

CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 06 - Cuantización

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso



**Universidad
de Valparaíso**
CHILE

Expectativa de aprendizaje

El/La estudiante será capaz de describir el proceso de cuantización, analizar su error asociado y relacionarlo con la resolución en bits, así como interpretar su efecto sobre la calidad de la señal digital.

Clase anterior:

- Reconstrucciones ideales y tipo escalera **1.6**

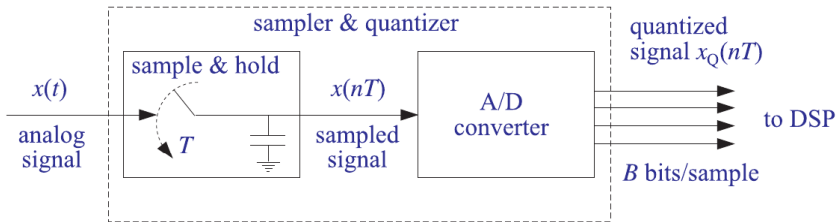
Clase de hoy:

- Cuantización **2.1**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo david.ortiz@uv.cl.

Cuantización

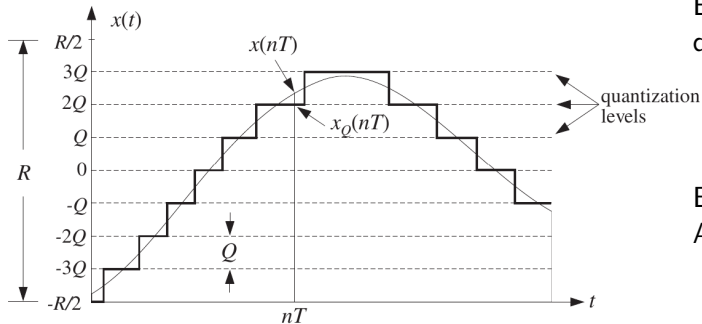
Además del muestreo en el tiempo $x(t) \rightarrow x(nT)$, podemos “cuantizar” la amplitud continua a digital $x(nT) \rightarrow x_Q(nT)$, representada por un número finito de B bits (0s o 1s).



$$B = 3 \rightarrow 2^3 = 8 \text{ combinaciones } 000, 001, \dots$$

$x_Q(nT)$ puede tomar únicamente uno de los 2^B valores. Además, la conversión A/D está caracterizada por el rango total R , dividido uniformemente en 2^B niveles de cuantización

Cuantización



Cuantizador *nearest*

El ancho de la cuantización viene dado por

$$Q = \frac{R}{2^B}, \quad 2^B = \frac{R}{Q}.$$

El rango total $R \in [1, 10]$, para un ADC bipolar tendrá el rango

$$-\frac{R}{2} \leq x_Q(nT) < \frac{R}{2}.$$

Los decimales también se pueden convertir a números binarios.

Error de cuantización

El error de cuantización se define

$$e = x_Q - x, \quad -\frac{Q}{2} \leq e < \frac{Q}{2} \Rightarrow e_{max} = \frac{Q}{2}$$

Asumiendo que el error e se distribuye uniformemente $e \sim U\left[-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right]$ en el intervalo $[-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}]$, podemos calcular el valor promedio y media cuadrática, i.e.,

$$\bar{e} = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} e de = 0, \quad \bar{e^2} = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} e^2 de = \frac{Q^2}{12} \quad \Rightarrow \quad e_{rms} = \frac{Q}{\sqrt{12}} = \frac{R}{\sqrt{12}} 2^{-B}$$

rms = root mean squared

Error de cuantización

Para identificar el efecto de la cuantificación en función del número de bits B , podemos pensar en $\frac{R}{Q}$ como la relación señal a ruido (SNR), usualmente medida en dB.

Considerando $Q = \frac{R}{2^B}$, $2^B = \frac{R}{Q}$, tenemos

$$\begin{aligned}20 \log_{10} \left(\frac{R}{Q} \right) &= 20 \log_{10} (2^B) = B \cdot 20 \log_{10}(2) \\ &\approx 6 \cdot B \text{ [dB]} \text{ regla de 6 decibels por bit}\end{aligned}$$

Se dice que "el rango dinámico" del cuantizador es

$$20 \log_{10} \left(\frac{R}{Q} \right) = 6 \cdot B \text{ [dB]}$$

La SNR (signal-to-noise-ratio) relación señal/ruido se define $SNR = \frac{P_{señal}}{P_{ruido}}$ o $SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{señal}}{P_{ruido}} \right)$, P es potencia

Ejemplo 2.1.1

Ejemplo 2.1.1: En una aplicación de audio digital, la señal se muestrea a una tasa de 44 kHz y cada muestra se cuantiza utilizando un convertidor A/D con un rango de escala completa de 10 voltios. Determine el número de bits B si el error cuadrático medio (rms) de cuantización debe mantenerse por debajo de 50 microvoltios. Luego, determine el error rms real y la tasa de bits en bits por segundo.

$$e_{rms} = \frac{Q}{\sqrt{12}} = \frac{R2^{-B}}{\sqrt{12}} \quad (1)$$

Despejando B :

$$B = \log_2 \left[\frac{R}{e_{rms}\sqrt{12}} \right] = \log_2 \left[\frac{10}{50 \cdot 10^{-6}\sqrt{12}} \right] = 15.82 \quad (2)$$

Redondeando, obtenemos $B = 16$ bits, lo cual corresponde a $2^B = 65536$ niveles de cuantización.

Con este valor de B , encontramos:

$$e_{rms} = \frac{R2^{-B}}{\sqrt{12}} = 44 \mu V \quad (3)$$

La tasa de bits será:

$$Bf_s = 16 \cdot 44,000 = 704 \text{ kbits/seg} \quad (4)$$

Esta es una tasa de bits típica para reproductores de CD. El rango dinámico del cuantizador es:

$$6B = 6 \cdot 16 = 96 \text{ dB}$$

Nótese que el rango dinámico del oído humano es de aproximadamente 100 dB. Por lo tanto, el ruido de cuantización de un cuantizador de 16 bits se encuentra aproximadamente al umbral de audición. Esta es la razón por la cual el audio digital con “calidad de CD” requiere una cuantización de al menos 16 bits.

Ejercicios (Orfanidis)

1. Ejemplo 2.1.2
2. Ejercicios con solución sección 2.6: 2.1 al 2.6

Objetivo general

Aprender a reconstruir una señal digital en una analógica

Clase de hoy:

- Cuantización **2.1**

Próxima clase:

- Sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo **3.2**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing*. Rutgers University, 1st edition, 1995. Disponible en <https://rutgers.app.box.com/s/5vsu06pp556g9dfsdvayh4k50wqpataw>.