

# Tarea 1

Jorge Gonzalo Alejandro Alcaíno Brevis  
Maximiliano Antonio Gaete Pizarro

# 1. Problema 1: Encuentre las transformadas inversas de Laplace, de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F_1(s) &= \frac{6s+3}{s^2} \\ \text{(b)} \quad F_2(s) &= \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2} \end{aligned} \tag{0.1}$$

## 1.1. Parte (a):

$$F_1(s) = \frac{6s+3}{s^2}$$

Descomponiendo la función:

$$F_1(s) = 6 \cdot \frac{s}{s^2} + 3 \cdot \frac{1}{s^2}$$

La transformada inversa de Laplace de cada término es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2} \right\} = 1, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t$$

Por lo tanto, la transformada inversa de  $F_1(s)$  es:

$$\mathcal{L}^{-1} \{F_1(s)\} = 6 + 3t$$

## 1.2. Parte (b):

$$F_2(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$F_2(s) = \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{8}{(s+2)^2}$$

Para esta fracción racional más compleja, podemos aplicar descomposición en fracciones parciales. La forma general sería:

$$\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

Primero, multiplicamos ambos lados por  $(s+1)(s+2)^2$  para eliminar los denominadores:

$$5s+2 = A(s+2)^2 + B(s+1)(s+2) + C(s+1)$$

Resolviendo en Python

```
from sympy import symbols, Eq, solve

# Definimos la variable s y los coeficientes A, B, C
s = symbols('s')
A, B, C = symbols('A B C')

# Expresión original
lhs = 5*s + 2

# Expansión en fracciones parciales
rhs = A*(s+2)**2 + B*(s+1)*(s+2) + C*(s+1)

# Expandimos el lado derecho
```

```

expanded_rhs = rhs.expand()

# Igualamos ambos lados para resolver el sistema de ecuaciones
equations = Eq(lhs, expanded_rhs)

# Resolvemos para A, B y C
coefficients = solve(equations, [A, B, C])
coefficients

```

Expandiendo ambos lados y resolviendo para  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , encontramos los coeficientes que necesitamos. Esto nos da la forma correcta para aplicar la transformada inversa de Laplace a cada término:

$$\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{8}{(s+2)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a cada término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = te^{-2t}$$

Por lo tanto, la transformada inversa de  $F_2(s)$  es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = -3e^{-t} + 3e^{-2t} + 8te^{-2t}$$

## 2. Problema 2: Obtenga la Función de Transferencia del sistema definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (0.2)$$

### 2.1. Obtención de la función de transferencia del sistema:

Dado el sistema de ecuaciones en el espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

donde las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  están definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia  $\mathbf{G}(s)$  en el dominio de Laplace se calcula utilizando la fórmula:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Paso 1: Calcular  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

La matriz identidad  $\mathbf{I}$  es:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  es:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 4 & s+6 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Inversa de  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

Ahora, calculamos la inversa de  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ :

Resolviendo en python

```
from sympy import Matrix, eye, symbols, simplify

# Definir las matrices y la variable s
s = symbols('s')
A = Matrix([[0, 1, 0], [0, 0, 1], [-2, -4, -6]])
B = Matrix([[0, 0], [0, 1], [1, 0]])
C = Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, 0]])
D = Matrix([[0, 0], [0, 0]])
I = eye(3) # Matriz identidad de 3x3

# Calcular (sI - A) y su inversa
sI_A_inv = (s * I - A).inv()
```

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 4 & s + 6 & 1 \\ 2s + 4 & s^2 + 6s + 2 & s + 6 \\ 2 & 2s + 4 & s^2 + 6s \end{bmatrix}$$

Paso 3: Multiplicación con  $B$

Multiplicamos  $(sI - A)^{-1}$  por  $B$ :

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} \begin{bmatrix} 1 & s + 6 \\ s & s(s + 6) \end{bmatrix}$$

Paso 4: Multiplicación con  $C$  y adición de  $D$

Finalmente, multiplicamos por  $C$  y sumamos  $D$ , obteniendo la función de transferencia:

Resolviendo en Python

```
# Calcular la funcion de transferencia G(s) = C(sI - A)^(-1)B + D
G_s = simplify(C * sI_A_inv * B + D)
G_s
```

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} & \frac{s + 6}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} \\ \frac{s}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} & \frac{s(s + 6)}{s^3 + 6s^2 + 4s + 2} \end{bmatrix}$$

Esta es la función de transferencia del sistema, que describe la relación entre las entradas  $u_1$  y  $u_2$ , y las salidas  $y_1$  y  $y_2$ .

3. Problema 3: Mediante la simplificación del diagrama de bloques de la Figura 1, obtenga las siguientes funciones de transferencia

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{N=0} \quad \left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{R=0}$$

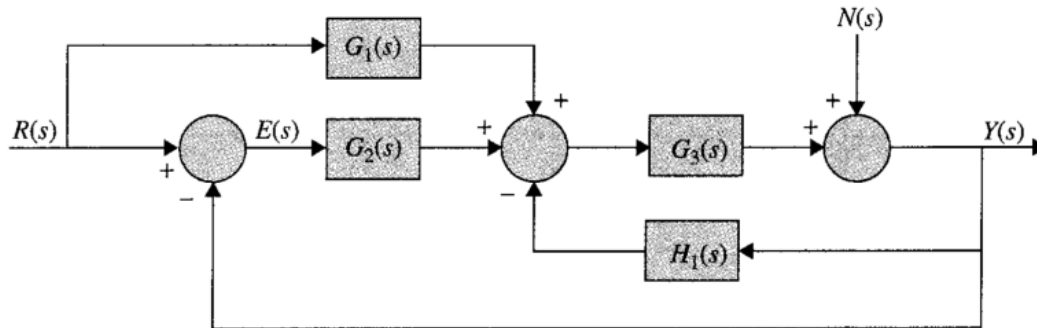


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema

4. Problema 4: Obtenga la Función de Transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  del circuito eléctrico RLC que se muestra en la Figura 2

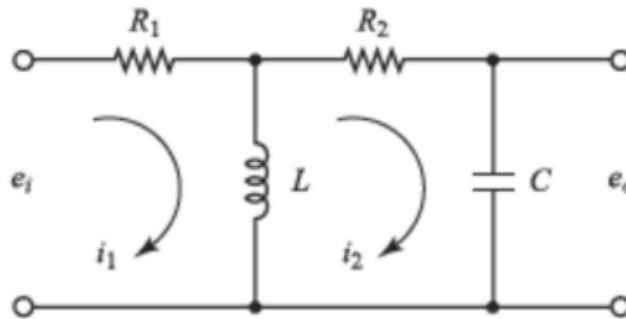


Figura 2: Circuito eléctrico RLC

5. **Problema 5:** Considere el sistema de la Figura 3(a). El factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  del sistema es igual a 0,158, y la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es de 3,16 rad/seg. Para mejorar la estabilidad se emplea una segunda retroalimentación, como se muestra en la Figura 3(b). Determine el valor de  $K_h$ , para que el factor de amortiguamiento relativo del sistema sea ahora 0,5. Obtenga la curva de respuesta al escalón unitario (analítica y computacionalmente), tanto del sistema original como del sistema con la nueva retroalimentación. Y analice.

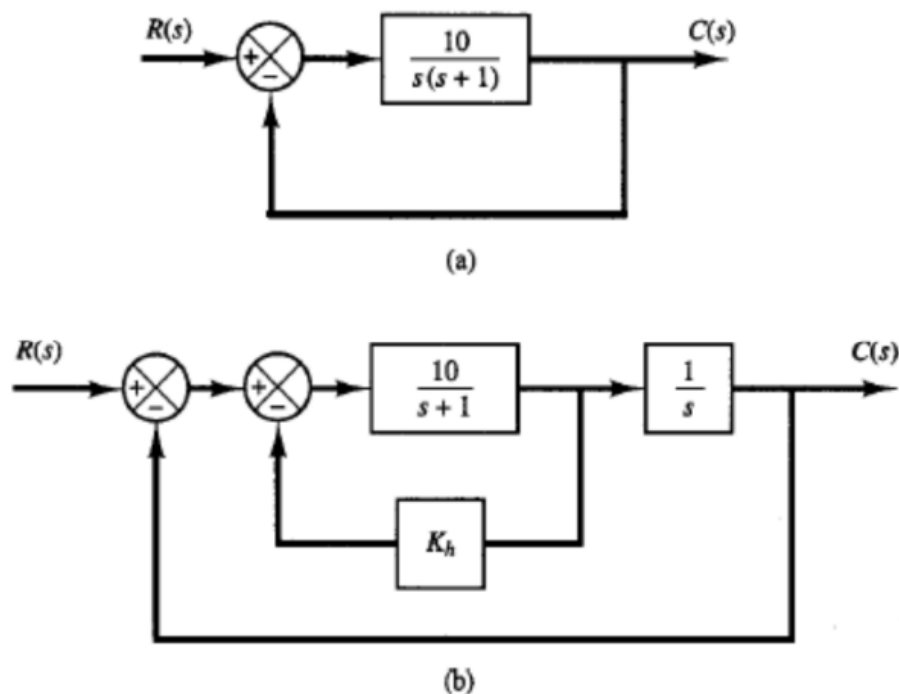


Figura 3: Sistema de la Figura 3(a) y 3(b)

- 5.1. El sistema dado en la Figura 3(a) tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Con una retroalimentación unitaria, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{10}{s(s+1)}} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

De acuerdo a los datos proporcionados:

- El factor de amortiguamiento relativo ( $\zeta$ ) es 0,158.

- La frecuencia natural no amortiguada ( $\omega_n$ ) es 3,16 rad/seg.

Estos parámetros corresponden a una ecuación característica de segundo orden de la forma:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Sustituyendo los valores:

$$s^2 + 2(0,158)(3,16)s + (3,16)^2 = s^2 + 0,998s + 9,9856$$

Lo cual se aproxima bastante a la ecuación característica del sistema de lazo cerrado original:  $s^2 + s + 10$ .

Implementación computacional en Python

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Sistema original
num_orig = [10]
den_orig = [1, 1, 10]
sys_orig = ctrl.TransferFunction(num_orig, den_orig)

# Simulación de la respuesta al escalon
t, y_orig = ctrl.step_response(sys_orig)

# Graficar resultados
plt.plot(t, y_orig, color='b', label='Sistema Original')
plt.title('Respuesta al escalon unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

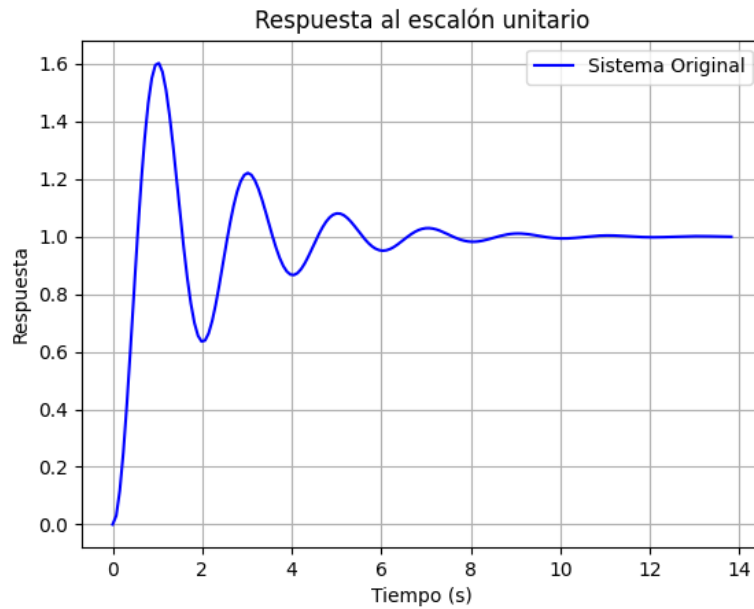


Figura 4: Respuesta al escalón unitario del sistema original



## 5.2. Sistema con nueva retroalimentación (Figura 3b)

En la Figura 3(b), se añade una segunda retroalimentación con ganancia  $k$ . Este valor se ajusta para lograr un coeficiente de amortiguamiento deseado de  $\zeta = 0,5$ . La nueva función de transferencia será:

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + (10k + 1)s + 10}$$

El polinomio característico de un sistema de segundo orden es:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Al comparar ambos polinomios:

$$s^2 + (10k + 1)s + 10 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

De esta comparación, obtenemos dos ecuaciones:

- Para el término de  $s$ :  $2\zeta\omega_n = 10k + 1$
- Para el término constante:  $\omega_n^2 = 10$

### 5.2.1. Cálculo de $\omega_n$

A partir de  $\omega_n^2 = 10$ , tenemos que:

$$\omega_n = \sqrt{10}$$

### 5.2.2. Cálculo de $k$

Usando la ecuación para el coeficiente de amortiguamiento,  $2\zeta\omega_n = 10k + 1$ , y sustituyendo  $\zeta = 0,5$  y  $\omega_n = \sqrt{10}$ :

$$2(0,5)\sqrt{10} = 10k + 1$$

Despejando para  $k$ :

$$k = \frac{2(0,5)\sqrt{10} - 1}{10}$$

Finalmente, obtenemos el valor de  $k$ :

$$k \approx 0,2162$$

Implementación computacional en Python

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Sistema con nueva retroalimentacion
k = 0.2162
num_new = [10]
den_new = [1, (10*k+1), 10]
sys_new = ctrl.TransferFunction(num_new, den_new)

t2, y_new = ctrl.step_response(sys_new)

# Graficar resultados
plt.plot(t2, y_new, color='r', label='Sistema con nueva retroalimentacion')
plt.title('Respuesta al escalon unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

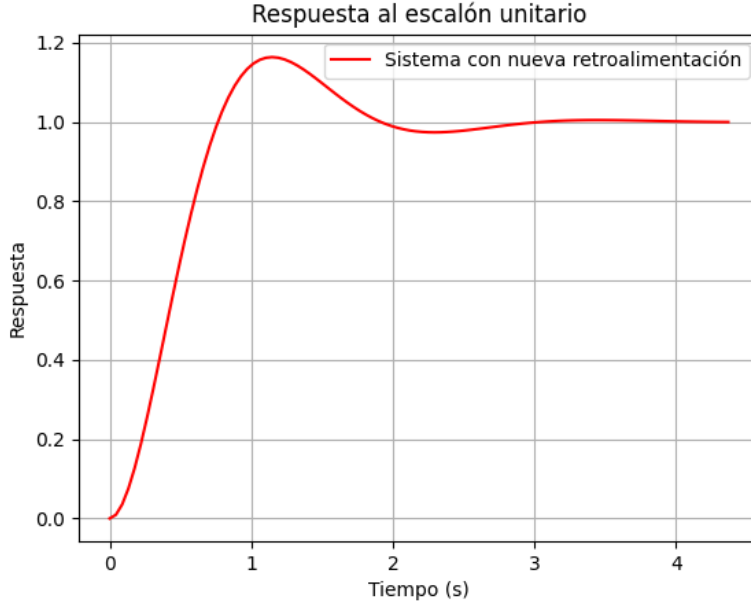


Figura 5: Respuesta al escalón unitario del sistema con nueva retroalimentación

### 5.3. Respuesta al escalón unitario

#### Sistema original

La función de transferencia del sistema original es:

$$T(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

Usando la transformada inversa de Laplace, la respuesta al escalón unitario de este sistema presenta un comportamiento típico de un sistema de segundo orden subamortiguado, con un factor de amortiguamiento  $\zeta \approx 0,158$ , lo que implica una respuesta con oscilaciones y una mayor sobreoscilación.

#### Sistema con retroalimentación ajustada

Para el sistema con retroalimentación y el valor ajustado de  $k$ , la función de transferencia se convierte en:

$$T_{\text{nuevo}}(s) = \frac{10}{s^2 + (10k + 1)s + 10}$$

Sustituyendo  $k = 0,2162$ , obtenemos:

$$T_{\text{nuevo}}(s) = \frac{10}{s^2 + (10(0,2162) + 1)s + 10} = \frac{10}{s^2 + 3,162s + 10}$$

Este sistema tiene un factor de amortiguamiento de  $\zeta = 0,5$ , lo que implica una mayor estabilidad y una reducción significativa en las oscilaciones en la respuesta al escalón unitario.

#### Análisis

El sistema con la ganancia  $k \approx 0,2162$  tiene una respuesta al escalón más rápida y con menos sobreoscilación en comparación con el sistema original, que tiene un amortiguamiento mucho menor. Esta mejora es notable al aumentar el factor de amortiguamiento de 0,158 a 0,5, lo que también reduce el tiempo de asentamiento.

## Implementación computacional en Python

El siguiente código en Python permite comparar la respuesta al escalón unitario de ambos sistemas, el original y el sistema con la ganancia ajustada  $k$ :

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Sistema original
num_orig = [10]
den_orig = [1, 1, 10]
sys_orig = ctrl.TransferFunction(num_orig, den_orig)

# Sistema con retroalimentación ajustada
k = 0.2162
num_new = [10]
den_new = [1, (10*k + 1), 10]
sys_new = ctrl.TransferFunction(num_new, den_new)

# Simulación de la respuesta al escalon
t, y_orig = ctrl.step_response(sys_orig)
t2, y_new = ctrl.step_response(sys_new)

# Graficar resultados
plt.plot(t, y_orig, color='b', label='Sistema Original')
plt.plot(t2, y_new, color='r', label='Sistema con k ajustado')
plt.title('Respuesta al escalon unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Este código genera la respuesta al escalón unitario tanto para el sistema original como para el sistema con la ganancia  $k$  ajustada, permitiendo comparar el comportamiento de ambos.

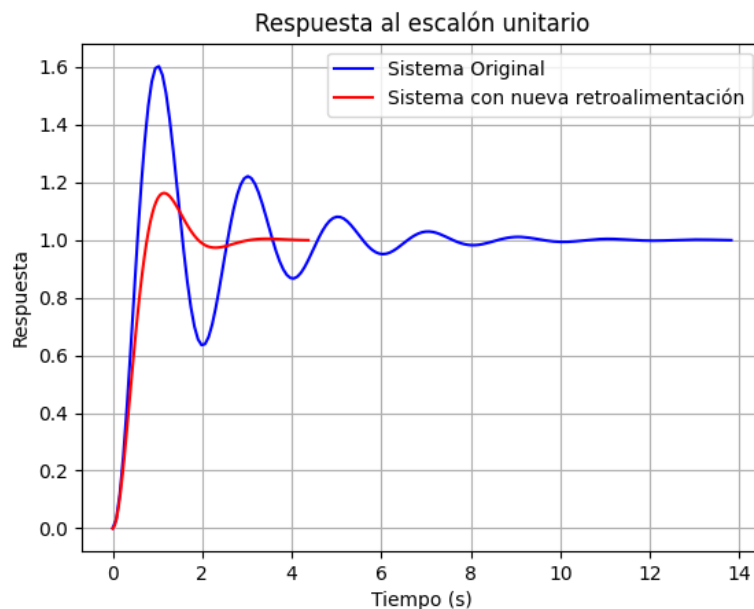


Figura 6: Respuesta al escalón unitario de ambos sistemas

6. **Problema 6:** Considerando el sistema de la Figura 7, determine el valor de  $k$ , de modo que el factor de amortiguamiento sea 0,5. Basado en esto, obtenga el tiempo de levantamiento  $t_r$ , el tiempo peak  $t_p$ , el sobrepaso máximo  $M_p$ , y el tiempo de asentamiento  $t_s$ , en la respuesta al escalón unitario. Obtenga analíticamente y muestre la respuesta en el tiempo (computacionalmente).

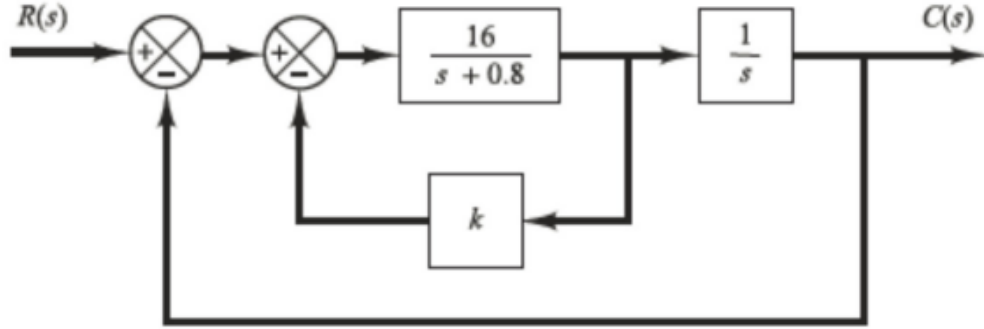


Figura 7: Sistema de la Figura 7

La función de transferencia del sistema en la Figura 7 es:

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + (0,8 + 16k)s + 16}$$

### 6.1. Determinación del valor de $k$

Para un sistema de segundo orden, la ecuación característica estándar es:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Donde:

- $\zeta = 0,5$  (factor de amortiguamiento relativo),
- $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada.

La ecuación característica del sistema será:

$$s^2 + (0,8 + 16k)s + 16 = 0$$

El factor de amortiguamiento está relacionado con la frecuencia natural y la constante del término lineal en  $s$  por la fórmula:

$$2\zeta\omega_n = 0,8 + 16k$$

Sustituyendo  $\zeta = 0,5$  y  $\omega_n = 4$ :

$$2(0,5)(4) = 0,8 + 16k \Rightarrow 4 = 0,8 + 16k$$

$$16k = 3,2 \Rightarrow k = \frac{3,2}{16} = 0,2$$

## 6.2. Cálculo de parámetros de la respuesta al escalón unitario

### 6.2.1. Tiempo de levantamiento $t_r$

Frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4 \sqrt{1 - (0,5)^2} = 4 \sqrt{0,75} = 4 \times 0,866 = 3,464$$

El tiempo de levantamiento es el tiempo que tarda la salida en pasar del 10 % al 90 % del valor final. Para un sistema subamortiguado con  $\zeta = 0,5$ , una aproximación es:

$$t_r \approx \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d} = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{3,464} \approx 0,604 \text{ segundos}$$

### 6.2.2. Tiempo peak $t_p$

El tiempo peak es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar su primer máximo. Para un sistema de segundo orden:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3,464} \approx 0,907 \text{ segundos}$$

### 6.2.3. Sobrepasso máximo $M_p$

El sobrepasso máximo se puede calcular con la siguiente fórmula para un sistema de segundo orden:

$$M_p = e^{\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = e^{\left(\frac{-\pi(0,5)}{\sqrt{1-(0,5)^2}}\right)} = e^{\left(\frac{-1,57}{0,866}\right)} \approx 16,3 \%$$

### 6.2.4. Tiempo de asentamiento $t_s$

El tiempo de asentamiento es el tiempo que tarda la respuesta en quedarse dentro de un 2 % del valor final. Para un sistema de segundo orden, el tiempo de asentamiento se aproxima como:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0,5 \times 4} = 2 \text{ segundos}$$

## 6.3. Simulación computacional

Implementación computacional en Python

```
import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros del sistema
k = 0.2 # Valor de k determinado
num = [16]
den = [1, 0.8 + 16*k, 16]

# Crear el sistema en lazo cerrado
sys = ctrl.TransferFunction(num, den)

# Simulación de la respuesta al escalon
t, y = ctrl.step_response(sys)

# Graficar la respuesta
plt.plot(t, y, label='Respuesta al escalon unitario')
plt.title('Respuesta al escalon unitario (k=0.2)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Respuesta')
plt.axvline(x=0.604, color='red', linestyle='--', label='Tiempo de levantamiento (Tr) 0.604 [s]')
plt.axvline(x=0.907, color='green', linestyle='--', label='Tiempo peak (Tp) 0.907 [s]')
plt.axvline(x=2, color='purple', linestyle='--', label='Tiempo de asentamiento (Ts) 2 [s]')
```

```
plt.plot([], [], 'u', label='Sobrepaso 16.3%')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

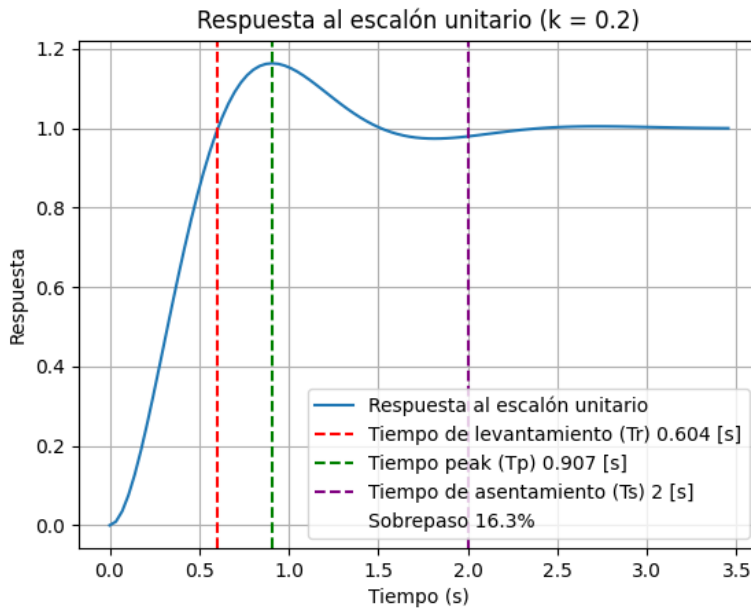


Figura 8: Respuesta al escalón unitario del sistema con  $k = 0.2$

Este código genera la respuesta al escalón unitario y te permite analizar visualmente cómo se comporta el sistema con el valor  $k = 0.04$ .

7. **Problema 7:** Las Figuras 9 muestran tres sistemas. El sistema I es un sistema de control de posición; el sistema II es un sistema de control de posición con un control PD; y el sistema III es un sistema de control de posición con retroalimentación de velocidad. Compare las respuestas a un escalón unitario e impulso unitario de los tres sistemas (computacionalmente, y ojalá en una misma gráfica). ¿Qué sistema es mejor con respecto a la velocidad de respuesta, y sobre el sobrepaso (elongación) máxima, en la respuesta al escalón?

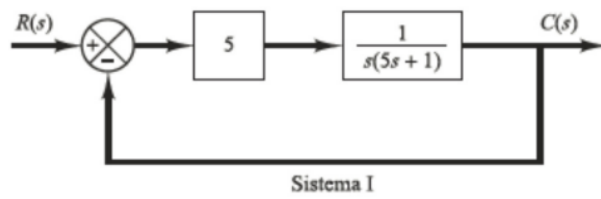


Figura (a)

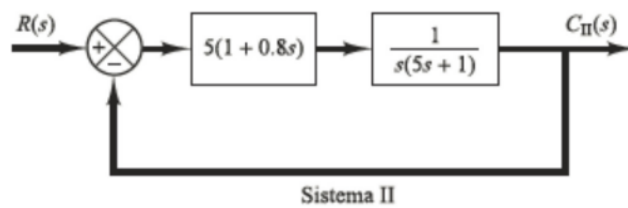


Figura (b)

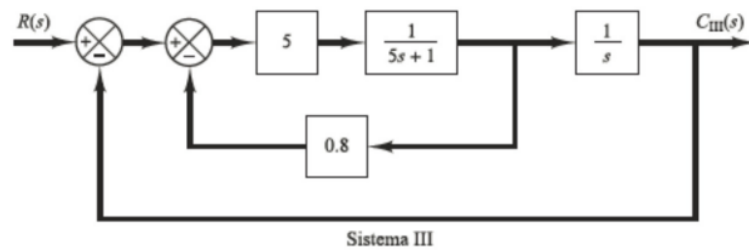


Figura (c)

Figura 9: Sistemas I, II y III