Modelos Lineales con R
Práctica 4: Modelos Lineales Mixtos

Profesor: Andrés García Medina
andres.garcia.medina@uabc.edu.mx

Fecha de entrega: jueves 11 de abril, 2024 (12pm).

Instrucciones: Subir un documento pdf a classroom con las respuestas de cada uno de los ejercicios solicitados. Adjunta el código fuente en formato `.r` o `.ipynb`. Justificar detalladamente cada una de sus respuestas.

Ejercicio 1 (20 pts)

Escriba los siguientes modelos en la forma general,

$$y = X\beta + Zb + \epsilon, \quad b \sim N(0, \Sigma_\theta), \quad \epsilon \sim N(0, \Sigma_\phi) \tag{1}$$

donde Z es una matriz que contiene coeficientes conocidos que determinan cómo la respuesta y depende de los efectos aleatorios b, es decir, es una matriz modelo de diseño para los efectos aleatorios. Además, Σ_θ es la matriz de covarianza de los efectos aleatorios b. Debes asegurarte de que X esté especificada para que los efectos fijos sean identificables (no es necesario hacer esto para Z).

- El modelo del ejemplo guía 1, suponiendo sólo dos observaciones por árbol.
- El modelo del ejemplo guía 3 (ec. 4), suponiendo que $I = 2, J = 3, K = 3$.

Ejercicio 2 (40 pts)

Analice los datos `Machines` del ejemplo guia 3 (ec. 4) a través de la función `lme`.

(a) Intente encontrar el modelo más apropiado, teniendo cuidado de examinar los gráficos de verificación del modelo apropiado.

(b) Asegúrese de probar si la interacción de la ec. 4 es apropiada.

(c) De manera similar, pruebe si sería apropiada una estructura de efectos aleatorios más compleja: específicamente una en la que la interacción máquina-trabajador esté correlacionada con la del trabajador.

(d) Si algún dato parece particularmente problemático en los gráficos de verificación, repita el análisis y vea si las conclusiones cambian.

Ejercicio 3 (40 pts)

Repitamos el ejemplo guiado de los rieles usando un enfoque de máxima verosimilitud. En este caso: $\Sigma_\theta = I\sigma_b^2$, $\Sigma_\phi = I\sigma^2$, por lo que los parámetros $(\theta, \phi) = (\log\sigma, \log\sigma_b)$. La siguiente función toma como entrada:(θ, ϕ), X, Z, y, y obtiene como salida la función de verosimilitud (negativa) con los atributos $(\hat{\beta}, \hat{b})$:

```
llm <- function(parameters, X,Z,y) {
    sigma.b <- exp(parameters[1])
    sigma <- exp(parameters[2])
    n <- length(y); pr <- ncol(Z); pf <- ncol(X)
    X1 <- cbind(X,Z)
    ipsi <- c(rep(0,pf),rep(1/sigma.b^2,pr))
    b1 <- solve(crossprod(X1)/sigma^2+diag(ipsi),t(X1)%*%y/sigma^2)
    ldet <- sum(log(diag(chol(crossprod(Z)/sigma^2 + diag(ipsi[-(1:pf)])))))
    l <- (-sum((y-X1%*%b1)^2)/sigma^2 - sum(b1^2*ipsi) - n*log(sigma^2)
        - pr*log(sigma.b^2) - 2*ldet - n*log(2*pi))/2
    attr(l,"b") <- as.numeric(b1)
    return(-l)
}
```

(a) Explique cada una de las lineas del código de la función con base en la teoría revisada en el curso.

(b) Determine X, Z, y de manera explicita.

(c) Utilice la función `optim` para optimizar la función de verosimilitud (`llm`) fijando como valores iniciales: `parameters` $= c(0, 0)$.

(d) Determine los valores óptimos de $(\sigma_b^2, \sigma^2$, y compare con los obtenidos en el ejemplo guía correspondiente. ¿A que se deben las posible diferencias numéricas?