[1] Dadas n observaciones x_i, y_i, encuentre la estimación ~~por~~ de mínimos cuadrados de β en el modelo lineal: ~~[illegible]~~

$$y_i = \mu_i + \varepsilon_i \quad \text{donde} \quad \mu_i = \beta$$

$$y_i = \beta + \varepsilon_i$$

¿Estimación de mínimos cuadrados de β?

$$\mu_1 = \beta \qquad y_1 = \mu_1 + \varepsilon_1$$
$$\mu_2 = \beta \qquad y_2 = \mu_2 + \varepsilon_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\mu_n = \beta \qquad y_n = \mu_n + \varepsilon_n$$

de manera matricial

$$\underset{(n\times 1)}{\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}} = \underset{(n\times 1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} \beta$$

$$\underset{(n\times 1)}{\mu} = \underset{(n\times 1)}{X} \underset{(1\times 1)}{\beta} \qquad (n\times p) \;\; \hookrightarrow p = 1$$

$$y \sim (N, I, \sigma^2)$$

- Estimación de $\hat{\beta}$

se estima β minimizando

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_i)^2 = \boxed{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta)^2}$$

$$= \| y - \mu \|^2 = \| y - X\beta \|^2$$

~~Por otro lado~~ $\quad (1\times 1)$

~~$X = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_f R \longrightarrow R = [r]$~~

~~$Q_f = [1]$~~

$\Downarrow$

~~$X = 1 [r]$~~

$S = \sum (y_i - \beta)^2$

Minimizamos

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \sum (y_i - \hat{\beta})^2 = \sum \frac{\partial}{\partial\beta} (y_i - \hat{\beta})^2$$

$$= \sum 2 (y_i - \hat{\beta}) \cdot \frac{\partial}{\partial\beta} (y_i - \hat{\beta})$$

$$= 2 \sum (y_i - \hat{\beta}) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow -2 \sum (y_i - \hat{\beta}) = 0$$

$$\sum y_i - \sum \hat{\beta} = 0$$

$$\sum y_i = \sum \hat{\beta}$$

$$\sum y_i = n\hat{\beta}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$\therefore \hat{\beta} = \bar{Y}$$

$\therefore$ El estimador de β es la media de Y

$\boxed{2}$

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

- Dos variables explicativas:
  Una de tipo factor y otra continua

$$Y_i = \alpha + \beta_j + \gamma x_i + \varepsilon_i$$

si la observación i está asociada al factor j

- asuma $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y que

$$Y_1 = \alpha + \beta_1 + \gamma 0.2$$
$$Y_2 = \alpha + \beta_1 + \gamma 0.4$$
$$Y_3 = \alpha + \beta_2 + \gamma 0.5$$
$$Y_4 = \alpha + \beta_2 + \gamma 0.3$$
$$Y_5 = \alpha + \beta_2 + \gamma 0.4$$
$$Y_6 = \alpha + \beta_2 + \gamma 0.7$$

$$Y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.2 \\ 1 & 1 & 0 & 0.4 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0.3 \\ 1 & 0 & 1 & 0.4 \\ 1 & 0 & 1 & 0.7 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\beta} + \varepsilon$$

3

- Valores de deformación $\underline{y_i}$ en mm
- 3 Aleaciones distintas bajo diferentes cargas $\underline{x_i}$ en Kg
- Cuando $x_i = 0 \longrightarrow y_i = 0$ (NO CARGA → NO DEFORMACIÓN)
- Deformación $\propto$ Carga (linealmente)
  de igual forma para todo $x_i \longrightarrow$ Esperado
- Deformación $\propto$ Carga (cuadráticamente) → observado

▷ Defina $\quad y = X\beta + \varepsilon$

- las mismas $\underline{6 \text{ cargas } x_i}$ se aplican a cada $\underline{\text{aleación}} \rightarrow 3$

Aleaciones → β

$$y_1 = x_1 \beta_1 \qquad y_4 = x_2 \beta_1 \qquad y = x_6 \beta_1$$

$$y_2 = x_1 \beta_2 \qquad y_5 = x_2 \beta_2 \quad \ldots \quad y = x_6 \beta_2$$

$$y_3 = x_1 \beta_3 \qquad y_6 = x_2 \beta_3 \qquad y = x_6 \beta_3$$

$\mu_1 = X_1 \beta_1$

$\mu_2 = X_1 \beta_2$

$\mu_3 = X_1 \beta_3$

$\mu_4 = X_2 \beta_1$

$\mu_5 = X_2 \beta_2$

$\mu_6 = X_2 \beta_3$

$\mu_7 = X_3 \beta_1$

$\mu_8 = X_3 \beta_2$

$\mu_9 = X_3 \beta_3$

$\vdots$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

$(18 \times 6)(6 \times 1) = 18 \times 1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$[x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2 \ldots]$

$\cancel{A \quad B}$

$\cancel{(18\times1) \quad 1\times}$

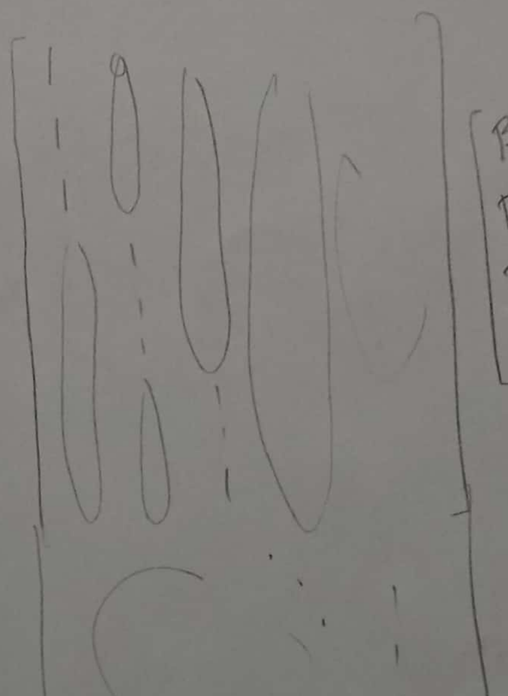
$\cancel{A^T \quad B}$

$\cancel{(1\times18) \quad (18\times1)}$

$[x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2, \ldots]$

$x_1\ x_1\ x_1\ x_2\ x_2\ x_2$

B



$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

β

$$\begin{bmatrix} — A^T — \\ — A^T — \\ \vdots \\ — A^T — \end{bmatrix} B \beta = \mu$$

$1 \quad X_1 \quad X_1^2$
$1 \quad X_1 \quad X_1^2$
$1 \quad X_1 \quad X_1^2$
$1 \quad X_2 \quad X_2^2$
$1 \quad X_2 \quad X_2^2$
$1 \quad X_2 \quad X_2^2$
$1 \quad X$
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1

$\mu_i = \alpha +$

$$\mu_i = \alpha + \beta_j x_i$$

$$\mu_{ij} = \alpha + \beta_j x_i +$$