Table des matières

3 $(G_i)_{i \in I}$ une famille de ssgr de G
$\bigcap_{i \in I} G_i$ est un ss gr de G

3 $H_1 \cup H_2$ est un ssgr de $G \Leftrightarrow \begin{cases} H_1 \subset H_2 \\ H_2 \subset H_1 \end{cases}$ ou

4 Les ssgr de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$

7 déf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
9 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un gr abélien

10 $f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un
$c = \bar{x} \longmapsto \exp\left(\frac{2i\pi x}{n}\right)$ isomorphisme

11 $f_a : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ est un mor de gr
$k \longmapsto a^k$
$\mathrm{Im}(f_a) = \langle a \rangle$: ssgr engendré par a

12 $\mathrm{Ker}\, f_a$ est un ss gr de $\mathbb{Z}$
$\exists!\, n \in \mathbb{N}$ tq $\mathrm{Ker}\, f_a = n\mathbb{Z}$
n est l'ordre de a
si $n = 0$ alors a d'ordre infini

12 a d'ordre infini $\psi_a\ \mathbb{Z} \longrightarrow \langle a \rangle$, $k \longmapsto a^k$ est un isomorphisme

13 a d'ordre n, $\forall k \in \mathbb{Z}, (a^k = e_G \Leftrightarrow n | k)$

14 a d'ordre n, $n = \mathrm{card} \langle a \rangle$

15 l'ordre d'un element divise le cardinal de Gr.

Chap 1

15 Théorème de Lagrange (HP)

G un groupe fini, H un ss gr de G

card $H \mid$ card G

16 G est monogène $\Leftrightarrow \exists a \in G,\ G = \langle a \rangle$

a est alors appelé un generateur de G

16 Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$

16 groupe monogène fini $\Leftrightarrow$ groupe cyclique

16 Tout groupe cyclique de card^n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

17 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $\mathbb{U}_n$ sont monogènes.

leur generateurs sont k où $k \wedge n = 1$

les generateurs de $\mathbb{U}_n$ sont les racines primitives $n^{\text{ème}}$ de l'unité

19 $(G_i)_{i \in I}$ famille des ssgr qui contiennent A

$\langle A \rangle = \bigcap_{i \in I} G_i$

20 L'ensemble A est generateur $\Leftrightarrow \langle A \rangle = G$

20. $\langle A \rangle = \{ y \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_n \in A,$
$\exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ Tq $y_1 = x_1^{\varepsilon_1} * \dots * x_n^{\varepsilon_n} \}$

16 monogène $\Rightarrow$ abélien

6 φ un morphisme de G dans H
Ker φ est un ss gr de G
Im $\varphi = \varphi(G)$ est un ss gr de H

1 Def Anneau

2 $(A_1 \times \dots \times A_n, +, \cdot)$: anneau produit

2 Def ss-an, $\begin{cases} 1_A \in B \\ \forall x, y \in B \begin{cases} x - y \in B \\ xy \in B \end{cases} \end{cases}$

3 $I \subset A$ est un idéal de $(A, +, \cdot)$

ssi $\begin{cases} I \text{ ssgr de } (A, +) \\ \forall x \in I, \forall a \in A, \; ax \in I \end{cases}$

4 A ann comm, $a \in A$

$aA = \{ax, \; x \in A\}$: idéal engendré par a

4 I un idéal, I est principal

ssi $\exists a \in A, \; I = aA$

5 A est principal $\Leftrightarrow$ tout idéal de A est principal

5 $I + J = \{a + b, \; a \in I, \; b \in J\}$ est un idéal

$I \cap J$ est un idéal

6 $(A, +, \cdot)$ est intègre $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{commutatif} \\ \forall x, y \in A, \; xy = 0_A \Rightarrow \begin{cases} x = 0_A \\ \text{ou} \\ y = 0_A \end{cases} \end{cases}$

6 $a | b \Leftrightarrow bA \subset aA \Leftrightarrow b \in aA$

$|$ est reflexive et transitive

$a | b$ et $b | a \Leftrightarrow \exists u \in A^*, \; b = au \Leftrightarrow a$ et b associés

7 $f : A \to B$ est un mor d'ann $\Leftrightarrow \begin{cases} f(1_A) = 1_B \\ \forall a, b \in A, \; f(a+b) = f(a) + f(b) \\ \quad \text{et } f(ab) = f(a) f(b) \end{cases}$

Chap2

8 $f : A \to B$ mor d'ann, $\mathrm{Ker}\, f$ est un idéal de A
et $\mathrm{Im}\, f$ est un ss-ann de B

9 $(A^*, \cdot)$ est un groupe
ses elements sont les unités de A

10 Def corps : anneau commutatif inversible
Def sscorps,

$$F \subset K \text{ sscorps} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x, y \in F, \ x - y \in F \\ \forall x, y \in F \setminus \{0\}, \ x y^{-1} \in F \end{cases}$$

12 Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$

12 $$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$$
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$$

14 Arithmétique, nb premiers

17 $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal
ses idéaux sont du type $P_0 \mathbb{K}[X]$
avec P_0 unitaire ou nul

20 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

21 $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible $\Leftrightarrow$ ses seul diviseurs sont les pols cte non nul et ses pols associés.

21 $P \in \mathbb{K}[X]$ est irred de deg ≥ 2
P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$

22 ∘ $\mathbb{K}$ est algébriquement clot

? $\iff$ Tout pol non cte admet une racine

∘ ∘ $\iff$ tout pol est scindé

$\iff$ les seuls pols irred sont les pols de deg 1

22 Un pol irred est premier avec un pol qu'il ne divise pas.

22 Théorème de décomposition

24 $\mathbb{C}[X]$: $\mathbb{C}$ est algébriquement clot

25 $\left.\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}\right\}$ est un morphisme d'anneau surjectif.

27 sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$, $\hat{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$\hat{x}$ est inverille pour $\cdot$

$\iff$ $\hat{x}$ n'est pas un diviseur de zero pour $\cdot$

$\iff$ $x \wedge n = 1$

28 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un corps $\iff$ n premier

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \iff \mathbb{F}_p$

28 $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \cdot)$ est un groupe monogène

29 $n \wedge k = 1$, $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{Z}/nk\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \\ & \hat{x} & \longmapsto & (\bar{x}, \tilde{x}) \end{array}$

est un isomorphisme d'anneau.

$un + vk = 1$, $\begin{array}{cccc} f^{-1} : & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/nk\mathbb{Z} \\ & (\bar{x}, \tilde{y}) & \longmapsto & \widehat{vkx + umy} \end{array}$

40 $f : A \to B$ mor d'algèbre $\iff \left\{\begin{array}{l} f \text{ morphisme d'ann} \\ f \text{ application linéaire} \end{array}\right.$

32 $m_1, \dots, m_k \geqslant 2$, 2 à 2 premiers

$$\mathbb{Z}/m_1 \cdots m_k \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$$
$$\hat{x} \longmapsto \left(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^k\right)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

32 $(S) \begin{cases} x \equiv a_1 \, [m_1] \\ \dots \\ x \equiv a_k \, [m_k] \end{cases}$ $\exists x_0 \in \mathbb{Z}$, Tel que $(S) \Leftrightarrow x \equiv x_0 \, [m_1 \cdots m_k]$

et si

pour $i \in [\![1, k]\!]$ alors $x_0 = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i v_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} m_j\right)$

$u_i m_i + v_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} m_j = 1$

34 $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ Indicatrice d'Euler

$$n \longmapsto \operatorname{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid n \wedge k = 1\}$$
$$\left(= \operatorname{card} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\right)$$

35 φ est une fonction multiplicative

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \ a \wedge b = 1 \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

37 p premier, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

38 Théorème d'Euler, $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{Z}$,

$$a \wedge n = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \, [n]$$

39 $(A, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre

$\Leftrightarrow \begin{cases} (A, +, \times) \text{ est un anneau} \\ (A, +, \cdot) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall a, b \in A, \ \lambda \cdot (a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) \end{cases}$

B est une sous-algèbre de A

39 $\Leftrightarrow \begin{cases} (B, +, \times, \cdot) \ \mathbb{K}\text{-algèbre} \\ 1_A = 1_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ ss-ann} \\ B \text{ ss-ev} \end{cases}$

2 Def norme sur E un $\mathbb{K}$-ev : $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$
séparation, homogénéité, ineg Triang

3 $d(u,v) = N(u-v)$
$A \subset E$, $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$u \longmapsto \inf\{d(u,a), a \in A\}$
$|d_A(u) - d_A(v)| \leq d(u,v)$

4 def boule ouverte, fermé & sphère

5 $[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda) b, \lambda \in [0,1]\}$
$A \subset E$ est convexe $\Leftrightarrow \forall a, b \in A, [a,b] \subset A$

6 $E_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$
$f : I \to \mathbb{R}$ convexe $\Leftrightarrow$ E_f convexe

7 Toutes boules fermée ou ouverte est convexe.

8 def bornée
$\delta(A) = \sup\{d(x,y), (x,y) \in A^2\}$

10 X un ensemble, $f : X \to E$ bornée
$\Leftrightarrow$ $f(X)$ bornée

10 $B(X,E)$: les applications de X dans E bornées
est un $\mathbb{K}$-ev

11 La norme infini $\|\cdot\|_\infty$
si $f \in B(X,E)$, $\|f\|_\infty = \sup\{N(f(x)), x \in X\}$

Chap 3

$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, $\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \sup\{|x_i|, 1\leqslant i\leqslant n\}$
$u\in \ell^\infty(\mathbb{K}) = B(\mathbb{N},\mathbb{K})$, $\|u\|_\infty = \sup\{|U_n|, n\in\mathbb{N}\}$
$f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x\in[a,b]\}$

13 norme produit : $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ des evn
$E=E_1\times\dots\times E_p$, $u=(u_1,\dots,u_p)\in E$
$N_\infty(u)=\max\{N_j(u_j), 1\leqslant j\leqslant p\}$
(E,N_∞) evn produit

14 norme $\|\cdot\|_1$
$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$\ell^1(\mathbb{K})=\{(U_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum|U_n| \text{ converge}\}$
$u\in\ell^1(\mathbb{K})$, $\|u\|_1=\sum_{n=0}^{\infty}|U_n|$

$f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|\,dt$
(convergence moyenne)

17 norme $\|\cdot\|_2$: $\forall u\in E$, $\|u\|_2=\sqrt{\langle u|u\rangle}$
norme euclidienne associé au ps $\langle\cdot|\cdot\rangle$

$u\in\mathbb{R}^n$, $\|u\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}$

$\ell^2(\mathbb{R})=\{U_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum U_n^2 \text{ converge}\}$
$u\in\ell^2(\mathbb{R})$, $\|u\|_2=\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}U_n^2}$

$f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}$
convergence moyenne quadratique

19 N, N' deux normes sur E, N,N' équivalentes
$\iff \exists\alpha,\beta>0, \forall u\in E, \alpha N(u)\leqslant N'(u)\leqslant \beta N(u)$

20 N est plus fine que N'

$\Leftrightarrow \exists \beta > 0, \forall u \in E, N'(u) \leqslant \beta N(u)$

20 N, N' deux normes équivalentes sur E ; $f : X \to E$

f bornée pour $N \Leftrightarrow f$ bornée pour N'

21 $\exists (U_n) \in E^{\mathbb{N}}, \ \dfrac{N(U_n)}{N'(U_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $\dfrac{N(U_n)}{N'(U_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ N et N' ne sont pas équivalentes

21 E de dim finie $\Rightarrow$ toutes les normes sont équivalentes

23 def produit scalaire sur $\mathbb{C}$

24 norme hermitienne associé au ps φ

$\|u\|_2 = \sqrt{\varphi(u,u)}$

26 ainsi sur $\mathbb{C}^n$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}$$

sur $\ell^2(\mathbb{C})$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |u_i|^2}$$

sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$$

1 def convergence avec les entiers méchant.

0 Théorème de Césaro
$(U_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ell \in \mathbb{K}, \quad V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} U_i$
$U_n \longrightarrow \ell \Rightarrow V_n \longrightarrow \ell$

0 Soient $a, b \in \mathbb{K}$,
$E = \{(U_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n\}$
E est un $\mathbb{K}$-ev de dim 2
et $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (U_n) & \longmapsto & (U_0, U_1) \end{array}$ est un isomorphisme

0 $f : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $U_0 \in J$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$
1 déterminer $I \subset \mathbb{R}$ tel que
$U_0 \in I$ et I stable par f
2 etudier f sur I
etudier $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur I
a) si f croissante sur I, (U_n) monotone
b) si f decroissante sur I,
(U_{2n}) et (U_{2n+1}) monotones de sens contraire
3 si (U_n) converge et f continue
alors $(U_n) \longrightarrow \ell$ tel que $f(\ell) = \ell$

0 def convergence dans un evn

0 $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge pour $N \Leftrightarrow \exists \ell \in E, U_n \xrightarrow{N} \ell$

0 N_1, N_2 deux normes équivalentes, $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$
$U_n \xrightarrow{N_1} \ell \iff U_n \xrightarrow{N_2} \ell$

Chap 4

- N_1, N_2 deux normes non équivalentes alors $\exists (U_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ Tel que (U_n) converge pour l'une ~~N_1~~ et diverge pour ~~N_2~~ l'autre

- $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $x_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,n} b_i$, $l = \sum_{i=1}^{p} l_i b_i$

$$x_n \longrightarrow l \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \ \alpha_{i,n} \longrightarrow l_i$$

- Cas de l'evn produit

- $U_n \xrightarrow{N} l \implies N(U_n) \longrightarrow N(l)$
  mais réciproque fausse

- l est une valeur d'adhérence de (U_n)
  $\iff G_\varepsilon = \{ p \in \mathbb{N}, \ N(U_p - l) < \varepsilon \}$ est infini $\forall \varepsilon > 0$
  $\iff \exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ extractrice, $U_{\varphi(n)} \xrightarrow{N} l$

- (U_n) converge $\implies$ (U_n) possède une unique valeur d'adherence (sa limite)
- Théorème de Bolzano-Weierstrass

3 E de <u>dim finie</u>, $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$ <u>bornée</u>
(U_n) converge $\iff$ (U_n) possède une unique valeur d'adhérence

Ici, E est de <u>dim finie</u>

3 $U_n \not\to 0 \Rightarrow \sum U_n$ diverge

4 $U_n = \sum_{k=1}^{p} v_{k,n} b_k$

$\sum U_n$ converge $\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \sum v_{k,n}$ cv

4 séries géométriques et de Riemann.

5 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$

6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

7 série exponentielle: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

9 séries de Bertrand

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$ cv $\Leftrightarrow a > 1$ ou $(a = 1$ et $b > 1)$

11 $\sum U_n$ cv absol $\Leftrightarrow \sum N(U_n)$ converge

11 (E de dim finie)

$\sum U_n$ cv absol $\Rightarrow \sum U_n$ cv

et $N\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} N(U_n)$

13 $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, n \in \mathbb{N},$

$(n \geq n_0$ et $p \geq n_0) \Rightarrow N(a_n - a_p) \leq \varepsilon$

14 Toute suite de Cauchy est bornée

Toute suite convergente est de Cauchy

Chap 5

14 Def espace de Banach (ev complet)
$\Leftrightarrow$ Toute suite de Cauchy est convergente

14 Tout evn de dim finie est complet

15 (E de dim finie)
$\sum U_n$ vérifie le critère de Cauchy
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}$
$n \geqslant n_0 \Rightarrow N\left(\sum_{k=n}^{n+p} U_k\right) \leqslant \varepsilon$
$\Rightarrow \sum U_n$ converge

16 $\sum U_n$ est semi-convergente $\Leftrightarrow \sum U_n$ cv mais pas absol

16 $U_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ decroissante de limite nulle
$\sum (-1)^n U_n$ converge et $\forall n, |R_n| \leqslant U_{n+1}$

17 Transformation d'Abel
$\sum a_n b_n \in (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ Tq $\begin{cases} b_n \longrightarrow 0 \text{ et } b_n \in \mathbb{R} \\ b_n \searrow \text{ et } \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ bornée} \end{cases}$
alors $\sum a_n b_n$ cv

20 N une norme sur E,
N est une norme matricielle (ou d'algèbre)
$\Leftrightarrow \forall A, B \in E, \ N(AB) \leqslant N(A)N(B)$

21 $A \in M_p(K)$, $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

25 $N(A) < 1$, $\sum A^n$ cv absol
et $\sum_{n=0}^{\infty} A^n (I_p - A) = I_p$

28 comparaison série integrale

29 $f \in \mathcal{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ decroissant

$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ cv $\Longleftrightarrow \sum_{n \geq \lfloor a \rfloor + 1} f(n)$ converge

30 Théorème de sommation des relations de comparaison

- pour $\sum U_n$ divergent
- pour $\sum U_n$ convergent c'est le reste que l'on peut comparer

1 Def denombrable, au plus denombrable

2 les parties infini de $\mathbb{N}$ sont dénombrables

2 E un ensemble est au plus dénombrable
$\Leftrightarrow$ E est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$

3 $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$, ($\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$) sont denombrables

3 Un produit carthésien $\boxed{\text{fini}}$ d'ensemble denombrable est denombrable.

4 Toute réunion au plus denombrable d'ensembles au plus denombrable est au plus denombrable.

6 $\mathbb{R}$, $P(\mathbb{N})$ ne sont pas denombrable

7 E un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et P(E)

9 $(u_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow \left\{\sum_{j\in J} |u_j|,\ J \subset I,\ J \text{ fini}\right\}$ majoré

si $(u_i)_{i\in I}$ sommable :

9 $\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{j\in J} |u_j|,\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\}$ (def)

9 $u_i^+ = \frac{1}{2}(|u_i| + u_i)$ $\quad u_i^- = \frac{1}{2}(|u_i| - u_i)$

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ + \sum_{i\in I} u_i^-$$ (prop)

9 $\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(u_k) + \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(u_k)$ (def)

10 $\left.\begin{array}{l} \forall i \in I,\ |v_i| \leq |u_i| \\ (u_i)_{i\in I} \text{ sommable} \end{array}\right\}$ $(v_i)_{i\in I}$ sommable

Chap 6

10 Théorème de sommation par paquet :

$$I = \bigsqcup I_k$$

$(U_i)_{i\in I}$ est sommable

$$\iff \begin{cases} \forall k,\ (U_i)_{i\in I_k} \text{ est sommable} \\ \left(\sum_{i\in I_k} U_i\right)_{k\in K} \text{ est sommable} \end{cases}$$

et ainsi $\displaystyle\sum_{i\in I} U_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} U_i\right)$

11 $(U_i)_{i\in I}$ sommable, $\{i\in I \mid U_i \neq 0\}$ son support est au plus dénombrable.

12 $(U_i)_{i\in I}$ sommable, $\sigma : I \longrightarrow I$ bijective

$(U_{\sigma(i)})_{i\in I}$ sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} U_i = \sum_{i\in I} U_{\sigma(i)}$

12 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\iff \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ absol conv

et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$

14 ainsi commutativité de l'absolue convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_{\sigma(n)} \quad \text{avec } \sum_{n\geq 0} U_n \text{ absol conv}$$

15 bons paquets de familles doubles

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{(n,k),\ k\in\mathbb{N}\}$$

$$= \bigsqcup_{s\in\mathbb{N}} \{(n,k)\in\mathbb{N}^2 \mid n+k = s\}$$

$(a_{n,k})$ sommable $\iff \displaystyle\sum_{s\geq 0}\sum_{n=0}^{s} |a_{n,s-n}|$ converge

16 Théorème de Fubini

si $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k}|\right)$ existe

alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k})\right)$ existe et il y a égalité

1 $A \subset E$ est un ouvert
$\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists r > 0, \; B(a, r) \subset A$
$\Leftrightarrow \forall a \in A$, A est un voisinage de a

def voisinage

réunion d'ouverts $\longrightarrow$ ouvert
intersection finie d'ouvert $\longrightarrow$ ouvert
produit carthésien fini d'ouvert $\longrightarrow$ ouvert

4 $B \subset E$ est un fermé
$\Leftrightarrow$ $C_E B$ est un ouvert
$\Leftrightarrow \forall (U_n) \in B^{\mathbb{N}}$ Tq $U_n \longrightarrow l$, $l \in B$

7 réunion finie de fermés $\longrightarrow$ fermé
intersection de fermé $\longrightarrow$ fermé
produit carthésien fini de fermé $\longrightarrow$ fermé

8 A est fini $\Rightarrow$ A est fermé
8 A ouvert et fermé $\Leftrightarrow A = E$ ou $A = \emptyset$
9 A sev de dim finie $\Rightarrow$ A fermé

10 a est un point interieur de A
$\Leftrightarrow$ A est un voisinage de a
$\Leftrightarrow \exists r > 0, \; B(a, r) \subset A$

10 def $\mathring{A}$ l'interieur de A

10 (A_i) les ouverts inclus dans A
$\mathring{A} = \cup A_i$; $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A
A ouvert $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

Chap 7

12 a est un point adhérent à A
$\iff \forall r>0,\ B(a,r)\cap A \neq \emptyset$
$\iff$ a n'est pas intérieur à $C_E A$
$\iff \exists (U_n) \in A^{\mathbb{N}},\ U_n \longrightarrow a$

13 def $\overline{A}$ l'adhérence de A

13 $(U_n)\in E^{\mathbb{N}}$, l'ens des val d'adhérence de U_n
est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{U_k, k\geq n\}}$

14 (A_i) les fermés contenant A
$\cap A_i = \overline{A}$; $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A
A fermé $\iff \overline{A} = A$

16 $\overline{C_E A} = C_E \mathring{A}$ $\qquad \overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$
$\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$ $\qquad \mathring{A}\cap\mathring{B} = \widehat{A\cap B}$
$\mathring{A}\cup\mathring{B} \subset \widehat{A\cup B}$ (à savoir démontrer)

17 $Fr(A) = \overline{A}\setminus\mathring{A} = \overline{A}\cap C_E\mathring{A}$
$= \overline{A}\cap\overline{C_E A} = Fr(C_E A)$
$Fr(A)$ est un fermé

17 $A, B \in P(E)$, A dense dans $B \iff A\subset B\subset\overline{A}$
A est une partie dense $\iff \overline{A} = E$

18 F un sev de E $\Rightarrow$ $\overline{F}$ est un sev de E
H hyperplan de E $\Rightarrow$ H fermé ou H dense

20 Invariances des notions

sur les f à on travaille par rapport à R

20 $A \subset R$ est un voisinage relatif de $a \in R$

$\iff \exists r>0,\ B(a,r)\cap R \subset A$

$A \subset R$ est un ouvert relatif de R

$\iff \forall a \in A$, A est un vois relatif de a

$\iff \forall a \in A, \exists r>0, B(a,r)\cap R \subset A$

$\iff \exists B$ ouvert de E Tq $A = B \cap R$

$A \subset R$ est un fermé relatif

$\iff R \setminus A$ est un ouvert relatif

$\iff \exists W$ fermé de E Tq $A = W \cap R$

$\iff \forall U_n \in A^{\mathbb{N}},\ U_n \longrightarrow \ell \in R \Rightarrow \ell \in A$

23 $A \subset E,\ f : A \to F,\ a \in \overline{A},\ \ell \in F$

$f(x)$ Tend vers ℓ quand x Tend vers a $\left(f(x) \xrightarrow[x\to a]{N'} \ell \right)$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in A,$

$N(x-a) \leqslant r \Rightarrow N'(f(x) - \ell) \leqslant \varepsilon$

24 $f : A \to F$ est continue en $a \in A$

$\iff f(x) \xrightarrow[x\to a]{N'} f(a)$

25 $a \in \overline{A}, \ell \in F,\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{N'} \ell$

$\iff$ l'image reciproque par f de Tout voisinage de ℓ est un voisinage relatif de a

26 $f : A \subset E \longrightarrow F,\ \ell \in F,\quad f(x) \xrightarrow[N(x)\to+\infty]{N'} \ell$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A,$

$N(x) \geqslant M \Rightarrow N'(f(x) - \ell) \leqslant \varepsilon$

27 $f : A \subset E \longrightarrow F,\ a \in \overline{A},\ \ell \in F,\quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{N'} \ell$

$\iff \forall (U_n) \in A^{\mathbb{N}},\ U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} a \Rightarrow f(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{N'} f(a)$

28 $f : A \longrightarrow F$, $a \in A$, f continue en a
$\iff \forall U_n \in A^{\mathbb{N}},\ U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{N} a \implies f(U_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{N'} f(a)$

29 cas evn produit
30 opérations sur les limites
composition (continuité avec la composition)

31 $\forall x$ voisin de a, $N'(f(x) - \ell) \leqslant g(x)$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ $\Big\} \implies f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

31 $f : A \subset E \longrightarrow F$, $B \subset A$, f est continue sur B
$\iff \forall x \in B$, $f_{|B}$ est continue en x
(attention : $\neq$
$\not\Leftarrow\ \forall x \in B$, f est continue en x
pour l'affirmer il faut B un ouvert de E)
32 B un ouvert de E, $B \subset A$, $f : A \subset E \longrightarrow F$
f est continue sur B
$\iff \forall x \in B$, f est continue en x

34 opérations sur la continuité
34 deux applications qui coïncident sur une partie dense (continues) sont égales.

35 $f \in \mathcal{C}(A \subset E, F)$
$\forall$ ouvert B de F ($\forall$ fermé B de F)
$f^{-1}(B)$ est un ouvert relatif à A
($f^{-1}(B)$ est un fermé relatif à A)

36 $f : A \subset E \longrightarrow F$ est uniformément cont sur A
$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2,$
$d(x, y) \leqslant \eta \implies d'(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$

38 $f : A \subset E \longrightarrow F$, $k > 0$, f est k-lipschitzienne
$\Leftrightarrow \forall x, y \in A, \quad d'(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x,y)$
(attention, la notion de k-lip est modifiée quand on remplace les normes par des normes équivalentes)

38 Lip $\Rightarrow$ unif cont $\Rightarrow$ cont

38 $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, I un int, f est Lip sur I
$\Leftrightarrow f'$ bornée sur I.

40 $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f continue sur E
$\Leftrightarrow \exists k > 0, \forall x \in E, \quad N'(f(x)) \leqslant k N(x)$
$\Leftrightarrow f$ est continue en 0_E
$\Leftrightarrow f$ est lipschitzienne

42 E de dim finie $\Rightarrow \mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$

43 $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $|||f||| = \sup\left\{ \dfrac{N'(f(x))}{N(x)}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$
$= \sup\{ N'(f(x)), x \in E \mid N(x) = 1 \}$
$\forall x \in E, \quad N'(f(x)) \leqslant |||f||| \cdot N(x)$
$\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F), \forall g \in \mathcal{L}_c(F,G), \; |||g \circ f||| \leqslant |||g|||\,|||f|||$

45 $|||A||| = \sup\left\{ \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}, X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\}$

$$f : \begin{array}{rcl} M_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \qquad : \qquad |||A||| = |||f|||$$

50 $f : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ Tq f est p-linéaire
f continue
$\Leftrightarrow \exists C > 0, \forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$
$N'(f(x_1, \ldots, x_p)) \leqslant C\, N_1(x_1) \cdots N_p(x_p)$

50 $f : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ Tq f p-linéaire
$(E_1, N_1), \cdots, (E_p, N_p)$ des evns de dim finie
alors f est continue

52 $A \subset E$, A est un compact
$\Leftrightarrow \forall (U_n) \in A^{\mathbb{N}}, \exists l \in A$ Tq l val d'adh de (U_n)

52 compact $\Rightarrow$ fermé borné
Un fermé relatif d'un compact est compact

53 Une suite d'element d'un compact converge
$\Leftrightarrow$ Cette suite passède une unique val d'adh

54 Un produit carthésien fini de compact est compact.

55 dim finie, compact $\Leftrightarrow$ fermé borné

55 Théorème de Heine : f continue sur un compact $\Rightarrow$ f unif cont

56 L'image d'un compact par une application continue est un compact

57 A un compact, $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$
$\Rightarrow$ f est bornée et atteint ses bornes

59 $a, b \in E$, $f \in \mathcal{C}([0,1], E)$, $f(0) = a$, $f(1) = b$
f est un chemin de a à b

$A \subset E$ est connexe par arcs
$\forall a, b \in A$, il existe un chemin de a à b.

$A \subset E$, A est étoilée
$\Leftrightarrow \exists x_0 \in A, \forall x \in A, [x, x_0] \subset A$

$\exists$ un chemin de a à b est une relation d'equivalence $\mathcal{R}$

A est connexe
$\Leftrightarrow \forall c : A \to \{0,1\}$ continue, c est constante

Les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sont les composantes connexes de A

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

61 Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

62 Théorème des valeurs intermédiaires
$A \subset E$ connexe par arcs
$f\, A \to \mathbb{R}$ continue, $a, b \in A$ tq $f(a) < f(b)$
$\forall y \in]f(a), f(b)[, \exists t \in A, f(t) = y$

E dim finie

1 $f : I \longrightarrow E$, $a \in I$, f dérivable en a
$\Leftrightarrow \exists y \in E, \exists \varepsilon : I \longrightarrow E$, Tq $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to a]{} 0$
$\forall t \in I, f(t) = f(a) + (t-a)y + (t-a)\varepsilon(t)$
et alors $f'(a) = y$

3 f est dérivable en $a \Leftrightarrow$ chacune de ses composante l'est

3 f est dérivable à droite en a
$\Leftrightarrow f_{|I \cap [a, +\infty[}$ est dérivable en a

3 f est dérivable en a
$\Leftrightarrow$ f dériv à droite et f dériv à gauche et $f_g'(a) = f_d'(a)$

4 F dim finie, $f : I \longrightarrow E$, $L \in \mathcal{L}(E, F)$
si f dérivable alors $L \circ f$ aussi et $(L \circ f)' = L \circ f'$

6 $M : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ p-linéaire
$f_j : \cancel{E_j} I \longrightarrow E_j$,
$f_1, \ldots, f_p$ dérivables (resp. $\mathcal{C}^1$)
$\Rightarrow M(f_1, \ldots, f_p)$ dérivable (resp $\mathcal{C}^1$)
$M(f_1, \ldots, f_p)' = \sum_{j=1}^{p} M(f_1, \ldots, f_{j-1}, f_j', f_{j+1}, \ldots, f_p)$

8 $\varphi : J \rightarrow I$, $f : I \longrightarrow E$
φ dériv et f dériv (resp. φ $\mathcal{C}^1$ et f $\mathcal{C}^1$)
$\Rightarrow f \circ \varphi$ dériv (resp $f \circ \varphi$ $\mathcal{C}^1$) et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$

8 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \setminus I$, f dérivable sur I
$\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to a} f'(x) \in \mathbb{R}$

alors on peut prolonger f par continuité en a
et alors f dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$

Chap 8

9 $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$, $a \in \bar{I}\setminus I$

$\forall i \in [\![0,k]\!]$, $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x) \in \mathbb{R}$

alors on peut prolonger f par continuité en a et alors f est $\mathcal{C}^k$ sur $I \cup \{a\}$

10 f est $\mathcal{C}^k \iff f_j$ est $\mathcal{C}^k$; $f = \sum\limits_{j=1}^{p} f_j e_j$

11 f est cpm sur $[a,b] \iff \forall j \in [\![1,p]\!]$, f_j est cpm

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{p}\left(\int_a^b f_j\right) e_j$$

12 linéarité, chasles

13 F dim finie, $f \in \mathcal{C}^{pm}([a,b],E)$, $L \in \mathcal{L}(E,F)$
alors $L\circ f \in \mathcal{C}^{pm}([a,b],F)$, $\int_a^b L\circ f = L\left(\int_a^b f\right)$

14 $f \in ([a,b],E)$, $R_{N,g,f,[a,b]} = \dfrac{b-a}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1} f\left(a + i\dfrac{b-a}{N}\right)$

14 $R_{N,f} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b f$

15 $f \in \mathcal{C}^{pm}([a,b],E) \Rightarrow \|f\| \in \mathcal{C}^{pm}([a,b],\mathbb{R})$
et $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$

15 $f \in \mathcal{C}(I,E)$, $a \in I$

$$F : \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ x \longmapsto \int_a^x f \end{array} \quad \text{est } \mathcal{C}^1 \text{ et } F' = f$$

18 IAF: $f \in \mathcal{C}^1([a,b],E)$
$\forall M > 0$, $(\forall x \in [a,b], \|f'(x)\| \leqslant M)$
$\Rightarrow \|f(b)-f(a)\| \leqslant M(b-a)$

18 Taylor reste intégrale

$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, $a, b \in I$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

18 Inégalité de Taylor-Lagrange :

$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, $M > 0$ Tq

$$\forall t \in I, \ \| f^{(n+1)}(t) \| \leq M$$

$\forall a, b \in I$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

19 Formule de Taylor-Young

E, F, des $\mathbb{R}$-ev de dim finie p et n
$\Omega \subset E$ un ouvert

1 $f : \Omega \longrightarrow F$, $v \in E \setminus \{0\}$, $a \in \Omega$
f possède une dérivée en a selon v
$\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in F$

alors $D_v f(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$

2 f possède des dérivées partielles en a
$\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!]$, f est dérivable en a selon b_j
$D_{b_j} f(a) = \partial_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t b_j) - f(a)}{t}$

2 f possède une dérivée partielle $\partial_j f$ en a
$\Leftrightarrow \varphi_{f,j,a} : V$ vois de $a_j \longrightarrow F$ est dérivable en a
$x \longmapsto f\left(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} a_i b_i + x b_j\right)$
$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \varphi'_{f,j,a}(a_j)$

4 f est différentiable en a
$\Leftrightarrow \exists L \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\exists \varepsilon : V$ vois $0 \longrightarrow F$ tels que
$\forall h \in V$, $f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
dans ce cas L est unique, $df(a) = L$

5 f est différentiable en a
$\Rightarrow$ · f continue en a
· $\forall v \in E \setminus \{0\}$, $D_v f(a) = df(a)(v)$

7 f différentiable en a, $h = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j b_j \in E$
$df(a)(h) = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

Chap 9

7 f est différentiable en a

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ possède des dérivées partielles en } a \\ \dfrac{f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \end{cases}$$

10 $f=\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ est différentiable en a

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i \text{ est différentiable} \\ \forall h \in E,\ df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} df_i(a)(h)\, e_i \end{cases}$$

11 f diff en $a \in \Omega$, $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

$Jacf(a) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est sa matrice dans les bases cano

$$Jacf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}, \quad df(a)(h) = Jacf(a)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$$

12 $f: I\subset\mathbb{R} \longrightarrow F$, f diff en a $\Longleftrightarrow$ f dériv en a

alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $df(a)(t) = tf'(a)$ $\quad (f'(a) = df(a)(1))$

13 $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diff en a, $\nabla f(a) = \overrightarrow{grad} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$

$df(a)(h) = \langle \overrightarrow{grad} f(a), h \rangle$

$$Jacf(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right) = \left(\overrightarrow{grad} f(a)\right)^T$$

17 différentiabilité : combinaison linéaire

application linéaire $u \in \mathcal{L}(F, G)$,

$d(u\circ f)(a) = u\circ df(a)$

application multilinéaire :

$M: F_1 \times \dots \times F_N \longrightarrow G$ N-linéaire

$$d(M(f_1,\dots,f_N))(a)(h) = \sum_{j=1}^{N} M(f_1(a),\dots, df_j(a)(h), \dots, f_N(a))$$

20 $f : A \subset E \longrightarrow B \subset F$, $g : B \longrightarrow G$

f diff en a , g diff en $f(a)$

$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

22 ainsi $Jac_{(g\circ f)}(a) = Jac\,g(f(a)) \times Jac\,f(a)$

règle de la chaîne :

$k \in [\![1,q]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$

$$\frac{\partial g_k \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

23 $\varphi : I \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$

φ dérivable , f différentiable

$\forall t \in I$, $(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t))$

24 $f : A \subset E \longrightarrow F$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A

$\iff$ f diff sur A <u>et</u> $df \in \mathcal{C}(A, \mathcal{L}(E,F))$

$\iff$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ existe $\forall j \in [\![1,p]\!]$

<u>et</u> $\frac{\partial f}{\partial x_j} : A \longrightarrow F$ est continue sur A, $\forall j$

25 $\mathcal{C}^1$: combinaison linéaire ; composée

26 $f \in \mathcal{C}^1(A,F)$, $a,b \in A$, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1],A)$ tq $\gamma(0)=a, \gamma(1)=b$

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt$$

27 si $[a,b] \in A$, en posant $\gamma(t) = tb + (1-t)a$

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(tb + (1-t)a)(b-a)\,dt$$

27 A ouvert connexe par arc, $f \in \mathcal{C}^1(A,F)$

f constante $\iff$ $df = 0$

29 $v \in E$, $x \in X$, v est tangent à X en x
$\iff \exists \varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$ dérivable en 0
tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$
$T_x X$: ensemble des vecteurs tangents à X en x

29 $X \subset E$ est un sous-espace affine de E.
$\iff \exists a \in E, \exists F$ sev de E, $X = a + F$
et alors $\forall x \in X$, $T_x X = F$

31 $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $X = \{(x, f(x)), x \in I\}$
$T_{(x, f(x))} X = \text{Vect}((1, f'(x)))$

32 $f \in \mathcal{C}^1(A \subset \mathbb{R}^2 \text{ ouvert}, \mathbb{R})$, $X = \{(x, f(x)), x \in A\}$
$\forall m = (x, y, f(x,y)) \in X$,
$$T_m X = \text{Vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\right)$$

33 $g \in \mathcal{C}^1(\Omega \subset E \text{ ouvert}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$
$X_a = \{x \in \Omega \mid g(x) = a\}$ ligne de niveau de g
$\forall x \in X_a$, $dg(x) \neq 0 \iff x$ point régulier

si $dg(x) \neq 0$ alors $T_x X_a = \text{Ker}\, dg(x)$
$= \text{Vect}(\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x))^{\perp}$

37 $g \in \mathcal{C}^1(\Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ ouv}, \mathbb{R})$, $X = \{(x,y,z) \in \Omega \mid g(x,y,z) = 0\}$
$m = (x,y,z) \in X$
$$T_m X = \text{Ker}\, dg(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \frac{\partial g}{\partial x}(m) + b \frac{\partial g}{\partial y}(m) + c \frac{\partial g}{\partial z}(m) = 0 \right\}$$

39 $f : A \subset \mathbb{R}^p \text{ ouv} \longrightarrow \mathbb{R}^n$
f possède des dérivées partielles d'ordre k sur A
$\iff \forall j_1, \dots, j_k \in [\![1, p]\!]$, $\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right)\right)$ existe sur A

et alors $= \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$

40 Théorème de Schwarz
$f \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{R}^n)$, dans $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$, l'ordre des j n'a pas d'importance

40 Stable par combinaison linéaire, composée.

41 A ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R}), \forall (x,y) \in A, f(x,y) = \varphi(y)$

avec $\alpha = \inf \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, (x,y) \in A \}$ et $\beta \ldots$

42 Idée : Trouver $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
Telle que en posant $\cancel{g = f \circ \varphi}$, $f = g \circ \varphi$
$(E) \iff \dfrac{\partial g}{\partial u} = H(u,v)$

$\longrightarrow$ φ est donnée ou linéaire ou polaire

44 Déf extremum local
extremum global
point critique

45 $f : A \subset \mathbb{R}^n$ ouv $\longrightarrow \mathbb{R}$ diff.
$\forall a \in A$, a est un extr local $\Rightarrow$ a pt critique

48 Pour un compact, on étudie séparément l'intérieur puis le bord.

51 $f : A \subset \mathbb{R}^n$ ouv $\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in X \subset A$, f diff en x
$f_{|X}$ admet un extremum local en x
$\Rightarrow \forall v \in T_x X$, $df(x)(v) = 0$

Chap 9.2

51 Théorème d'optimisation sous-contrainte

$f, g \in \mathcal{C}^1(A \subset \mathbb{R}^n \text{ ouv}, \mathbb{R})$

$\lambda \in \mathbb{R}, \ X = \{x \in A \mid g(x) = \lambda\}$

$\forall x \in X, \quad dg(x) \neq 0$ et $f|_X$ admet un extr local en x

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \, dg(x) = df(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \, \overrightarrow{\text{grad}}\, g(x) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x) \qquad \text{(c'est le } \hat{m} \ \alpha)$$

56 Calcul du Laplacien en coord polaire

1 famille infinie libre / generatrice.

3 Thm des degrés étagés / echellonnés

5 $\overset{p}{\underset{i=1}{+}} E_i$ est direct

$\iff \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p,$

$\sum_{j=1}^{p} x_j = 0 \implies \forall j \in [\![1, p]\!],\ x_j = 0$

$E_1, \dots, E_p$ sont supplémentaires dans E

$\iff E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

6 $\underline{2}$ espaces : $F = G \oplus H \iff \begin{cases} F = G + H \\ G \cap H = \{0\} \end{cases}$

7 $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, B_i base de E_i, E dim finie

$B = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ est une base adaptée à la somme directe.

8 $\left.\begin{matrix} E = \overset{p}{\underset{i=1}{+}} E_i \\ \bigcup B_i \text{ est une base de } E \end{matrix}\right\} \implies E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

8 $\dim\left(\overset{p}{\underset{i=1}{+}} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$

$\dim\left(\overset{p}{\underset{i=1}{+}} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i \iff \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

9 $\underline{2}$ espaces, $E = E_1 \oplus E_2 \implies \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E \end{cases}$

(et deux impliquent le reste)

9 $(b_i)_{i \in I}$ base de E, $(c_i)_{i \in I}$ base de F,

$\exists! f \in \mathcal{L}(E, F)$, tq $\forall i \in I,\ f(b_i) = c_i$

et alors $\begin{cases} f \text{ injective} \iff c \text{ libre} \\ f \text{ surjective} \iff c \text{ ~~lié~~ generatrice} \end{cases}$

Chap 10

10 $f \in \mathcal{L}(E,F)$, S supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E,

$$\tilde{f} : \begin{cases} S \longrightarrow \operatorname{Im} f \\ x \longmapsto f(x) \end{cases} \quad \text{est un isomorphisme}$$

11 Théorème du rang, E <u>dim finie</u>, $f \in \mathcal{L}(E,F)$

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$

12 $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ espace dual de E

12 H hyperplan $\Longleftrightarrow \exists\, \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ non nulle, $H = \operatorname{Ker} \varphi$

(en dim finie : $\Longleftrightarrow \dim H = \dim E - 1$)

H hyperplan, D droite de E tq $D \not\subset H$

alors $E = D \oplus H$

16 $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$

alors $\exists !\, u \in \mathcal{L}(E,F)$, $u_{|E_i} = u_i$

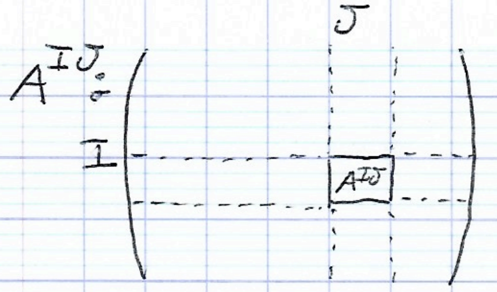
17 $$V = \left(a_{j-1}^{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det V = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (a_j - a_i)$$

18 $n = n_1 + \cdots + n_N$, $p = p_1 + \cdots + p_P$

Pour $I \in [\![1,N]\!]$, $J \in [\![1,P]\!]$,

$$A^{I,J} = \left(a_{i + \sum_{k=1}^{I-1} n_k,\ j + \sum_{k=1}^{J-1} p_k} \right)_{\substack{i \in [\![1, n_I]\!] \\ j \in [\![1, p_J]\!]}}$$



$$A = \begin{pmatrix} A^{1,1} & A^{1,2} & \cdots & A^{1,P} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ A^{N,1} & \cdots & & A^{N,P} \end{pmatrix}$$

20 $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = M_{B,C}(u)$
$I \in [\![1,N]\!]$, $J \in [\![1,P]\!]$,

$$A^{I,J} = M_{B_J, C_I}\left(\Pi_I \circ u_{|F_J}\right)$$

21 Combinaison linéaire ; produit ; transposition

21 A triangulaire supérieure par blocs,
$\Leftrightarrow \forall I > J \in [\![1,N]\!]$, $A^{I,J} = 0$

$$\Rightarrow \det A = \prod_{I=1}^{N} \det(A^{I,I})$$

1 $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev,
F stable par $u \iff \forall x \in F,\ u(x) \in F$
$\tilde{u} : F \to F$, $x \mapsto u(x)$; $\tilde{u}$ est l'endomorphisme induit par u sur F

2 $E = F \oplus S$, $B_0 = B_1 \amalg B_2$,
F stable par u
$\iff \exists B \in M_q(\mathbb{K}), \exists C \in M_{q,n-q}(\mathbb{K}), \exists D \in M_{n-q}(\mathbb{K})$ Tq
$$M_{B_0}(u) = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

3 λ est une vp de u
$\iff \exists x \in E$ Tq $\begin{cases} x \neq 0 \\ u(x) = \lambda x \end{cases}$
x est un $\vec{v}p$ de u
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}$ Tq $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$

3 $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda id)$
Espace propre de u pour λ.

$Sp(u)$: spectre de u : ens des vp de u

4 Equation aux elements propres : $u(x) = \lambda x$
λ et x sont vp et $\vec{v}p$ associés pour u
$\iff x \neq 0$ et (λ, x) est solution de l'equation

6 $v \in E \setminus \{0\}$, v est $\vec{v}p$ de $u \iff \mathrm{vect}(v)$ stable par u

6 $u \in \mathcal{L}(E)$, si $(x_1, \dots, x_n)$ sont associés à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour u et λ_i 2 à 2 $\neq$ alors $(x_1, \dots, x_n)$ libre
(et euh vrai avec famille infini)

Chap 11

8 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vp 2 à 2 $\neq$ de $u \in \mathcal{L}(E)$,
$E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe

E de dim n, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{card}(S_p(u)) \leq n$

9 $u, v \in \mathcal{L}(E)$ Tq $u \circ v = v \circ u$
$\Rightarrow$ Tout sous esp propre de u est stable par v
$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ stables par v

l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$
est $\lambda\, \mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$

10 vp, $\vec{v_p}$ pour $A \in M_n(\mathbb{K})$
$E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$

$\dim M_{n,1}(\mathbb{K}) = n$ donc $\mathrm{card}\, S_p(A) \leq n$

11 $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{K}'$, $A \in M_n(\mathbb{K})$,
$S_{p\mathbb{K}}(A) \subset S_{p\mathbb{K}'}(A)$

12 $S_p(M_B(u)) = S_p(u)$,
$\forall x \in E, \forall \lambda \in S_p(u)$,
x $\vec{v_p}$ de u pour $\lambda \Leftrightarrow M_B(x)$ $\vec{v_p}$ de $M_B(u)$ pour λ

A et B semblables $\Rightarrow S_p(A) = S_p(B)$

13 $\chi_A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (X \delta_i^{\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}) = \det(X I_n - A)$

$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_n = 1$, $a_{n-1} = -\mathrm{Tr} A$, $a_0 = (-1)^n \det A$

15 A triangulaire , $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{i,i})$

15 $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $\chi_A = P$ où $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -a_0 \\ \hline & -a_1 \\ I_{n-1} & \\ & -a_{n-1} \end{array}\right)$

16 Le pol car de $M_B(u)$ ne dépend pas de u, $\chi_u = \chi_{M_B(u)}$
A et B semblables $\Rightarrow$ m̂ pol car

17 Les vp de u sont les racines de son pol car.
Les vp de A sont les racines de son pol car.

19 $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev de E, F stable par u,
finie $\tilde{u}$ induit par u sur F, alors $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$

20 $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in S_p(u)$, la multiplicité de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u.

finie $\dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$

22 si χ_A scindé, $\chi_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$
alors $\det A = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$ et $\mathrm{Tr} A = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i$

23 u diagonalisable $\Leftrightarrow \exists$ B base tq $M_B(u)$ diagonale
$\Leftrightarrow \exists$ B base formée de vecteur propres de u
finie $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall i \in [\![1, r]\!], m_i = \dim E_{\lambda_i}(u) \end{cases}$

26 χ_u scindé à racine simple
$\Rightarrow$ u diagonalisable et tout ses Esp propre sont des droites

26 A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A semblable à une mat diagonale
u diagonalisable $\Leftrightarrow$ $M_B(u)$ diagonalisable

27 Theoreme Spectrale
Toute matrice symetrique réelle est diagonalisable
avec une matrice de passage orthogonale.

28 puissance $k^{ième}$, suite recurrente croisée,
systèmes differentiels linéaires croisés
commutant, racines carrés

32 $\chi_{A^T} = \chi_A$ et A diago $\Leftrightarrow$ A^T diago

33 u Trigonalisable $\Leftrightarrow$ $\exists B$ base Tq $M_B(u)$ Triang sup
$\Leftrightarrow$ $M_B(u)$ Trigonalisable
fini A Trigonalisable
$\Leftrightarrow$ A est semblable à une matrice Triang sup
$\Leftrightarrow$ χ_A est scindé

37 χ_A scindé, $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$, $\forall k \in \mathbb{N}$,
$Tr\, A^k = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k$ et $\det A^k = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i^k)^{m_i}$

40 $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ morphisme
$P \longmapsto P(u)$ d'algèbre
E inf de $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ dans $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$
$\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im} \varphi_u = \operatorname{Vect}(u^k, k \in \mathbb{N})$
est une sous-algèbre (polynomes en u)
commutative.

$\operatorname{Ker} \varphi_u$ idéal des polynomes annulateurs de u.

41 $\Psi_A : \mathbb{K}[X] \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$

$\qquad P \longmapsto P(A)$

44 $P(M_B(u)) = M_B(P(u))$ $\qquad \Psi_{M_B(u)}(P) = M_B(\varphi_u(P))$

$\mathrm{Ker}\,\varphi_u = \mathrm{Ker}\,\Psi_{M_B(u)}$

45 $\exists!\, \mu_u \in \mathbb{K}[X]$ unitaire Tq $\mathrm{Ker}(\varphi_u) = \mu_u \mathbb{K}[X]$

45 $d = \deg \mu_A$, $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$

inf 47 si $u(x) = \lambda x$ alors $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda) x$

inf 48 P annule $u \Rightarrow \forall \lambda \in Sp(u)$, λ racine de P

48 E dim finie, Les racines de μ_u sont les vp de u

49 Théorème de Cayley-Hamilton,

$\chi_u(u) = 0$ $\qquad \mu_u \mid \chi_u$

inf 51 Lemme des Noyaux

$u \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux

posons $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$, $\qquad \mathrm{Ker}\,P(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,P_i(u)$

52 en particulier, si $P(u) = 0$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,P_i(u)$

53 u est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ μ_u est scindé à racines simples

$\Leftrightarrow$ $\mu_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$

$\Leftrightarrow$ il existe P scindé à racine simple Tq $P(u) = 0$

54 $\mu_{\tilde{v}} \mid \mu_v$

54 Tout endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

54 Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$, u et v diagonalisables
Mq $\exists B$ base de E Tq $M_B(u)$ et $M_B(v)$ sont diagonales

fini 55 u est Trigonalisable
$\Leftrightarrow$ μ_u est scindé
$\Leftrightarrow$ $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé Tq $P(u) = 0$

56 nilpotence, indice de nilpotence
u nilpotent d'indice k
$\Leftrightarrow$ $\mu_u = X^k$

u est nilpotent
$\Leftrightarrow$ u Trigonalisable et $S_p(u) = \{0\}$

u est nilpotent $\Leftrightarrow$ $\chi_u = X^n$

fini 57 χ_u scindé, $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$
Fixons $\lambda_i \in S_p(u)$,
$C_{\lambda_i}(u) = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_i \, id)^{m_i}\right)$

58 $E = \bigoplus_{i=1}^{r} C_{\lambda_i}(u)$

$\dim C_{\lambda_i}(u) = m_i$

1 (f_n) CS vers g
$\Leftrightarrow \forall x \in A,\ f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(x)$

2 ΣU_n CS
$\Leftrightarrow \forall x \in A,\ \Sigma U_n(x)$ converge

3 (f_n) CU vers g
$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour } n \text{ assez grand, } f_n - g \text{ borné} \\ \|f_n - g\|_\infty \longrightarrow 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},$
$n \geqslant n_0 \Rightarrow N'(f_n(x) - g(x)) \leqslant \varepsilon$

3 $CU \Rightarrow CS$

4 si $f_n \xrightarrow{CS} g$ et $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $f_n(x_n) - g(x_n) \not\to 0$
alors $f_n \xrightarrow{\cancel{CU}} g$

5 ΣU_n CU
$\Leftrightarrow (f_N)$ CU
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma U_n \text{ CS} \\ (R_n)\ \cancel{CV} \text{ vers } 0 \quad CU \end{cases}$

7 ΣU_n CN
$\Leftrightarrow \Sigma \|U_n\|_\infty$ converge

8 ΣU_n CN
$\Rightarrow$ CA : $\forall x \in A,\ \Sigma N'(U_n(x))$ converge

$CN \Rightarrow CU$

Chap 12

9 Théorème de la double limite

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_n \\ f_n \xrightarrow{CU} g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g \text{ a une limite en } a \\ (\ell_n) \text{ converge} \\ \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{n \to +\infty} \ell_n \end{cases}$$

ainsi $\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$

10 Théorème intervertion somme/limite

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ U_n(x) \text{ a une limite } V_n \text{ en } a \in \overline{A} \\ \sum U_n \ CU \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum V_n \text{ converge} \\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ a une limite en } a \\ \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} U_n(x) \end{cases}$$

12 Théorème continuité en un point

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \text{ continue en } a \\ (f_n) \ CU \text{ vers } g \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g continue en a

13 Théorème continuité en un point séries

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ U_n \text{ continue en } a \\ \sum U_n \ CU \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ continue en a

13 Théorème continuité sur une partie

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \text{ continue} \\ (f_n) \ CU \text{ vers } g \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g est continue.

13 Théorème continuité, CU bout de partie

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue} \\ \forall a \in A,\ \exists B_a \text{ vois de } a,\ (f_n) \text{ CU vers } g \text{ sur } B_a \end{cases}$

$\Rightarrow$ g continue sur A

14 Théorème continuité sur une partie séries

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \text{ continue} \\ \sum U_n \text{ CU} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ est continue sur A

14 Théorème continuité, CU bout de partie séries

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \text{ continue} \\ \forall a \in A,\ \exists B_a,\ \sum U_n \text{ CU sur } B_a \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ continue sur A

Thm intégration

16 (f_n) suite de fonction continues de I dans F.

$\forall [a,b] \subset I$, (f_n) CU vers g

ainsi g continue

alors $\forall [a,b] \subset I$, (F_n) CU vers G

17 ainsi, sur $[a,b]$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

càd $$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,dt$$

$$F_n \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} G$$

Thm dérivation

18 (f_n) suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ de I dans F.

$\begin{cases} \forall [a,b] \subset I,\ (f_n') \text{ CU vers } h \\ (f_n) \text{ CS vers } g \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \forall [a,b] \subset I,\ (f_n) \text{ CU vers } g \\ g \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ g' = h \end{cases}$

Thm dérivation $\mathcal{C}^k$

19 (f_n) suite de fonctions $\mathcal{C}^k$ de I dans F.

$$\begin{cases} \forall i \in [\![0,k-1]\!],\ (f_n^{(i)}) \text{ CS vers } g_i \\ \cancel{f_n^{(k)}}\ \forall [a,b] \subset I,\ (f_n^{(k)}) \text{ CU vers } g_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![0,k-1]\!],\ \forall [a,b] \subset I,\ (f_n^{(i)}) \text{ CU vers } g_i \\ g_0 \text{ est } \mathcal{C}^k \\ \forall i \in [\![1,k]\!],\ g_0^{(i)} = g_i \end{cases}$$

Thm dérivation infinie

20 (f_n) suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, $I \to F$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall [a,b] \subset I,\ (f_n^{(k)})$ CU vers g_k

$$\Rightarrow \begin{cases} g_0 \text{ est } \mathcal{C}^\infty \\ \forall k \in \mathbb{N},\ g_0^{(k)} = g_k \end{cases}$$

20 Théorème d'échange $\Sigma / \int$

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \text{ continue} \\ \cancel{\Sigma U_n \text{ CU}}\ \forall [a,b] \subset I,\ \Sigma U_n \text{ CU} \end{cases}$$

Notons $\overline{U_n}(x) = \int_a^x U_n(t)\,dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall\ \cancel{[a,b]}\ \underline{\text{seg}} \subset I,\ \Sigma \overline{U_n} \text{ CU} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \overline{U_n}(x) = \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)\,dt \end{cases}$$

si ΣU_n CU sur $[a,b]$, $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx$

21 ΣU_n série de fonctions $\mathcal{C}^1$ $I \to F$

$$\begin{cases} \Sigma U_n \text{ CS} \\ \forall\ \underline{\text{seg}} \subset I,\ \Sigma U_n' \text{ CU} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall\ \underline{\text{seg}} \subset I,\ \Sigma U_n \text{ CU} \\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U_n' \end{cases}$$

21 $\sum U_n$ série de fonctions $\mathcal{C}^k$ $I \to F$

$\begin{cases} \forall i \in [\![0, k-1]\!], \cancel{\forall seg \subset I}, \sum U_n^{(i)} \text{ CS } \star \\ \forall [a,b] \subset I, \sum U_n^{(k)} \text{ CU } \star \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ est } \mathcal{C}^k \\ \forall i \in [\![0, k-1]\!], \forall \underline{seg} \subset I, \sum U_n^{(i)} \text{ CU} \\ \forall i \in [\![0, k-1]\!], \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(i)} \end{cases}$

21 $\sum U_n$ série de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ $I \to F$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall [a,b] \subset I, \sum U_n^{(k)}$ CU

$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ est } \mathcal{C}^\infty \\ \forall k \in \mathbb{N}, \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)} \end{cases}$

22 $f \in \mathcal{C}^{1m}([a,b], \mathbb{R})$,

$\exists (f_n)$ suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$

Tq $f_n \xrightarrow{CU} f$

24 <u>Lemme de Lebesgue</u> à démontrer

$f \in \mathcal{C}^{1m}([a,b], \mathbb{R})$

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

25 <u>Théorème de Weierstrass</u>

$f \in \mathcal{C}^{1m}([a,b], K)$

il existe (P_n) une suite de fonctions polynomiales

Tels que $P_n \xrightarrow{CU} f$

1 Lemme d'Abel

si $(a_n z_0^n)$ bornée

alors $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ conv absol

2 rayon de convergence R_a de $\sum a_n z^n$

$R_a = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\}$

5 si $|z| < R_a$, alors $\sum a_n z^n$ conv absol

si $|z| > R_a$, alors $\sum a_n z^n$ dv grossièrement

$D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_a\}$ disque ouvert de convergence

$I_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < R_a\}$ intervalle ouvert de convergence

$$D_a \subset D \subset \overline{D_a}$$

$$]-R_a, R_a[\subset D \cap \mathbb{R} \subset [-R_a, R_a]$$

6 le rayon de conv de $\sum n^\alpha z^n$ est 1

7
$$\left.\begin{array}{l} |a_n| \leq |b_n| \\ \text{ou } |a_n| = O(b_n) \\ \text{ou } |a_n| = o(b_n) \end{array}\right\} \Rightarrow R_a \geq R_b$$

$$|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$$

7 Règle de d'Alembert

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in \overline{\mathbb{R}} \text{ alors } R_a = \frac{1}{L}$$

9 $R_c \geq \min(R_a, R_b)$

si $R_a \neq R_b$ alors $R_c = \min(R_a, R_b)$

Chap 13

10 $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$; $\sum c_n z^n$ est le produit de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \text{ pour } |z|\leq \min(R_a,R_b)$$

et $R_c \geq \min(R_a,R_b)$

11 si $R_a>0$, $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ est la s.e. dérivée

11 Une série entière et sa dérivée ont même R.

12 Toute s.e. converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 inclus dans le disque ouvert de convergence.

13 La somme d'une s.e. est continue sur le disque ouvert de convergence

14 Théorème radial d'Abel

R>0 $\sum a_n R^n$ converge

$$\Rightarrow S : \begin{array}{rcl}]-R,R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array} \quad \text{est continue en } R$$

14 $S\in\mathcal{C}^\infty(]-R,R[,\mathbb{C})$

$\forall k\in\mathbb{N}, \forall x\in]-R,R[$,

$$S^{(k)}(x)=\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{p+k}x^p = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}$$

15 $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

15 $\exists \alpha>0, \forall x\in]0,\alpha],\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n$ R>0

16 resolution d'equa diff.

18 f est developpable en s.e. (d.s.e.)

$\iff \exists r>0, \exists \sum a_n z^n \; R>0$ Tels que

EV $\begin{cases} r \leq R \\ B(0,r) \subset U \\ \forall z \in \mathbb{C}, |z| < r, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{cases}$

$\iff \exists r>0, \exists \sum a_n x^n \; R>0$ Tq

$\mathbb{R}$ $\begin{cases} r \leq R \\ ]-r, r[\subset I \\ \forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{cases}$

19 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dse Tq $\forall x \in]-r,r[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow f \in C^\infty(]-r,r[)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

ainsi

son dse coincide avec son dlpmt de Taylor.

⚠

Reciproque fausse

20 $\forall x \in B(0,r), f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$(fg)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$\forall x \in]-r,r[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\qquad R>0$

1 $F : [a,+\infty[\longrightarrow K$, $x \longmapsto \int_a^x f$; $\int_a^{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2 $f \in \mathcal{C}^{pm}([a,+\infty[,K)$, $b \geq a$; $\int_a^{+\infty} f$ converge $\Leftrightarrow \int_b^{+\infty} f$ cv

3 $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ cv $\Leftrightarrow \alpha > 1$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ cv $\Leftrightarrow \alpha > 0$

4 Lorsque $\int_a^{+\infty} f$ cv , $F : [a,+\infty[\longrightarrow K$, $x \longmapsto \int_x^{+\infty} f$

$F' = -f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

5 $f \in \mathcal{C}^{pm}([a,+\infty[, \mathbb{R}_+)$

$\Rightarrow \begin{cases} F \text{ croissante} \\ \int_a^{+\infty} f \text{ cv} \Leftrightarrow F \text{ est majorée} \end{cases}$

6 Comparaison, grand O, equivalence
À valeur dans $\mathbb{R}_+$! mettre $|\cdot|$

7 $f \in \mathcal{C}^{pm}([a,+\infty[, K)$ est integrable sur $[a,+\infty[$
$\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} |f|$ cv

8 Lorsque f est de signe constant sur $[a,+\infty[$
f integrable sur $[a,+\infty[$ $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ cv

$f \in \mathcal{C}^{pm}([a,+\infty[, \mathbb{R})$, $b \geq a$
f int sur $[a,+\infty[$ $\Leftrightarrow$ f int sur $[b,+\infty[$

9 Si $f \in \mathcal{C}^{pm}([a,+\infty[, \mathbb{C})$ est int sur $[a,+\infty[$
Alors $\int_a^{+\infty} f$ cv

Chap 14

10 $f \in \mathcal{C}^{1m}([a,+\infty[, \mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{C}^{1m}([a,+\infty[, \mathbb{R}_+)$

$|f(t)| = O(\varphi(t))$ et φ int sur $[a,+\infty[$

$\Rightarrow$ f int sur $[a,+\infty[$

$|f(t)| \sim \varphi(t)$

$\Rightarrow$ f int $\Leftrightarrow$ φ int

12 $I \in \{[a,b], [a,b[,]a,b[,]a,b]\}$

12 $\int_a^b f$ CV $\Leftrightarrow$ F_c admet des limites finies en a et b

$\int_a^b f = \lim_b F_c - \lim_a F_c$ $\qquad F_c : I \longrightarrow K$, $x \longmapsto \int_c^x f$

14 Si f positive alors F_c croissante

15 $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$, $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)}$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

16 somme intégrales CV

positivité intégrale CV

croissance intégrales CV

Chasles

19 Intégration Par Partie

$u, v \in \mathcal{C}^1(I, K)$

uv admet des limites finies en a et b

$\int_a^b u'v = \left(\lim_b uv - \lim_a uv\right) - \int_a^b uv'$

20 Changement de variable

$f \in \mathcal{C}^0(I, K)$, $J =]\alpha, \beta[$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$,

φ bij, stt croissante

$\int_a^b f$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi'$ sont de m̂ nature et égales en cas de CV.

23 $f \in \mathcal{C}^{pm}(I, K)$ est integrable sur I
$\Leftrightarrow \int_a^b |f|$ CV

23 Si $f \in \mathcal{C}^{pm}(I, K)$ est integrable sur I
alors $\int_a^b f$ CV

24 $f \in \mathcal{C}^{pm}(I, K)$ est int en a
$\Leftrightarrow x \longmapsto \int_c^x |f|$ admet une lim finie en a

f int sur $I \Leftrightarrow f$ int en a et en b

25 $|f(t)| \underset{t \to b}{=} O(\varphi(t))$ <u>et</u> φ integrable en b
$\Rightarrow f$ integrable en b
$|f(t)| \underset{t \to b}{\sim} \varphi(t)$
$\Rightarrow f$ integrable en b $\Leftrightarrow \varphi$ integrable en b

26 inegalité triangulaire : integrable
critère de nullité : <u>continue</u>

26 Translation de la variable, $f \in \mathcal{C}^{pm}(I, K)$
f int en b $\Leftrightarrow x \longmapsto f(b-x)$ int en 0
f int en a $\Leftrightarrow x \longmapsto f(a+x)$ int en 0

27 $\mathcal{L}^1(I, K)$, $\mathcal{L}_c^1(I, K)$, $\mathcal{L}^2(I, K)$, $\mathcal{L}_c^2(I, K)$

28 $f \in \mathcal{C}^{pm}([a, b[, K)$, $\varphi \in \mathcal{C}^{pm}([a, b[, K)$
φ int sur $[a, b[$ <u>et</u> $f(t) = O(\varphi(t))$
$\Rightarrow f$ int sur $[a, b[$ et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \to b}{=} O\left(\int_x^b \varphi(t)dt\right)$

φ non int sur $[a, b[$ <u>et</u> $f(t) = O(\varphi(t))$
$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt \underset{x \to b}{=} O\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)$

31 Thm de convergence dominée

(f_n) suite de fonctions $\mathcal{C}^{pm}$ de I dans K

$$\begin{cases} \cdot\ (f_n) \text{ CS sur } I \text{ vers } g : \\ \cdot\ g \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \cdot\ \exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ \mathcal{C}^{pm} \text{ integrable Tq} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ integrable} \\ g \text{ integrable} \\ \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,dt \end{cases}$$

34 Thm de CV dom série de fonction

$\sum U_n$ série de fonctions $\mathcal{C}^{pm}$

$$\begin{cases} \cdot\ \sum U_n \text{ CS} \\ \cdot\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \cdot\ \exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ \mathcal{C}^{pm} \text{ integrable Tq} \\ \forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \left|\sum_{n=0}^{N} U_n(t)\right| \leq \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_I U_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} U_n \right.$$

39 Thm integration Terme à Terme positif

(U_n) suite de fcts $\mathcal{C}^{pm}$ positives integrables

$$\begin{cases} \sum U_n \text{ CS} \\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_I U_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}} \right.$$

Thm integration Terme à Terme

(U_n) suite de fcts $\mathcal{C}^{pm}$ integrables

$$\begin{cases} \sum U_n \text{ CS} \\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \sum \int_I |U_n| \text{ CV} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \int_I \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I U_n \ \underline{\text{et}} \ \sum_{n=0}^{\infty} U_n \text{ integrable} \right.$$

autre $f : A \times I \longrightarrow K$ $\quad$ $F : A \longrightarrow K$

$x \longmapsto \int_I f(x,t)dt$

44 Thm conv dom à un paramètre continue

$$\begin{cases} \cdot\ a \in \overline{A} \\ \cdot\ \forall x \in A,\ f(x,\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \cdot\ \forall t \in I,\ f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} g(t) \quad (CS) \\ \cdot\ g \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \cdot\ \forall x \in A, \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)\ \mathcal{C}^{pm} \text{ intégrable} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est défini} \\ g \text{ est intégrable} \\ F(x) \xrightarrow[x\to a]{} \int_I g(t)dt \end{cases}$$

44 Thm continuité

$$\begin{cases} \cdot\ \forall x \in A,\ f(x,\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \cdot\ \forall t \in I,\ f(\cdot,t) \text{ est continue sur } A \\ \cdot\ \exists\ \varphi\ \mathcal{C}^{pm} \text{ intégrable} \\ \quad \forall x \in A, \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F définie est continue sur A

45 Thm continuité locale

$$\begin{cases} \cdot\ \forall x \in A,\ f(x,\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \cdot\ \forall t \in I,\ f(\cdot,t) \text{ est } \mathcal{C}^0 \\ \cdot\ \forall a \in A, \exists V_a \text{ tq } \exists\ \varphi_a\ \mathcal{C}^{pm} \text{ intégrable tq} \\ \quad \forall x \in V_a, \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_a(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F définie et $\mathcal{C}^0$ sur A

46 Thm dérivation

A réel

$$\begin{cases} \bullet\ \forall t\in I,\ f(\cdot,t) \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \bullet\ \forall x\in A,\ f(x,\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \text{ integrable} \\ \bullet\ \forall x\in A,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \bullet\ \exists \psi\ \mathcal{C}^{pm} \text{ integrable} \\ \quad \forall x\in A, \forall t\in I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est bien definie et } \mathcal{C}^1 \text{ sur } A \\ \forall x\in A,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \end{cases}$$

48 Thm dérivation locale

$$\begin{cases} \bullet\ \forall x\in A,\ f(x,\cdot) \text{ integrable } \mathcal{C}^{pm} \\ \bullet\ \forall x\in A,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\ \mathcal{C}^{pm} \\ \bullet\ \forall t\in I,\ f(\cdot,t) \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \bullet\ \forall \text{seg} \subset A,\ \exists \psi_S\ \mathcal{C}^{pm} \text{ integrable} \\ \quad \forall t\in I, \forall x\in S,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi_S(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est } \mathcal{C}^1 \\ \forall x\in A,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \end{cases}$$

49 Thm $\mathcal{C}^k$

$$\begin{cases} \bullet\ \forall t\in I,\ f(\cdot,t) \text{ est } \mathcal{C}^k \\ \bullet\ \forall i\in [\![0,k-1]\!],\ \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \text{ integralle} \\ \bullet\ \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,\cdot) \text{ est } \mathcal{C}^{pm} \\ \bullet\ \forall \text{seg} \subset A,\ \exists \psi_S\ \mathcal{C}^{pm} \text{ integralle tq} \\ \quad \forall t\in I, \forall x\in S,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \psi_S(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est } \mathcal{C}^k \\ \forall i\in [\![1,k]\!],\ \forall x\in A,\ F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\,dt \end{cases}$$

52 fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot\ \Gamma \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \cdot\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \\ \cdot\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \Gamma(n+1) = n! \\ \cdot\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

56 Calculer $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$

1 Ω ; $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, P

1 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une Tribu

$\Leftrightarrow$ • $\emptyset \in \mathcal{A}$

• $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$

• si (A_i) famille de $\mathcal{A}$

alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

et alors $\Omega \in \mathcal{A}$, $\bigcap A_i \in \mathcal{A}$

3 $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ est une proba

$\Leftrightarrow$ • $P(\Omega) = 1$

• (A_n) 2 à 2 disjoint (incompatible)

$P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$

5 $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distrib. de proba. discrète

$\Leftrightarrow$ $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

5 $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une proba

$A \longmapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega$

6 Si Ω au plus dénomb, P une proba

P est associé à $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$, Tq $\forall \omega \in \Omega$, $p_\omega = P(\{\omega\})$

7 (A_n) , $A_n \subset A_{n+1}$ $\Rightarrow$ $P(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)$

7 (D_n) , $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} D_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k\right)$

9 (A_n) , $A_{n+1} \subset A_n$ $\Rightarrow$ $P(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)$

9 (D_n) , $P\left(\bigcap_{k=0}^{n} D_n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k\right)$

Chap 15

10 Inegalité de Boole

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} P(C_n)$$

11 A negligeable $\Leftrightarrow P(A) = 0$ A presque sur $\Leftrightarrow P(A) = 1$

11 (A_i) négligeables, $\bigcup A_i$ negligeable

(A_i) presque sur, $\bigcap A_i$ presque sur

11 (A_n) système quasi-complet d'evemt

$\Leftrightarrow \forall i \neq j, \; A_i \cap A_j = \emptyset$

$P\left(\bigcup A_i\right) = 1$

12 $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$

$P(\cdot|B)$ est une proba.

12 Probabilités composées

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\, P(A_{n-1} | A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \cdots P(A_2|A_1)\, P(A_1)$$

13 Probabilités Totales:

$$P(B) = \sum P(B \cap A_i) = \sum P(B|A_i)\,P(A_i)$$

14 $P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$ Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{\sum_{i\in I} P(B \cap A_i)}$$

15 A et B indep $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

15 A, B indep $\iff A, \overline{B}$ indep $\iff \overline{A}, \overline{B}$ indep

15 (A_i) mutuellement indep
$\iff \forall J \subset I$ fini
$$P\left(\bigcap_J A_i\right) = \prod_J P(A_i)$$

16 $X : \Omega \longrightarrow E$ est une vad
$\iff$ $X(\Omega)$ au plus denomb
$\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$

18 $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0,1]$
$\qquad H \longmapsto P(X \in H)$ est une proba

la loi de X est
- $X(\Omega)$
- $\forall x \in X(\Omega)\ ,\ P(X = x)$

19 X et Y suivent la même loi
$\iff P_X = P_Y \iff X \sim Y$

20 $f(X) = f \circ X$ est une vad

20 $X \sim Y \implies f(X) \sim f(Y)$

21 (X_i) mutuellement indep
$\iff \forall J \subset I,\ \forall (x_j \in X_j(\Omega))_{j \in J}$
$$P\left(\bigcap_J (X_j = x_j)\right) = \prod_J P(X_j = x_j)$$

22 (X_i) vad iid
$\iff \begin{cases} (X_i) \text{ mutuellement indep} \\ \text{suivent toutes la même loi} \end{cases}$

23 Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$ $\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\} \\ P(X=1) = p \ ; \ P(X=0) = 1-p \end{cases}$

Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ $\begin{cases} X(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$

Géométrique $\mathcal{G}(p)$ $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ P(X=k) = p(1-p)^{k-1} \end{cases}$

Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \end{cases}$

28 $f(X,Y)$ est une vad

29 Loi conjointe de (X,Y)
- $(X,Y)(\Omega)$
- $\forall (x,y) \in (X,Y)(\Omega)$, $P(X=x \cap Y=y)$

Lois marginales de (X,Y) :
- $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$
- $\forall x \in X(\Omega)$, $P(X=x)$ et $\forall y \in Y(\Omega)$, $P(Y=y)$

30 X et Y indep $\iff X \perp\!\!\!\perp Y$

$\iff \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega)$, $P((X=x) \cap (Y=y))$
$= P(X=x)P(Y=y)$

31 $X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

32 Lemme des coalitions

$X_1, \dots, X_n$ mutuellement independantes

$\Rightarrow f(X_1, \dots, X_p) \perp\!\!\!\perp g(X_{p+1}, \dots, X_n)$

32 $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X=x)$ $\quad$ (X dans $\mathbb{R}_+$)

si $\cancel{X}(\Omega)$ au plus denombrable, $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$

33 si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\quad E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$

35 X d'esperance finie $\iff X \in L^1$

$\iff \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X=x) < +\infty \iff (x P(x=X))_{x \in X(\Omega)}$ sommable

36 $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$: formule de Transfert

38 linéarité, positivité, croissance

ineg Trig : $|E(X)| \leq E(|X|)$

X dans $\mathbb{R}_+$: $\quad P(X=0) = 1 \iff E(X) = 0$

39 $Y \in L^1$ et $|X| \leq Y \implies X \in L^1$

40 $\left.\begin{array}{l} X, Y \in L^1, \\ \text{independantes} \end{array}\right\}$ $XY \in L^1$ et $E(XY) = E(X)E(Y)$

$X_1, \dots, X_n \in L^1$ mutuellement independantes

$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$

41 X dans $\mathbb{R}$: X possède moment d'ordre 2

$\iff E(X^2) < +\infty \iff X \in L^2$

42 $X \in L^2 \implies X \in L^1$

42 L^1 $\mathbb{C}$-ev, L^2 $\mathbb{R}$-ev

42 $L^2 \times L^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire positive
$X, Y \longmapsto E(XY)$ symetrique (pas def)

43 $X, Y \in L^2$, $XY \in L^1$ et $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$
(Cauchy-Schwarz)
egalité $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P(X = \lambda Y) = 1 \\ \text{ou } P(Y=0) = 1 \end{cases}$

~~44~~

44 $V(X) = E((X - E(X))^2)$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
X réduite $\Leftrightarrow \sigma(X) = 1$
$X \in L^2$, $V(X) = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, P(X=a) = 1$

45 $V(aX + b) = a^2 V(X)$

König-Huygens : $X \in L^2$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

49 $\operatorname{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$X, Y \in L^2$, $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$

50 $X_1, \dots, X_n \in L^2$
$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

51 $X \in L^1$ $P(|X| \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(|X|)}{a}$ <u>Markov</u>
$a \in \mathbb{R}_+^*$

52 <u>Bienaymé -Tchebychev</u> $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$
$X \in L^2$, $\varepsilon > 0$

52 Inegalité de concentration

$X_1, \dots, X_n \in L^2$ vadiid $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\,\varepsilon^2}$$

52 Loi faible des grands nombres

(X_i) suite de vadiid de L^2

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

53 X dans $\mathbb{N}$,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n = E(t^X)$$

53 rayon de G_X est $\geqslant 1$

G_X CN sur $[-1,1]$, G_X $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$

54 $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

55 $E(X) = G_X'(1)$

$G_X''(1) = E(X(X-1))$

$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

56 $X_1, \dots, X_n$ mutuellement independantes <u>dans $\mathbb{N}$</u>

$$G_{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}$$

Loi	$E(X)$	$V(X)$	$G_X(t)$	R
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$	∞
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$	∞
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	$\frac{1}{q}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	∞
$\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\begin{cases} \frac{t^a-t^{b+1}}{(b-a+1)(1-t)} & t\neq 1 \\ 1 & t=1 \end{cases}$	∞

3 E dim quelconque, F sev dim finie

- $E = F \oplus F^{\perp}$
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$
- $\|u - p(u)\| = \min\{\|u - v\|, v \in F\} = d(u, F)$

  $p(u)$ est le seul vecteur où le min est atteint

9 $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale $\iff A^T A = I_n$

$\iff A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^T$

$\iff A^T$ est orthogonale

$\iff (X_1, \dots, X_n)$ BON de $\mathbb{R}^n$

$\iff (L_1, \dots, L_n)$ BON de $\mathbb{R}^n$

10 B_1 BON, B_2 Base

B_2 est une BON $\iff P_{B_1 \to B_2}$ est orthogonale

11 def : A, B orthogonalement semblable

11 $O(n)$: groupe orthogonal

$A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{-1, 1\}$

12 $SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$

12 $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in]-\pi, \pi] \right\}$

$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow SO(2) \\ \theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{cases}$ morphisme de groupe surjectif

$\operatorname{Ker} \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$

$\Psi : \begin{cases} \mathbb{U} \longrightarrow SO(2) \\ z = e^{i\theta} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{cases}$ isomorphisme de groupe

$\Rightarrow SO(2)$ commutatif

Chap 16

$$O(2) = SO(2) \amalg \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in]-\pi, \pi] \right\}$$

14 Base B_0 directe
B base de E :
B directe $\Leftrightarrow \det_{B_0} B > 0$
B indirecte $\Leftrightarrow \det_{B_0} B < 0$

15 B, B' deux BOND
$\Rightarrow \det_B = \det_{B'}$: Det

$u, v \in \mathbb{R}^2$, $|\mathrm{Det}(u,v)|$: surface du parallélogramme
$u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $|\mathrm{Det}(u,v,w)|$: volume du parallélépipède

u, v unitaires et $\langle u|v \rangle = 0 \Rightarrow (u, v, u \wedge v)$ BOND

16 $$\varphi : E \longrightarrow E^* \quad \text{isomorphisme}$$
$$x \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \langle x|y \rangle \end{array} \right.$$

17 φ forme linéaire, $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$
$\exists! x \in E$ tq $\varphi = \langle x | \cdot \rangle$
$H = (\mathrm{vect}\, x)^\perp$

$df(a)(h) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) | h \rangle$

17 $u \in \mathcal{L}(E)$
$\exists! u^* \in \mathcal{L}(E), \forall x, y \in E, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$
u^* est l'adjoint de u.

18 B BON de E, $u \in \mathcal{L}(E)$
- $Mat_B(u^*) = (Mat_B(u))^T$
- $\begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto u^* \end{cases}$ involutive linéaire
- $\forall u, v \in E$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

20 F sev stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u^*

20 $u \in \mathcal{L}(E)$ isométrie vectorielle
$\Leftrightarrow$ u automorphisme orthogonal
$\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_2 = \|x\|_2$
$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in E$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$
$\Leftrightarrow$ $\forall B$ BON, $u(B)$ BON
$\Leftrightarrow$ $\forall B$ BON, $M_B(u) \in O(n)$
$\Leftrightarrow$ $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$

23 $O(E)$ groupe orthogonal
$\begin{cases} O(E) \longrightarrow O(n) \\ u \longmapsto M_B(u) \end{cases}$ avec B BON : isomorphisme.

24 $u \in O(E)$, $\det u \in \{-1, 1\}$

24 $\det u = 1$: rotation
$SO(E)$: groupe spécial orthogonal.
$SO(E) = O(E) \cap SL(E)$

24 $u \in SO(E)$, $\exists! \theta \in]-\pi, \pi]$ tq $\forall B$ BOND :
$n=2$
$$M_B(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

25 $\begin{cases} \langle x | y \rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta \\ \det_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(x, y) = \|x\| \|y\| \sin\theta \end{cases}$
$n=2$

26 $n=2$ $\begin{cases} \det u = 1 : \text{rotation} \\ \det u = -1 : \text{reflexion} \end{cases}$

27 $u \in O(E)$, F sev stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u

28 $u \in O(E) \Rightarrow S_p(u) \subset \{-1, 1\}$

28 $u \in O(E)$, $\exists (\theta_i)$, $\exists$ B BON Tq

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_r \end{pmatrix}, \quad R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

33 $\mathrm{Tr}\, u = 1 + 2\cos\theta$ (pos) $\quad \mathrm{Tr}\, u = -1 + 2\cos\theta$ (neg)

35 $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint B BON

$\Leftrightarrow$ u est symetrique

$\Leftrightarrow$ $u^* = u$

$\Leftrightarrow$ ~~$\forall$ B BON~~ $M_B(u)$ symétrique

35 $\mathcal{S}(E)$ $\mathbb{R}$-ev

$\begin{cases} \mathcal{S}(E) \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ \quad u \longmapsto M_B(u) \end{cases}$ avec B BON isomorphisme

36 p proj sur $F \parallel G$

p autoadjoint $\Leftrightarrow F = G^\perp$

Les projecteurs autoadjoint sont les projecteurs orthogonaux.

36 $u \in \mathcal{S}(E)$, F sev stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u

37 Théorème spectral

u autoadjoint

$\Leftrightarrow$ E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u

$\Leftrightarrow$ $\exists\, \mathcal{B}$ une BON de $\vec{v}_p$ de u

42 $A \in S_n(\mathbb{R})$

$\exists P \in O(n)$, $\exists D$ diagonale Tq

$$A = PDP^T$$

44 $u \in \mathcal{S}(E)$ positif

$\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \langle u(x) | x \rangle \geqslant 0$

$u \in \mathcal{S}(E)$ défini positif

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, \ \langle u(x) | x \rangle \geqslant 0 \\ \forall x \in E, \ \langle u(x) | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle u(x) | x \rangle > 0$

45 $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$ ensembles.

$u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$

$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

47 $A \in S_n(\mathbb{R})$ positive $\Leftrightarrow A \in S_n^+(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X \geqslant 0 \Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

$A \in S_n(\mathbb{R})$ définie positive $\Leftrightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X > 0 \Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

50

50 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$

50 Soit $x \in \Omega$,

$H_f(x) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ matrice Hessienne de f en x

$H_f(x) \in S_n(\mathbb{R})$

50 Ω ouvert

$\forall x \in \Omega$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$ Tq $x + h \in \Omega$, $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$$f(x+h) = f(x) + \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x) \mid h \rangle + \frac{1}{2} \langle h \mid H_f(x) h \rangle + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

52 Thm

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in \Omega$

f admet un min local en a

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = 0 \\ H_f(a) \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \end{cases}$

$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = 0 \\ H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \end{cases}$

$\Rightarrow$ f admet un min local en a

1 $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$

$X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$

2 scalaire $x^{(n)}(t) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) x^{(i)}(t)\right) + b(t)$

à valeur dans K

3 Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, \ x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \forall t \in I, \ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(u)x(u) + b(u))\,du$

4 Principe de superposition

5 Thm de Cauchy linéaire :

$\exists! x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ solution au pb de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \ x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

6 $\begin{cases} \mathcal{E}_0 \longrightarrow E \\ x \longmapsto x(t_0) \end{cases}$ isomorphisme de K-ev par Cauchy linéaire

$\mathcal{E}_0$ est un K-ev de dimension $\dim E$

$\hookrightarrow$ solutions de l'equation homogène

base de $\mathcal{E}_0$: système fondamental de sol de $\mathcal{E}_0$

7

10 Le Wronskien de $X'(t) = A(t)X(t)$

de $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{E}_0$:

$w(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$

10 $(X_1, \dots, X_n)$ sys fond de soluc de $\mathcal{E}_0$

$\Leftrightarrow \forall t \in I, \ w(t) \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists t_0 \in I, \ w(t_0) \neq 0$

Chap 17

12 $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par $\mathcal{E}_0$
$\mathcal{E} = x_p + \mathcal{E}_0$ de dimension $\dim E$

13 Variation de la constante :
$(x_1, \dots, x_n)$ base de $\mathcal{E}_0$ alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, K)$
$x_p : t \longmapsto \sum \lambda_i(t) x_i(t)$ soluc part

14 non normalisé = non résolue :
① $\alpha(t) x'(t) + \beta(t) x(t) = \gamma(t)$
② $\alpha(t) x''(t) + \beta(t) x'(t) + \gamma(t) x(t) = \delta(t)$
ensemble des solutions :
vide ou espace affine
mais aucune information sur la dim

19 $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
$\Rightarrow e^M = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
$M = PNP^{-1} \Rightarrow e^M = Pe^N P^{-1}$
χ_M scindé $\Rightarrow Sp(e^M) = \{e^\lambda, \lambda \in Sp(M)\}$
$e^{M+N} = e^M e^N$ (soustraire passer à la norme).
$e^{-M} = (e^M)^{-1}$
$\begin{cases} M_n(K) \longrightarrow M_n(K) \\ M \longmapsto e^M \end{cases}$ est continue (CN sur tout compact)

22 $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto e^{tM} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ (CN sur tout seg)
$(e^{tM})^{(k)} = M^k e^{tM}$

23 $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$
solution : $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$

A diago, (B_j) base de $\vec{V}_p$ pour (λ_j)
$(e^{tA} B_j) = (e^{t\lambda_j} B_j)$ est une base de $\mathcal{E}_0$

24 $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t) \quad : (E)$
x_1, x_2 deux solutions
$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

25 Methode de résolution (E_0)
chercher les soluc dvlp en s.e.
si on en obtient deux :
c'est une base : fini
si on en obtient une : x_1
sur J où x_1 ~~...~~ ne s'annule pas :
$x_2(t) = \lambda(t) x_1(t)$
réinjecter : obtention d'une eqdl d'o 1
sinon : bonne chance : tu es foutu.

26 Methode de résolution (E)
(x_1, x_2) base de $\mathcal{E}_0$
$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^1(I,K)$ tq
$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$
est soluc de E
et $\lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0$

retenir : $\begin{cases} \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0 \\ \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' = c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad W \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$