

Finales de Control Automático I

Índice

1. Final del 14/12/15	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Resolución	2
1.2.1. Ejercicio 1	2
1.2.2. Ejercicio 2	4
1.2.3. Ejercicio 3	6
2. Final de 21/12/15	9
2.1. Enunciado	9
2.2. Resolución	10
2.2.1. Ejercicio 1	10
2.2.2. Ejercicio 2	15
2.2.3. Ejercicio 3	16
3. Final del 06/12/16	19
3.1. Enunciado	19
3.2. Resolución	20
3.2.1. Ejercicio 1	20
3.2.2. Ejercicio 2	22
3.2.3. Ejercicio 3	24
3.2.4. Ejercicio 4	29
4. Final del 20/12/16	31
4.1. Enunciado	31
4.2. Resolución	32
4.2.1. Ejercicio 1	32
4.2.2. Ejercicio 2	36
4.2.3. Ejercicio 3	40
5. Final del 14/02/17	45
5.1. Enunciado	45
A. Ejercicios de final	46
A.1. Ejercicio 1	46
A.2. Ejercicio 2	47
A.3. Ejercicio 3	49
A.4. Ejercicio 4	50
A.5. Ejercicio 5	52
A.6. Ejercicio 6	54

1. Final del 14/12/15

1.1. Enunciado

Departamento de Electrónica - FIUBA
Control Automático I 86.08 / Teoría de Control I 66.18
Examen Final

14/12/2015

Página 1 de 1

Nombre: _____

1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	
10	10	10	10	10	10	20	20	100

Padrón: _____ Hojas Entregadas: _____

Condiciones para aprobar: 60/100

TODAS LAS HOJAS DEBEN TENER NOMBRE, PADRÓN Y ESTAR NUMERADAS

1. Dado el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador de forma tal que los “polos” de la dinamica del error, queden ubicados en $\theta_{1,2} = -1.8 \pm j2.4$.

- Utilizar el método que calcula la transformación a la forma canónica correspondiente.
 - Verificar el resultado.
2. Dada la planta $P(s) = \frac{1}{s-10}$.
- Obtener una realización en espacio de estados.
 - Planta aumentada: Plantear el problema de control por realimentación de estados con acción integral.
 - Calcular la ganancia de la realimentación de estados con acción integral.
 - Calcular la transferencia del controlador.

3. Dado el sistema

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

Suponga que se lo desea controlar a través de un sistema de control digital. Se sabe que la implementación digital de sistemas de control, puede modelarse en tiempo continuo como un retardo de media muestra

$$D_y(s) = e^{-\frac{T}{2}s} = e^{-\tau s}$$

donde T es la tasa de muestreo (sampling rate).

- Determine el tipo de compensación más simple que se puede usar. Sobre la base de esta compensación, elija una frecuencia de cruce de forma tal que pueda obtener un margen de fase de 60° .
- Elija el **sampling rate** más lento posible tal que pueda lograr un margen de fase de al menos 45° .

Sugerencia: Utilice la aproximación de Pade de primer orden para trabajar con el retardo.

$$e^{-\tau s} \approx \frac{2/\tau - s}{2/\tau + s}$$

1.2. Resolución

1.2.1. Ejercicio 1

Un observador es un sistema que permite estimar el vector de estados x a partir de otras señales. De esta forma, es posible diseñar sistemas de control para sistemas donde no se encuentran disponibles todas las variables de estados para ser medidas.

Para poder diseñar un observador, el sistema debe ser observable. Para que esto ocurra, su matriz de observabilidad debe ser de rango n , es decir que debe tener n filas linealmente independientes. En este caso se tiene que $n = 2$, y por ende la matriz de observabilidad es:

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como W_O tiene dos filas linealmente independientes, significa que es de rango $n = 2$, y por ende se trata de un sistema observable. El observador a utilizar es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

La ventaja de este observador es que no solo utiliza la señal de entrada, sino que también utiliza información de la salida. El error del observador es:

$$e = x - \hat{x} \rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})) \\ \dot{e} &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(Cx - C\hat{x}) \\ \dot{e} &= (A - LC)(x - \hat{x}) = (A - LC)e\end{aligned}$$

Por lo tanto, la dinámica del error se encuentra gobernada por $(A - LC)$. De esta forma, eligiendo correctamente la matriz L , es posible colocar los polos en la posición deseada.

El polinomio característico de la planta es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 20,6 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -20,6 \end{cases}$$

El polinomio característico deseado es:

$$p(s) = (s + 1,8 + j2,4)(s + 1,8 - j2,4) = (s + 1,8)^2 + 2,4^2 = s^2 + 3,6s + 9 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 3,6 \\ p_2 = 9 \end{cases}$$

La ganancia del observador L se puede obtener como:

$$L = W_O^{-1} \tilde{W}_O \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

donde \tilde{W}_O es la matriz de observabilidad del sistema en su forma canónica:

$$\tilde{W}_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ganancia del observador resulta:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,6 \\ 29,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar:

$$\begin{aligned}\det(sI - A + LC) &= \det \left(\begin{bmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 29,6 \\ 0 & 3,6 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} s & 9 \\ -1 & s + 3,6 \end{bmatrix} \right) \\ &= s^2 + 3,6s + 9 \rightarrow \text{Es lo buscado } \checkmark\end{aligned}$$

Por lo tanto, el observador diseñado cumple lo pedido.

Al agregar el observador, se debe mostrar la planta aumentada, la cual resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Observación: La transformación a la forma canónica es:

$$T = \tilde{W}_O W_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.2. Ejercicio 2

La planta a analizar es:

$$P(s) = \frac{1}{s-10}$$

Ítem a

Dado que se trata de una planta de orden uno, solo es necesaria una variable de estado:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-10} \rightarrow sY(s) - 10Y(s) = U(s)$$

Aplicando la antitransformada de Laplace se tiene:

$$\dot{y} - 10y = u$$

Utilizando la variable de estado $x = y$, la realización en el espacio de estados es:

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x + u \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 10 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

Ítem b y c

Para poder aplicar un sistema de control integral, es necesario introducir una nueva variable de estado, que represente la integral del error:

$$\dot{z} = y - r = Cx - r$$

donde r es la señal de referencia. La nueva planta aumentada es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Para poder aplicar un sistema de acción integral, la planta aumentada debe ser controlable, es decir que su matriz de controlabilidad sea de rango $n = 2$. La matriz de controlabilidad es:

$$W_r = \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que W_r es de rango $n = 2$, y por ende se trata de un sistema controlable. El controlador a utilizar es:

$$u = -Kx + k_i z + k_r r$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-Kx + k_i z + k_r r)$$

$$\dot{x} = Ax - B \begin{bmatrix} K & -k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + Bk_r r$$

La planta aumentada entonces queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} K & -k_i \end{bmatrix}}_{K_2} \right) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \\ -1 \end{bmatrix} r \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se debe encontrar el vector $K_2 = [K \quad -k_i]$ tal que el sistema quede estabilizado. Asumiendo que se desean mover los polos a $s_{1,2} = -1$, el polinomio característico deseado es:

$$p(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 2 \\ p_2 = 1 \end{cases}$$

El polinomio característico de la planta aumentada es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A_2) = \det \begin{bmatrix} s - A & 0 \\ -C & s \end{bmatrix} = s^2 - As = s^2 - 10s \rightarrow \begin{cases} a_1 = -10 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

La matriz de controlabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación a la forma canónica es:

$$T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ganancia del controlador es:

$$K_2 = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_1] T = [12 \quad 1] \rightarrow \boxed{\begin{cases} K = 12 \\ k_i = -1 \end{cases}}$$

La planta aumentada entonces queda:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_r \\ -1 \end{bmatrix} r \quad y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}}$$

Se puede comprobar que:

$$\det \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 \rightarrow \text{Es lo deseado } \checkmark$$

La ganancia k_r puede ser ajustada en base a otros requerimientos, o incluso podría hacerse $k_r = 0$ para facilitar las cuentas.

Ítem d

Asumiendo $k_r = 0$, la transferencia de la planta se puede obtener como:

$$\begin{aligned} T(s) &= C(sI - A)^{-1} B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} [s \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Por otra parte, se sabe que la transferencia del sistema a lazo cerrado es:

$$T(s) = \frac{PC}{1+PC}$$

Se puede despejar entonces:

$$T + PCT = PC \rightarrow \boxed{C = \frac{T}{P - PT}}$$

Reemplazando las transferencias:

$$\boxed{C(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{s-10} \left(1 - \frac{1}{(s+1)^2}\right)} = \frac{s-10}{s(s+2)}}$$

1.2.3. Ejercicio 3

La planta a analizar es

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} e^{-\frac{T}{2}s}$$

donde $e^{-\frac{T}{2}s}$ es un retardo de media muestra introducido por la implementación digital, y T es la tasa de muestreo. Por la aproximación de Padé, se puede tomar:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{\frac{2}{\tau} - s}{\frac{2}{\tau} + s}$$

Por lo tanto, la planta se puede aproximar como:

$$P(s) \approx \frac{1}{(s+1)(s-1)} \frac{\frac{4}{T} - s}{\frac{4}{T} + s}$$

Se puede ver que se trata de un sistema inestable, ya que presenta un polo en el semiplano derecho.

Ítem a

Dado que el retardo sólo afecta la fase, es posible compensar el sistema sin el retardo, y luego ver como influye el retardo al final. La planta a compensar entonces es:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

En la figura 1.1 se tienen los diagramas de Root Locus de esta planta. En esta figura se puede observar que el sistema resulta inestable para cualquier valor de K , y por ende no es posible utilizar un control proporcional para estabilizar el sistema.

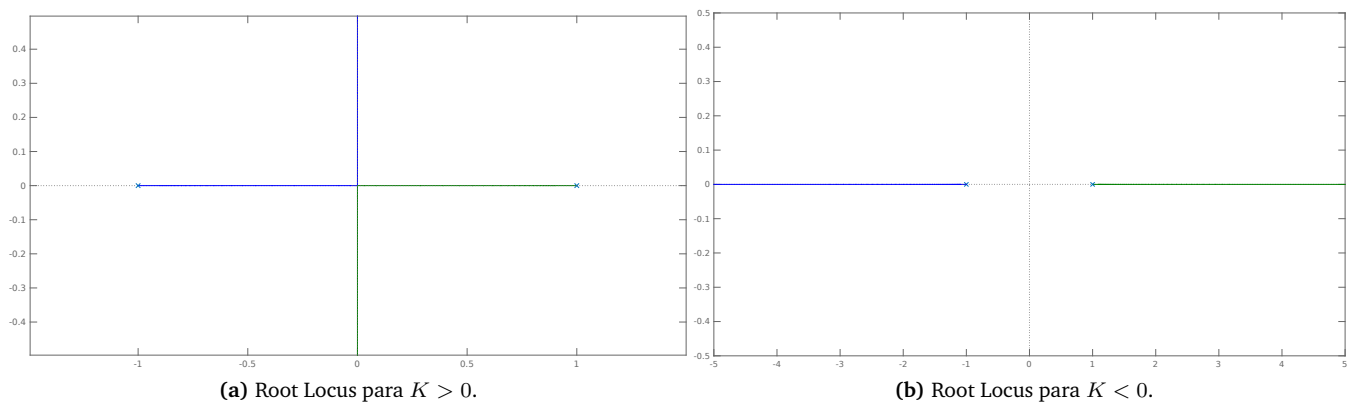


Figura 1.1: Diagramas Root Locus de $P(s)$.

Una forma simple de compensar la planta, es agregando un control PD que cancele el polo estable, mueva el polo inestable hacia el semiplano izquierdo (ver figura 1.2). Por lo tanto, el controlador a utilizar es de la forma:

$$C(s) = K(s+1) \quad K > 0$$

donde el valor de K se debe ajustar para lograr obtener el margen de fase deseado.

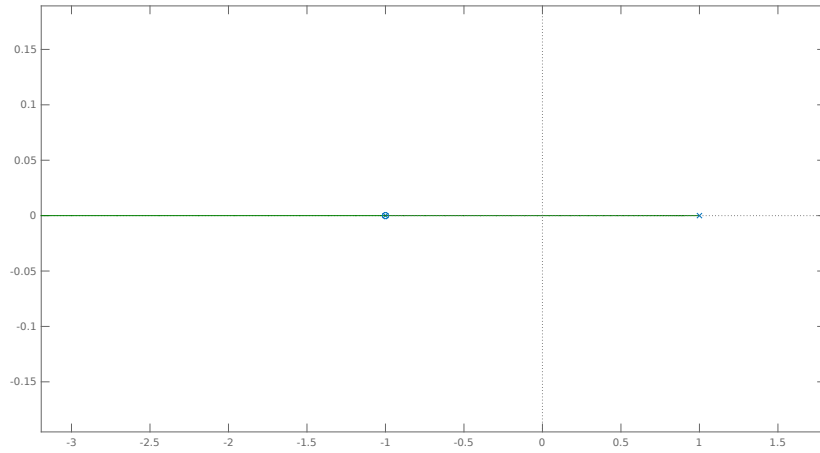


Figura 1.2: Diagrama Root Locus de la planta P junto con un control PD.

La transferencia de la planta resulta:

$$P(s)C(s) = \frac{K}{s-1} \rightarrow T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{K}{s-1+K}$$

Por lo tanto, para que el sistema sea estable, se debe cumplir:

$$-1 + K > 0 \rightarrow \boxed{K > 1}$$

El diagrama de Bode de $P(s)C(s)$ con $K = 1$ se tiene en la figura 1.3.

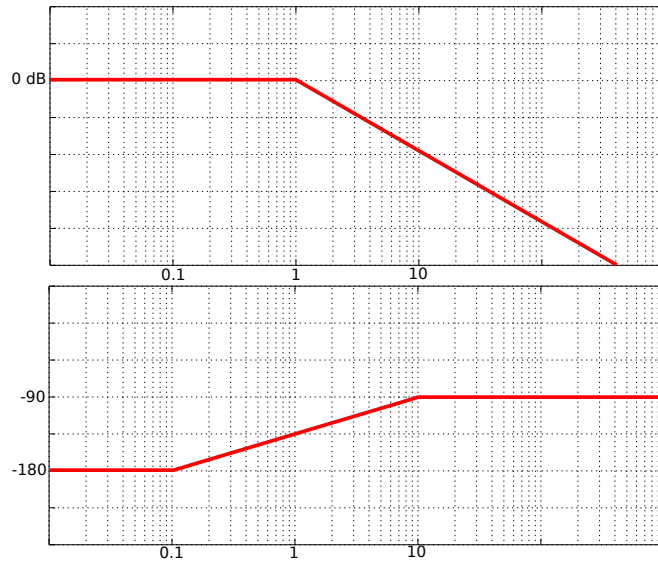


Figura 1.3: Diagrama de Bode de $P(s)C(s)$ con K unitario.

Se puede ver en el diagrama de la figura 1.3 que el margen de fase es nulo. Sin embargo, al aumentar el valor de K , se logra desplazar el diagrama de magnitud hacia arriba, y por ende la frecuencia de cruce hacia las altas frecuencias. De esta forma, se logra ir aumentando el margen de fase.

Para conocer el valor de K , primero se debe conocer la frecuencia en que la fase vale $-180^\circ + 60^\circ = -120^\circ$, que será la nueva frecuencia de cruce:

$$45 \frac{^\circ}{\text{dec}} = \frac{-120^\circ + 180^\circ}{\log(w_{gc}) - \log(0,1)} \rightarrow \boxed{w_{gc} \approx 2,15}$$

Por lo tanto, la ganancia K resulta:

$$-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} = \frac{0 - 20 \log(K)}{\log(w_{gc}) - \log(1)} \rightarrow \boxed{20 \log(K) = 6,64 \text{dB} \rightarrow K = 2,15}$$

La planta completa entonces resulta:

$$\begin{cases} P(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \\ C(s) = 2,15(s+1) \end{cases} \rightarrow P(s)C(s) = \frac{2,15}{s-1}$$

En la figura 1.4 se tiene el diagrama de Bode del sistema completo, donde se puede ver que el margen de fase obtenido es de 60° .

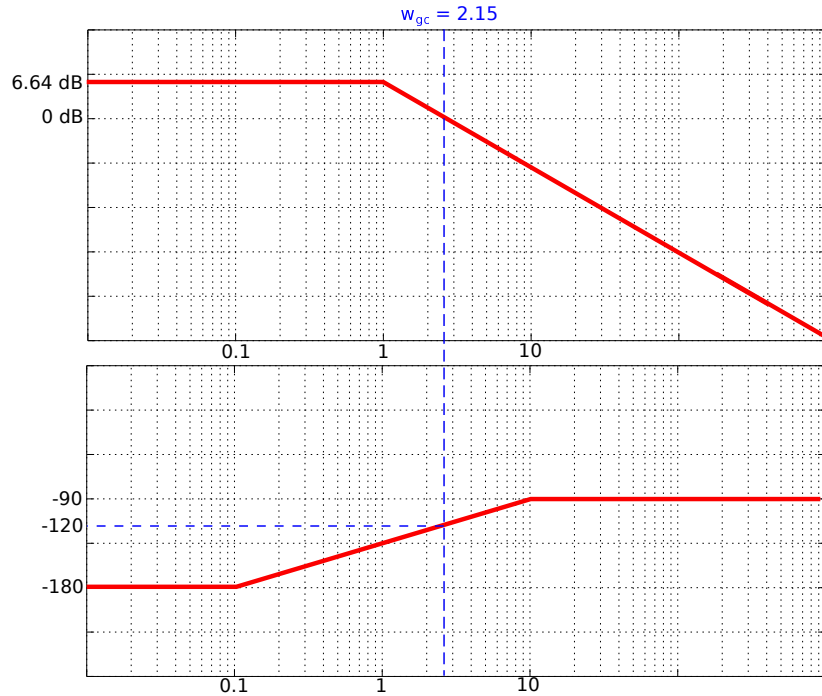


Figura 1.4: Diagrama de Bode de $P(s)C(s)$ con $K = 2,15$.

El retardo de transporte $e^{-\tau s}$ es de módulo unitario, y sólo afecta en la fase:

$$\angle e^{-jw\tau} = -w\tau$$

Por lo tanto, el margen de fase de la planta completa, incluyendo el retardo, se obtiene como:

$$MF = 60^\circ - w_{gc}\tau = 60^\circ - 2,15 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{T}{2} = 60^\circ - 123,18 \frac{^\circ}{\text{s}} \cdot \frac{T}{2}$$

Ítem b

Si se busca el período de muestreo T mínimo tal que el margen de fase sea de 45° , se puede despejar:

$$\underbrace{45^\circ}_{\pi/4} < \underbrace{60^\circ}_{\pi/3} - 2,15 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{T}{2} \rightarrow \boxed{T < 0,243\text{s}}$$

Se puede verificar con Matlab que el resultado obtenido es correcto.

2. Final de 21/12/15

2.1. Enunciado

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA – FIUBA

Control Automático I 86.08 / Teoría de Control I 66.18

FINAL (alumnos 2do cuat. 2015)

21/12/2015

Página 1 de 2

Nombre: _____

1	2	3	
---	---	---	--

Padrón: _____ Hojas Entregadas: _____

Condiciones para aprobar: 60/100

40	40	20	100

TODAS LAS HOJAS DEBEN TENER NOMBRE, PADRÓN Y ESTAR NUMERADAS

1. La dinámica de un sistema esta descripta por el script de Matlab, que sigue:

```
A = [-1 1; -1 -1]
B = [0; 1]
C = [1 0]
D = 0
sistema = ss(A,B,C,D)
```

Se desea:

- Hallar el sistema en su forma canónica controlable (*Reachable* - $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$). Cuanto vale la T de la transformación asociada?
 - Mediante realimentación de estados se desea que el sistema posea un par de polos complejos conjugados en $-2 \pm 2j$.
 - Utilizar un método alternativo al del punto b, para verificar el resultado.
 - Introducir la entrada de referencia y ajustar K_r ($u = -Kx + K_r r$), de forma tal que el sistema tenga error nulo a entradas constantes.
 - Hacer el diagrama en bloques que muestre el sistema realimentado por estados poniendo en evidencia la entrada de referencia, los estados y las constantes de realimentación de estados halladas.
 - Verificar la observabilidad del sistema.
 - Hallar un observador de estados del sistema que posea una dinámica dada por un polo doble $s = -6$.
 - Escribir la expresión del controlador completo, por realimentación de los estados estimados.
 - Hallar la transferencia del controlador $\frac{U(s)}{Y(s)}$ (suponga $r = 0$ para este punto).
 - Realizar un diagrama en bloques que muestre claramente la planta, el controlador, el observador y la referencia rotulando claramente las señales y los bloques.
2. Para el sistema de balance (péndulo invertido con carrito), cuyos parámetros son:

$M = 10$	Masa Carro	$l = 1$	Largo Péndulo
$m = 80$	Masa Péndulo	$J = 100$	Inercia
$g = 9,8$	Gravedad	$J_t = J + ml^2$	Inercia Eq.
$M_t = M + m$	Masa Total		

y cuya dinámica se describe por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_t \ddot{p} - ml \cos \theta \ddot{\theta} &= -ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + F \\ -ml \cos \theta \ddot{p} + J_t \ddot{\theta} &= mgl \sin \theta \end{aligned}$$

siendo $\mu = M_t J_t - m^2 l^2$, p la posición del carrito, θ el ángulo del péndulo y F la fuerza aplicada sobre el carrito. Sea el vector de estados

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, \quad x_1 = p, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \dot{p}, \quad \text{y} \quad x_4 = \dot{\theta}.$$

- (a) Mostrar que la linealización alrededor del punto de equilibrio $x_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ está dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Encontrar los valores de a_{31} , a_{32} , a_{41} , a_{42} , b_3 y b_4 , algunos de los cuales podrían ser cero.

Sugerencia: Linealizar sin pasar por el jacobiano, en base a la hipótesis de ángulo pequeño ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$).

Ayuda:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

- (b) Explicar conceptualmente por qué la función de transferencia $H_{\theta F}$ de la ecuación (1) es de segundo orden. Explicar qué cálculos habría que hacer para verificar lo que sucede.
- (c) Analizar las limitaciones de diseño de la transferencia H_{pF} de la ecuación (1).

$$(1) \quad \frac{\Theta(s)}{F(s)} = H_{\theta F} = \frac{-ml}{\mu s^2 - mglM_t} \qquad \frac{P(s)}{F(s)} = H_{pF} = \frac{J_t s^2 - mgl}{s^2 (\mu s^2 - mglM_t)}$$

3. Dadas las siguientes plantas:

$$P_1(s) = \frac{s-20}{s(s+15)(s-2)} \qquad P_2(s) = \frac{s-1}{s(s+2)(s-10)}$$

6 %

- (a) Calcular las partes de mínima fase y no mínima fase.

14 %

- (b) Evaluar si es posible en alguno de los dos casos, lograr que la parte de no mínima fase introduzca un retardo ϕ_l de 60° ($\pi/3$).

2.2. Resolución

2.2.1. Ejercicio 1

Las matrices que componen el sistema son:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

El polinomio característico del sistema es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + 2s + 2 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

La matriz de controlabilidad del sistema es:

$$W_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dado que W_r es de rango $n = 2$, el sistema es controlable.

Ítem a

Dado que el sistema es controlable, es posible encontrar una transformación T que lleve al sistema a su forma canónica:

$$z = Tx \rightarrow x = T^{-1}z \rightarrow \begin{cases} T^{-1}\dot{z} = AT^{-1}z + Bu \\ y = CT^{-1}z + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = TAT^{-1}z + TBu \\ y = CT^{-1}z + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{A} = TAT^{-1} \\ \tilde{B} = TB \\ \tilde{C} = CT^{-1} \\ \tilde{D} = D \end{cases}$$

La matriz de controlabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación a la forma canónica entonces resulta:

$$TW_r = \tilde{W}_r \rightarrow T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices de la forma canónica resultan entonces:

$$\begin{cases} \tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{D} = D = 0 \end{cases}$$

Ítem b

Se desea que los polos estén en $s = -2 \pm 2j$, es decir que:

$$p(s) = (s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j) = s^2 + 4s + 8 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = 8 \end{cases}$$

Utilizando una realimentación lineal

$$u = -Kx + k_r r$$

el sistema resulta:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bk_r r \\ y = Cx \end{cases}$$

donde K es la ganancia del controlador y r es la señal de referencia. De esta forma, la matriz $A - BK$ determina la dinámica del sistema, y eligiendo correctamente el vector K es posible ubicar los polos en la posición deseada. La ganancia del controlador entonces resulta:

$$K = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que:

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 5 & s+3 \end{bmatrix}\right) \\ &= (s+1)(s+3) + 5 \\ &= s^2 + 4s + 8 \rightarrow \text{Es lo deseado } \checkmark \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector K hallado cumple con lo pedido.

Ítem c

Otra forma de obtener el vector K es mediante la fórmula de Ackerman:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} W_r^{-1} p(A) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (A^2 + 4A + 8I) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Es el mismo de antes } \checkmark \end{aligned}$$

Ítem d

Se pide ajustar el valor de k_r , tal que el error de estado estacionario sea nulo. Como el sistema está en equilibrio, se puede escribir:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bk_r r = 0 \\ y = Cx = r \end{cases} \rightarrow x = -(A - BK)^{-1} Bk_r r$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} r &= y = Cx = -C(A - BK)^{-1} Bk_r r \\ r' &= -C(A - BK)^{-1} Bk_r r' \end{aligned}$$

Finalmente se puede despejar:

$$k_r = -\frac{1}{C(A - BK)^{-1} B}$$

Reemplazando los valores se tiene:

$$\begin{aligned} k_r^{-1} &= -C(A - BK)^{-1} B \\ k_r^{-1} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ k_r^{-1} &= -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ k_r^{-1} &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

De esta forma, el valor de k_r que hace que el error de estado estacionario sea nulo es:

$$k_r = 8$$

Ítem e

En la figura 2.1 se tiene el diagrama en bloques del sistema realimentado.

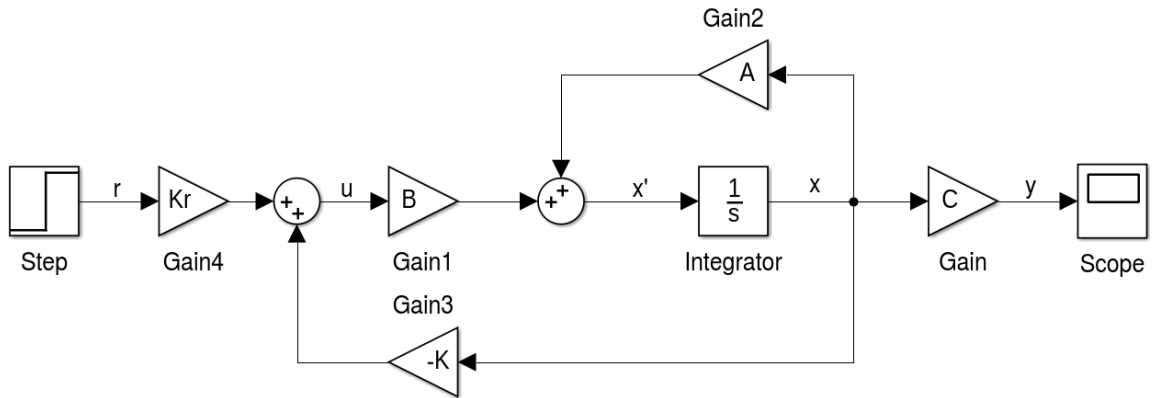


Figura 2.1: Diagrama en bloques del sistema realimentado.

Ítem f

Dado que no siempre se tienen todos los estados disponibles para diseñar un sistema de control, es necesario utilizar un observador para estimar aquellos estados no conocidos.

Para que el sistema sea observable, su matriz de observabilidad debe ser de rango $n = 2$, es decir que deben haber $n = 2$ filas linealmente independientes. La matriz de observabilidad es:

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que W_O es de rango $n = 2$, se puede asegurar que el sistema es observable.

Ítem g

El observador a utilizar es de la forma:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Este observador utiliza información tanto de la entrada como de la salida del sistema para estimar el estado. El error del observador es:

$$e = x - \hat{x}$$

Por lo tanto, se puede plantear:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} &= Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})) \\ \dot{e} &= (A - LC)e\end{aligned}$$

De esta forma, la dinámica del observador se encuentra gobernada por $A - LC$. La ganancia del observador L se puede obtener como:

$$L = W_O^{-1} \tilde{W}_O \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico deseado es:

$$p(s) = (s + 6)^2 = s^2 + 12s + 36 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 12 \\ p_2 = 36 \end{cases}$$

La matriz de observabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ganancia del observador es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 - 2 \\ 36 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que:

$$\begin{aligned}\det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s+11 & -1 \\ 25 & s+1 \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= (s+11)(s+1) + 25 \\ \det(sI - A + LC) &= s^2 + 12s + 36 \rightarrow \text{Es lo deseado } \checkmark\end{aligned}$$

Dado que la dinámica del error está gobernada por los polos $s_{1,2} = -6$, se tiene que el error tenderá a cero a medida que pase el tiempo, es decir que el estado observado \hat{x} tenderá al estado verdadero x . Por lo tanto, es posible diseñar sistemas de control que utilice la información de este observador. En la figura 2.2 se tiene un diagrama en bloques para este sistema.

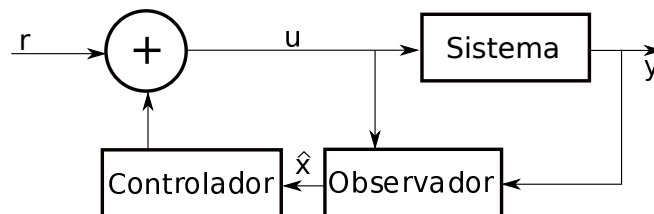


Figura 2.2: Diagrama en bloques del sistema junto con su observador y controlador.

Ítem h

Para escribir el nuevo sistema es necesario aumentar la planta, ya que se debe introducir la nueva variable de estado: El vector de estados estimado \hat{x} . Dado que ahora el controlador utiliza los estados estimados para la realimentación, se puede escribir:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu = A\hat{x} + B(-K\hat{x} + k_r r)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B(-K(x - e) + k_r r)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK)\hat{x} + BKe + Bk_r r$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \\ 0 \end{bmatrix} r \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la planta aumentada es:

$$\lambda_2(s) = \det(sI - A + BK) \det(sI - A + LC) = (s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j)(s + 6)^2 \rightarrow \text{Es lo deseado } \checkmark$$

Ítem i

Suponiendo $r = 0$, se tiene que:

$$u = -K\hat{x} = -K(x - e) \xrightarrow{\mathcal{L}} U = -K(X - E)$$

Al reemplazar en la ecuación de estados, se tiene:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu = A\hat{x} + B(-K(x - e)) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX = AX - BKX + BKE \rightarrow X = \frac{BKE}{sI - A + BK}$$

Aplicando el mismo procedimiento para el error del observador:

$$\dot{e} = (A - LC)e \xrightarrow{\mathcal{L}} sE = (A - LC)E \rightarrow E = \frac{1}{sI - A + LC} \rightarrow X = \frac{BK}{(sI - A + BK)(sI - A + LC)}$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$\begin{cases} Y = CX = \frac{CBK}{(sI - A + BK)(sI - A + LC)} \\ U = -K(X - E) = -\frac{K}{sI - A + LC} \left(\frac{BK}{sI - A + BK} - 1 \right) = \frac{K(sI - A)}{(sI - A + BK)(sI - A + LC)} \end{cases}$$

Finalmente se tiene:

$$\frac{U}{Y} = \frac{K(sI - A)}{CBK} = C^{-1}(sI - A)B^{-1}$$

lo cual era esperable, ya que $\frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B$. Reemplazando los datos del ejercicios se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{U} &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transferencia buscada es:

$$\frac{U}{Y} = s^2 + 2s + 2 = (s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j) \rightarrow \text{Era lo deseado } \checkmark$$

Ítem j

En la figura 2.3 se tiene el diagrama en bloques del sistema completo.

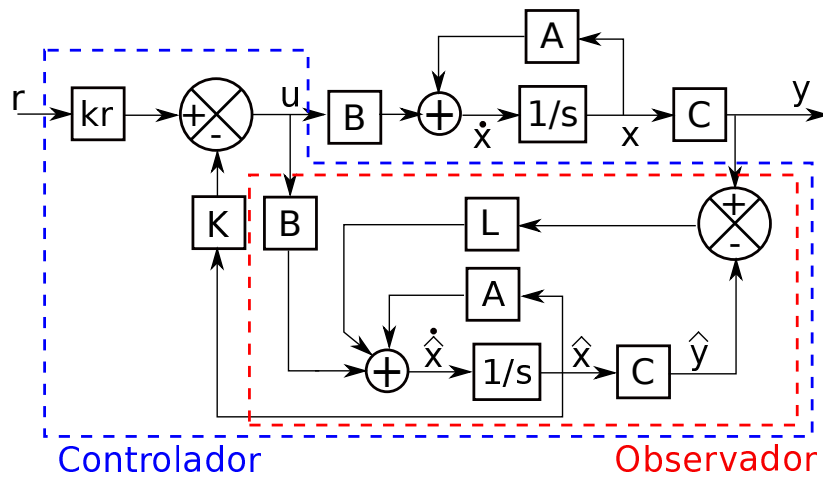


Figura 2.3: Diagrama en bloques del sistema con realimentación de estados estimados.

2.2.2. Ejercicio 2

Ítem 1

El vector de estados de la planta es:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Para poder linealizar, se tomarán las siguientes aproximaciones en el punto de equilibrio:

$$x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sin(\theta) \approx \theta \\ \cos(\theta) \approx 1 \\ \dot{\theta}^2 \approx 0 \end{cases}$$

De esta forma, el sistema de ecuaciones se puede reescribir como:

$$\begin{cases} M_t \ddot{p} - m\ell \ddot{\theta} = F \\ -m\ell \ddot{p} + J_t \ddot{\theta} = mgl\theta \end{cases}$$

De la primer ecuación se puede despejar:

$$\ddot{p} = \frac{1}{M_t} (F + m\ell \ddot{\theta})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -m\ell \frac{1}{M_t} (F + m\ell \ddot{\theta}) + J_t \ddot{\theta} &= mgl\theta \\ -\frac{m\ell}{M_t} F - \frac{m^2 \ell^2}{M_t} \ddot{\theta} + J_t \ddot{\theta} &= mgl\theta \\ \ddot{\theta} &= \frac{M_t mgl}{M_t J_t - m^2 \ell^2} \theta + \frac{m\ell}{M_t J_t - m^2 \ell^2} F \\ \ddot{\theta} &= \frac{M_t mgl}{\mu} \theta + \frac{m\ell}{\mu} F \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\ddot{p} &= \frac{1}{M_t} \left(F + m\ell \left(\frac{M_t m g \ell}{M_t J_t - m^2 \ell^2} \theta + \frac{m\ell}{M_t J_t - m^2 \ell^2} F \right) \right) \\ \ddot{p} &= \frac{g m^2 \ell^2}{M_t J_t - m^2 \ell^2} \theta + \frac{J_t}{M_t J_t - m^2 \ell^2} F \\ \ddot{p} &= \frac{g m^2 \ell^2}{\mu} \theta + \frac{J_t}{\mu} F\end{aligned}$$

Este sistema escrito de forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g m^2 \ell^2}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_t m g \ell}{\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_t}{\mu} \\ \frac{m\ell}{\mu} \end{bmatrix} F \rightarrow \begin{cases} a_{31} = 0 \\ a_{41} = 0 \\ a_{32} = \frac{g m^2 \ell^2}{\mu} \\ a_{42} = \frac{M_t m g \ell}{\mu} \\ b_3 = \frac{J_t}{\mu} \\ b_4 = \frac{m\ell}{\mu} \end{cases}$$

Ítem 2

PREGUNTAR

Ítem 3

PREGUNTAR

2.2.3. Ejercicio 3

Las plantas a analizar son:

$$P_1(s) = \frac{s - 20}{s(s + 15)(s - 2)} \quad P_2(s) = \frac{s - 1}{s(s + 2)(s - 10)}$$

Si todos los polos y ceros de un sistema se encuentran en el semiplano izquierdo, el sistema se denomina de **fase mínima**. La función de transferencia de un sistema se puede factorizar como:

$$P(s) = P_{mp}(s) \cdot P_{ap}(s)$$

donde $P_{mp}(s)$ es la función de transferencia de fase mínima y $P_{ap}(s)$ es la parte de fase no mínima. La factorización se debe hacer de forma tal que $|P_{ap}(j\omega)| = 1$, y el signo debe ser tal que $P_{ap}(s)$ tenga fase negativa. Dado que $P_{ap}(s)$ presenta ganancia unitaria en módulo, se trata de un sistema pasa todo (*all pass*)

Ítem 1

La primer planta se puede factorizar como:

$$P_1(s) = P_{mp1}(s) P_{ap1}(s) = \underbrace{\left(-\frac{(s + 20)}{s(s + 15)(s + 2)} \right)}_{P_{mp1}(s)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{(s - 20)(s + 2)}{(s + 20)(s - 2)} \right)}_{P_{ap1}(s)}$$

La segunda planta se puede factorizar como:

$$P_2(s) = P_{mp2}(s) P_{ap2}(s) = \underbrace{\frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 10)}}_{P_{mp2}(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s - 1)(s + 10)}{(s + 1)(s - 10)}}_{P_{ap2}(s)}$$

Ítem 2

Lo que se busca es saber si es posible encontrar un controlador tal que el retardo de P_{ap} sea de 60° . Si a una planta $P(s)$ se le aplica un controlador $C(s)$, su argumento en la frecuencia de cruce de la ganancia w_{gc} resulta:

$$\arg(P(jw_{gc})C(jw_{gc})) = \arg(P_{mp}(jw_{gc})) + \arg(P_{ap}(jw_{gc})) + \arg(C(jw_{gc}))$$

Lo que se busca entonces es:

$$\arg(P(jw_{gc})C(jw_{gc})) = \arg(P_{mp}(jw_{gc})) + \arg(P_{ap}(jw_{gc})) + \arg(C(jw_{gc})) \geq -\pi + \phi_m$$

donde ϕ_m es el margen de fase deseado. De acuerdo con Bode, se sabe que si se tiene un sistema de fase mínima, entonces se cumple que:

$$\arg(P_{mp}(jw_{gc})) \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log(P_{mp}(jw_{gc}))}{d \log(w)}$$

es decir que el diagrama de fase puede ser determinado a partir de la derivada del diagrama de magnitud. Por lo tanto, dado que el controlador introducido es de fase mínima, se puede escribir:

$$\arg(P_{mp}(jw_{gc})) + \arg(C(jw_{gc})) \approx \frac{\pi}{2} n_{gc}$$

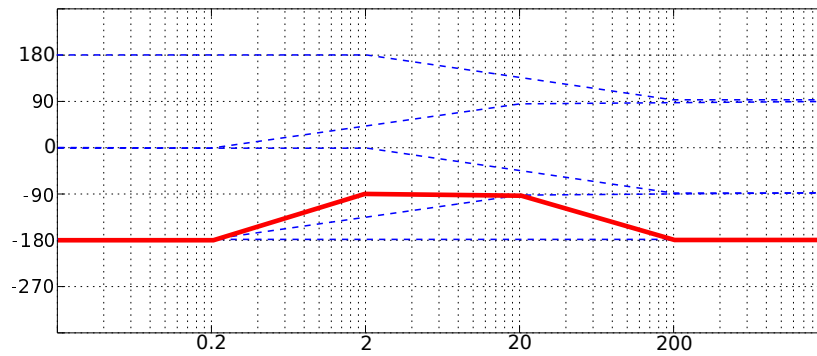
donde n_{gc} es la pendiente del diagrama de magnitud en la frecuencia de cruce de la ganancia. De esta forma:

$$\arg(P_{ap}(jw_{gc})) + \frac{\pi}{2} n_{gc} \geq -\pi + \phi_m \rightarrow -\arg(P_{ap}(jw_{gc})) \leq \pi + \frac{\pi}{2} n_{gc} - \phi_m = \phi_\ell$$

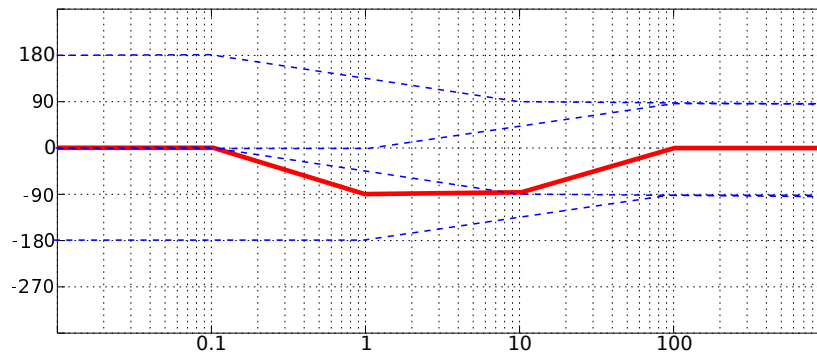
donde ϕ_ℓ es el retardo (lag) introducido por la parte de fase no mínima. Lo que se pide en este ejercicio es verificar si es posible que:

$$-\arg(P_{ap}(jw_{gc})) \leq \phi_\ell = 60^\circ$$

Por lo tanto, es necesario trazar los diagramas de fase de los sistemas de fase no mínima y verificar si alguno cumple dicha condición. En la figura 2.4 se tienen dichos diagramas de Bode.



(a) Diagrama de fase de $P_{ap1}(s)$.



(b) Diagrama de fase de $P_{ap2}(s)$.

Figura 2.4: Diagramas de fase de $P_{ap1}(s)$ y $P_{ap2}(s)$.

Se puede ver en la figura 2.4 que:

$$-\arg(P_{ap1}(s)) \geq 90^\circ \qquad -\arg(P_{ap2}(s)) \leq 90^\circ$$

Por lo tanto, se tiene que en el caso de $P_2(s)$, es posible lograr un retardo menor que 60° , siempre y cuando se elija correctamente la frecuencia de cruce de la ganancia.

3. Final del 06/12/16

3.1. Enunciado

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA – FIUBA

Control Automático I 86.08 / Teoría de Control I 66.18

Examen Final

06/12/2016

Página 1 de 1

Nombre: _____

Padrón: _____ Hojas Entregadas: _____

Condiciones para aprobar: 60/100

1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	
10	10	10	10	10	10	20	20	100

TODAS LAS HOJAS DEBEN TENER NOMBRE, PADRÓN Y ESTAR NUMERADAS

1. Dado el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diseñar un observador de forma tal que los “polos” de la dinámica del error, queden ubicados en $\mu_{1,2} = -1,8 \pm j2,4$.

- Utilizar el método que calcula la transformación a la forma canónica correspondiente.
- Verificar el resultado.

2. Dada la planta por sus matrices en espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- Obtener la transferencia.
- Obtener la realimentación de estados para ubicar polos en -2,-2.
- Planta aumentada: Plantear el problema de control por realimentación de estados con acción integral.
- Calcular si es posible la ganancia de la realimentación de estados con acción integral.

Los problemas de ubicación de polos deben resolverse hallando la transformación a la forma canónica correspondiente. De lo contrario no valen.

3. Compensar el lazo

$$P(s) = \frac{(s-10)}{(s-1)s}$$

Margen de fase mejor que 40° .

4. (I) Dada una planta que tiene un cero de fase no mínima en $s = \gamma$ con $\gamma > 0$. Suponga que el cero en cuestión es cancelado a través de un polo del controlador ubicado exactamente en $s = \gamma$.

Contestar Verdadero o Falso sobre cada una de las siguientes afirmaciones desarrollando la fundamentación¹.

- El sistema es internamente estable.
- $s = \gamma$ es un polo del lazo abierto $L(s)$.
- $s = \gamma$ es un polo de todas las transferencias de lazo cerrado (grupo de las cuatro).
- $s = \gamma$ es un polo de al menos una de las transferencias de lazo cerrado (grupo de las cuatro).
- $s = \gamma$ es un polo de solo una de las transferencias de lazo cerrado (grupo de las cuatro).

(II) Dada una planta que tiene un polo en el origen. Contestar Verdadero o Falso y desarrollar:

- El sistema a lazo cerrado presenta error nulo en estado estacionario a perturbaciones de entrada constantes.

¹Fundamentación incorrecta hace incorrecta la respuesta, sin importar que esté bien contestado el V ó F.

3.2. Resolución

3.2.1. Ejercicio 1

El sistema a analizar es:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de esta planta es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 20,6 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -20,6 \end{cases}$$

Se puede ver que se trata de un sistema inestable.

Para poder diseñar un observador, es necesario primero verificar que el sistema sea observable. Para que esto sea posible, la matriz de observabilidad del sistema debe ser de rango n , es decir que debe presentar n filas linealmente independientes. Siendo $n = 2$, la matriz de observabilidad es:

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \rightarrow W_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que la matriz de observabilidad es de rango 2, y por ende el sistema es observable. El observador a utilizar no solamente recibe como entrada la señal de entrada al sistema, sino que también utiliza información de la salida:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$

Lo que se pide es encontrar un observador tal que su dinámica del error esté gobernada por los polos en $\mu_{1,2} = -1,8 \pm j2,4$. El polinomio característico buscado es:

$$p(s) = (s + 1,8 + j2,4)(s + 1,8 - j2,4) = s^2 + 3,6s + 9 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 3,6 \\ p_2 = 9 \end{cases}$$

El error del observador es:

$$e = x - \hat{x}$$

Por lo tanto, se puede plantear:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})) \\ \dot{e} &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(Cx - C\hat{x}) \\ \dot{e} &= (A - LC)(x - \hat{x}) = (A - LC)e \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz $A - LC$ será la que determine la dinámica del error. De esta forma, es necesario encontrar la matriz L que hace que los polos del error se ubiquen en la posición deseada. Esta matriz puede ser hallada como:

$$L = W_O^{-1} \tilde{W}_O \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

donde la matriz \tilde{W}_O es la matriz de observabilidad de la forma canónica:

$$z = Tx \rightarrow \tilde{W}_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación que permite llevar al sistema a su forma canónica entonces es:

$$TW_O = \tilde{W}_O \rightarrow T = \tilde{W}_O W_O^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La ganancia del observador entonces resulta:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,6 \\ 9 + 20,6 \end{bmatrix} \rightarrow L = \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar entonces:

$$\begin{aligned}\det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 29,6 \\ 0 & 3,6 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 9 \\ -1 & s + 3,6 \end{bmatrix}\right) \\ &= s^2 + 3,6s + 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz L hallada cumple con las especificaciones pedidas.

La planta completa resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Otra forma de resolver este problema, es utilizando la propiedad de dualidad. Este principio afirma que si un sistema es observable (controlable), entonces su sistema dual es controlable (observable). Por lo tanto, se tienen las siguientes equivalencias:

$$A \rightarrow A^H \quad B \rightarrow C^H \quad L \rightarrow K^H \quad W_O \rightarrow W_r^H$$

El sistema dual entonces es:

$$\dot{x}_2 = A^H x_2 + C^H v \quad y_2 = B^H x_2$$

El polinomio característico de este sistema es:

$$\lambda_2(s) = \det(sI - A^H) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{bmatrix} = s^2 + 20,6 = \lambda_1(s)$$

La matriz de controlabilidad es:

$$W_r = \begin{bmatrix} C^H & A^H C^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = W_O^H$$

Dado que la matriz de controlabilidad es de rango 2, el sistema es controlable. La matriz de controlabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación a la forma canónica es:

$$T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El controlador a utilizar es:

$$u = -Kx_2$$

donde

$$K = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 3,6 & 29,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que

$$K = L^H$$

y por ende ya se tiene diseñado el observador deseado. Para el caso del controlador, se puede verificar que:

$$\dot{x}_2 = A^H x_2 + C^H v = A^H x_2 + C^H K x_2 = (A^H - C^H K) x_2$$

Por lo tanto, los autovalores de $A^H - C^H K$ deben coincidir con los polos deseados para que el diseño sea correcto:

$$\begin{aligned}\det(sI - A^H + C^H K) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 29,6 & 3,6 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 9 & s + 3,6 \end{bmatrix}\right) \\ &= s^2 + 3,6s + 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, tanto la ganancia K del controlador del sistema dual, como la ganancia L del observador, cumplen con la condición pedida.

3.2.2. Ejercicio 2

Ítem a

El sistema a analizar es:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la planta es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

La transferencia de este sistema se puede obtener como:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + \mathcal{D}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} T(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, la transferencia del sistema resulta:

$$T(s) = \frac{2s}{(s+1)^2}$$

Ítem b

Para poder ubicar los polos en cualquier posición deseada, el sistema debe ser controlable, es decir que su matriz de controlabilidad sea de rango n . La matriz de controlabilidad es:

$$W_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dado que W_r tiene dos filas linealmente independientes, el sistema es controlable. El controlador a utilizar es:

$$u = -Kx + k_r r$$

donde r es una señal de referencia. La planta realimentada resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(-Kx + k_r r) \\ \dot{x} &= (A - BK)x + Bk_r r \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema realimentado está gobernada por la matriz $A - BK$, y por ende encontrando la ganancia K correcta, será posible ubicar los polos en la posición deseada.

El polinomio característico deseado es:

$$p(s) = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = 4 \end{cases}$$

La ganancia del controlador se puede obtener mediante:

$$K = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 \end{bmatrix} T$$

donde T es la transformación que lleva al sistema a su forma canónica. La matriz de controlabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación a la forma canónica entonces es:

$$T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ganancia del controlador es:

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que:

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1/2 & 9/2 \\ -1/2 & s+7/2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(sI - A + BK) = (s+1/2)(s+7/2) + 9/4 = s^2 + 4s + 4$$

Se puede ver que la ganancia K hallada permite ubicar los polos en la posición deseada. En la figura 3.1 se tiene el diagrama en bloques de la planta realimentada.

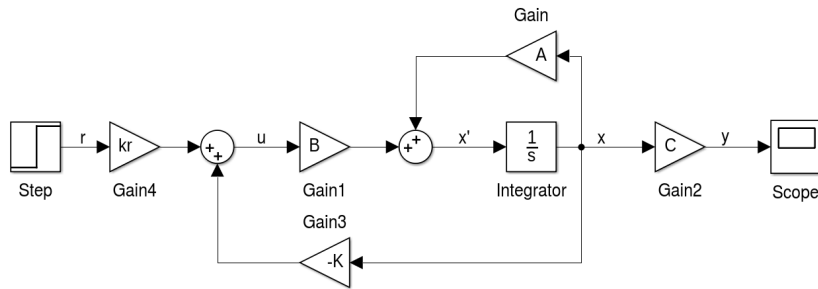


Figura 3.1: Diagrama en bloques de la planta controlada.

Ítem c

Un controlador con acción integral es de la forma:

$$u = -Kx + k_i z + k_r r$$

donde z es la integral del error:

$$\dot{z} = y - r = Cx - r$$

Por lo tanto, es necesario aumentar la planta, introduciendo esta nueva variable de estado. La planta aumentada entonces es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Para que a esta planta se le pueda hacer un control con acción integral, debe ser controlable. Su matriz de controlabilidad resulta:

$$W_r = \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 & A_2^2 B_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 B_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ A_2^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ A_2^2 B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La matriz de controlabilidad es:

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(W_r) = 0$$

Dado que el determinante de esta matriz es nulo, significa que tiene filas linealmente dependientes. Por esta razón, dado que no es de rango $n = 3$, la planta aumentada no es controlable, y por ende no es posible utilizar un controlador con acción integral. Esto era esperable ya que la transferencia presenta un cero en el origen.

3.2.3. Ejercicio 3

La planta que se desea compensar es:

$$P(s) = \frac{s-10}{s(s-1)}$$

Se puede ver que se trata de un sistema inestable, ya que presenta un polo en el semiplano derecho.

Una forma de resolverlo, es dividiendo la planta en dos plantas diferentes: una de fase mínima y otra de fase no mínima. La de fase no mínima debe ser tal que su argumento sea negativo y su módulo unitario.

$$P(s) = P_{mp}(s) P_{ap}(s) = \left(-\frac{1}{s} \frac{s+10}{s+1} \right) \left(-\frac{s-10}{s-1} \frac{s+1}{s+10} \right) \rightarrow \boxed{\begin{cases} P_{mp}(s) = -\frac{1}{s} \frac{s+10}{s+1} \\ P_{ap}(s) = -\frac{s-10}{s+10} \frac{s+1}{s-1} \end{cases}}$$

Se puede ver que el sistema de fase mínima se encuentra compuesto por la aproximación de Padé de dos retardos de transporte. De esta forma, lo que se debe hacer es compensar la planta de fase mínima para que sea estable y tenga el margen de fase deseado, pero siempre teniendo en cuenta el retardo introducido por la parte de fase no mínima.

Al aplicar un controlador $C(s)$ al sistema, el argumento resulta:

$$\arg(P(s)C(s)) = \arg(C(s)) + \arg(P_{mp}(s)) + \arg(P_{ap}(s)) \geq -\pi + \phi_m$$

donde ϕ_m es el margen de fase deseado. Por Bode se sabe que un sistema de fase mínima permite caracterizar su fase a partir de la derivada de la magnitud. Por lo tanto, en la frecuencia de cruce de la ganancia se cumple que:

$$\arg(C(s)) + \arg(P_{mp}(s)) \approx n_{gc} \frac{\pi}{2}$$

donde n_{gc} es la pendiente del diagrama de magnitud en la frecuencia de cruce de la ganancia w_{gc} . Introduciendo esta condición, se debe cumplir entonces:

$$\boxed{-\arg(P_{ap}(s)) \leq \pi - \phi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2} = \phi_\ell}$$

donde ϕ_ℓ es el atraso de fase (phase lag). En la figura 3.2 se tiene el diagrama de fase de $P_{ap}(s)$.

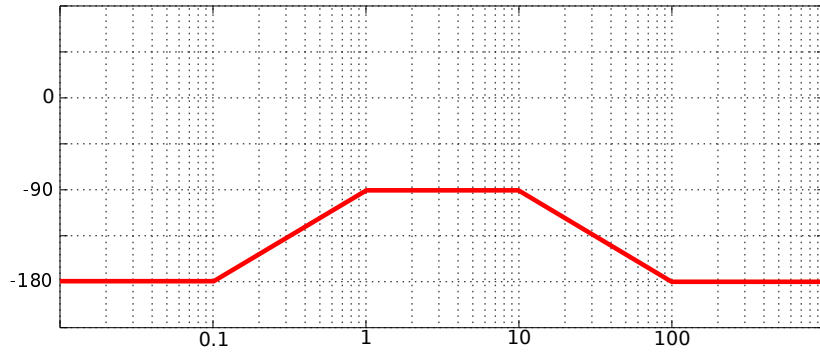


Figura 3.2: Diagrama de fase de $P_{ap}(s)$.

Se puede ver en la figura 3.2 que

$$-\arg(P_{ap}(s)) \geq 90^\circ \rightarrow \boxed{\phi_\ell \geq 90^\circ}$$

De esta forma, será necesario compensar mucho a $P_{mp}(s)$ para que este retardo no afecte demasiado. Dado que se desea un margen de fase de 40° , y se tiene un lag superior a los 90° , es necesario compensar para que $C(s)P_{mp}(s)$ tenga un margen de fase superior a $40^\circ + 90^\circ = 130^\circ$. Se va a elegir un compensador tal que el margen de fase de $C(s)P_{mp}(s)$ sea de 150° .

La planta de fase mínima en función de jw es:

$$P_{mp}(s) = -\frac{s+10}{s(s+1)} \rightarrow P_{mp}(jw) = -\frac{jw+10}{jw(jw+1)} \rightarrow |P_{mp}(jw)| = \frac{w\sqrt{w^4+101w^2+100}}{w^4+w^2}$$

La frecuencia donde $|P_{mp}(jw)| = 1$, es decir donde $20 \log(|P_{mp}(jw)|) = 0\text{dB}$, se obtiene como:

$$\begin{aligned} \frac{w\sqrt{w^4+101w^2+100}}{w^4+w^2} &= 1 \\ \sqrt{w^4+101w^2+100} &= w^3+w \\ w^4+101w^2+100 &= w^6+w^2+2w^4 \\ w^6+w^4-100w^2-100 &= 0 \end{aligned}$$

La raíz real y positiva resulta:

$$\boxed{w_{gc} = \sqrt{10} \approx 3,16}$$

El diagrama de Bode de $-P_{mp}(s)$ ¹ se puede ver en la figura 3.3.

¹El cambio de signo se introduce para tener un margen de fase positivo.

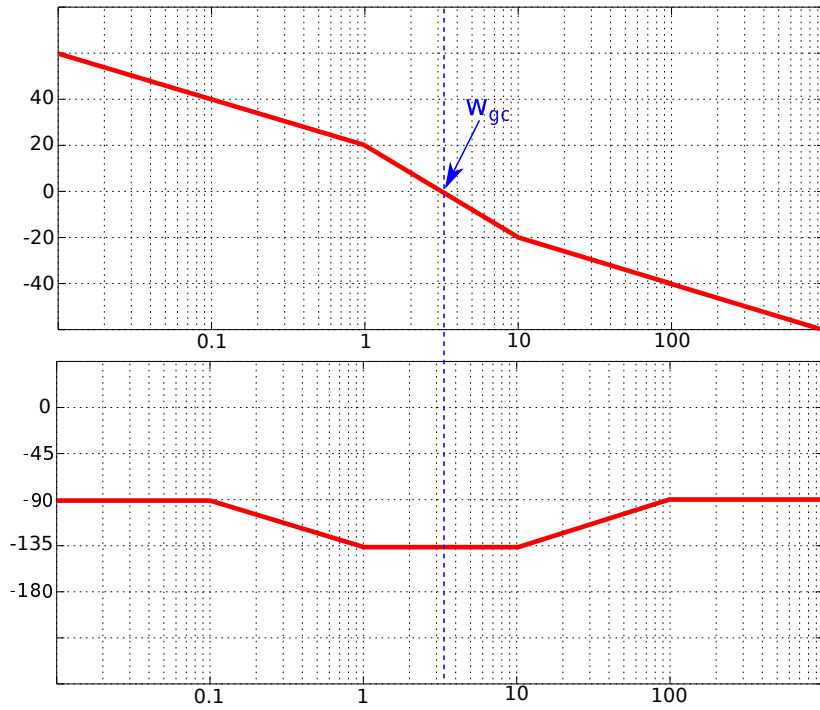


Figura 3.3: Diagrama de Bode de $-P_{mp}(s) = \frac{s+10}{s(s+1)}$.

El margen de fase del diagrama de la figura 3.3 es

$$\phi_m = 180^\circ + \arg(-P_{mp}(jw_{gc})) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Por lo tanto, la fase requerida por el controlador es:

$$\psi_m + 45^\circ = 150^\circ \rightarrow \boxed{\psi_m = 105^\circ}$$

Una forma de lograr esto es utilizando compensadores de adelanto. Dado que un compensador de adelanto puede desplazar como máximo 60° la fase, será necesario utilizar dos compensadores en cascada. Un compensador de adelanto es de la forma:

$$G_C(s) = \alpha \frac{s + 1/\alpha T}{s + 1/T} \quad \alpha > 1$$

La fase requerida por cada compensador es:

$$\phi_{max} = \frac{105}{2} = 52,5^\circ$$

La ganancia entonces es:

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\phi_{max})}{1 - \sin(\phi_{max})} \approx 8,67$$

Como se van a colocar dos compensadores en cascada, se debe buscar la frecuencia donde la ganancia vale

$$-20 \log(\alpha) \approx -18,76 \text{ dB}$$

Esto ocurre en:

$$-40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} = \frac{-18,76 \text{ dB} - 0}{\log(w_{max}) - \log(w_{gc})} \rightarrow \boxed{w_{max} \approx 9,31}$$

La constante T resulta:

$$w_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \rightarrow \boxed{T \approx 0,0365}$$

El compensador entonces es:

$$G_C(s) = 8,67 \frac{s + 3,16}{s + 27,4}$$

El sistema de fase mínima junto al controlador resulta:

$$-P_{mp}(s) G_C(s)^2 = \frac{s+10}{s(s+1)} \left(8,67 \frac{s+3,16}{s+27,4} \right)^2 = 75,17 \frac{s+10}{s(s+1)} \left(\frac{s+3,16}{s+27,4} \right)^2$$

En la figura 3.4 se tiene el diagrama de Bode de este nuevo sistema.

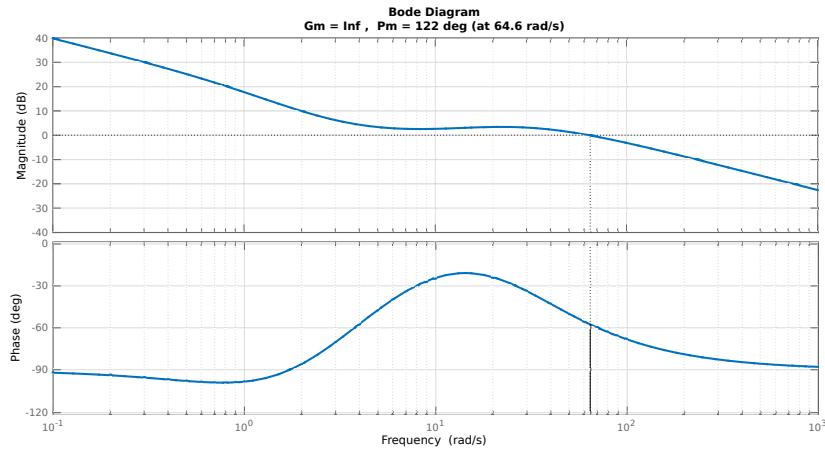


Figura 3.4: Diagrama de Bode de $-P_{mp}(s)$ con un compensador de adelanto.

Se puede ver que se obtuvo un margen de fase de 122° y la que la nueva frecuencia de cruce es en $w_{gc} = 64,6$. Sin embargo, en esta nueva frecuencia de cruce, el lag introducido es aproximadamente de

$$-90 = \frac{\arg(P_{ap}) + 90}{\log(64,6) - \log(10)} \rightarrow \arg(P_{ap}) \approx -163^\circ$$

El margen de fase resultante del sistema completo es de -40° , lo cual no cumple con lo pedido. Esto se debe a que los compensadores de adelanto desplazaron demasiado la frecuencia de cruce, llevándola a un valor donde el argumento del sistema de fase no mínima era mayor. Para evitar esto, es necesario ajustar la ganancia proporcional del compensador, para lograr bajar la frecuencia de cruce. Probando con Matlab, se logró un margen de fase de 56° utilizando el siguiente controlador:

$$G_C(s)^2 = 50 \left(\frac{s+3,16}{s+27,4} \right)^2$$

La planta completa a lazo abierto resulta:

$$P(s) C(s) = -50 \frac{s+10}{s(s+1)} \frac{s-10}{s+10} \frac{s+1}{s-1} \left(\frac{s+3,16}{s+27,4} \right)^2 \rightarrow \boxed{MF = 56^\circ} \rightarrow \text{cumple } \checkmark$$

Dado que en el examen no es posible andar dibujando diagramas hasta que uno sea el correcto, se va a encarar el ejercicio con otro enfoque.

Una forma de compensar esta planta sin tener problemas con las variaciones en el lag, es utilizar un compensador que no modifique la frecuencia de cruce de la ganancia. De esta forma, siempre se cumplirá que $-\arg(P_{ap}(s)) = 90^\circ$, y por ende la fase necesaria será de 130° . Se puede ver en la figura 3.3 que si se logra invertir el diagrama de fase, se podrá compensar el lag. Por lo tanto, es necesario transformar los polos en ceros y viceversa. El compensador entonces puede ser:

$$C(s) = -K \frac{(s+1)^2}{(s+10)^2}$$

El valor de K debe ser tal que en la frecuencia de cruce $w_{gc} = \sqrt{10}$ la ganancia sea unitaria. Por lo tanto:

$$\left| K \frac{-w_{gc}^2 + 2jw_{gc} + 1}{-w_{gc}^2 + 20jw_{gc} + 100} \right| = 1$$

$$K = \left| \frac{-w_{gc}^2 + 20jw_{gc} + 100}{-w_{gc}^2 + 2jw_{gc} + 1} \right|$$

$$K = 10$$

Por lo tanto, el controlador resulta:

$$C(s) = -10 \frac{(s+1)^2}{(s+10)^2}$$

La planta de fase mínima entonces es:

$$C(s) P_{mp}(s) = 10 \frac{(s+1)^2}{(s+10)^2} \frac{1}{s} \frac{s+10}{s+1} = 10 \frac{s+1}{s(s+10)}$$

En la figura 3.5 se tiene el diagrama de Bode de este sistema. Se puede ver en esta figura que el margen de fase obtenido es de 135° . Al aplicar el retardo introducido por la parte de fase no mínima, se obtiene finalmente:

$$MF = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ \rightarrow \text{cumple } \checkmark$$

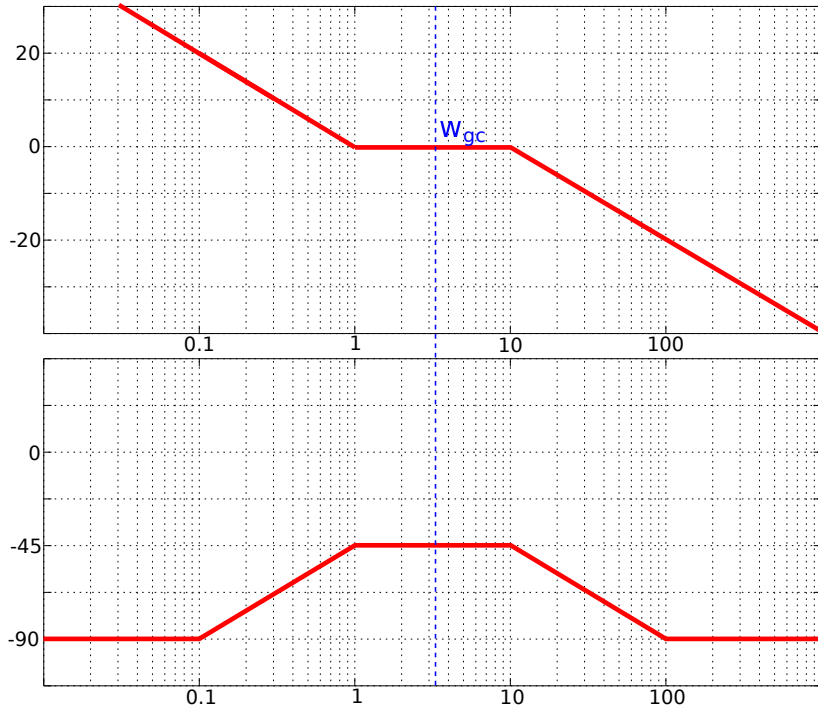


Figura 3.5: Diagrama de Bode de $P_{mp}(s)C(s)$. La frecuencia de cruce de la ganancia se encuentra determinada por el diagrama real, no por el asíntótico aquí trazado.

La planta completa a lazo abierto es:

$$P(s)C(s) = -10 \frac{s+1}{s(s+10)} \frac{s-10}{s+10} \frac{s+1}{s-1} = -10 \frac{(s+1)^2}{s(s+10)^2} \frac{s-10}{s-1}$$

En la figura 3.6 se tienen los resultados obtenidos en Matlab para la planta completa, donde se puede ver que el margen de fase cumple con lo pedido. Se puede comprobar también que la respuesta al escalón de esta planta es estable.

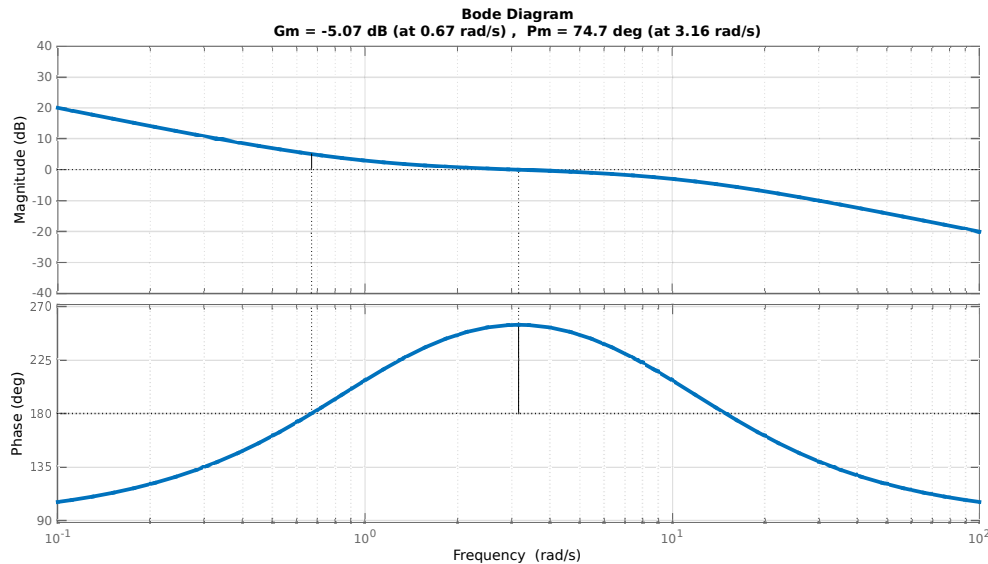


Figura 3.6: Bode de la planta completa compensada.

3.2.4. Ejercicio 4

Ítem I

$$\begin{cases} P(s) = Q(s)(s - \gamma) & \gamma > 0 \\ C(s) = \frac{G(s)}{s - \gamma} \end{cases}$$

Se asume que el polo del controlador cancela de manera exacta el cero de fase no mínima de la planta (cosa que en la realidad no puede ocurrir nunca).

- “El sistema es internamente estable”: Un sistema es internamente estable si todas las variables de estado que lo componen son estables. Que la salida de un sistema sea estable no implica que el sistema sea internamente estable. Para comprobar esto, se puede plantear el grupo de las 4:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 + PC} \rightarrow \text{estable} & T &= \frac{PC}{1 + PC} \rightarrow \text{estable} \\ PS &= \frac{P}{1 + PC} \rightarrow \text{estable} & CS &= \frac{C}{1 + PC} \rightarrow \text{inestable} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sensibilidad al ruido resulta inestable, ya que el polo inestable de $C(s)$ no se cancela con el cero en el semiplano derecho de $P(s)$. Como una de las funciones de sensibilidad resulta inestable, significa que una de las variables de estado no es estable, y por ende el sistema no es internamente estable. La afirmación es **falsa**.

- “ $s = \gamma$ es un polo de lazo abierto de $L(s)$ ”: La afirmación es **falsa**. Dado que se asume que la cancelación es exacta, se cumple que:

$$L(s) = C(s)P(s) = \frac{G(s)}{\cancel{s - \gamma}} Q(s) (\cancel{s - \gamma}) = G(s)Q(s)$$

Por lo tanto, $s = \gamma$ no es un polo de lazo abierto.

- “ $s = \gamma$ es un polo de todas las transferencias de lazo cerrado (grupo de las cuatro)”: La afirmación es **falsa**. Como se mostró en el primer ítem, $s = \gamma$ es un polo únicamente para la sensibilidad al ruido.
- “ $s = \gamma$ es un polo de al menos una de las transferencias de lazo cerrado (grupo de las cuatro)”: La afirmación es **verdadera**. Como se mostró en el primer ítem, $s = \gamma$ es un polo únicamente para la sensibilidad al ruido.
- “ $s = \gamma$ es un polo de solo una de las transferencias de lazo cerrado (grupo de las cuatro)”: La afirmación es **verdadera**. Como se mostró en el primer ítem, $s = \gamma$ es un polo únicamente para la sensibilidad al ruido.

Ítem II

La planta es

$$P(s) = \frac{Q(s)}{s}$$

- “El sistema a lazo cerrado presenta error nulo en estado estacionario a perturbaciones de entrada constantes”: Las perturbaciones de entrada se dan en la entrada de la planta, no en la entrada del sistema completo.

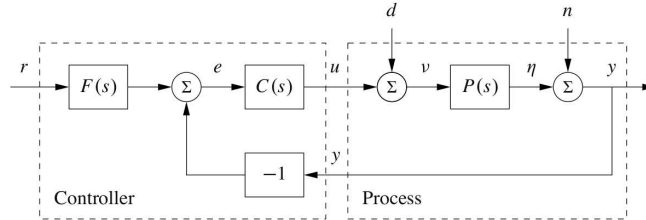


Figura 3.7: Diagrama en bloques de una planta controlada a lazo cerrado con dos grados de libertad.

Este tipo de sistemas con acción integral, siguen de manera exacta señales de referencia constantes en la entrada del sistema r . Esto es porque lo que integran es la señal de error $e = r - y$. Sin embargo, en este ejercicio se pregunta sobre las perturbaciones en la entrada, es decir la señal d . Tomando las señales del diagrama, y asumiendo $F(s) = 1$ y $n = 0$ para simplificar las cuentas, se puede plantear:

$$\begin{cases} E = R - Y \\ U = E \cdot C \\ V = D + U \\ \eta = Y = P \cdot V \end{cases}$$

Por lo tanto, se puede plantear:

$$\begin{aligned} Y &= P \cdot V = P(D + U) \\ Y &= P(D + E \cdot C) \\ Y &= P(D + (R - Y) \cdot C) \\ Y &= PD + PRC - PYC \\ Y(1 + PC) &= PD + PRC \\ Y &= \frac{P}{(1 + PC)}D + \frac{PC}{(1 + PC)}R \end{aligned}$$

Escrito de forma matricial:

$$Y = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{PC}{1+PC}}_{\text{Transferencia}} & \underbrace{\frac{P}{1+PC}}_{\text{Load Sensitivity}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si d es una perturbación constante, la salida y no coincidirá con dicha entrada en estado estacionario.

4. Final del 20/12/16

4.1. Enunciado

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA – FIUBA

Control Automático I 86.08 / Teoría de Control I 66.18

Examen Final

20/12/2016

Página 1 de 2

Nombre: _____

Padrón: _____ Hojas Entregadas: _____

Condiciones para aprobar: 60/100

1	3	4	
40	30	30	100

TODAS LAS HOJAS DEBEN TENER NOMBRE, PADRÓN Y ESTAR NUMERADAS

1. Dado el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -1,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [1,5 \quad -0,5].$$

Suponiendo el término $k_r = 0$ para simplificar,

- Diseñar un controlador por realimentación de estados observados con acción integral, de forma tal que los polos dominantes de la respuesta transitoria, estén en $s = -2 \pm j$. Ubicar el resto de los autovalores del problema de manera acorde.
- Verificar todos los resultados de las ubicaciones de autovalores.
- Suponiendo la referencia $r = 0$, calcular la transferencia del controlador de $e = r - y$ hacia u .

2. Dar ejemplos fundamentando¹:

- De un sistema de segundo orden Lyapunov estable y BIBO no estable. ¿Cuál señal de entrada para la cual diverge la salida?
- De un sistema de segundo orden BIBO estable y Lyapunov inestable. La transferencia no puede ser una constante.
- Especificar Planta ($P(s)$) y Controlador ($C(s)$) de un sistema de lazo cerrado tal que:

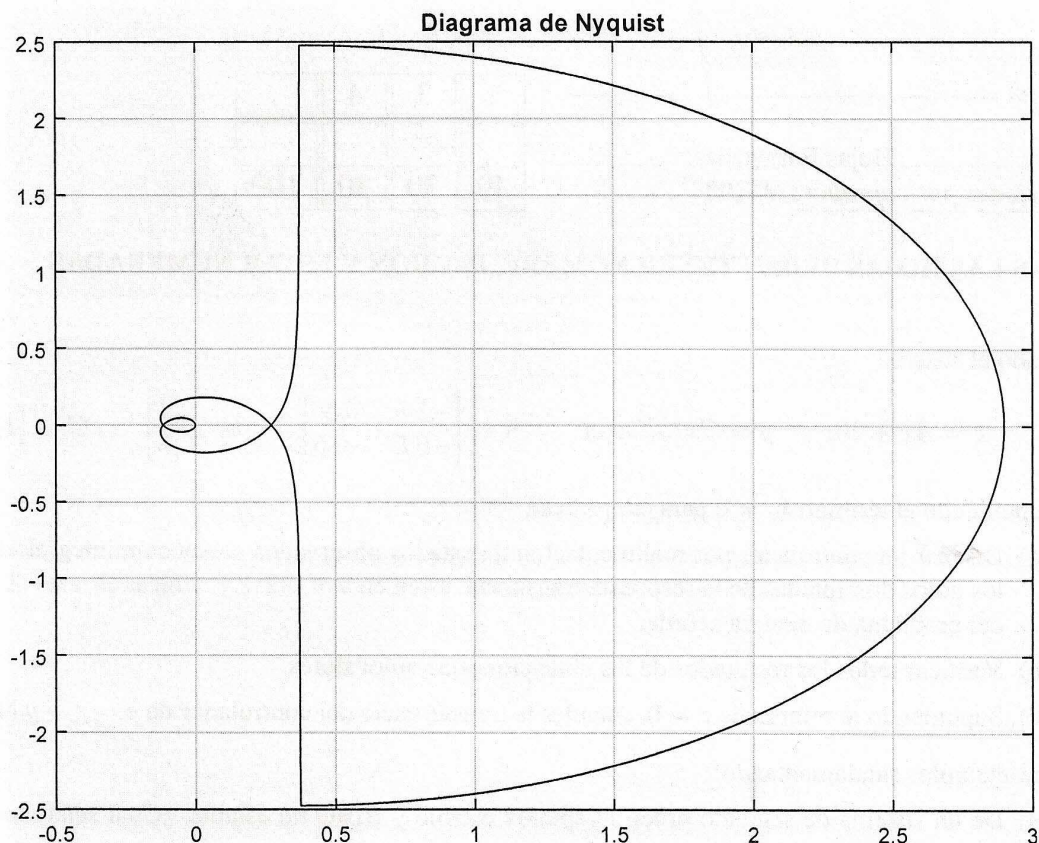
$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1 + P(s)C(s)}, \text{ es estable.} & T(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}, \text{ es estable.} \\ P(s)S(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}, \text{ es estable.} & C(s)S(s) &= \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)}, \text{ es inestable.} \end{aligned}$$

3. Dado el sistema

$$L(s) = L_o(s)e^{-s\tau} \quad L_o(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s-4)^2} \quad e^{-s\tau} = \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} = \frac{p-s}{p+s}.$$

- Compense $L_o(s)$ utilizando un controlador P, PI, PD, o PID. El margen de fase debe ser al menos 60° . Ayuda: Ver más el diagrama de Nyquist de $L_o(s)$ en la figura.
- Con la compensación obtenida, analizar para qué valores de τ puede el lazo mantener un margen de fase mayor a 40° .

¹Fundamentación incorrecta hace incorrecta la respuesta, sin importar que esté bien contestado el V ó F.



4.2. Resolución

4.2.1. Ejercicio 1

Las matrices que gobiernan la dinámica del sistema son:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A)$$

$$\lambda(s) = \det \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & s + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda(s) = \left(s + \frac{3}{2}\right) \left(s + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\lambda(s) = s^2 + 2s + 1 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Ítem a y b

En este ejercicio se pide la obtener un controlador basado en estados estimados, por lo que es necesario diseñar un observador además del control con acción integral. Por el **Principio de Separación** (Pag. 211, Astrom Murray) si un sistema es observable y controlable, y se desea diseñar un sistema de control con estados estimados, la asignación de polos puede ser separada en la asignación de polos del sistema de control y la asignación de polos del observador de forma independiente. Por esta razón, es posible obtener el controlador y el observador de manera independiente el uno del otro.

El primer paso es verificar la observabilidad del sistema. Para que esto ocurra, la matriz de observabilidad debe ser de rango n :

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado W_O presenta dos filas linealmente independientes, se puede asegurar que el sistema es observable. El observador a utilizar es el siguiente:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

El error del observador resulta:

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} &= Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})) \\ \dot{e} &= (A - LC)(x - \hat{x}) = (A - LC)e \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dinámica del observador está gobernada por la matriz $A - LC$, es decir que eligiendo correctamente la ganancia del observador L se puede lograr que $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ o en otras palabras que $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x} = x$. Con el fin de asegurar que el estado observado converja al estado real más rápido que el controlador, los polos del observador se pueden elegir en $s_{1,2} = -20$, lo cual resulta en el siguiente polinomio característico:

$$q(s) = (s + 20)^2 = s^2 + 40s + 400 \rightarrow \begin{cases} q_1 = 40 \\ q_2 = 400 \end{cases}$$

La ganancia del observador se puede obtener como:

$$L = W_O^{-1} \tilde{W}_O \begin{bmatrix} q_1 - a_1 \\ q_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

donde la matriz \tilde{W}_O corresponde a la matriz de observabilidad de la forma canónica:

$$\tilde{W}_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La ganancia del observador entonces es:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 - 2 \\ 400 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 399 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 399 \\ 1121 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar:

$$\begin{aligned} \det(sI - A + LC) &= \det \left(\begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & s + \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 399 \\ 1121 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ \det(sI - A + LC) &= \det \left(\begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & s + \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1197 & -399 \\ 3363 & -1121 \end{bmatrix} \right) \\ \det(sI - A + LC) &= \det \left(\begin{bmatrix} s + 600 & -200 \\ 1682 & s - 560 \end{bmatrix} \right) \\ \det(sI - A + LC) &= s^2 + 40s + 400 \rightarrow \text{Es lo buscado } \checkmark \end{aligned}$$

Una vez definido el observador, es necesario definir el controlador con acción integral. Para este controlador es necesario introducir una nueva variable de estado, la cual representa la integral del error:

$$\dot{z} = y - r = Cx - r$$

donde r es una señal de referencia. La planta aumentada entonces es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Para que sea posible la utilización de un controlador con acción integral, la planta aumentada debe ser controlable, es decir que su matriz de controlabilidad debe ser de rango n :

$$W_r = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \\ 0 & CB & CAB \end{bmatrix}$$

Reemplazando las matrices se tiene:

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que esta matriz es de rango $n = 3$, y por lo tanto la planta aumentada es controlable.

El controlador con acción integral a utilizar es:

$$u = -Kx + k_i z + k_r r$$

Al aplicar el controlador a la planta se tiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-Kx + k_i z + k_r r)$$

$$\dot{x} = Ax - BKx + Bk_i z + Bk_r r$$

Por lo tanto, la planta aumentada se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} K & -k_i \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} \right) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \\ -1 \end{bmatrix} r$$

Elijiendo el valor de \tilde{K} correcto será posible colocar los polos en las posiciones deseadas. Dado que los polos dominantes se desean en $s_{1,2} = -2 \pm j$, el tercer polo del sistema es necesario colocarlo mas alejado del origen pero más cerca que los polos del observador, de forma tal de que éste converja más rápidamente que los polos dominantes, pero mas lento que los del observador. Por lo tanto, un posible polinomio característico deseado es:

$$p(s) = (s + 2 + j)(s + 2 - j)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 45s + 50 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 14 \\ p_2 = 45 \\ p_3 = 50 \end{cases}$$

El polinomio característico de la planta aumentada es:

$$\tilde{\lambda}(s) = \det(sI - \tilde{A}) = \det \begin{bmatrix} sI - A & 0 \\ -C & s \end{bmatrix} = \det(sI - A) \det(s) = s\lambda(s) = s^3 + 2s^2 + s \rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la ganancia del controlador se puede obtener como:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & p_3 - a_3 \end{bmatrix} T$$

donde T es la transformación a la forma canónica. La matriz de controlabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación entonces es:

$$T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ganancia del controlador entonces es:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 14 - 2 & 45 - 1 & 50 - 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & -10 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{cases} K = \begin{bmatrix} 42 & -10 \end{bmatrix} \\ k_i = -50 \end{cases}}$$

Se puede verificar:

$$\begin{aligned}\det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) &= \det\left(\begin{bmatrix} s+3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & s+1/2 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 & -10 & 50 \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) &= \det\left(\begin{bmatrix} s+3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & s+1/2 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 & -10 & 50 \\ 126 & -30 & 150 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) &= s^3 + 14s^2 + 45s + 50 \rightarrow \text{Es lo buscado } \checkmark\end{aligned}$$

Por lo tanto, el controlador hallado cumple lo deseado (menos mal, porque las cuentas fueron asquerosas...). Haciendo un cambio de variables se puede escribir:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x}_1 = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})x_1 + \begin{bmatrix} Bk_r \\ -1 \end{bmatrix}r \rightarrow B' = \begin{bmatrix} Bk_r \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dado que el sistema es observable y controlable, es posible aplicar el Principio de Separación. El controlador con estados estimados es:

$$u = -K\hat{x} + k_iz + k_rr$$

Reemplazando en el sistema se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(-K\hat{x} + k_iz + k_rr) \\ \dot{x} &= Ax - BK\hat{x} + Bk_iz + Bk_rr \\ \dot{x} &= Ax - BK(x - e) + Bk_iz + Bk_rr \\ \dot{x} &= (A - BK)x + BKe + Bk_iz + Bk_rr\end{aligned}$$

La planta se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK & Bk_i \\ 0 & A - LC & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}r$$

Se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B' \\ 0 \end{bmatrix}r \quad y = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ e \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la planta completa es:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(s) &= \det\left(\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} & 0 \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix}\right) = \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) \det(sI - A + LC) \\ \tilde{\lambda}(s) &= p(s) \cdot q(s)\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que el polinomio característico de la planta completa, con su observador y controlador, se obtiene como el producto de los polinomio característicos de la planta con el controlador y la planta con el observador de manera independiente (lo cual es el Principio de Separación).

Los autovalores del sistema se ubican en:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(s) &= (s^3 + 14s^2 + 45s + 50)(s^2 + 40s + 400) \\ \tilde{\lambda}(s) &= (s + 10)(s + 2 + j)(s + 2 - j)(s + 20)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los polos se ubican en las posiciones deseadas y los polos dominantes son $s_{1,2} = -2 \pm j$. En la figura 4.1 se tiene el diagrama en bloques de la planta completa.

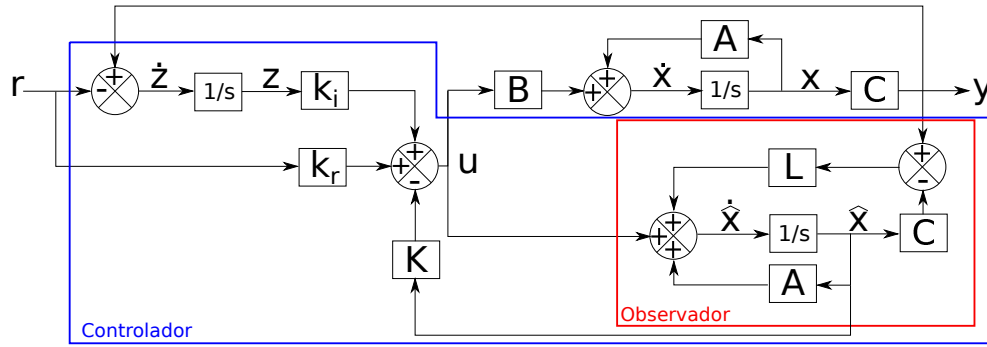


Figura 4.1: Diagrama en bloques del sistema con acción integral basado en estados estimados.

Ítem c

Dado que $r = 0$, la planta queda descrita por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = -K\hat{x} + k_i z \\ \dot{z} = y \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \end{cases}$$

La transferencia que se pide es:

$$T(s) = \frac{U(s)}{R(s) - Y(s)} = \frac{U(s)}{-Y(s)}$$

Dado que ahora y se corresponde con la entrada del controlador, y u con su salida, ya no interesa la planta descrita por $\dot{x} = Ax + Bu$. Por lo tanto, el sistema ahora se puede representar mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} u = -K\hat{x} + k_i z \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = A\hat{x} + B(-K\hat{x} + k_i z) + L(y - C\hat{x}) = (A - BK - LC)\hat{x} + Bk_i z + Ly \\ \dot{z} = y \end{cases}$$

Matricialmente se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK - LC & Bk_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} L \\ -1 \end{bmatrix}}_{B_2} y \quad u = \underbrace{\begin{bmatrix} -K & k_i \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ z \end{bmatrix}$$

La transferencia de este sistema se sabe que se puede obtener como:

$$\begin{aligned} T(s) &= -\frac{U(s)}{Y(s)} = -\left(C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + \cancel{D_2}\right) \\ T(s) &= -\begin{bmatrix} -K & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A + BK + LC & -Bk_i \\ 0 & sI \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se puede calcular:

$$\begin{bmatrix} sI - A + BK + LC & -Bk_i \\ 0 & sI \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s \det(sI - A + BK + LC)} \begin{bmatrix} sI & Bk_i \\ 0 & sI - A + BK + LC \end{bmatrix}$$

Haciendo estas cuentas horribles se debería poder llegar a la transferencia pedida.

4.2.2. Ejercicio 2

Para poder realizar este ejercicio, es necesario primero realizar algunas definiciones:

Estabilidad BIBO: Un sistema es BIBO estable (*bounded input-bounded output*) si toda entrada acotada produce una salida acotada. Sea $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ la función de transferencia entre la entrada y la salida, entonces todos los polos de $H(s)$ tienen parte real negativa.

Esta propiedad no dice nada sobre la estabilidad interna de los sistemas.

Estabilidad de Lyapunov: Se refiere al comportamiento de los estados del sistema ante distintas condiciones iniciales. No interesa únicamente la relación entrada-salida, sino que interesan los estados del sistema. En caso de tratarse de un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ se puede definir:

1. El sistema es **estable en el sentido de Lyapunov** si toda condición inicial finita origina una trayectoria acotada.
2. El sistema es **asintóticamente estable** si toda condición inicial finita origina una trayectoria acotada que además tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$
3. El sistema es **inestable** cuando no es estable.

Teniendo esto en cuenta, se puede expresar el siguiente teorema.

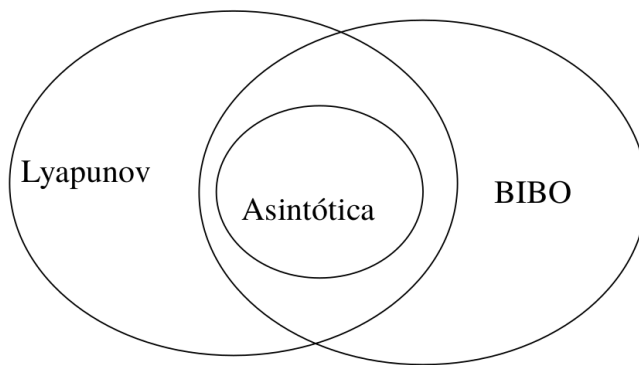
Teorema: El sistema $\dot{x} = Ax$ es:

- **estable en el sentido de Lyapunov** si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real no positiva, y aquellos con parte real cero están asociados a un bloque de Jordan de orden 1 de A .
- **asintóticamente estable** si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa.

Cuando se tiene un sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ con salida $y = Cx + Du$, su transferencia se puede obtener como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(sI - A)} C \text{adj}(sI - A) B + D$$

Se puede ver que todos los polos de $H(s)$ son autovalores de A . Sin embargo, no todos los autovalores de A son polos de $H(s)$, ya que pueden producirse cancelaciones. Por lo tanto, un sistema asintóticamente estable, necesariamente es BIBO estable, mientras que un sistema BIBO estable puede no ser asintóticamente estable.



Ítem a

En este caso, se pide que el sistema sea estable en el sentido de Lyapunov, pero no BIBO estable.

Si el sistema no es BIBO estable, es porque su transferencia presenta polos con parte real no negativa:

$$p_i \geq 0$$

Por otra parte, se sabe que para que un sistema sea Lyapunov estable, los autovalores de A deben tener parte real no positiva, y que aquellos autovalores con parte real nula deben estar asociados a un bloque de Jordan de orden 1. Esto significa que deben tener multiplicidad unitaria. De esta forma, eligiendo por ejemplo un sistema donde A presenta un autovalor nulo, se estaría logrando lo pedido.

Se puede plantear el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Los autovalores de A son:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = (s+1)s \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, dado que λ_1 tiene parte real negativa, y λ_2 tiene multiplicidad 1, se puede asegurar de que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov. Por otra parte, la transferencia resulta:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)s} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)s} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ -(s+1) \end{bmatrix} = \frac{-1}{(s+1)s}$$

Dado que uno de los polos de la transferencia se encuentra en el origen, el sistema no resulta BIBO estable. Por ejemplo, si se le aplica a la entrada una señal escalón:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot T(s) \right\} = \frac{-1}{(s+1)s^2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{-1}{s^2} + \frac{1}{s} \Big\} = -e^{-t} - t + 1$$

Por lo tanto, la respuesta temporal se aleja hacia el infinito a medida que pasa el tiempo, lo cual confirma que no se trata de un sistema BIBO estable.

Ítem a bis: Respuesta de Gherlin

Se propone el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Los autovalores de A son:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j$$

Se puede ver que ambos autovalores presentan parte real nula, por lo que no puede tratarse de un sistema asintóticamente estable. Sin embargo, ambos autovalores pertenecen a un bloque de Jordan de orden 1, por lo que se trata de un sistema estable en el sentido de Lyapunov.

La transferencia del sistema es:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{s^2+1}$$

Esta transferencia no resulta BIBO estable, ya que si uno le aplica a la entrada una senoidal se tiene:

$$\mathcal{L} \{ \sin(t) \} = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} T(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \right) \right\}$$

Antitransformado esta expresión se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} T(s) \right\} = \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cos(t)) \rightarrow \text{No es BIBO estable}$$

Ítem b

En este caso, se pide que el sistema sea BIBO estable, pero no estable en el sentido de Lyapunov. Por lo tanto, la transferencia debe ser estable, pero la matriz de estados A debe presentar autovalores no negativos (es decir que deben ocurrir cancelaciones). Si se analiza una planta a lazo cerrado, significa que al menos una de las transferencias del grupo de las cuatro (Gang of Four) resulta inestable, salvo la transferencia:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{1+PC} & \text{estable o inestable} \\ PS = \frac{P}{1+PC} & \text{estable o inestable} \\ T = \frac{PC}{1+PC} & \text{estable} \\ CS = \frac{C}{1+PC} & \text{estable o inestable} \end{cases}$$

Por lo tanto, buscando alguna planta cuya Sensibilidad, Sensibilidad a perturbaciones en la entrada o la Sensibilidad al ruido sea inestable se cumple lo pedido. Una posible planta que cumple esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(s) = \frac{1}{s-\alpha} \\ C(s) = \frac{s-\alpha}{(s+\beta)^2} \end{array} \right. \quad \alpha > 0, \beta > 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{1}{1+PC} = \frac{1}{1+\frac{1}{(s+\beta)^2}} = \frac{(s+\beta)^2}{(s+\beta)^2+1} \quad \text{estable} \\ PS = \frac{P}{1+PC} = \frac{\frac{1}{s-\alpha}}{1+\frac{1}{(s+\beta)^2}} = \frac{1}{s-\alpha} \frac{(s+\beta)^2}{(s+\beta)^2+1} \quad \text{inestable} \\ T = \frac{PC}{1+PC} = \frac{\frac{(s+\beta)^2}{s-\alpha}}{1+\frac{1}{(s+\beta)^2}} = \frac{1}{(s+\beta)^2+1} \quad \text{estable} \\ CS = \frac{C}{1+PC} = \frac{\frac{(s+\beta)^2}{s-\alpha}}{1+\frac{1}{(s+\beta)^2}} = \frac{s-\alpha}{(s+\beta)^2+1} \quad \text{estable} \end{array} \right.$$

Se puede ver que al ser $T(s)$ estable, si se mete una señal acotada en la entrada, la salida será acotada. Sin embargo, ante perturbaciones en la entrada el sistema se inestabiliza, por lo que el sistema no resulta internamente inestable.

Ítem b bis: Respuesta de Gherlin

Al parecer no se pedía que se resolviera esto analizando la estabilidad interna, sino que directamente se buscara una planta que no fuera Lyapunov estable, y que al calcular la transferencia se produjera una cancelación tal que resultara BIBO estable. Por ejemplo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Los autovalores de A resultan:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 1 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Dado que uno de los autovalores está en el semiplano derecho, el sistema no es Lyapunov estable. Por otra parte, la transferencia del sistema es:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$$

Dado que se produce una cancelación, el polo inestable no aparece en la transferencia de la planta, y por ende se trata de un sistema BIBO estable. Creo que es más o menos lo que había hecho yo antes, salvo que esto es un caso más concreto.

Ítem c

El grupo de las cuatro (Gang of Four) del enunciado es:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{1}{1+PC} \\ PS = \frac{P}{1+PC} \\ T = \frac{PC}{1+PC} \\ CS = \frac{C}{1+PC} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{estable} \\ \text{estable} \\ \text{estable} \\ \text{inestable} \end{array}$$

Dado que $C(s)S(s)$ es inestable, y las demás transferencias son estables, significa que $C(s)$ tiene un polo inestable que se compensa con un cero inestable de $P(s)$. Por lo tanto, se trata de una planta que es internamente inestable. Entonces se puede escribir:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(s) = (s-\alpha)p(s) \\ C(s) = \frac{q(s)}{s-\alpha} \end{array} \right. \quad \alpha > 0$$

Un ejemplo posible puede ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(s) = \frac{1}{(s+\beta)^2} \\ q(s) = \frac{1}{s+\beta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \beta > 0 \\ \beta > 0 \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(s) = \frac{s-\alpha}{(s+\beta)^2} \\ C(s) = \frac{1}{(s-\alpha)(s+\beta)} \end{array} \right. \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

4.2.3. Ejercicio 3

Ítem a

La planta a compensar es:

$$L_O(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s-4)^2}$$

Se puede ver que la planta presenta un polo doble en $s = 4$, lo cual lo hace un sistema inestable. En la figura 4.2 se tiene el diagrama Root Locus de la planta.

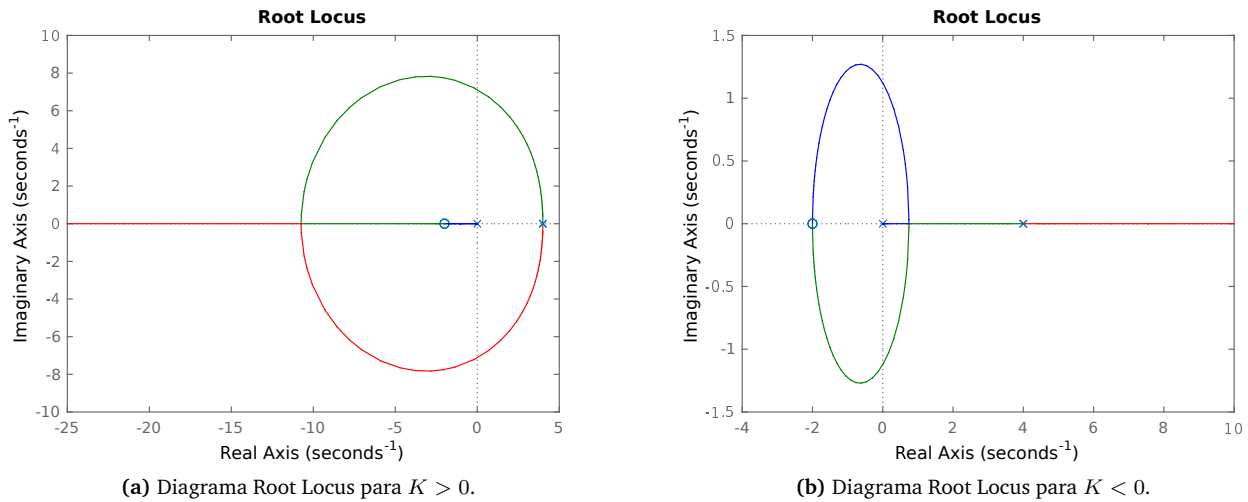


Figura 4.2: Diagramas Root Locus de $L_O(s)$.

Se puede ver en la figura 4.2a que para $K > 0$ es posible encontrar un valor tal que el sistema queda estabilizado. Por lo tanto, utilizando únicamente un controlador proporcional será posible estabilizar el sistema. Esto también puede verse a partir del diagrama de Nyquist del enunciado. Se puede ver que se tienen $P = 2$ polos de lazo abierto en el semiplano derecho, y se tienen $N = 0$ giros alrededor de $s = -1$ en sentido horario, y por ende

$$Z = P + N = 2$$

es decir que se tienen $Z = 2$ polos de lazo cerrado en el semiplano derecho. Sin embargo, en el enunciado falta el sentido en que se recorre el diagrama, por lo cual será necesario obtenerlo. La transferencia es:

$$\begin{aligned} L_O(jw) &= \frac{(jw+2)^2}{jw(jw-4)^2} = \frac{4+4jw-w^2}{jw(16-8jw-w^2)} = \frac{4+4jw-w^2}{8w^2-j(w^3-16w)} \\ L_O(jw) &= \frac{4+4jw-w^2}{8w^2-j(w^3-16w)} \cdot \frac{8w^2+j(w^3-16w)}{8w^2+j(w^3-16w)} \\ L_O(jw) &= \frac{-12w^4+96w^2+j(-w^5+52w^3-64w)}{w^6+32w^4+256w^2} \\ L_O(jw) &= \frac{-12w^4+96w^2}{w^6+32w^4+256w^2} + j \frac{-w^5+52w^3-64w}{w^6+32w^4+256w^2} \end{aligned}$$

El módulo de la transferencia es:

$$|L_O(jw)| = \sqrt{\left(\frac{-12w^4+96w^2}{w^6+32w^4+256w^2}\right)^2 + \left(\frac{-w^5+52w^3-64w}{w^6+32w^4+256w^2}\right)^2} = \frac{w^2+4}{w^3+16w}$$

Dado que la transferencia presenta un polo en el origen, para analizar qué ocurre cerca de $w = 0$ es necesario analizar en un entorno:

$$s = \epsilon e^{j\theta} \rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{\epsilon} e^{-j\theta} \rightarrow \begin{cases} \theta = 0^\circ \rightarrow 0^\circ \\ \theta = 45^\circ \rightarrow -45^\circ \\ \theta = 90^\circ \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$

Por lo tanto, a medida que w crece con respecto al cero, comienza a acercarse desde el eje imaginario negativo. Por esta razón, el sentido con que debe recorrerse el diagrama es el de la figura 4.3.

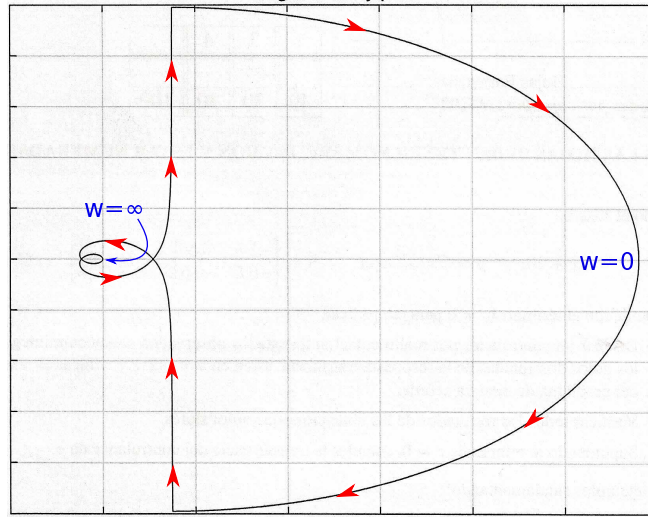


Figura 4.3: Diagrama de Nyquist.

El cruce con el eje real se da donde la parte imaginaria es nula:

$$\Im_m = 0 \rightarrow \frac{-w^5 + 52w^3 - 64w}{w^6 + 32w^4 + 256w^2} = 0$$

Para que esto ocurra, se debe cumplir:

$$\begin{cases} w_1 = -3 - \sqrt{17} \\ w_2 = 3 - \sqrt{17} \\ w_3 = \sqrt{17} - 3 \\ w_4 = 3 + \sqrt{17} \\ w_5 = 0 \\ w_6 \rightarrow \infty \end{cases}$$

Reemplazando estos valores en la parte real, se tiene:

$$\begin{cases} L_o(jw_1) = -0,115 \\ L_o(jw_2) = 0,271 \\ L_o(jw_3) = 0,272 \\ L_o(jw_4) = -0,115 \end{cases}$$

De esta forma, la ganancia del controlador proporcional hará que el sistema sea estable siempre y cuando:

$$K > \frac{1}{|L_o(jw_1)|} \rightarrow \boxed{K > 8,68}$$

Otra forma de obtener este resultado, hubiera sido mediante el arreglo de Routh. Para esto se debe partir de:

$$\begin{aligned} 1 + KL_O(s) &= 1 + K \frac{(s+2)^2}{s(s-4)^2} \\ &= \frac{s(s-4)^2 + K(s+2)^2}{s(s-4)^2} \\ &= \frac{s^3 - 8s^2 + 16s + K(s^2 + 4s + 4)}{s(s-4)^2} \end{aligned}$$

El polinomio característico resulta:

$$\lambda(s) = s^3 + s^2(K-8) + s(16+4K) + 4K$$

El arreglo de Routh es:

s^3	1	$16 + 4K$
s^2	$K - 8$	$4K$
s^1	$\frac{(K-8)(16+4K)-4K}{(K-8)}$	0
s^0	$4K$	

Por lo tanto, para que no haya cambios de signos se debe cumplir:

$$\begin{cases} K - 8 > 0 \rightarrow K > 8 \\ 4K > 0 \rightarrow K > 0 \\ \frac{(K-8)(16+4K)-4K}{(K-8)} > 0 \rightarrow (K-8)(16+4K) > 4K \end{cases}$$

De la última ecuación se puede despejar:

$$\begin{aligned} (K-8)(16+4K) &> 4K \\ 16K + 4K^2 - 128 - 32K &> 4K \\ 4K^2 - 20K - 128 &> 0 \end{aligned}$$

Se trata de una parábola convexa con raíces en:

$$K_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 128}}{8} = \frac{20 \pm \sqrt{2448}}{8} = \{8,68; -3,68\}$$

Dado que K debe ser positivo, y mayor que 8, se obtiene finalmente el mismo resultado que antes:

$$K > \frac{20 + \sqrt{2448}}{8} \approx 8,68$$

Una vez obtenido el rango de valor de K que hace que el sistema sea estable, es necesario encontrar aquel valor de K que logra el margen de fase deseado de 60° . Para esto, es necesario trazar el diagrama de Bode, el cual se ve en la figura 4.4.

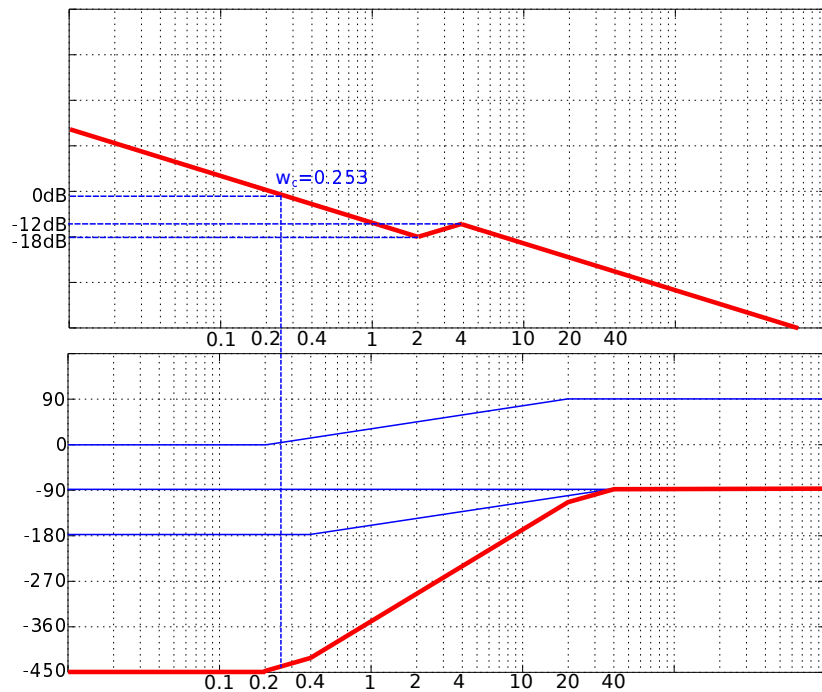


Figura 4.4: Diagrama de Bode de $L_O(s)$.

La frecuencia de cruce de la ganancia es:

$$|L_O(jw_c)| = 1 \rightarrow w_c = 0,253 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Se puede ver en la figura 4.4 que la fase en esta frecuencia es de aproximadamente -450° , lo cual significa que el margen de fase de la planta es de:

$$MF \approx 90^\circ$$

Sin embargo, la planta es inestable, por lo que si bien el margen de fase parece ser el correcto, es necesario agregar un controlador. Al multiplicar por una ganancia constante, lo que se está haciendo es desplazar el diagrama de magnitud hacia arriba. Por lo tanto, es necesario encontrar a qué frecuencia la fase es de

$$\phi = 60^\circ - 180^\circ = -120^\circ$$

Esto se puede lograr en:

$$w_x = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por lo tanto, w_x debe ser la nueva frecuencia de corte. El diagrama de magnitud a esta frecuencia es:

$$|L_O(jw_x)| = \frac{101}{2080} \approx 0,0485$$

Por lo tanto, el valor de K que logra el margen de fase deseado es:

$$K = \frac{1}{|L_O(jw_x)|} \approx 20,6$$

Se puede verificar en Matlab que el valor de K es correcto (ver figura 4.5).

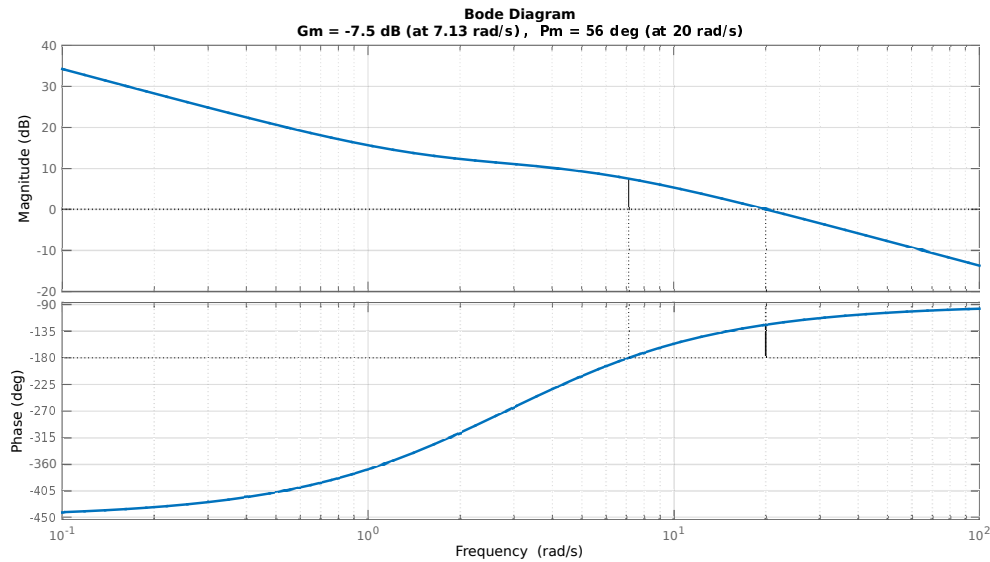


Figura 4.5: Diagrama de Bode de $K L_O(jw)$ obtenido con Matlab. Se puede ver que el margen de fase es el pedido.

Ítem b

El retardo de transporte $e^{-s\tau}$ se puede reescribir mediante la aproximación de Padé como:

$$e^{-s\tau} = \frac{e^{-s\frac{\tau}{2}}}{e^{s\frac{\tau}{2}}} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s}$$

Se puede ver que este retardo presenta una ganancia unitaria, y que solo afecta en la fase. De esta forma, lo único que se ve afectado a grandes rasgos es el margen de fase. El retardo de fase introducido por el retardo de transporte es:

$$\angle e^{-jw\tau} = -w\tau$$

Por lo tanto, el margen de fase del sistema con el retardo resulta:

$$MF' < MF - w_c\tau \rightarrow \tau < \frac{MF - MF'}{w_c}$$

Analizando en la frecuencia de cruce (que es donde esto tiene sentido), y reemplazando los valores de los márgenes de fase, se tiene:

$$\tau < \frac{60^\circ - 40^\circ}{20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \frac{20^\circ}{1145,9 \frac{^\circ}{\text{s}}} \rightarrow \boxed{\tau < 0,0175\text{s}}$$

Se puede verificar con Matlab que el resultado obtenido es correcto.

5. Final del 14/02/17

5.1. Enunciado

Ejercicio 1

Se tiene el circuito de la figura 5.1.

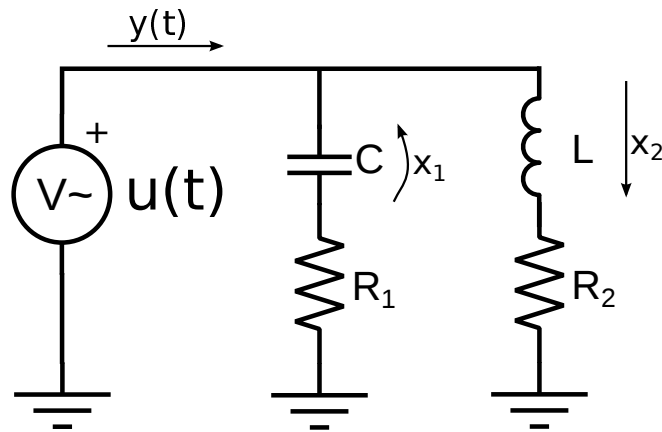


Figura 5.1: Circuito a analizar. La salida es la corriente total $y(t)$, y los estados son la tensión en el capacitor x_1 y la corriente en el inductor x_2 .

1. Obtener una representación en el espacio de estados utilizando las variables de estados dadas.
2. Encontrar la relación que debe haber entre R_1 , R_2 , L y C para que el sistema sea no controlable.
3. Encontrar la relación que debe haber entre R_1 , R_2 , L y C para que el sistema sea no observable.
4. Encontrar la transferencia del sistema. Demostrar que para el caso en que el sistema es no controlable, existe una cancelación polo-cero en la transferencia.

Ejercicio 2

Este ejercicio es exactamente igual al ejercicio 3 del final del 20/12/16 (ver la sección 4.2.3).

Ejercicio 3

Este ejercicio es exactamente igual al ejercicio 3 del final del 21/12/15 (ver la sección 2.2.3).

Ejercicio 4

Estos eran unos verdaderos o falsos. No los recuerdo exactamente, pero eran mas o menos así:

I Dada una planta que tiene dos polos en $\pm jw_0$. Ambos polos son cancelados mediante un controlador con dos ceros en jw_0 . Contestar Verdadero o Falso sobre cada una de las siguientes afirmaciones desarrollando la fundamentación.

1. La planta es Lyapunov estable.
2. La planta es BIBO estable.
3. $\pm jw_0$ es un polo en todas las transferencias del grupo de las cuatro.
4. $\pm jw_0$ es un polo en al menos una de las transferencias del grupo de las cuatro.

II Dada una planta que tiene un polo en el origen. Contestar Verdadero o Falso y desarrollar.

1. El sistema a lazo cerrado presenta error nulo en estado estacionario a perturbaciones de entrada constantes.

A. Ejercicios de final

A.1. Ejercicio 1

Considerar el sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Considerando la ley de control $u = -Kx + k_r r$, hallar K y k_r de forma tal que el sistema realimentado tenga polos en -2 y $-1 \pm j$ y que la salida siga asintóticamente a cualquier referencia r constante.

Para lograr que los polos del sistema se posicionen en cualquier posición deseada el sistema debe ser controlable, es decir que su matriz de controlabilidad debe ser de rango $n = 3$. La matriz de controlabilidad es:

$$W_r = [B \quad AB \quad A^2B] \rightarrow \begin{cases} AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^2B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow W_r = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que W_r es de rango 3, significa que el sistema es controlable, y es posible aplicar el control deseado. El polinomio característico del sistema sin controlar es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 2 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-1)^3 = s^3 - 3s^2 + 3s - 1 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

El polinomio característico del sistema luego de aplicar el controlador es:

$$p(s) = (s+2)(s+1+j)(s+1-j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = 6 \\ p_3 = 4 \end{cases}$$

Al aplicar el controlador al sistema, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(-Kx + k_r r) \\ \dot{x} &= (A - BK)x + Bk_r r \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema se encuentra ahora gobernada por la matriz $A - BK$. Eligiendo correctamente el vector de ganancias K , es posible situar los polos en la posición deseada. Éste vector K se puede encontrar como:

$$K = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad p_3 - a_3] T$$

donde T es la transformación que lleva al sistema a su forma canónica. La matriz de controlabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la transformación resulta:

$$TW_r = \tilde{W}_r \rightarrow T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La ganancia entonces es:

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 47 & -8 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar:

$$\det(sI - A + BK) = \det \left(\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 2 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 47 & -8 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s+14 & 46 & -6 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 15 & 47 & s-9 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(sI - A + BK) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4 \rightarrow \text{Es lo buscado } \checkmark$$

Para que el sistema siga de forma exacta a la referencia en estado estacionario, se debe cumplir que:

$$\dot{x} = 0 = (A - BK)x + Bk_r r \rightarrow x = -(A - BK)^{-1} Bk_r r$$

Dado que la salida debe ser igual que la referencia, se puede escribir:

$$y = r = Cx = -C(A - BK)^{-1} Bk_r r \rightarrow 1 = -C(A - BK)^{-1} Bk_r \rightarrow k_r = -\frac{1}{C(A - BK)^{-1} B}$$

La matriz $(A - BK)^{-1}$ es:

$$(A - BK)^{-1} = \begin{bmatrix} -14 & -46 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ -15 & -47 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -14 & -33 & 13 \\ \frac{15}{4} & 9 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{15}{4} & -8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede hacer:

$$C(A - BK)^{-1} B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 & -33 & 13 \\ \frac{15}{4} & 9 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{15}{4} & -8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = -2$$

Finalmente, se tiene que

$$k_r = -\frac{1}{2}$$

A.2. Ejercicio 2

Considere el sistema representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Verificar que el sistema es observable y luego diseñar un observador full-state ubicando sus polos en $s_{1,2} = -1$. Graficar la respuesta del error de estimación $e = x - \hat{x}$ con una estimación inicial del error de $e(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Para que el sistema sea observable, su matriz de observabilidad debe ser de rango $n = 2$:

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 21 & -36 \end{bmatrix}$$

Dado que W_O presenta $n = 2$ filas linealmente independientes, es decir que es de rango $n = 2$, el sistema resulta observable.

El polinomio característico del sistema es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ 5 & s-10 \end{bmatrix} = s^2 - 11s + 30 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -11 \\ a_2 = 30 \end{cases}$$

Por otra parte, se busca que la dinámica del error del observador esté gobernada por:

$$p(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 2 \\ p_2 = 1 \end{cases}$$

El observador a utilizar es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

La ventaja de este observador es que no solo utiliza información de la entrada, sino que también utiliza información de la salida para estimar el vector de estados. El error del observador es:

$$e = x - \hat{x} \rightarrow \dot{e} = (A - LC)e$$

Introduciendo esta nueva variable de estado, la planta aumentada resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la dinámica del error se encuentra gobernada por $A - LC$, es decir que es necesario encontrar el valor de L tal que el polinomio característico resulta $p(s)$. Realizando esto, dado que los polos son estables, se tendrá que el error de estimación tenderá a cero a medida que pasa el tiempo, lo que es equivalente a decir que el estado observado tiene al estado real:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x} = x$$

La ganancia del observador se puede obtener como:

$$L = W_O^{-1} \tilde{W}_O \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

donde \tilde{W}_O es la matriz de observabilidad de la forma canónica:

$$\tilde{W}_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

La ganancia entonces resulta:

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{1}{48} \\ -\frac{4}{16} & \frac{1}{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{53}{16} \end{bmatrix}$$

Se puede verificar:

$$\begin{aligned} \det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ 5 & s-10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{53}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ 5 & s-10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{53}{16} & \frac{53}{4} \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s - \frac{5}{4} & -3 \\ \frac{27}{16} & s + \frac{13}{4} \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= \left(s - \frac{5}{4}\right) \left(s + \frac{13}{4}\right) + \frac{81}{16} \\ \det(sI - A + LC) &= s^2 + 2s + 1 \rightarrow \text{Es lo buscado } \checkmark \end{aligned}$$

La respuesta temporal del error está dada por:

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Tomando la transformada de Laplace se tiene:

$$sE(s) - e(0) = (A - LC)E(s) \rightarrow E(s) = \frac{1}{sI - A + LC}e(0) \rightarrow e(t) = e^{-(A-LC)t}e(0)$$

Para obtener la exponencial matricial $e^{-(A-LC)t}$ se puede utilizar la siguiente propiedad:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$$

Por lo tanto, en este caso se debe hacer:

$$(sI - A + LC)^{-1} = \begin{bmatrix} s - \frac{5}{4} & -3 \\ \frac{27}{16} & s + \frac{13}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s + \frac{13}{4} & 3 \\ -\frac{27}{16} & s - \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

La matriz exponencial entonces resulta:

$$e^{-(A-LC)t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A + LC)^{-1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s + \frac{13}{4} & 3 \\ -\frac{27}{16} & s - \frac{5}{4} \end{bmatrix} \right\}$$

$$e^{-(A-LC)t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(9t+4)e^{-t} & 3te^{-t} \\ -\frac{27}{16}te^{-t} & -\frac{1}{4}(9t-4)e^{-t} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la respuesta temporal del error resulta:

$$e(t) = \begin{bmatrix} \frac{9}{4}t + 1 & 3t \\ -\frac{27}{16}t & -\frac{9}{4}t + 1 \end{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow e(t) = \begin{bmatrix} \frac{21}{4}t + 1 \\ -\frac{63}{16}t + 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

En la figura A.1 se tiene la gráfica de la evolución del error a lo largo del tiempo.

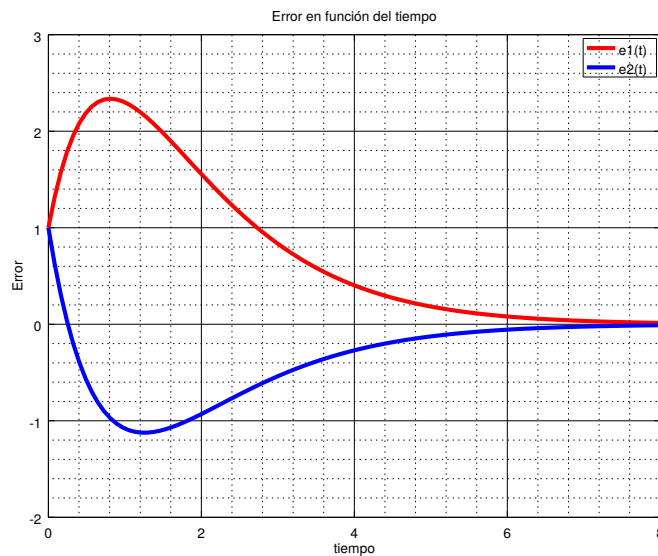


Figura A.1: Error en función del tiempo.

Se puede ver en la figura A.1 que el error crece linealmente para intervalos pequeños de tiempo, donde predomina el término lineal del error, pero a medida que pasa el tiempo, el término exponencial se vuelve dominante, llevando a un error nulo en estado estacionario. Esto era esperable, ya que $(A - LC)$ presenta todos sus autovalores en el semiplano izquierdo.

A.3. Ejercicio 3

Dado el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

dar condiciones sobre b_i para que el sistema sea controlable.

Para que el sistema sea controlable, su matriz de controlabilidad debe ser de rango $n = 2$, es decir que deben haber $n = 2$ filas linealmente independientes. La matriz de controlabilidad se obtiene como:

$$W_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda b_1 + b_2 \\ b_2 & \lambda b_2 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz es cuadrada, pedir que sea de rango n es equivalente a pedir que sea inversible. Por lo tanto, su determinante no debe ser nulo:

$$\det(W_r) = \lambda b_1 b_2 - b_2 (\lambda b_1 + b_2)$$

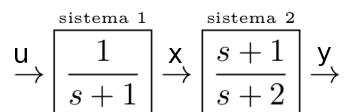
$$\det(W_r) = \lambda b_1 b_2 - b_2 \lambda b_1 + b_2^2$$

Por lo tanto, para que el sistema sea controlable se debe cumplir que:

$$\boxed{b_2 \neq 0}$$

A.4. Ejercicio 4

Dada la interconexión



1. Obtener una descripción en espacio de estados (segundo orden).
2. Llevar a forma diagonal mediante una transformación de similaridad.
3. Analizar observabilidad y controlabilidad.

Primera forma

Para poder encontrar una descripción en el espacio de estados, es necesario primero definir las variables de estado del sistema, su entrada y su salida. Esto puede verse en la figura A.2.

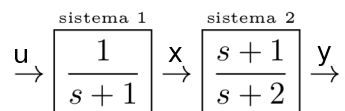


Figura A.2: Sistema a analizar.

De acuerdo con la figura A.2, la descripción en el espacio de estados se puede obtener como:

$$\begin{cases} X = \frac{U}{s+1} \\ Y = \frac{s+1}{s+2} X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sX + X = U \\ sY + 2Y = sX + X \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ \dot{y} + 2y = \dot{x} + x \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ \dot{y} = -2y + u \end{cases}}$$

Se hace necesaria la elección de las variables de estado como:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ z = y \quad \text{Salida} \end{cases}}$$

Por lo tanto, el sistema se puede reescribir como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dado que el sistema ya se encuentra expresado de forma diagonal, la transformación pedida es la identidad:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea controlable, su matriz de controlabilidad debe ser de rango $n = 2$. Por lo tanto:

$$W_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Dado que W_r presenta dos filas linealmente independientes, la matriz es de rango $n = 2$, y el sistema resulta **controlable**.

Para que el sistema sea observable, su matriz de observabilidad debe ser de rango $n = 2$. Por lo tanto:

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dado que W_O presenta dos filas linealmente dependientes, la matriz no es de rango $n = 2$, y el sistema resulta **no observable**.

Segunda forma

El primer bloque de la figura A.2 se puede describir como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$$

El segundo bloque se puede describir por:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

Por otra parte, se sabe que:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ y_1 = x \\ u_2 = y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases}$$

Interconectando ambos sistemas, se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + D_1 u_1) \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + D_1 u_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u_1 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u_1 \end{cases}$$

Matricialmente esto resulta: $A_1 x_1 + B_1 u_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \quad y_2 = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 u$$

Utilizando la forma canónica controlable, se tiene:

$$\frac{\overbrace{1}^{b_1}}{s + \underbrace{1}_{a_1}} \rightarrow \begin{cases} A_1 = -a_1 = -1 \\ B_1 = b_1 = 1 \\ C_1 = b_1 = 1 \\ D_1 = 0 \end{cases} \quad \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+1+1-1}{s+2} = \underbrace{1}_d - \frac{\overbrace{1}^{b_1}}{s + \underbrace{2}_{a_1}} \rightarrow \begin{cases} A_2 = -a_1 = -2 \\ B_2 = b_1 = 1 \\ C_2 = -1 \\ D_2 = 1 \end{cases}$$

De esta forma se tiene:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

Ahora es necesario llevarlo a su forma diagonal, para lo que se aplica la transformación T :

$$z = Tx \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \overbrace{TAT^{-1}}^{\tilde{A}} z + \overbrace{TB}^{\tilde{B}} u \\ y = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} z \end{cases}$$

Lo que se busca es que \tilde{A} sea una matriz diagonal. Para que esto ocurra, en la diagonal de \tilde{A} deben estar los autovalores de A y la matriz T debe contener los autovectores correspondientes:

$$TAT^{-1} = \tilde{A} \rightarrow A = T^{-1}\tilde{A}T = D\tilde{A}D^{-1} \rightarrow D = T^{-1}$$

Los autovalores de A son:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = (s+1)(s+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -2 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T = D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices del sistema entonces resultan:

$$\begin{cases} \tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Es diagonal } \checkmark \\ \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \tilde{D} = D = 0 \end{cases}$$

Para que el sistema sea controlable, su matriz de controlabilidad debe ser de rango $n = 2$. Por lo tanto:

$$W_r = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dado que W_r presenta dos filas linealmente independientes, la matriz es de rango $n = 2$, y el sistema resulta **controlable**.

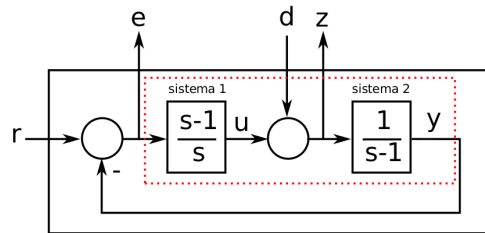
Para que el sistema sea observable, su matriz de observabilidad debe ser de rango $n = 2$. Por lo tanto:

$$W_o = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dado que W_o presenta dos filas linealmente dependientes, la matriz no es de rango $n = 2$, y el sistema resulta **no observable**. Estos resultados eran esperables, ya que se trata del mismo sistema analizado en el primer método, solo que escrito de manera diferente.

A.5. Ejercicio 5

Dado el sistema



Encontrar una descripción en el espacio de estados del sistema completo tomando como entrada multivariable a $\begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$ y como salida a $\begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix}$. Mostrar que la realización del lazo cerrado es inestable (es decir que no hay estabilidad interna).

Utilizando la forma canónica controlable del sistema 1 se tiene:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ B_1 = 1 \\ C_1 = -1 \\ D_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = e \\ u = -x_1 + e \end{cases}$$

Planteando lo mismo para el sistema 2:

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{s-1} \rightarrow \begin{cases} A_2 = 1 \\ B_2 = 1 \\ C_2 = 1 \\ D_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 + z \\ y = x_2 \end{cases}}$$

Por otra parte, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} e = r - y \\ z = d + u \end{cases}$$

Se puede escribir entonces:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e = r - y = r - x_2 & \rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = -x_2 + r} \\ \dot{x}_2 = x_2 + z = x_2 + d + u = x_2 + d - x_1 + e = \cancel{x_2} + d - x_1 + r - \cancel{x_2} & \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = -x_1 + d + r} \\ \boxed{e = r - x_2} \\ z = d + u = d - x_1 + e = d - x_1 + r - y = d - x_1 + r - x_2 & \rightarrow \boxed{z = -x_1 - x_2 + d + r} \end{cases}$$

Matricialmente esto resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$$

La transferencia del sistema se puede obtener como:

$$\begin{aligned} T(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ T(s) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} 2(1-s) & 1-s \\ 1-s & -s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ T(s) &= \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} 2(1-s) & 1-s \\ 1-s & -s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Despejando se obtiene:

$$\boxed{T(s) = \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} s^2-2s+1 & s^2-s \\ s^2-s & -s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} (s-1)^2 & s(s-1) \\ s(s-1) & -s \end{bmatrix}}$$

Se puede ver que se producen cancelaciones de polos inestables, lo cual resulta también inestable. Sin embargo, en caso de asumir que las cancelaciones son matemáticamente exactas, cosa que en la realidad jamás puede ocurrir, una de las transferencias no presenta dicha cancelación. Por esta razón, como una de las transferencias no resulta estable, el sistema no es internamente estable. Asumiendo que la cancelación es exacta, la transferencia resulta:

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{\frac{s}{s+1}}{\underbrace{(s+1)(s-1)}_{\text{inestable}}} \\ \frac{s}{s+1} & -\frac{s}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

Se puede ver como la última resulta inestable.

¿Estas transferencias son el grupo de las cuatro (Gang of Four)? PREGUNTAR.

Otro punto de vista

Esto se puede pensar como la planta realimentada de la figura A.3, para el caso en que no presenta ruido de medición ($n = 0$).

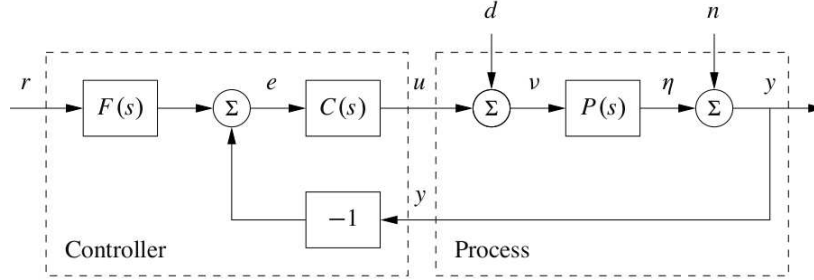


Figura A.3: Planta realimentada mediante un sistema de control.

De acuerdo con la figura A.3 se tiene que:

$$\begin{cases} P(s) = \frac{1}{s-1} \\ C(s) = \frac{s-1}{s} \\ F(s) = 1 \end{cases}$$

A partir de este enfoque, se puede obtener el grupo de las cuatro (Gang of Four):

$$\begin{cases} S = \frac{1}{1+PC} = \frac{1}{1+\frac{1}{s}} = \frac{s}{s+1} & \text{Sensibilidad} \\ PS = \frac{P}{1+PC} = \frac{s}{(s-1)(s+1)} & \text{Sensibilidad a la carga} \\ T = \frac{PC}{1+PC} = \frac{1}{s+1} & \text{Sensibilidad complementaria} \\ CS = \frac{C}{1+PC} = \frac{s-1}{s+1} & \text{Sensibilidad al ruido} \end{cases}$$

Se puede ver que la Sensibilidad a la carga es inestable, lo cual indica que el sistema no es internamente estable.

Observación: Se puede verificar que el grupo de las cuatro coincide con las 4 transferencias encontradas antes. La única diferencia se tiene en la sensibilidad complementaria o transferencia $T = \frac{PC}{1+PC}$. Creo que esto se debe a que esta transferencia corresponde a $T = \frac{Y}{R}$, lo cual no fue calculado en el enfoque anterior, ya que se pedía que las salidas fueran z y e . **PREGUNTAR.**

A.6. Ejercicio 6

Dado el problema del péndulo invertido descrito por

$$I\ddot{\theta} - mg\ell \sin \theta = u \quad I = 1 \quad mg\ell = 1$$

donde m es a masa, I el momento de inercia, u el torque de control y θ es el ángulo formado con el eje vertical.

1. Plantear el modelo en espacio de estados linealizado.
2. Diseñar un controlador por realimentación de estados observados que estabilice al sistema. Suponer que se mide el ángulo θ .
3. Calcular la transferencia del controlador.

Para linealizar el sistema, se utilizará el método del Jacobiano:

$$\ddot{\theta} = \frac{mg\ell}{I} \sin \theta + \frac{u}{I}$$

Dado que el ángulo θ se mide con respecto a la vertical, en el estado estacionario se cumple que:

$$\begin{cases} \theta_e = 0 \\ \dot{\theta}_e = 0 \\ u_e = 0 \end{cases}$$

Las variables de estado entonces resultan:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Linealizando alrededor del punto de equilibrio, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mg\ell}{I} \sin x_1 + \frac{u}{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, u) \\ F_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(x_1, x_2, u) \quad y = x_1 = \mathbf{G}(x_1, x_2, u)$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$\begin{cases} A = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mg\ell}{I} & 0 \end{bmatrix} \\ B = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \\ C = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_0, u_0} = 0 \end{cases}$$

El sistema linealizado entonces es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mg\ell}{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando las constantes se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ahora que se tiene el modelo del sistema, se debe verificar la controlabilidad y observabilidad del sistema, para poder diseñar un controlador basado en estados observados.

El sistema será controlable si su matriz de controlabilidad es de rango $n = 2$, y el sistema será observable si su matriz de observabilidad es de rango $n = 2$:

$$W_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que ambas matrices presentan $n = 2$ filas linealmente independientes, se puede asegurar que el sistema es controlable y observable.

El controlador a utilizar es:

$$u = -Kx + k_r r$$

Reemplazando en el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(-Kx + k_r r) \\ \dot{x} &= (A - BK)x + Bk_r r \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema controlado está gobernada por la matriz $A - BK$, y eligiendo correctamente el valor de K se pueden colocar los polos en la posición deseada. Asumiendo que se desean colocar los polos en $s_{1,2} = -1$, el polinomio característico buscado es:

$$p(s) = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 2 \\ p_2 = 1 \end{cases}$$

El polinomio característico del sistema es:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 1 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

La ganancia del controlador se puede obtener como:

$$K = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 \end{bmatrix} T$$

donde T es la transformación que lleva al sistema a su forma canónica controlable. La matriz de controlabilidad de la forma canónica es:

$$\tilde{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación entonces resulta:

$$T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ganancia del controlador resulta:

$$K = \begin{bmatrix} 2-0 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar:

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(sI - A + BK) = s^2 + 2s + 1 \rightarrow \text{Es lo buscado } \checkmark$$

Ahora es necesario diseñar el observador. El observador a utilizar es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Este observador no solo utiliza información de la entrada, sino que también utiliza información de la salida. El error del observador es:

$$e = x - \hat{x}$$

Se puede plantear:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}))$$

$$\dot{e} = (A - LC)(x - \hat{x}) = (A - LC)e$$

Por lo tanto, la dinámica del error se encuentra gobernada por la matriz $A - LC$. De esta forma, eligiendo correctamente la ganancia del observador L , es posible lograr que el error tienda a cero en estado estacionario, es decir que el estado observado converja al estado real. Una ubicación posible de los polos de la dinámica del error puede ser:

$$q(s) = (s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16 \rightarrow \begin{cases} q_1 = 8 \\ q_2 = 16 \end{cases}$$

La ganancia del observador se puede obtener como:

$$L = W_O^{-1} \tilde{W}_O \begin{bmatrix} q_1 - a_1 \\ q_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

donde \tilde{W}_O es la matriz de observabilidad de la forma canónica, que se puede obtener como:

$$\tilde{W}_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede calcular:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8-0 \\ 16+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar:

$$\begin{aligned}\det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 17 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= \det\left(\begin{bmatrix} s+8 & -1 \\ 16 & s \end{bmatrix}\right) \\ \det(sI - A + LC) &= s^2 + 8s + 16 \rightarrow \text{Es lo buscado } \checkmark\end{aligned}$$

Sin embargo, se pedía que el controlador utilizara información del estado observado, es decir que:

$$u = -K\hat{x} + k_r r$$

Por lo tanto, se puede plantear:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{x} &= Ax + B(-K\hat{x} + k_r r) \\ \dot{x} &= Ax + B(-K(x - e) + k_r r) \\ \dot{x} &= (A - BK)x + BKe + Bk_r r\end{aligned}$$

Se puede ver que la dinámica sigue siendo la misma (gobernada por $A - BK$), pero solo se introduce el error de observación, que como se demostró antes converge a cero en estado estacionario. La planta completa (que es la planta aumentada) resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \\ 0 \end{bmatrix} r \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la planta es:

$$\det(sI - \hat{A}) = \det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} = \det(sI - A + BK) \det(sI - A + LC) = p(s) \cdot q(s) \checkmark$$

En la figura A.4 se tiene el diagrama en bloques del sistema completo.

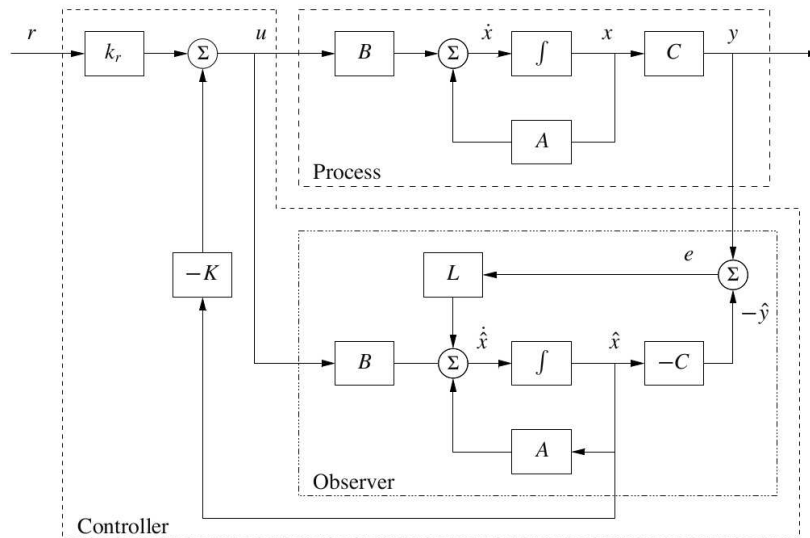


Figura A.4: Sistema controlado mediante estados observados.

En estado estacionario, se busca que el sistema se encuentre en equilibrio con $\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$. Por lo tanto, la señal de referencia debe ser nula: $r = 0$. El sistema entonces queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

La transferencia del controlador se puede obtener entonces como:

$$C(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}$$

Se puede plantear:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = A\hat{x} + B(-K\hat{x}) + Ly - LC\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= (A - BK - LC)\hat{x} + Ly\end{aligned}$$

Las ecuaciones que describen al controlador son:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \\ u = -K\hat{x} \end{cases}$$

La transferencia del controlador se puede encontrar como:

$$C(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}sI - A + BK + LC &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 17 & 0 \end{bmatrix} \\ sI - A + BK + LC &= \begin{bmatrix} s+8 & -1 \\ 18 & s+2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Al invertirlo se tiene:

$$\begin{aligned}(sI - A + BK + LC)^{-1} &= \begin{bmatrix} s+8 & -1 \\ 18 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \\ (sI - A + BK + LC)^{-1} &= \frac{1}{s^2 + 10s + 34} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -18 & s+8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Reemplazando todo:

$$\begin{aligned}C(s) &= \frac{1}{s^2 + 10s + 34} \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -18 & s+8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix} \\ C(s) &= \frac{1}{s^2 + 10s + 34} \begin{bmatrix} -2s + 32 & -2s - 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix} \\ C(s) &= \frac{1}{s^2 + 10s + 34} (8(-2s + 32) + 17(-2s - 18))\end{aligned}$$

Despejando se obtiene finalmente que la transferencia del controlador es:

$$C(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{-50(s+1)}{s^2 + 10s + 34}$$