

Modelos de Elección Discreta

Maximiliano Rosadio Z.

¿Qué son los Modelos de Elección?

- Son modelos diseñados para predecir las decisiones de individuos frente a varias opciones disponibles

Áreas de aplicación

- Transporte: Utilizados para predecir elecciones de modo de transporte (auto, bus, metro, bicicleta, etc.), evaluando cómo factores como el costo, el tiempo de viaje y la comodidad afectan la decisión del usuario.
- Marketing: Empleados para entender las preferencias de consumidores entre distintos productos, permitiendo a las empresas diseñar mejores estrategias comerciales.

Ejemplo 1

- Hogares que realizan compras de supermercado
- Decisión: Cuál de las 4 marcas de galletas compró cada hogar
- Como variables explicativas: precio de cada marca de galletas al momento de compra, contenido neto del paquete
- Notar las siguientes propiedades del ejemplo:
 - Las variables explicativas dependen del producto, NO de los individuos
 - Las opciones a las que se enfrentan los hogares no tienen orden
 - En contraste algunas aplicaciones tienen orden. Encuesta de consumidor: El producto X es malo, regular, bueno o excelente?
 - Los modelos Logit y Probit son usados para elecciones donde no influye el orden.

Ejemplo 2

- Individuos que elijen un modo de transporte: auto, bicicleta o transporte público.
- Variables explicativas:
 - Edad
 - Ingreso
 - Tiempo de viaje
- Notar que en este ejemplo Edad e Ingreso son características del individuo
- Los tiempos de viaje varían para distintos individuos y modos de viaje.
- Un individuo puede vivir en el centro de la ciudad (tiempo de viaje en bicicleta corto), o vivir en la periferia (tiempo de viaje en bicicleta largo).

Teoría de la Utilidad Aleatoria

- Los individuos escogerán la opción que les de la mayor utilidad
- U_{nj} : utilidad del individuo n al escoger la opción j , es función de las variables explicativas
- En el caso binomial (dos opciones) se dice que la *opción 1* se escoge si $U_1 \geq U_0$
- Que es lo mismo que $U_1 - U_0 \geq 0$
- La diferencia entre la utilidad de la opciones 0 y 1 es lo que importa
- En el caso de elección multinomial: suponemos un conjunto de opciones $O = \{0, 1, \dots, J\}$
- se debe escoger una opción como base (opción 0)
- $J + 1$ opciones
- La utilidad de todas las otras opciones es comparada con la utilidad de la opción 0
- No importa cual opción se elige como base

Framework

- La notación para la diferencia de utilidad de la opción j con la opción base se define como

$$Y_{nj}^* = U_{nj} - U_{n0}$$

- Y_{nj}^* es inobservable
- Sólo se observa la elección escogida Y_n
- $Y_n = j$ si el individuo n toma la opción j
- Se estudia la relación entre Y_{nj}^* e Y_n
- Si $Y_{nj}^* < 0$ para $j = 1, \dots, J$ entonces el individuo n elige la opción base por lo que $Y_n = 0$
- En el caso contrario, el individuo toma la opción que entrega el mayor valor para Y_{nj}^* e $Y_n = j$

Framework

- La utilidad percibida por un individuo n al elegir la opción j se modela a través de una componente observable y una componente de error aleatorio

$$Y_{nj}^* = \alpha_j + \beta^\top X_{nj} + \epsilon_{nj}$$

- Esto resulta en J regresiones diferentes: una para comparar cada opción con la opción base
- Cada opción tiene diferentes parámetros
- α_j es el intercepto de la regresión, e involucra la diferencia de utilidad entre la opción j y la opción 0.
- Donde X representa un vector con las variables observables explicativas.
- El error aleatorio captura todos los factores que puedan estar afectando en las elecciones de los individuos que no son observables o no están siendo capturados.
- β_{jk} es el coeficiente de la variable explicativa j de la regresión

Framework

- Nota: Los subíndices n y j aparecen en las variables explicativas.
- Las variables explicativas pueden ser características de los individuos o de las opciones.
- Ejemplo características de las opciones: el precio de cada marca de galletas podría explicar por qué un individuo elige una opción en particular.
- Ejemplo características de los individuos: la edad podría explicar la elección, por ej. las personas mayores tienden a elegir marcas de estilo antiguo.
- El modelo logit multinomial y el modelo probit multinomial pueden manejar variables explicativas de ambos tipos.
- Usualmente las variables explicativas serán atributos de las opciones o de los individuos pero no de ambos
- Por lo que generalmente será X_n o X_j
- Pero existen excepciones (tiempos de viaje Ejemplo 2)
- Los modelos logit condicional o probit condicional son usados cuando las variables explicativas son atributos de las opciones

Modelo Logit y Probit

$$Y_{nj}^* = \alpha_j + \beta^\top X_{nj} + \epsilon_{nj}$$

- Tanto el modelo logit multinomial como el probit multinomial se basan en este conjunto de J regresiones, pero difieren en los supuestos sobre los errores.
- Modelo probit multinomial: distribución normal multivariada.
- $P(Y_n = i)$ puede obtenerse utilizando las propiedades de la distribución normal.
- Logit multinomial: distribución de valor extremo de tipo 1.
- Punto clave: en el **modelo logit** multinomial, la probabilidad de que el individuo n elija la opción i tiene **forma cerrada**:

$$P(Y_n = i) = \frac{e^{\beta^\top X_{ni}}}{\sum_{j \in J} e^{\beta^\top X_{nj}}} = \frac{e^{\beta^\top X_{ni}}}{1 + \sum_{j=1}^J e^{\beta^\top X_{nj}}}$$

- Nota: el 1 en la ecuación aparece debido a que la opción base (índice 0) tiene utilidad 0

Modelo Logit y Probit

- Hay un error diferente en cada una de las J regresiones que involucran cada diferencia de utilidad.
- Los errores en diferentes ecuaciones podrían estar correlacionados entre sí.
- La distribución normal multivariada permite esto.
- Esto le otorga al modelo probit multinomial propiedades flexibles y adecuadas.

Estimación de parámetros

- La estimación de los parámetros del modelo se realiza mediante máxima verosimilitud:

$$LL(\beta) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^J y_{ni} \ln P(Y_n = i)$$

- y_{ni} es una variable binaria que toma el valor de 1 cuando el individuo n elige la opción i

Resumen

- Los modelos de elección multinomial se utilizan cuando la variable dependiente es la elección entre varias opciones.
- El probit multinomial y el logit multinomial son los modelos de elección multinomial más populares.
- Si la elección es entre $J + 1$ opciones, ambos tendrán J ecuaciones.
- La estimación por máxima verosimilitud es la forma más común de estimar todos estos modelos.
- Las variables explicativas pueden ser características de las opciones o de los individuos (o de ambos) y pueden dar lugar a diferentes modelos (recomendable profundizar en qué clase modelo conviene para cada caso de estudio).