CBM414 - Procesamiento digital de señales biomédicas

Clase 20 - Filtro de corrección de fase y cuantificación de atenuación

David Ortiz, Ph.D.
Escuela de Ingeniería Biomédica
Universidad de Valparaíso

Universidad de Valparaíso CHILE

Objetivo general

Clase anterior:

- Densidad Espectral de Potencia y periodogramas **9.6**

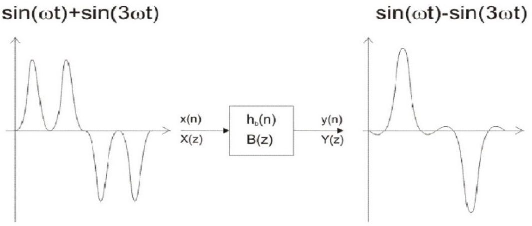
Clase de hoy:

- Filtros de corrección de fase y cuantificación de la atenuación

Esta presentación es una recopilación del texto guía de *Orfanidis* y no contiene todos los temas abordados en clase. Por favor, reportar posibles errores al correo `david.ortiz@uv.cl`.

Efectos del filtrado

Un filtro es un sistema LTI que modifica la amplitud y la fase de una señal de entrada



Explicación Matemática

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$
$$|Y(z)| = |H(z)| \cdot |X(z)|$$
$$\angle Y(z) = \angle H(z) + \angle X(z)$$

Magnitud y Fase

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$
$$H(z) = |H(z)| e^{j\angle H(z)}, \quad X(z) = |X(z)| e^{j\angle X(z)}$$
$$Y(z) = (|H(z)| \cdot |X(z)|)\, e^{j(\angle H(z) + \angle X(z))}$$

Filtros de fase o "All-pass filter"

Un filtro $H(\omega)$ puede ser definido por su parte real e imaginaria, i.e.,

$$H(\omega) = \mathrm{Re}[H(\omega)] + j\,\mathrm{Im}[H(\omega)]$$

Su magnitud y fase, serán:

$$|H(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[H(\omega)] + \mathrm{Im}^2[H(\omega)]}$$
$$\angle H(\omega) = \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[H(\omega)]}{\mathrm{Re}[H(\omega)]}\right)$$

El diseño de un filtro de fase $\hat{H}_{\text{phase}}(\omega)$ consistirá en obtener su parte **real** e **imaginaria** donde $|\hat{H}_{\text{phase}}(\omega)| = 1$ (pasa-todas) y su fase sea $\angle\hat{H}_{\text{phase}} = \hat{\varphi} = -\varphi$ (fase invertida).

Para la parte real

De la fase φ se tiene,

$$\mathrm{Im}[H(\omega)] = (\tan\varphi)\,\mathrm{Re}[H(\omega)] \tag{1}$$

De la magnitud,

$$|H(\omega)|^2 = \mathrm{Re}^2[H(\omega)] + \mathrm{Im}^2[H(\omega)] \tag{2}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$|H(\omega)|^2 = \mathrm{Re}^2[H(\omega)] + (\tan\varphi)^2\,\mathrm{Re}^2[H(\omega)]$$

$$|H(\omega)|^2 = \mathrm{Re}^2[H(\omega)](1 + (\tan\varphi)^2)$$

$$\mathrm{Re}[H(\omega)] = \frac{\sqrt{|H(\omega)|^2}}{\sqrt{1 + (\tan\varphi)^2}}$$

luego,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan\varphi)^2}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}[H(\omega)] = |H(\omega)|\cos\varphi}$$

Para la parte imaginaria

Se procede de igual forma. De la fase φ se tiene:

$$\mathrm{Re}[H(\omega)] = \frac{\mathrm{Im}[H(\omega)]}{\tan\varphi} \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (2):

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\mathrm{Im}^2[H(\omega)]}{(\tan\varphi)^2} + \mathrm{Im}^2[H(\omega)]$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\mathrm{Im}^2[H(\omega)] + (\tan\varphi)^2\,\mathrm{Im}^2[H(\omega)]}{(\tan\varphi)^2}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\mathrm{Im}^2[H(\omega)](1 + (\tan\varphi)^2)}{(\tan\varphi)^2}$$

$$\mathrm{Im}[H(\omega)] = \sqrt{\frac{|H(\omega)|^2(\tan\varphi)^2}{1 + (\tan\varphi)^2}}$$

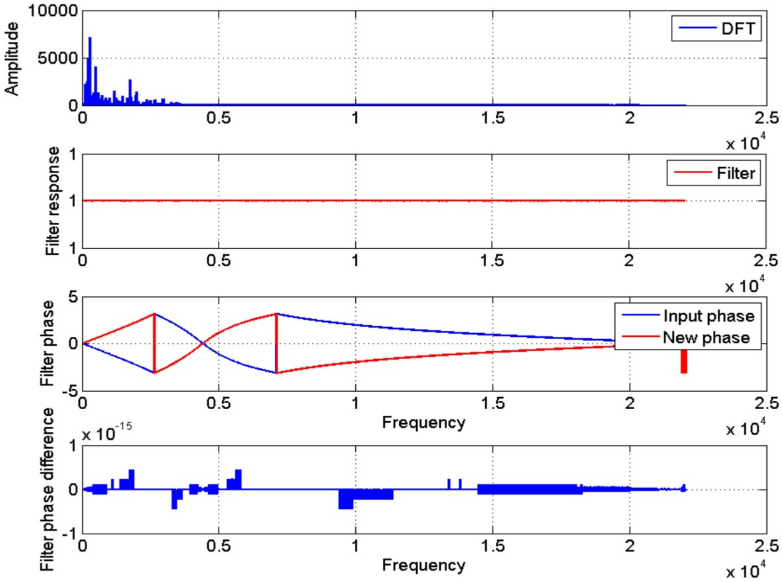
Para la parte imaginaria

luego,

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{(\tan\varphi)^2}{1+(\tan\varphi)^2}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im}[H(\omega)] = |H(\omega)|\sin\varphi}$$

Así, definimos el filtro de fase en función de la fase del filtro $H(\omega)$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{phase}}(\omega) &= \mathrm{Re}[\hat{H}_{\text{phase}}(\omega)] + j\,\mathrm{Im}[\hat{H}_{\text{phase}}(\omega)] \\
&= |\hat{H}_{\text{phase}}(\omega)|(\cos\hat{\varphi} + j\sin\hat{\varphi}) \\
&= \cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)
\end{aligned}$$



10000
5000
0
Amplitude
DFT
0
0.5
1
1.5
2
2.5
x 10^4
Filter response
Filter
Filter phase
Input phase
New phase
5
-5
Frequency
Filter phase difference
x 10^-15
-1

Objetivo general

Estudiar

Clase de hoy:

- Diseño de filtros IIR (banda, rechazo) por transformación bilineal **12.3**

Próxima clase:

- Diseño de filtros IIR de orden superior y análogos **12.6, 12.7**

Referencias:

1. S. J. Orfanidis, *Introduction to signal processing.* Rutgers University, 2010. Disponible en `https://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/2e/`