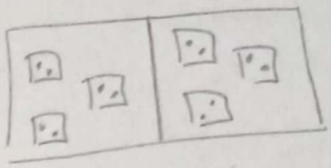
MLR: PRÁCTICA #4

EJERCICIO 1:

Escriba los siguientes modelos en la forma general:

$$y = X\beta + Zb + \varepsilon \quad , \quad b \sim N(0, \Sigma_\theta) \quad \varepsilon \sim N(0, \Sigma_\phi)$$

- El modelo del ejemplo guía 1, suponiendo 2 observaciones por árbol.



$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$y_i = \alpha_j + \beta_k + \varepsilon_i$$

si la observación i es para el nivel j de CO_2 y el árbol k

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

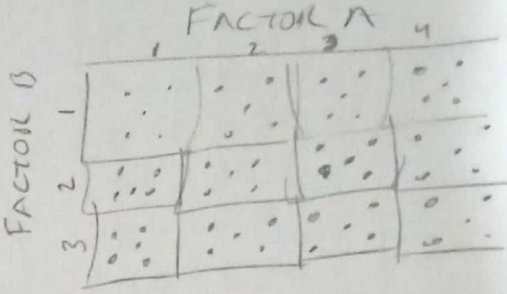
- El modelo del ejemplo guía 3, suponiendo que $I = 2,\ J = 3,\ K = 3$

$i = 1, \dots I$

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$i = 1, 2, 3, 4$

- K-ésima observación en el nivel i de efecto fijo A y el nivel j de efecto aleatorio B



$j = 1, 2, 3, 4$

$j = 1, \dots J$

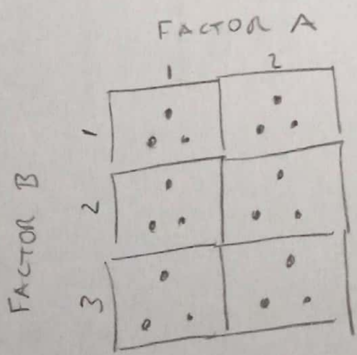
- μ: Media global poblacional
- $\alpha_i \rightarrow I$ efectos fijos para el factor A
- $b_j \rightarrow J$ efectos aleatorios para el factor B
- $(ab)_{ij} \rightarrow IJ$ interacciones

▷ Si $I = 2,\ J = 3,\ K = 3$

$i = 1, 2$

$j = 1, 2, 3$

$K = 1, 2, 3$



#3

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$i = 1, 2 \qquad j = 1, 2, 3 \qquad ij = 11, 12, 13, 21, 22, 23$

$$
\begin{array}{l}
(\alpha b)_{11} \\ \\ \\ (\alpha b)_{12} \\ \\ \\ (\alpha b)_{13} \\ \\ \\ (\alpha b)_{21} \\ \\ \\ (\alpha b)_{22} \\ \\ \\ (\alpha b)_{23} \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{113} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{123} \\ Y_{131} \\ Y_{132} \\ Y_{133} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{213} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{223} \\ Y_{231} \\ Y_{232} \\ Y_{233} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}
+
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
+
\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} (\alpha b)_{11} \\ (\alpha b)_{12} \\ (\alpha b)_{13} \\ (\alpha b)_{21} \\ (\alpha b)_{22} \\ (\alpha b)_{23} \end{pmatrix}
$$

$$\mu + \alpha_1 + b_1 + (\alpha b)_{11}$$

$$\mu + \alpha_1 + b_2 + (\alpha b)_{12}$$

$$\mu + \alpha_1 + b_3 + (\alpha b)_{13}$$

$$\mu + \alpha_2 + b_1 + (\alpha b)_{21}$$