UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
Escuela de Ingeniería Civil Biomédica
CBM414 Procesamiento digital de señales biomédicas

Bonificación 2 Evaluación 2

Maximiliano Antonio Gaete Pizarro

Ejemplo 3.4.7

Este ejemplo trata de encontrar la ecuación en diferencias I/O (entrada-salida) de un sistema basado en un filtro IIR causal, dado por su respuesta al impulso $h(n)$. También se busca obtener la ecuación en diferencias para la respuesta al impulso misma.

Definición de $h(n)$

La respuesta al impulso $h(n)$ está definida de la siguiente manera:

$$h(n) = \begin{cases} 2, & \text{si } n = 0 \\ 4(0.5)^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Lo que significa que $h(0) = 2$ y luego, para $n \geq 1$, $h(n)$ decae exponencialmente con una tasa de 0.5.

Relación entre $y(n)$ y $x(n)$

La salida $y(n)$ se puede expresar como la convolución entre la entrada $x(n)$ y la respuesta al impulso $h(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k)$$

Sustituyendo los valores numéricos de $h(n)$, tenemos:

$$y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2} + h_3 x_{n-3} + \cdots$$
$$y_n = 2x_n + 4x_{n-1} + 2\left(x_{n-2} + 0.5x_{n-3} + 0.5^2 x_{n-4} + \cdots\right)$$

Para el valor de salida anterior y_{n-1}, tenemos:

$$y_{n-1} = 2x_{n-1} + 4x_{n-2} + 2\left(x_{n-3} + 0.5x_{n-4} + \cdots\right)$$

Transformación a ecuación en diferencias

Multiplicamos la ecuación para y_{n-1} por 0.5:

$$0.5y_{n-1} = x_{n-1} + 2\left(x_{n-2} + 0.5x_{n-3} + 0.5^2 x_{n-4} + \cdots\right)$$

Restando esta ecuación de la ecuación original para y_n, obtenemos:

$$y_n - 0.5y_{n-1} = 2x_n + 3x_{n-1}$$

Por lo tanto, la ecuación en diferencias I/O es:

$$y(n) = 0.5y(n-1) + 2x(n) + 3x(n-1)$$

Ecuación en diferencias para $h(n)$

Si sustituimos $x(n) = \delta(n)$ (el impulso unitario), obtenemos la ecuación en diferencias para $h(n)$ de la siguiente manera:

$$h(n) = 0.5h(n-1) + 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$$

Esta ecuación es consistente con la secuencia de valores para $h(n)$ que habíamos definido al inicio, demostrando que el análisis es correcto.

Ejemplo 3.4.8

Este ejemplo nos pide encontrar la forma convolucional y la respuesta al impulso causal de un filtro IIR, dada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = 0.25y(n-2) + x(n)$$

Respuesta al impulso $h(n)$

La respuesta al impulso $h(n)$ debe satisfacer la misma ecuación en diferencias que $y(n)$, dado que $h(n)$ es la salida cuando la entrada es un impulso unitario $\delta(n)$. Así, tenemos:

$$h(n) = 0.25h(n-2) + \delta(n)$$

La condición inicial es que $h(n) = 0$ para $n < 0$, es decir:

$$h(-1) = h(-2) = 0$$

Ahora, calculamos los primeros valores de $h(n)$ mediante iteración:

$$h(0) = 0.25h(-2) + \delta(0) = 0.25 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$h(1) = 0.25h(-1) + \delta(1) = 0.25 \cdot 0 + 0 = 0$$
$$h(2) = 0.25h(0) + \delta(2) = 0.25 \cdot 1 + 0 = 0.25 = (0.5)^2$$
$$h(3) = 0.25h(1) + \delta(3) = 0.25 \cdot 0 + 0 = 0$$
$$h(4) = 0.25h(2) + \delta(4) = 0.25 \cdot 0.25 + 0 = 0.0625 = (0.5)^4$$
$$h(5) = 0.25h(3) + \delta(5) = 0.25 \cdot 0 + 0 = 0$$

Y así sucesivamente. Como podemos observar, los valores de $h(n)$ para $n \geq 0$ se alternan entre cero y potencias de 0.5 en los índices pares.

Expresión general de $h(n)$

De este análisis, podemos deducir la forma general de $h(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} (0.5)^n, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Equivalente a escribirlo como:

$$h = [1, 0, (0.5)^2, 0, (0.5)^4, 0, (0.5)^6, 0, \dots]$$

Forma convolucional

Finalmente, la ecuación en diferencias que describe la salida $y(n)$ en función de la entrada $x(n)$, se puede escribir en forma convolucional. La ecuación general de convolución se define como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k)$$

Sustituyendo los valores de $h(n)$ obtenidos previamente, la ecuación convolucional queda:

$$y_n = x_n + 0.5^2 x_{n-2} + 0.5^4 x_{n-4} + 0.5^6 x_{n-6} + \dots$$

Esta es la forma convolucional de la ecuación en diferencias, que es equivalente a la ecuación original dada.