Nobili Nicolás

Ejercicio 2

datos
$$\begin{cases} \omega_n = 2\pi \cdot 100 \ \frac{rad}{s} \\ \xi = 0.707 \\ v_0 = 0{,}1 \end{cases}$$

Ecuacion Pendulo invertido

$$\to \ddot{\theta} = -\alpha \cdot \theta^3 + \sin(\theta) - \dot{\theta}^3 + \tau$$

$$\tau = v - v_0 \quad \wedge \quad V(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot U$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\ddot{v} + 2\xi\omega_n \dot{v} + \omega_n^2 v = \omega_n^2 \cdot u(t)$$

Variables de estado:

$$\boxed{\begin{matrix} \theta & \dot{\theta} \\ v & \dot{v} \end{matrix}} \quad \begin{matrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{v} \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 = \theta & x_3 = v \\ x_2 = \dot{\theta} & x_4 = \dot{v} \end{matrix}}$$

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_1^3 + \sin(x_1) - x_2^3 + (x_3 - v_0)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$\dot{X}_4 = \omega_n^2 u - \omega_n^2 X_3 - 2\xi\omega_n X_4$ | $Y = \theta$ (eq de salida)

a) <u>equilibrio</u>:

$(\theta = X_1 = \pm\frac{\pi}{4}\ ,\ \dot{\theta} = 0$

$Z = 0\ ,\ V = V_0)$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

- $\dot{X}_1 = X_2 = 0 \quad (X_2 = \dot{\theta})$

- $\dot{X}_2 = -\alpha X_1^3 + \sin(X_1) - X_2^3 + (X_3 - V_0)$

$0 = -\alpha \frac{\pm\pi^3}{4^3} + \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 + (0)$

$0 = -\alpha\left(\pm\frac{\pi^3}{64}\right) + \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \alpha\left(\cancel{\pm}\frac{\pi^3}{64}\right) = \cancel{\pm}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{\alpha = \frac{64\sqrt{2}}{2\pi^3} = \frac{32\sqrt{2}}{\pi^3}}$$

Valor de α para que se de la condicion de equilibrio.

- $\dot{X}_3 = X_4 = \dot{V} = 0$
- $\dot{X}_4 = 0 = \omega_n^3 u - \omega_n^3 V \rightarrow \boxed{u = V = V_0}$

Scanned with CamScanner

Nobili Nicolás

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta = \pm \frac{\pi}{4} \\ &u = r_0 \qquad (\tau = 0 \wedge v = r_0) \end{aligned}}$$

b) Para que otro valor de θ puede darse el equilibrio

$$\dot{X}_2 = 0 = -\alpha X_1^3 + \sin(X_1) - \cancel{X_2} + (\cancel{v - v_0})$$

$X_2 = X_1 = 0$ $\qquad 0$

$$0 = -\alpha X_1^3 + \sin(X_1) \Rightarrow \alpha X_1^3 = \sin(X_1)$$

- se observa que si $\theta = 0$ $(X_1 = 0)$ se cumple la condición de equilibrio, es decir, $\dot{X} = \bar{0}$

Entonces el sistema estará en equilibrio con $\theta = 0$ $(\dot{\theta} = 0,$ $\tau = 0$, $v = r_0)$

(No planteo todas las ecuaciones de $\dot{X}_j = 0$ ya que son iguales a las del inciso (a))

d) (Resuelto en matlab)

· abajo la explicación teórica

equilibrio $(\theta = \frac{\pi}{4}, \dot{\theta} = 0, z = 0, v = r_0, u = r_0)$

$\dot{x} = 0$ (condición de equilibrio)

$\cdot\ x_e = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \\ r_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \cdot\ u_e = r_0$

$\cdot\ y_e = \frac{\pi}{4}$

Sistema en representación en espacio de estados no lineal $\rightarrow$

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

Linealización

$z = x - x_e$, $i = u - u_e$

$w = y - y_e$

$$\dot{x} = Az + Bi$$
$$y = Cz + Di$$

~~Para analizar la estabilidad~~

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{eq}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_{eq}$$

$$C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{eq}$$

$$D = \left.\frac{\partial g}{\partial i}\right|_{eq}$$

Nobili Nicolás

c) Representacion no lineal en espacio de estados

$$\dot{X} = f(x,u) = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\alpha X_1^3 + \sin(x_1) - X_2^3 + (X_3 - r_0) \\ X_4 \\ -\omega_n^2 X_3 - 2\xi\omega_n X_4 + \omega_n^2 u \end{pmatrix}$$

$$Y = g(x,u) = X_1$$

continuacion d)

- para analizar si el equilibrio es estable o no, analizo los autovalores de la matriz A.

de Matlab:

$$\text{eig}(A) = 1 \times 10^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}0141j \\ -0{,}0141j \\ -4{,}4422 + 4{,}4436j \\ -4{,}4422 - 4{,}4436j \end{pmatrix}$$

Como dos de los autovalores tienen parte real no negativa, el equilibrio es $\boxed{\text{inestable}}$