [h_0, h_1, h_2, ..., h_M, 0, 0, 0] = [h_0, h_1, h_2, ..., h_M], \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{M+1}$$

donde M se conoce como el orden del sistema (orden del filtro) y cada $h_0, h_1, h_2, ..., h_M$ se le conoce como "Coeficientes del filtro" o "pesos del filtro". Considerando la convolución, la regla I/O del sistema (filtro) FIR se simplifica como

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m)x(n-m)$$

o, en forma explícita

$$y(n) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + \cdots + h_M x(n-M)$$

Filtros FIR (Finite Impulse Responce)

Ejemplo 1: Filtro FIR de segundo orden con coeficientes $\mathbf{h} := [h_0, h_1, h_2]$, ¿cómo sería de tercer orden?

Ejemplo 2: Determinela respuesta al impulso $\mathbf{h}$ de los siguientes filtros FIR:

- $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 5x(n-2) + 2x(n-3)$
- $y(n) = x(n) - x(n-4)$

Filtros IIR (Infinite Impulse Responce)

Para un sistema IIR, la forma directa de la convolución es

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m); \quad h(n) = 0 \text{ para } n < 0$$

Por su naturaleza infinita, muchos filtros IIR no son factibles computacionalmente. Es por esto que nos restringiremos a los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes

Filtros IIR (Infinite Impulse Responce)

Ejemplo: Supongamos que los coeficientes del filtro $h(n)$ satisfacen la ecuación de diferencias

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n), \quad a \in \mathbb{R}$$

Determine la ecuación de diferencias (regla I/O) que relaciona una señal de entrada general $x(n)$ con la salida correspondiente $y(n)$.

Solución: Asumiendo C.I. $h(-1) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} h(0) &= ah(-1) + \delta(0) = a \cdot 0 + 1 = 1 \\ h(1) &= ah(0) + \delta(1) = a \cdot 1 + 0 = a \\ h(2) &= ah(1) + \delta(2) = a \cdot a + 0 = a^2 \\ h(3) &= ah(2) + \delta(3) = a \cdot a^2 + 0 = a^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Filtros IIR (Infinite Impulse Responce)

Por lo tanto, encontramos la solución

$$h(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

Sustituyendo en su forma directa, tenemos

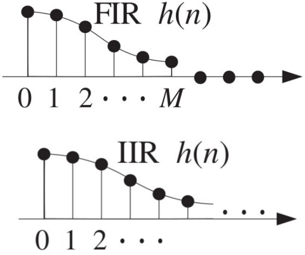
$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + ax(n-1) + a^2x(n-2) + a^3x(n-3) + \cdots \\ &= x(n) + a\left[x(n-1) + ax(n-2) + a^2x(n-3) + \cdots\right] \end{aligned}$$

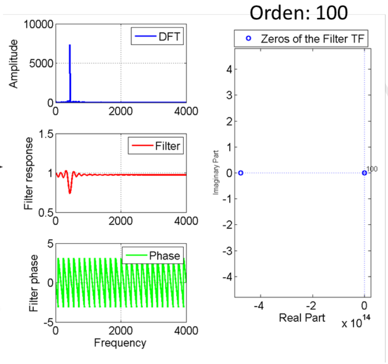
La suma en los corchetes ahora se reconoce como la salida anterior $y(n-1)$. Por lo tanto, obtenemos la ecuación de diferencias I/O:

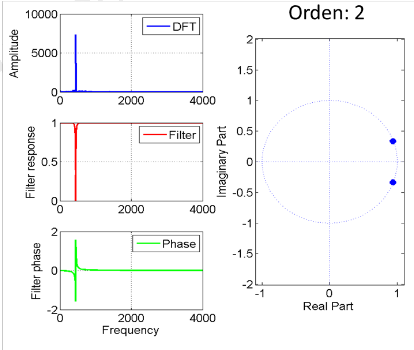
$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

Como se esperaba, es la misma ecuación de diferencias que satisface $h(n)$.

Comparación filtros FIR e IIR

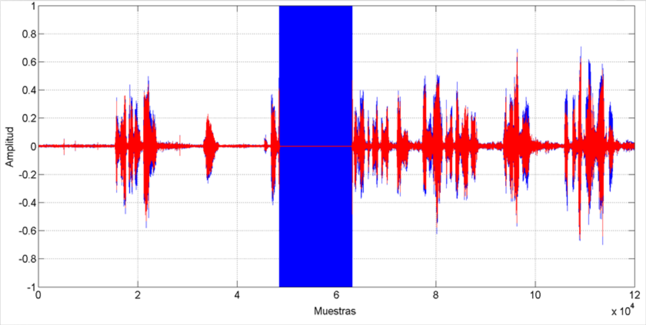






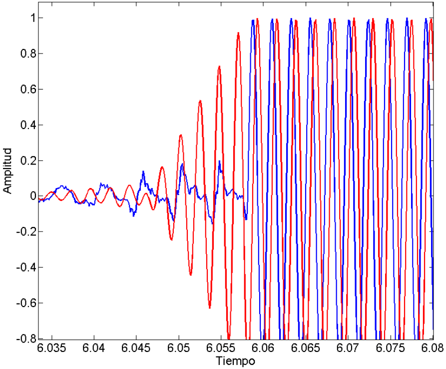
Izquierda: filtro FIR de orden 100; derecha: filtro IIR de orden 2

Comparación filtros FIR e IIR

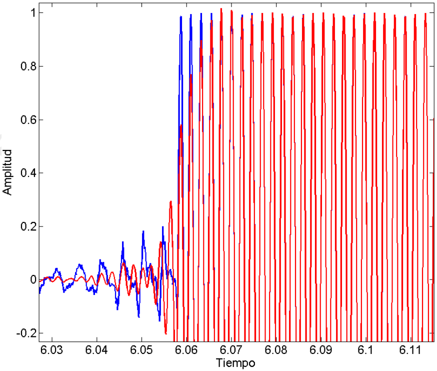


Señal de voz, en azul sin filtrar y con pitido a 440Hz, en rojo, señal filtrada.

Comparación filtros FIR e IIR



Desfase de filtro FIR



Corrección de fase

Ejercicios (Orfanidis)

- Ejemplos (resueltos): 3.4.1 - 3.4.9
- Ejercicios (Solucionario): 3.5, 3.6, 3.11, 3.13, 3.16, 3.17, 3.18

Objetivo general

Estudiar con mayor detalle la respuesta al impulso y sus tipos

Clase de hoy:

- Respuesta al impulso **(3.3)**
- Filtros FIR e IIR **(3.4)**

Próxima clase:

- Causalidad y estabilidad **(3.5)**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`