CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 13 - Zero padding

David Ortiz, Ph.D.

Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Objetivo general

Comprender el efecto del zero padding sobre el análisis espectral de una señal, su implementación práctica y sus implicancias en la resolución y precisión de la DFT, considerando también sus limitaciones.

Clase anterior:

- DFT y DFT inversa **(9.2.3, 9.6)**

Clase de hoy:

- Zero padding **(9.2.4)**

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

De la clase anterior

La DFT de N puntos es entonces:

$$X(k) = X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad \forall k = 0, ..., N-1$$

La longitud L de la secuencia a transformar y la división de las frecuencias a estudiar en N partes, puede ser tratadas independientemente. **Si $L < N$, se puede aplicar zero padding de** $N - L$; (...). Sin embargo, muchos autores asumen $L = N$, (Lo cual es conveniente para el cálculo de la *FFT*).

Zero padding

Esta técnica consiste en agregar D zeros a la señal, resultado una señal de longitud $L+D$:

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{L-1}]$$

1. *Zero padding* asimétrico (Unidireccional)
   Ceros típicamente al **final**. Forma más común, usualmente para optimizar la FFT. Mejora la resolución de la DFT.

$$\mathbf{x}_D = [x_0, x_1, \ldots, x_{L-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{(D ceros)}}]$$

2. *Zero padding* simétrico
   $D/2$ ceros al inicio y al final. Similar a una ventana rectangular. Genera desplazamientos en fase (dominio de frecuencias)

$$\mathbf{x}_D = [\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{(D/2}}, x_0, x_1, \ldots, x_{L-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{(D/2)}}]$$

Zero padding

3. *Zero Padding* Inicial (asimétrico Unidireccional)
   Ceros al inicio de la señal. Es equivalente a retrasar la señal en D muestras. Esto es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= [x_0, x_1, \ldots, x_{L-1}] \\
\mathbf{x}_D &= [\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{D \text{ zeros}} x_0, x_1, \ldots, x_{L-1}] \\
\mathbf{x}_D &= [x(-D), x(-D+1), \ldots, x(-1), x(0), x(1), \ldots, x(L-1)]
\end{aligned}$$

Nota: la técnica de *zero padding* debe ser utilizada con cautela. Adicionar ceros a la señal puede generar cortes abruptos en la señal, generando el efecto de **"derramamiento de frecuencias"** (*spectral leaking*), similar a una ventana cuadrada. Los paquetes de software tienen esta técnica implementada para evitar esto.

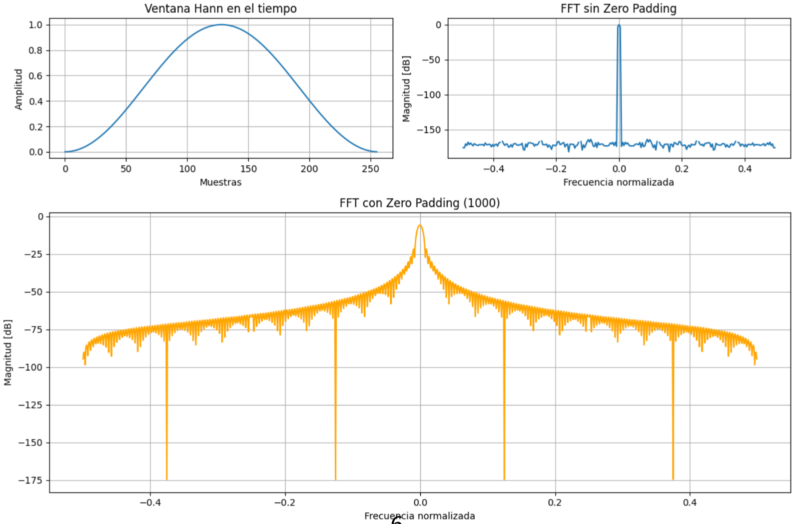
Zero padding

Dado que $x_D(n) = x(n)$ para $0 \leq n \leq L-1$ y $x_D(n) = 0$ para $L \leq n \leq L+D-1$, las DTFT correspondientes se mantendrán iguales:

$$\begin{aligned} X_D(\omega) &= \sum_{n=0}^{L+D-1} x_D(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} x_D(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=L}^{L+D-1} x_D(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega) \end{aligned}$$

Así, la transformada no cambia después del zero padding.

Zero padding



Objetivo general

Comprender el efecto del zero padding sobre el análisis espectral de una señal, su implementación práctica y sus implicancias en la resolución y precisión de la DFT, considerando también sus limitaciones.

Clase de hoy:

- Zero padding **(9.2.4)**

Próxima clase:

- Transformada $\mathscr{Z}$ **(5.1-5.3)**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`