UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
Escuela de Ingeniería Civil Biomédica
CBM422 - Ingeniería de control automático

Tarea 1

Jorge Gonzalo Alejandro Alcaíno Brevis
Maximiliano Antonio Gaete Pizarro

1. Problema 1: Encuentre las transformadas inversas de Laplace, de las siguientes funciones

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad F_1(s) = \frac{6s+3}{s^2} \\
&\text{(b)} \quad F_2(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

1.1. Parte (a):

$$F_1(s) = \frac{6s+3}{s^2}$$

Descomponiendo la función:

$$F_1(s) = 6 \cdot \frac{s}{s^2} + 3 \cdot \frac{1}{s^2}$$

La transformada inversa de Laplace de cada término es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2}\right\} = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

Por lo tanto, la transformada inversa de $F_1(s)$ es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = 6 + 3t$$

1.2. Parte (b):

$$F_2(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$F_2(s) = \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{8}{(s+2)^2}$$

Para esta fracción racional más compleja, podemos aplicar descomposición en fracciones parciales. La forma general sería:

$$\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

Primero, multiplicamos ambos lados por $(s+1)(s+2)^2$ para eliminar los denominadores:

$$5s + 2 = A(s+2)^2 + B(s+1)(s+2) + C(s+1)$$

Resolviendo en Python

```
from sympy import symbols, Eq, solve

# Definimos la variable s y los coeficientes A, B, C
s = symbols('s')
A, B, C = symbols('A␣B␣C')

# Expresion original
lhs = 5*s + 2

# Expansion en fracciones parciales
rhs = A*(s+2)**2 + B*(s+1)*(s+2) + C*(s+1)

# Expandimos el lado derecho
```

```
expanded_rhs = rhs.expand()

# Igualamos ambos lados para resolver el sistema de ecuaciones
equations = Eq(lhs, expanded_rhs)

# Resolvemos para A, B y C
coefficients = solve(equations, [A, B, C])
coefficients
```

Expandiendo ambos lados y resolviendo para A, B, y C, encontramos los coeficientes que necesitamos. Esto nos da la forma correcta para aplicar la transformada inversa de Laplace a cada término:

$$\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{8}{(s+2)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a cada término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = te^{-2t}$$

Por lo tanto, la transformada inversa de $F_2(s)$ es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F_2(s)\right\} = -3e^{-t} + 3e^{-2t} + 8te^{-2t}$$

2. Problema 2: Obtenga la Función de Transferencia del sistema definido por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{0.2}
$$

2.1. Obtención de la función de transferencia del sistema:

Dado el sistema de ecuaciones en el espacio de estados:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)
\end{aligned}
$$

donde las matrices A, B, C y D están definidas como:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

La función de transferencia $\mathbf{G}(s)$ en el dominio de Laplace se calcula utilizando la fórmula:

$$
\mathbf{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D
$$

Paso 1: Calcular $(sI - A)$
La matriz identidad I es:

$$
I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Por lo tanto, $(sI - A)$ es:

$$
sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 4 & s+6 \end{bmatrix}
$$

Paso 2: Inversa de $(sI - A)$
Ahora, calculamos la inversa de $(sI - A)$:
Resolviendo en python

```python
from sympy import Matrix, eye, symbols, simplify

# Definir las matrices y la variable s
s = symbols('s')
A = Matrix([[0, 1, 0], [0, 0, 1], [-2, -4, -6]])
B = Matrix([[0, 0], [0, 1], [1, 0]])
C = Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, 0]])
D = Matrix([[0, 0], [0, 0]])
I = eye(3)  # Matriz identidad de 3x3

# Calcular (sI - A) y su inversa
sI_A_inv = (s * I - A).inv()
```

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 4 & s + 6 & 1 \\ 2s + 4 & s^2 + 6s + 2 & s + 6 \\ 2 & 2s + 4 & s^2 + 6s \end{bmatrix}$$

Paso 3: Multiplicación con B
Multiplicamos $(sI - A)^{-1}$ por B:

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} \begin{bmatrix} 1 & s + 6 \\ s & s(s + 6) \end{bmatrix}$$

Paso 4: Multiplicación con C y adición de D
Finalmente, multiplicamos por C y sumamos D, obteniendo la función de transferencia:
Resolviendo en Python

```
# Calcular la funcion de transferencia G(s) = C(sI - A)^(-1)B + D
G_s = simplify(C * sI_A_inv * B + D)
G_s
```

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3+6s^2+4s+2} & \frac{s+6}{s^3+6s^2+4s+2} \\ \frac{s}{s^3+6s^2+4s+2} & \frac{s(s+6)}{s^3+6s^2+4s+2} \end{bmatrix}$$

Esta es la función de transferencia del sistema, que describe la relación entre las entradas u_1 y u_2, y las salidas y_1 y y_2.

3. Problema 3: Mediante la simplificación del diagrama de bloques de la Figura 1, obtenga las siguientes funciones de transferencia

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{N=0} \qquad \left.\frac{Y(s)}{N(s)}\right|_{R=0}$$

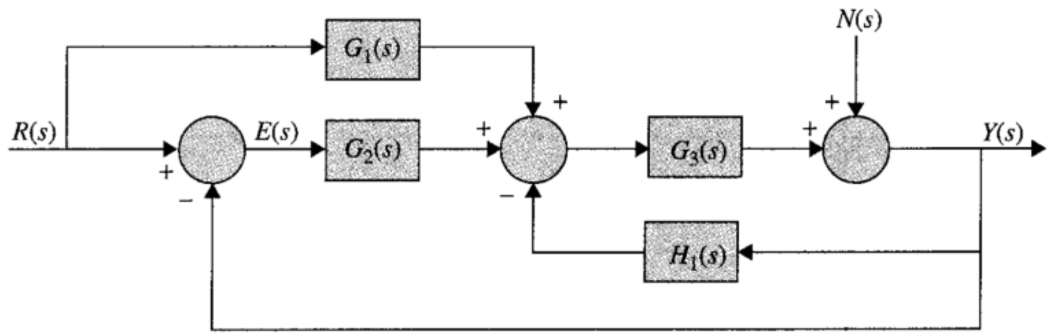


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema

4. Problema 4: Obtenga la Función de Transferencia Eo(s)/Ei(s) del circuito eléctrico RLC que se muestra en la Figura 2

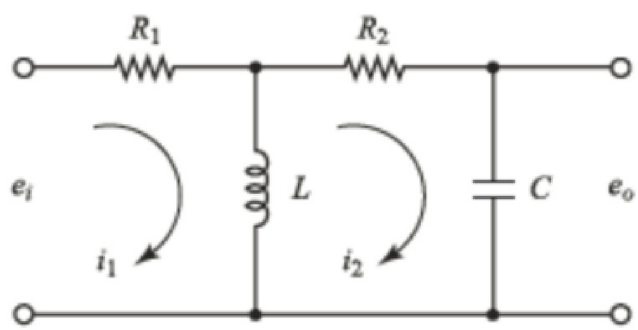


Figura 2: Circuito eléctrico RLC

Primera malla

$$R_1 i_1(t) + L\frac{d}{dt}\left(i_1(t) - i_2(t)\right) = e_i(t)$$

$$\mathcal{L}\left[R_1 i_1(t) + L\frac{d}{dt}\left(i_1(t) - i_2(t)\right)\right] = \mathcal{L}\left[e_i(t)\right]$$

$$R_1 I_1(s) + Ls\left[I_1(s) - I_2(s)\right] = E_i(s)$$

$$I_1(s) = \frac{E_i(s) + LsI_2(s)}{R_1 + Ls}$$

Segunda malla

$$L\frac{d}{dt}\left[i_2(t) - i_1(t)\right] + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt = 0$$

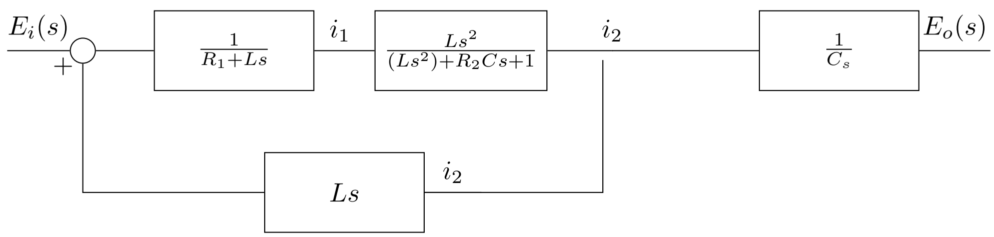
$$Ls\left[I_2(s) - I_1(s)\right] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) Ls = 0$$

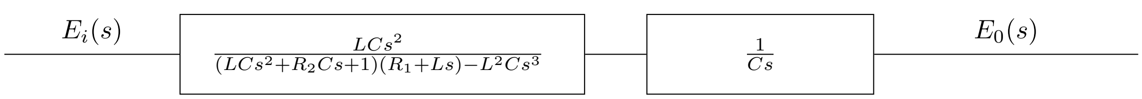
$$I_2(s) = \frac{LCs^2}{(LCs^2 + R_2Cs + 1)} I_1(s)$$

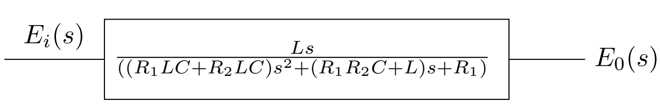
Tercera malla

$$\frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt = e_0(t)$$

$$\frac{1}{Cs} I_2(s) = E_0(s)$$







5. Problema 5: Considere el sistema de la Figura 3(a). El factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema es igual a 0,158, y la frecuencia natural no amortiguada ω_n es de 3,16 rad/seg. Para mejorar la estabilidad se emplea una segunda retroalimentación, como se muestra en la Figura 3(b). Determine el valor de K_h, para que el factor de amortiguamiento relativo del sistema sea ahora 0,5. Obtenga la curva de respuesta al escalón unitario (analítica y computacionalmente), tanto del sistema original como del sistema con la nueva retroalimentación. Y analice.

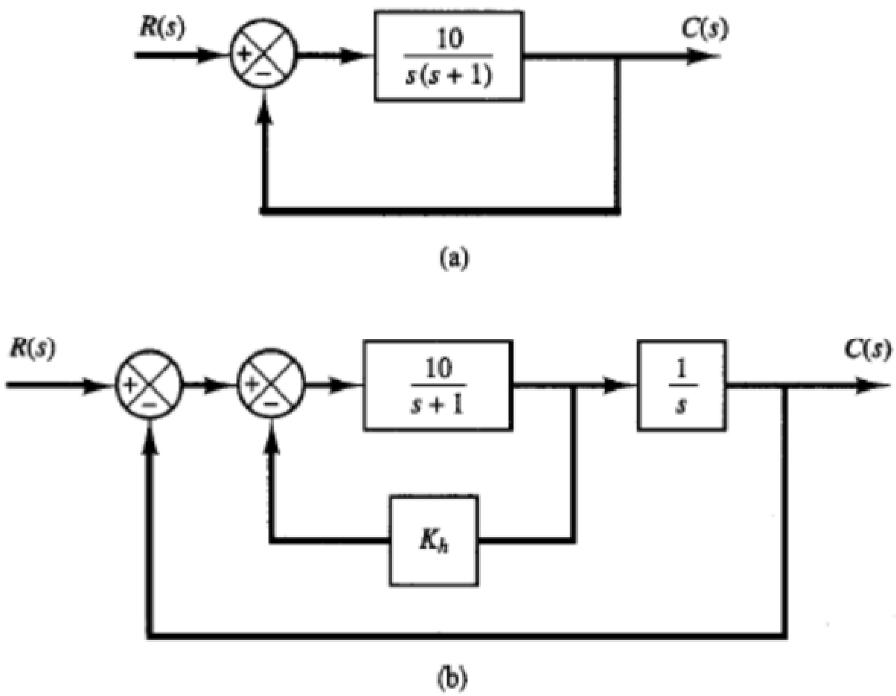


Figura 3: Sistema de la Figura 3(a) y 3(b)

5.1. El sistema dado en la Figura 3(a) tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Con una retroalimentación unitaria, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10}{s(s+1)}} = \frac{10}{s^2+s+10}$$

De acuerdo a los datos proporcionados:

- El factor de amortiguamiento relativo (ζ) es 0,158.

- La frecuencia natural no amortiguada (ω_n) es 3,16 rad/seg.

Estos parámetros corresponden a una ecuación característica de segundo orden de la forma:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Sustituyendo los valores:

$$s^2 + 2(0{,}158)(3{,}16)s + (3{,}16)^2 = s^2 + 0{,}998s + 9{,}9856$$

Lo cual se aproxima bastante a la ecuación característica del sistema de lazo cerrado original: $s^2 + s + 10$.
Implementación computacional en Python

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Sistema original
num_orig = [10]
den_orig = [1, 1, 10]
sys_orig = ctrl.TransferFunction(num_orig, den_orig)

# Simulacion de la respuesta al escalon
t, y_orig = ctrl.step_response(sys_orig)

# Graficar resultados
plt.plot(t, y_orig, color='b', label='Sistema␣Original')
plt.title('Respuesta␣al␣escalon␣unitario')
plt.xlabel('Tiempo␣(s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

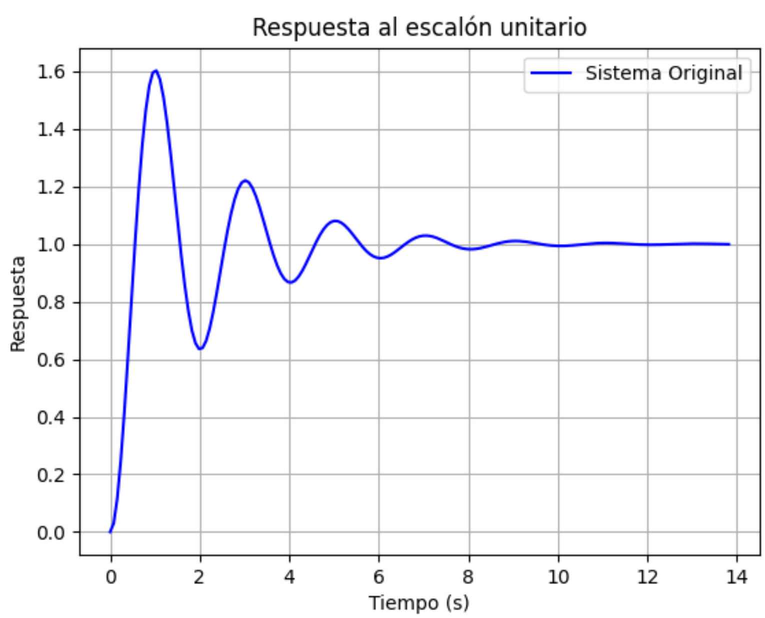


Figura 4: Respuesta al escalón unitario del sistema original

5.2. Sistema con nueva retroalimentación (Figura 3b)

En la Figura 3(b), se añade una segunda retroalimentación con ganancia k. Este valor se ajusta para lograr un coeficiente de amortiguamiento deseado de $\zeta = 0{,}5$. La nueva función de transferencia será:

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + (10k+1)s + 10}$$

El polinomio característico de un sistema de segundo orden es:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Al comparar ambos polinomios:

$$s^2 + (10k+1)s + 10 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

De esta comparación, obtenemos dos ecuaciones:

- Para el término de s: $2\zeta\omega_n = 10k + 1$
- Para el término constante: $\omega_n^2 = 10$

5.2.1. Cálculo de ω_n

A partir de $\omega_n^2 = 10$, tenemos que:

$$\omega_n = \sqrt{10}$$

5.2.2. Cálculo de k

Usando la ecuación para el coeficiente de amortiguamiento, $2\zeta\omega_n = 10k + 1$, y sustituyendo $\zeta = 0{,}5$ y $\omega_n = \sqrt{10}$:

$$2(0{,}5)\sqrt{10} = 10k + 1$$

Despejando para k:

$$k = \frac{2(0{,}5)\sqrt{10} - 1}{10}$$

Finalmente, obtenemos el valor de k:

$$k \approx 0{,}2162$$

Implementación computacional en Python

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Sistema con nueva retroalimentacion
k = 0.2162
num_new = [10]
den_new = [1, (10*k+1), 10]
sys_new = ctrl.TransferFunction(num_new, den_new)

t2, y_new = ctrl.step_response(sys_new)

# Graficar resultados
plt.plot(t2, y_new, color='r', label='Sistema con nueva retroalimentacion')
plt.title('Respuesta al escalon unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

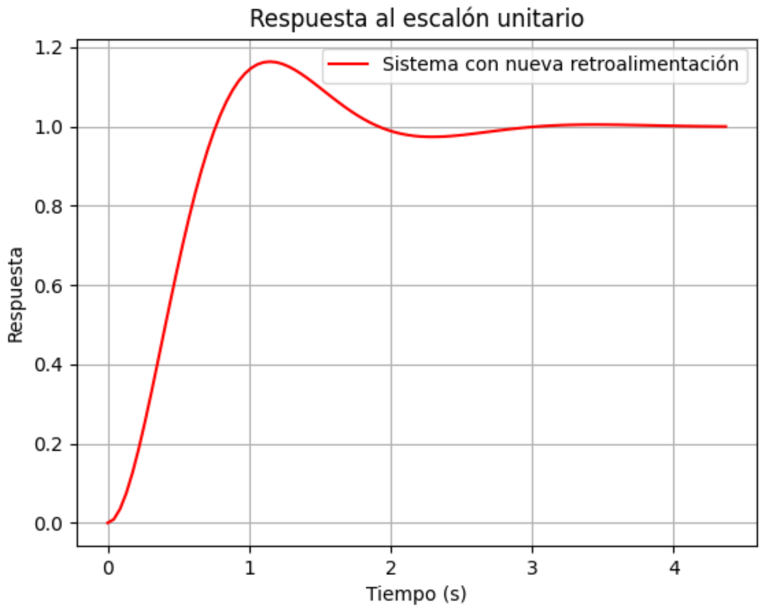


Figura 5: Respuesta al escalón unitario del sistema con nueva retroalimentación

5.3. Respuesta al escalón unitario

Sistema original

La función de transferencia del sistema original es:

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

Usando la transformada inversa de Laplace, la respuesta al escalón unitario de este sistema presenta un comportamiento típico de un sistema de segundo orden subamortiguado, con un factor de amortiguamiento $\zeta \approx 0{,}158$, lo que implica una respuesta con oscilaciones y una mayor sobreoscilación.

Sistema con retroalimentación ajustada

Para el sistema con retroalimentación y el valor ajustado de k, la función de transferencia se convierte en:

$$T_{\text{nuevo}}(s) = \frac{10}{s^2 + (10k + 1)s + 10}$$

Sustituyendo $k = 0{,}2162$, obtenemos:

$$T_{\text{nuevo}}(s) = \frac{10}{s^2 + (10(0{,}2162) + 1)s + 10} = \frac{10}{s^2 + 3{,}162s + 10}$$

Este sistema tiene un factor de amortiguamiento de $\zeta = 0{,}5$, lo que implica una mayor estabilidad y una reducción significativa en las oscilaciones en la respuesta al escalón unitario.

Análisis

El sistema con la ganancia $k \approx 0{,}2162$ tiene una respuesta al escalón más rápida y con menos sobreoscilación en comparación con el sistema original, que tiene un amortiguamiento mucho menor. Esta mejora es notable al aumentar el factor de amortiguamiento de 0,158 a 0,5, lo que también reduce el tiempo de asentamiento.

Implementación computacional en Python

El siguiente código en Python permite comparar la respuesta al escalón unitario de ambos sistemas, el original y el sistema con la ganancia ajustada k:

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Sistema original
num_orig = [10]
den_orig = [1, 1, 10]
sys_orig = ctrl.TransferFunction(num_orig, den_orig)

# Sistema con retroalimentacion ajustada
k = 0.2162
num_new = [10]
den_new = [1, (10*k + 1), 10]
sys_new = ctrl.TransferFunction(num_new, den_new)

# Simulacion de la respuesta al escalon
t, y_orig = ctrl.step_response(sys_orig)
t2, y_new = ctrl.step_response(sys_new)

# Graficar resultados
plt.plot(t, y_orig, color='b', label='Sistema Original')
plt.plot(t2, y_new, color='r', label='Sistema con k ajustado')
plt.title('Respuesta al escalon unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Este código genera la respuesta al escalón unitario tanto para el sistema original como para el sistema con la ganancia k ajustada, permitiendo comparar el comportamiento de ambos.

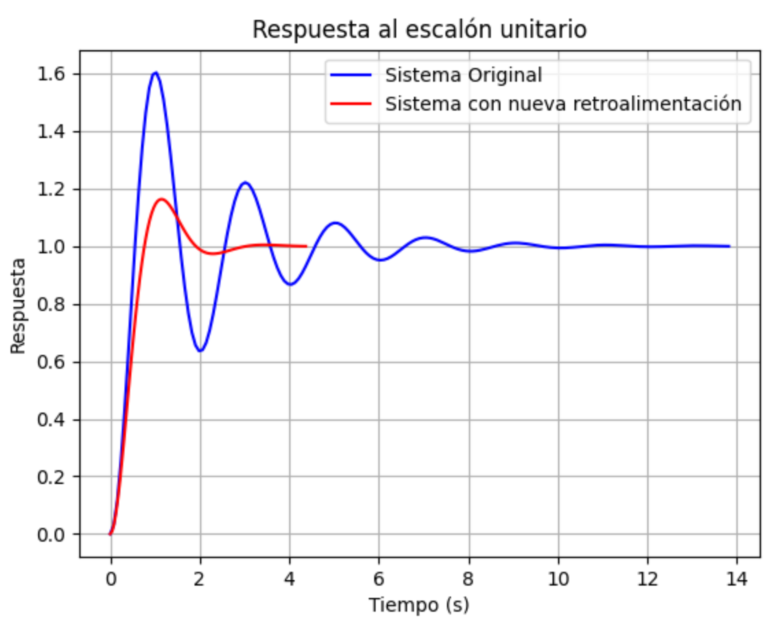


Figura 6: Respuesta al escalón unitario de ambos sistemas

6. Problema 6: Considerando el sistema de la Figura 7, determine el valor de k , de modo que el factor de amortiguamiento sea 0,5. Basado en esto, obtenga el tiempo de levantamiento tr , el tiempo peak tp , el sobrepaso máximo Mp , y el tiempo de asentamiento ts , en la respuesta al escalón unitario. Obtenga analíticamente y muestre la respuesta en el tiempo (computacionalmente).

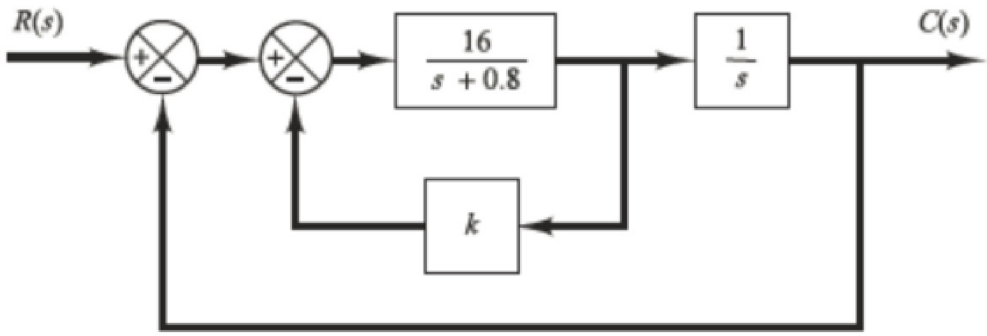


Figura 7: Sistema de la Figura 7

La función de transferencia del sistema en la Figura 7 es:

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + (0{,}8 + 16k)s + 16}$$

6.1. Determinación del valor de k

Para un sistema de segundo orden, la ecuación característica estándar es:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Donde:

- $\zeta = 0{,}5$ (factor de amortiguamiento relativo),
- ω_n es la frecuencia natural no amortiguada.

La ecuación característica del sistema será:

$$s^2 + (0{,}8 + 16k)s + 16 = 0$$

El factor de amortiguamiento está relacionado con la frecuencia natural y la constante del término lineal en s por la fórmula:

$$2\zeta\omega_n = 0{,}8 + 16k$$

Sustituyendo $\zeta = 0{,}5$ y $\omega_n = 4$:

$$2(0{,}5)(4) = 0{,}8 + 16k \quad \Rightarrow \quad 4 = 0{,}8 + 16k$$

$$16k = 3{,}2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3{,}2}{16} = 0{,}2$$

6.2. Cálculo de parámetros de la respuesta al escalón unitario

6.2.1. Tiempo de levantamiento t_r

Frecuencia natural amortiguada ω_d:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4\sqrt{1-(0{,}5)^2} = 4\sqrt{0{,}75} = 4 \times 0{,}866 = 3{,}464$$

El tiempo de levantamiento es el tiempo que tarda la salida en pasar del 10 % al 90 % del valor final. Para un sistema subamortiguado con $\zeta = 0{,}5$, una aproximación es:

$$t_r \approx \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d} = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{3{,}464} \approx 0{,}604\,\text{segundos}$$

6.2.2. Tiempo peak t_p

El tiempo peak es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar su primer máximo. Para un sistema de segundo orden:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3{,}464} \approx 0{,}907\,\text{segundos}$$

6.2.3. Sobrepaso máximo M_p

El sobrepaso máximo se puede calcular con la siguiente fórmula para un sistema de segundo orden:

$$M_p = e^{\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = e^{\left(\frac{-\pi(0{,}5)}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\right)} = e^{\left(\frac{-1{,}57}{0{,}866}\right)} \approx 16{,}3\,\%$$

6.2.4. Tiempo de asentamiento t_s

El tiempo de asentamiento es el tiempo que tarda la respuesta en quedarse dentro de un 2 % del valor final. Para un sistema de segundo orden, el tiempo de asentamiento se aproxima como:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0{,}5 \times 4} = 2\,\text{segundos}$$

6.3. Simulación computacional

Implementación computacional en Python

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros del sistema
k = 0.2  # Valor de k determinado
num = [16]
den = [1, 0.8 + 16*k, 16]

# Crear el sistema en lazo cerrado
sys = ctrl.TransferFunction(num, den)

# Simulacion de la respuesta al escalon
t, y = ctrl.step_response(sys)

# Graficar la respuesta
plt.plot(t, y, label='Respuesta al escalon unitario')
plt.title('Respuesta al escalon unitario (k = 0.2)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.axvline(x=0.604, color='red', linestyle='--', label='Tiempo de levantamiento (Tr) 0.604 
    [s]')
plt.axvline(x=0.907, color='green', linestyle='--', label='Tiempo peak (Tp) 0.907 [s]')
plt.axvline(x=2, color='purple', linestyle='--', label='Tiempo de asentamiento (Ts) 2 [s]')
```

```
plt.plot([], [], '␣', label='Sobrepaso␣16.3%')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

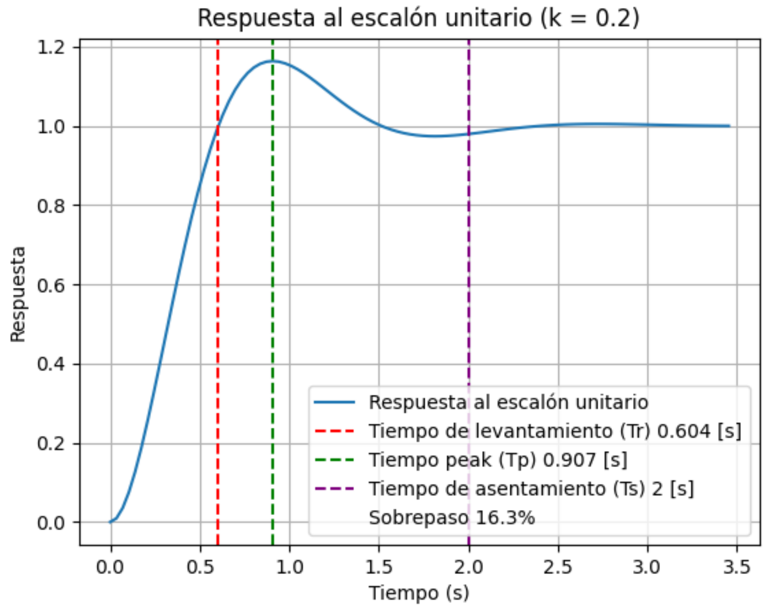


Figura 8: Respuesta al escalón unitario del sistema con $k = 0{,}2$

Este código genera la respuesta al escalón unitario y te permite analizar visualmente cómo se comporta el sistema con el valor $k = 0{,}2$.

7. Problema 7: Las Figuras 9 muestran tres sistemas. El sistema I es un sistema de control de posición; el sistema II es un sistema de control de posición con un control PD; y el sistema III es un sistema de control de posición con retroalimentación de velocidad. Compare las respuestas a un escalón unitario e impulso unitario de los tres sistemas (computacionalmente, y ojalá en una misma gráfica). ¿Qué sistema es mejor con respecto a la velocidad de respuesta, y sobre el sobrepaso (elongación) máxima, en la respuesta al escalón?

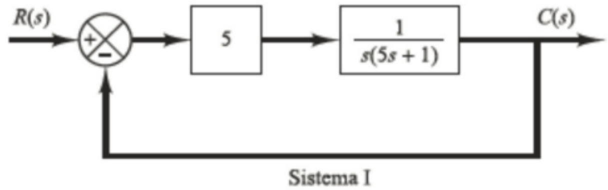


Figura (a)

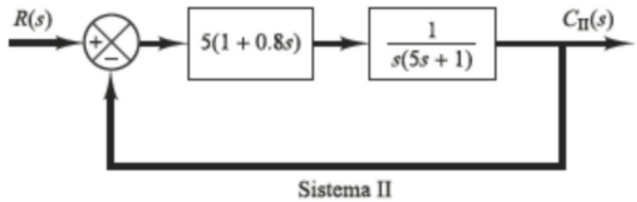


Figura (b)

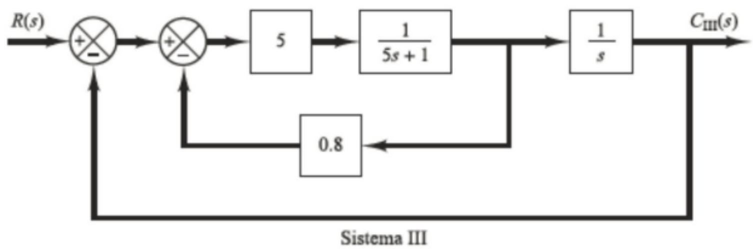


Figura (c)

Figura 9: Sistemas I, II y III

7.1. Funciones de transferencia de los sistemas

$$\text{a)}\ \frac{5}{s(5s+1)} = \frac{\frac{5}{s(5s+1)}}{1+\frac{s}{s(5s+1)}} = \frac{5}{s(5s+1)+s} \tag{0.3}$$

$$\text{b)}\ \frac{5(1+0{,}8s)}{s(5s+1)} = \frac{\frac{5(1+0{,}8s)}{s(5s+1)}}{1+\frac{5(1+0{,}8s)}{s(5s+1)}} = \frac{5(1+0{,}8s)}{s(5s+1)+5(1+0{,}8s)} \tag{0.4}$$

$$\text{c)}\ \frac{5}{5s+1} = \frac{\frac{5}{5s+1}}{1+\frac{4}{5s+1}} = \frac{1}{s+1} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{s^2+s}} = \frac{1}{s^2+s+1} \tag{0.5}$$

Implementación computacional en Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import TransferFunction, step, impulse

# Definir las funciones de transferencia usando scipy.signal.TransferFunction
G_a = TransferFunction([5], [5, 1, 5])  # Sistema I: Control de posicion
G_b = TransferFunction([4, 5], [5, 5, 5])  # Sistema II: Control de posicion con
    control PD
G_c = TransferFunction([1], [1, 1, 1])  # Sistema III: Control de posicion con
    retroalimentacion de velocidad

# Determinar el tiempo maximo de simulacion basado en las respuestas al escalon
_, step_response_a = step(G_a)
_, step_response_b = step(G_b)
```

```python
_, step_response_c = step(G_c)

# Determinar el tiempo maximo de simulacion
t_max = max(len(step_response_a), len(step_response_b), len(step_response_c))

# Crear un vector de tiempo adecuado
t = np.linspace(0, t_max, 1000)

# Simulacion de la respuesta a un escalon unitario
t_out_a, step_response_a = step(G_a, T=t)
t_out_b, step_response_b = step(G_b, T=t)
t_out_c, step_response_c = step(G_c, T=t)

# Simulacion de la respuesta a un impulso unitario
t_out_a_imp, impulse_response_a = impulse(G_a, T=t)
t_out_b_imp, impulse_response_b = impulse(G_b, T=t)
t_out_c_imp, impulse_response_c = impulse(G_c, T=t)

# Graficar las respuestas al escalon
plt.figure(figsize=(12, 8))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_out_a, step_response_a, label='Sistema I - Escalon')
plt.plot(t_out_b, step_response_b, label='Sistema II - Escalon')
plt.plot(t_out_c, step_response_c, label='Sistema III - Escalon')
plt.title('Respuesta al Escalon Unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.legend()
plt.grid()

# Graficar las respuestas al impulso
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_out_a_imp, impulse_response_a, label='Sistema I - Impulso')
plt.plot(t_out_b_imp, impulse_response_b, label='Sistema II - Impulso')
plt.plot(t_out_c_imp, impulse_response_c, label='Sistema III - Impulso')
plt.title('Respuesta al Impulso Unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.legend()
plt.grid()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

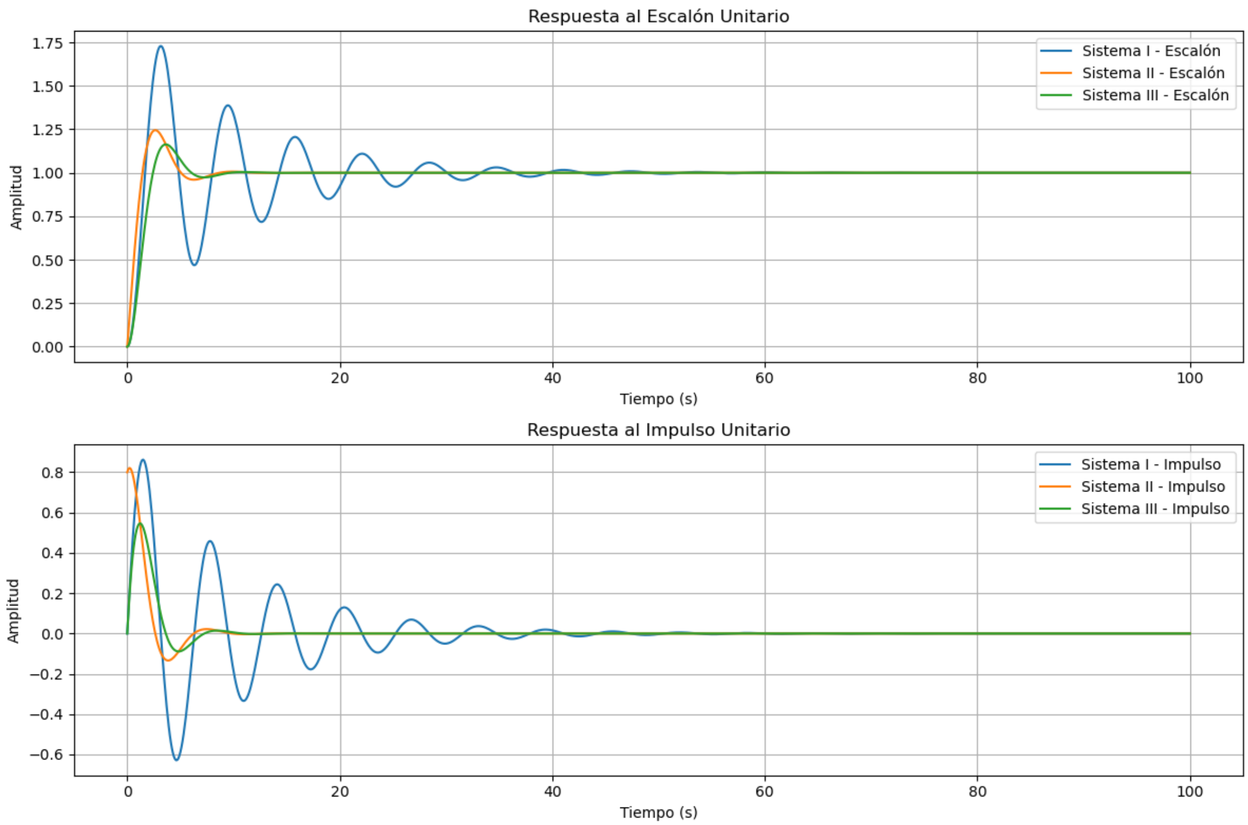


Figura 10: Respuestas al escalón unitario de los sistemas I, II y III

7.2. Análisis de las respuestas al escalón e impulso unitario

A partir de los gráficos de las respuestas al **escalón unitario** y al **impulso unitario** de los tres sistemas, se puede realizar el siguiente análisis:

7.3. Respuesta al escalón unitario

- **Sistema I (azul)**:
  - Tiene el **mayor sobrepaso** y un comportamiento oscilatorio prolongado, lo que indica una baja amortiguación y una respuesta menos controlada.
  - Su **velocidad de respuesta** es menor que la de los otros dos sistemas, ya que tarda más en estabilizarse.
- **Sistema II (naranja)**:
  - Presenta un **sobrepaso menor** que el Sistema I y una mejor estabilidad.
  - Su **velocidad de respuesta** es más rápida que la del Sistema I, estabilizándose con menos oscilaciones.
- **Sistema III (verde)**:
  - Este sistema tiene **prácticamente nulo sobrepaso** y se estabiliza rápidamente sin oscilaciones significativas.
  - Es el **más estable** de los tres sistemas, pero su **velocidad de respuesta** es ligeramente más lenta que la del Sistema II debido a su fuerte amortiguación.

7.4. Respuesta al impulso unitario

Los patrones observados son similares a los de la respuesta al escalón. El **Sistema I** tiene el mayor sobrepaso y la mayor oscilación, mientras que el **Sistema III** es el más estable, con una rápida estabilización.

7.5. Conclusión

- **Velocidad de respuesta**: El **Sistema II** parece tener la mejor velocidad de respuesta, ya que alcanza su estado estable más rápidamente que los demás con un control razonable del sobrepaso.

- **Sobrepaso máximo**: El **Sistema III** es el que tiene el menor sobrepaso y es el más estable en ambas respuestas (escalón e impulso).

Por lo tanto, si se busca una respuesta más rápida, el **Sistema II** es el más adecuado. Sin embargo, si la prioridad es minimizar el sobrepaso y maximizar la estabilidad, el **Sistema III** es el más recomendable.