Table des matières

Chapitre 1 et 2 : rappels calculatoires 1
Chapitre 3 : fonctions numériques 3
Chapitre 4 : sommes, produits et systèmes linéaires 6
Chapitre 5 : trigonométrie 8
Chapitre 6 : ensembles 12
Chapitre 7 : complexes 14
Chapitre 8 : décomposition en éléments simples 17
Chapitre 9 : primitives et intégrales 18
Chapitre 10 : équations différentielles linéaires 20
Chapitre 11 : applications et relations 24
Chapitre 12 : nombres réels 28
Chapitre 13 : suites numériques 30
Chapitre 14 : matrices 33
Chapitre 15 : groupes, anneaux et corps 36
Chapitre 16 : arithmétique des entiers 40
Chapitre 17 : limite et continuité 44
Chapitre 18 : polynômes 47
Chapitre 19 : analyse asymptotique 51
Chapitre 20 : espaces vectoriels et applications linéaires 53
Chapitre 21 : développements limités 57
Chapitre 21 faux : analyse de suites 59
Chapitre 22 : dimension finie 60
Chapitre 23 : dénombrement 63
Chapitre 24 : dérivabilité 65
Chapitre 25 : fonctions convexes 68
Chapitre 26 : représentation matricielle des applications linéaires 70
Chapitre 27 : intégration 73
Chapitre 28 : probabilités sur un univers fini 76
Chapitre 29 : séries numériques 79
Chapitre 30 : groupes symétriques et déterminants 81
Chapitre 31 : variables aléatoires sur un univers fini 85
Chapitre 32 : produits scalaires, orthogonalité et espaces préhilbertiens 89
Chapitre 33 : arithmétique des polynômes 93
Chapitre 34 : fonctions de deux variables 96

Chap 1 - Preuve par Table de vérité

- non(P et Q) $\Leftrightarrow$ non P ou non Q
  non(P ou Q) $\Leftrightarrow$ non P et non Q

- (P ou Q) et R $\Leftrightarrow$ ~~(P ou R) et (R~~
  (P et R) ou (Q et R)
  (P et Q) ou R $\Leftrightarrow$ (P ou R) et (R ou Q)

- $P \Rightarrow Q$ $\Leftrightarrow$ non P ou Q
  non($P \Rightarrow Q$) $\Leftrightarrow$ P et non Q
  contraposée
- $P \Rightarrow Q$ $\Leftrightarrow$ non Q $\Rightarrow$ non P
  réciproque (pas tjs vraie)
- $Q \Rightarrow P$

- ($P \Leftrightarrow Q$) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (non P et non Q)
  $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

- $\exists x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ non($\forall x \in \mathbb{R}$)

- f est croissant $\Leftrightarrow \forall x y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

- Disjonction de cas

- Contreposition

- Analyse - synthèse

- Par l'absurde

Chap 1&2

- Par récurrence
  - Initialiser deux fois ! (Pour récurrence double
  - forte

Chap 2 - $f : D \to \mathbb{R}$ si $f \nearrow$

$a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$

- $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$

- $n \leq x < n+1$

  $\lfloor x \rfloor = n$

  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

  $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

p1 Def domaine de definition
p2 Def restriction de f
p2 égalité entre deux fonctions
p3-4 addition, multiplication, quotient sur fct
p4 Def graph d'une fct
p4 Def antécédent
p5 Def Im f
p6 f à valeur dans A
p7 $g \circ f$
p8 associativité de la composition
p8 preuve
p8 Def monotonie
p9 Preuve monotonie d'une somme de fct ou composée
p11 Def fct périodique
p13 Ensemble symétrique
p13 Def fct paire, impaire
p14 si g pair alors $h(g)$ pair
p14 Def fct | majoré
| minoré
| bornée
p15 Si f majoré <=> Im f majoré
p16 Def maximum / minimum de f
p18 Graphe et preuve de | $f(x)+a$
| $f(x+a)$
| $a f(x)$
| $f(xa)$
p20 Graphe et preuve de | f pair
| f impair
p23 Def Asymptote

Chap 3

124 Preuve que

$y = ax + b$ asymptote à $\Gamma_f \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = a \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - xa) = b \end{cases}$

126 Def continuité de f (sur a, sur I)
Def prolongeable par continuité

129 Def dérivée
130 Equation de la Tangente $(f'(a)(x-a) + f(a))$
130 $f \nearrow \iff f'(x) > 0$
Preuve $(\Rightarrow)$

131 $f'(x) \geq 0$ et s'annule un fini de fois $\Rightarrow$ st $\nearrow$
132 f constante $\iff f'(x) = 0$

134 $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

135 f pair f' impair
f impair f' pair
f T-period f' T-period

137 f réalise bijection $\iff \forall y \in J, \exists! x \in I, y = f(x)$
138 On note $f^{-1}(y)$ l'unique x tel que $y = f(x)$.

141 Identité de I

142 f monotone et bijection $\Rightarrow f^{-1}$ monotone
143 $(x;y) \in \Gamma_f \iff (y;x) \in \Gamma_{f^{-1}}$
144 1ère bissectrice $(x = y)$

p44 Principe th de la bijection

p49 Def point fixe : $f(x) = x \Leftrightarrow x$ point fixe de f

p51 $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

p2 variable de sommation

p4 Changement d'indice $i = n-k$

p5 Relation de Chasles

p6 Sommation par paquet

p8 Somme Telescopique

p9 $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

p9 Preuve

p10 $$\sum_{k=a}^{n} q^k = \begin{cases} q^a \dfrac{1-q^{n-a+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n-a+1 & q = 1 \end{cases}$$

p10 $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ Preuves

p12 $$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Preuve

p16 $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(\quad) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}$$

p17 $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$$

Colles Chap 4

p17 $\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \end{cases}$

p19 Identite de Pascal

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Preuve

p21 $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

p21 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Preuve

p21 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Preuve

p23 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

p32 $L_i \leftrightarrow L_j$

$L_j \leftarrow \lambda L_j$

$L_i \leftarrow L_i + L_j$

$(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)$

-5 ln est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

-2 $\ln(1+x) \leq x$

1 exp est la bijection réciproque

2 $e^x \geq 1+x$

3 $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

4 $x = \log_a(\exp_a(x))$
$\exp_a(x) = \exp(x\ln(a)) \iff a^x = e^{x\ln(a)}$

5 $x^a = e^{a\ln(x)}$

8 $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

8 $ch(x) + sh(x) = e^x$ Preuve
$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ Preuve

9 $ch' = sh$ et $sh' = ch$ Preuves

9 $th' = \frac{1}{ch^2} = 1 - th^2$

Chap 5

14 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

15 $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

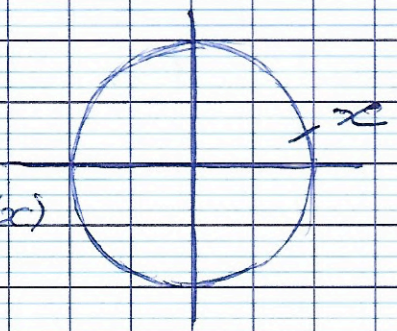
16 $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$

15 $|\sin x| \leqslant |x|$

16 $\mathrm{Tan}'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{Tan}^2(x)$

18 Les valeurs des x p 18

18-0 $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = \cancel{-\sin(x)}\ \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$



$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \cancel{\cos(x)}\ \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = = \cos(x)$

19 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) + \cos a \sin b$

20 $\tan(a+b) = \dfrac{\mathrm{Tan}\, a + \mathrm{Tan}\, b}{1 - (\mathrm{Tan}\, a\, \mathrm{Tan}\, b)}$

$\mathrm{Tan}(a-b) = \dfrac{\mathrm{Tan}\, a - \mathrm{Tan}\, b}{1 + (\mathrm{Tan}\, a\, \mathrm{Tan}\, b)}$

21 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$

Donc ~~$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x) = 1 -$~~

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

22 $\cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2}$ et $\sin x = \frac{2T}{1+T^2}$ avec $T = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$(x \neq \pi \ [2\pi])$

23 $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

$\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$

24 $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$

27 $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

30 $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

29 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

32 $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ car ~~$\tan' = 1 + \tan^2$~~

34 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x \leq 0 \end{cases}$

- Tan défini sur D

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \right\}$$

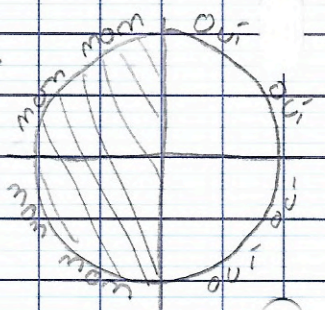
- $\tan(a+b)$ ssi $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

p23 $\cos a = \cos b \Leftrightarrow a \equiv b\,[2\pi]$ ou $a \equiv -b\,[2\pi]$

$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a \equiv b\,[2\pi]$ ou $a \equiv \pi - b\,[2\pi]$

p26 Arcsin de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

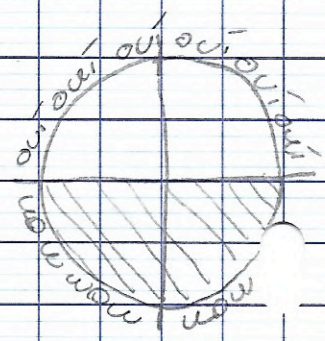
(donc d'abord on décale de 2π et ensuite on met le sin à droite



$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin\theta = x \end{cases}$$

p28 Arccos de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$

$\arccos(-x) \geq 0$



$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ \cos\theta = x \end{cases}$$

p30 Arctan de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

ouvert

$$\theta = \arctan x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \tan\theta = x \end{cases}$$

1¹ $\{x \in E \mid P(x)\}$ compréhension
$\{1, \pi, e, 42\}$ extension

1² $\exists x \in \emptyset, P(x)$ Faux
$\forall x \in \emptyset, P(x)$ Vrai

1³ $F \subset E \iff \forall x \in F, x \in E$
Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$

1⁴ $E = F \iff (E \subset F$ et $F \subset E)$
1⁵ $A \neq B \iff (\exists x \in A, x \notin B)$ ou $(\exists x \in B, x \notin A)$

1⁶ $P(E)$ l'ensemble des ensembles de E

1⁶ · $E \cup F = \{x \mid x \in E$ ou $x \in F\}$
$x \in (E \cup F) \iff x \in E$ ou $x \in F$
· $E \cap F = \{x \mid x \in E$ et $x \in F\}$
$x \in (E \cap F) \iff x \in E$ et $x \in F$

1⁶ On a tjs : $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$
et $(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$

1⁷ (A et B disjoint) $\iff (A \cap B = \emptyset)$

1⁷ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1⁷ $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$
$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$

Chap6

19 $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$

110 différence ensemblistes

$E \setminus F = \overline{F} = \complement_E^F \left(= E \cap \overline{F}\right)$

$x \in (E \setminus F) \iff (x \in E \text{ et } x \notin F)$

111 $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

113 Recouvrement disjoint

- $\bigcup_{X\in A} X = E$
- $\forall X, Y \in A,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$

Et si $\forall X \in A, X \neq \emptyset$, alors A partition de E

115 Produit cartésien d'ensemble

116 Application $f = (E, F, \Gamma)$

$\forall x \in E,\ \exists!\, y \in F,\ (x, y) \in \Gamma$

117 $\forall x \in E,\ id_E(x) = x$

$Im(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$

118 $\mathcal{F}(E, F)$ est l'ensemble de toutes les applications de E dans F.

2 • $Re(z+z') = Re(z) + Re(z')$
• $Im(z+z') = Im(z) + Im(z')$

2 • $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

• $zz^{-1} = 1$ $\qquad z^{-1} = \frac{1}{z}$

3 $z = a+ib$; $M(a,b)$ est le point d'affixe de z

3 $\overline{z} = Re(z) - i\,Im(z)$; • $\overline{\overline{z}} = z$

• $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; • $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

• $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$; • $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$

4 $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

5 • $|z|^2 = z\overline{z}$; • $|zz'| = |z| \times |z'|$

6 • $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

7 condition d'égalité • $z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$
• $z_2 = \lambda z_1$

8 • $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$

8 • $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$

10 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Chap 7

10 • $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ $\qquad \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$

11 • $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U} : \frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$; $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$
• $\forall z \in \mathbb{U} : z\bar{z} = 1$

12 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta = \arg z$ (ici $z \in \mathbb{U}$)
$z = e^{i\theta}$

13 • $\forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{i(\theta_1 + 2k\pi)} = e^{i\theta_1}$
• $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_2 \; [2\pi]$
• $e^{i\theta_1} \times e^{i(\theta_2)} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
• $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
• $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

14 $z = r e^{i\theta}$ $\qquad r = |z|$ $\qquad \theta \in]-\pi, \pi]$, $\theta = \arg(z)$

17 • $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi]$
• $\arg \frac{1}{z} \equiv \arg \bar{z} \equiv -\arg z \; [2\pi]$
• $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \; [2\pi]$

18 • Iméq Tri égalité ssi $\arg z_1 = \arg z_2$

19 • $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et • $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

20 linéarisation ← factorisation angle moitié

21 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

21 $e^z := e^{Re(z)} \times e^{iIm(z)}$

21 ° • $e^{z+z'} = e^{z} \times e^{z'}$ et • $z \longmapsto e^{z}$ est $2i\pi$-périodique

22 $a \in \mathbb{C}$, $z^2 = a$, z racine carré de a
• Preuve existence (ne ~)

23 Determination des racines carrées de a sous forme algébrique.

25 • Preuve $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

27 $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$

• Preuve (avec z_1 et z_2)

29 $\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$

30 • $z \in \mathbb{U}_n \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

• $\mathbb{U}_n = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1 \}$

32 • $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$

34 + ⊙ $T(z) = z + a$
$R(z) = \lambda(z-a) + a$
$r(z) = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$

Def similitude direct

$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{b-a}{d-c}$

1 def polynome
coefficient dominant
degré de P ⚠ $\deg(x \mapsto 0) = -\infty$

3 division euclidienne de polynome
div eucl de poly permet de trouver une facto (si on a une racine

5 Factorisation en produit d'irréductible

irréductible : $aX + b$ avec $a \neq 0$
ou $aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$ (et a>0

6 décomposition en element simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$\frac{a}{(X-\lambda)^m}$ elem simple de 1er espece

$\frac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$

Chap8

1 Def primitive
Def $\mathcal{C}^1$

3 $\int_a^b f(t)dt := F(b) - F(a) = \left[F(t)\right]_a^b$

3 1) linéarité de l'intégrale
2) - => inversion des bornes
3) relation de chasles
4) $f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0$
5) $f(t) \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$
6) inégalité triangulaire

} Preuves

6 Th fond. Anal. Preuve

8 Toutes les primitives usuelles

9

fct	Prim
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$u' \times f' \circ u$	$f \circ u$
$\ln x$	$x\ln(x) - x$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos x\rvert)$
$\text{th}\, x$	$\ln(\text{ch}(x))$

Chap9

11 $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\lambda)^n}$ $\xrightarrow{\text{Integration}}$ $x \longmapsto \begin{cases} \text{si } n=1 : \ln(|x-\lambda|) \\ n \geq 2 : \dfrac{1}{1-n} \times \dfrac{1}{(x-\lambda)^{n-1}} \end{cases}$

12 $x \longmapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2+1}$ $\xrightarrow{\text{Integration}}$ $x \longmapsto \dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan}(ax+b)$

13 Trigo : Linéariser (ou prendre partie Re/Im)

14 IPP Preuve

16 Changement de variable Preuve

A	arcs	à dériver
L	logarithme	
P	polynomes	
E	exponentielles	
S	sin, cos	à intégrer

EDL_1 : $y' + a(t)y = f(t)$

Forme normalisée : ⚠ bornes

Equa homo :

$$S_0 = \{ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} , \lambda \in \mathbb{K} \}$$

variation de la ~~variable~~ constante

On a y (de S_0)

On dérive $y \Rightarrow y'$

y sol de $(E) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda' = \dots$

déterminer λ (prim de λ')

Ensemble des sols

$$S = \{ \underbrace{\lambda e^{-A(t)}}_{E_H} + \underbrace{\lambda(t) e^{-A(t)}}_{S_P} , \lambda \in \mathbb{R} \}$$

EDL_1 : Si polynome $= f(t)$ et $\underline{\underline{a = cte}}$

alors $y(t)$ pol de meme deg. (pour trouver sol part)

trouver normalement sol equa homo.

addition des deux.

(important de connaître cette methode car difficile de trouver des prim avec méth normal.

EDL_2 : $\longrightarrow$ Dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?

Forme normalisé

Polynome caractéristique

Dans $\mathbb{C}$:

$r_1 \neq r_2$:

$$S_0 = \{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

$r_1 = r_2$:

$$S_0 = \{ t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

Dans $\mathbb{R}$:

$r_1 \neq r_2$:

$$S_0 = \{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Chap 10

$r_1 = r_2$:

$$S_0 = \{ t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt} \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$r \pm \omega i$:

$$S_0 = \{ t \mapsto e^{rt} \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \right) , (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

résolution $P(t) e^{\lambda t} \implies t \mapsto Q(t) e^{\lambda t}$

$\lambda = r_1$ et $\lambda = r_2$:

$$\deg Q = \deg P + 2$$

$\lambda = r_1$ xor $\lambda = r_2$:

$$\deg Q = \deg P + 1$$

$\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$:

$$\deg Q = \deg P$$

trouver y'

trouver y''

y sol de $(E) \iff \alpha = \dots$ et $\beta = \dots$ et $\dots$

Ensemble des sols

Suite arithmético-géométrique

$U_{n+1} = a U_n + b$

$l = a l + b \implies l = \dfrac{b}{1-a}$

$U_n = \lambda a^n + l$

SRPO2 :

$U_{n+2} + a U_{n+1} + b U_n = 0$

$X^2 + aX + b = 0$

Pour Δ :

$r_1 \neq r_2$:

$$U_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

$r_1 = r_2$:

$$U_n = (\lambda n + \mu) r^n$$

Pour $\mathbb{R}$:

$r_1 \neq r_2$:

$$U_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

$r_1 = r_2$:

$$U_n = (\lambda n + \mu) r^n$$

$re^{i\theta}$

$$U_n = r^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)$$

Cauchy:

rajoute condition initial

Raccordement de solution:

Reim? Pas compris.

Principe de superposition.

- L'ensemble des soluc homogène d'une EDL_1 est stable par combinaison linéaire. *
- $S = \{ y_P + y_H \ , \ y_H \in S_H \}$
- $y \in S \iff y - y_P \in S_H$
- principe de superposition si il y a un +

* de m̂ pour les EDL_2

1 $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$
$= \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$

2 $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

3, 4 restriction : $f_{|A} : A \longrightarrow F$
$x \longmapsto f(x)$

prolongement : $g_{|E} = f$
f à valeur dans B : $\forall x \in E,\ f(x) \in B$
corestriction : $f^{|B} : E \longrightarrow B$
A stable par f : $\forall a \in A,\ f(a) \in A$
application induite par f sur A : $f^{|A}_{|A} : A \longrightarrow A$
$x \longmapsto f(x)$

4 Injection : $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
5 Surjection : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$
$(\mathrm{Im} f = F)$

5 f stt $\nearrow$ $\Rightarrow$ f injective , Preuve

7 Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$
1/ f et g inj $\Rightarrow$ $g \circ f$ inj
2/ f et g sur $\Rightarrow$ $g \circ f$ sur
3/ $g \circ f$ inj $\Rightarrow$ f inj
4/ $g \circ f$ sur $\Rightarrow$ g sur
} preuves

7 Bijection : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$

8 f bijective $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} f^{-1} \circ f = id_E \\ f \circ f^{-1} = id_F \end{cases}$ Preuve

9 $(f^{-1})^{-1} = f$ Preuve

Chap 11

9 f et g bij $\Rightarrow$ $g \circ f$ bij et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ Preuve

10 $f : E \to E$; $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ (si f bij, f^n bij) $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$ Preuve

si $n < 0$ $f^n = (f^{-1})^{|n|}$

$f^m \circ f^n = f^{m+n}$

11 fct indicatrice : $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

12 $A \subset B \iff \forall x \in E, \ \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$

$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ Preuves

$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

13 $f : P(E) \longrightarrow \{0, 1\}^E$ est bijective = Preuve

$A \longmapsto \mathbb{1}_A$

14 Relation binaire sur E est une partie de $E \times E$, notons xRy

1/ Reflexive : $\forall x \in E$, xRx

2/ symetrique : $\forall x, y \in E$, $xRy \Rightarrow yRx$

3/ Transitive : $\forall x, y, z \in E$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$

4/ antisymetrique : $\forall x, y \in E$, xRy et $yRx \Rightarrow x = y$

15 $\sim$ Relation d'equivalence est Reflexive, symetrique, Transitive

16 classe d'equivalence : $cl(x) = \{ y \in E \mid x \sim y \}$

17 $\forall x \in E$, $cl(x) \neq \emptyset$

$\forall x, y \in E$, $cl(x) \cap cl(y) \neq \emptyset \Rightarrow cl(x) = cl(y)$

Preuve

$$\bigcup_{x \in E} cl(x) = E$$

ainsi $\{cl(x), x \in E\}$ est une partition de E

18 Relation d'ordre est reflexive, transitive, antisymétrique

19 Relation d'ordre totale
$\iff \forall x, y \in E, \quad x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$

19 Soient $(E, \leqslant)$, $(F, \preccurlyeq)$, $f : E \longrightarrow F$
f croissant
$\iff \forall x, y \in E, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)$

20 x minorant de $A \iff \forall a \in A, \quad x \preccurlyeq a$
x majorant de $A \iff \forall a \in A, \quad a \preccurlyeq x$ $\Big\}$ $\underline{\underline{x \in E}}$

21 $x = \min A \iff \forall a \in A, \quad x \preccurlyeq a$
$x = \max A \iff \forall a \in A, \quad a \preccurlyeq x$ $\Big\}$ $\underline{\underline{x \in A}}$

22 Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit element.
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand element.
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus
23 grand element.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit element.

24 $a = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \ x \leqslant a \\ \forall y \in E, \ (\forall x \in A, x \leqslant y) \Rightarrow a \leqslant y \end{cases}$

$a = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \ a \leqslant x \\ \forall y \in E, \ (\forall x \in A, y \leqslant x) \Rightarrow y \leqslant a \end{cases}$

25 A possède un max $\Rightarrow \max A = \sup A$ Preuve

$\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

1 Thm: Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieur.

1 Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieur : Preuve

1 $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \neq \emptyset$, A majoré, $m \in \mathbb{R}$ Preuve

$$m = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m - \varepsilon < a \leq m \end{cases}$$

2 $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \emptyset$, A minorée, $m \in \mathbb{R}$ Preuve

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, m \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m \leq a < m + \varepsilon \end{cases}$$

3 $\mathbb{R}$ est archimédien $\iff$ Preuve

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, nx > y$$

4 $\forall x > 1, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, x^n > y$ Preuve

4 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ Preuve (notons $\lfloor x \rfloor = n$)

5 I intervalle de $\mathbb{R} \iff$

$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in I$

$\forall x, y \in I, \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \text{ et } t \leq y\} \subset I$

5-6 Description de I

7 approximations décimale par défaut : $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$

approximation décimale par excès : $r_x = r_n + \dfrac{1}{10^n}$

Chap 12

7 Ainsi : $r_n \in \mathbb{Q}$ et $r_n \leqslant x < r_n + \frac{1}{10^n}$ Preuve

8 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ Preuve

9 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ Preuve

9 Droite numérique achevée $\Leftrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

9 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Toute partie non vide de } \overline{\mathbb{R}} \text{ possède} \\ \text{une borne supérieur (HP : hors programme)} \end{array} \right.$

7 A dense dans $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ Pour tout intervalle ouvert non vide I,

$A \cap I \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists a \in A,\ x < a < y$

1 Suite constante, Suite stationnaire

2,3 Suite majorée, minorée, bornée

3 $(U_n) \nearrow \iff \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U_{n+1}$ Preuve

4 $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $(U_n) \nearrow \iff \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

5 (U_n) converge vers $\ell \iff$
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |U_n - \ell| < \varepsilon$

5 Unicité de la limite : Preuve

6 indifférence des premiers termes Preuve

7 Def convergente, divergente

8 Toute suite convergente est bornée Preuve

8 (U_n) tend vers $+\infty \iff$
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ U_n > A$

8 $(U_n \longrightarrow +\infty) \Rightarrow (U_n)$ minorée Preuve

9 $\forall \in P(\mathbb{R})$, V voisinage de $\ell \iff \exists \varepsilon > 0, V =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$
$(\ell \in \overline{\mathbb{R}})$ V voisinage de $+\infty \iff \exists A \in \mathbb{R}, V =]A ; +\infty[$

9 $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$; $U_n \to \ell \iff \forall V \in V_\ell, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 ;\ U_n \in V$

10 $U_n \longrightarrow \ell \iff \lambda U_n \longrightarrow \lambda \ell$ Preuve

11 $U_n \to 0$ et $V_n \to 0 \Rightarrow U_n + V_n \longrightarrow 0$ Preuve

11 (U_n) et (V_n) convergent $\Rightarrow \lambda U_n + \mu V_n$ converge Preuve
$\lim \lambda U_n + \mu V_n = \lambda \lim U_n + \mu \lim V_n$ Preuve

12 (U_n) cv (V_n) dv $\Rightarrow (U_n + V_n)$ dv Preuve

12 $U_n \to +\infty$ et V_n minoré $\Rightarrow U_n + V_n \longrightarrow +\infty$ Preuve

13 (U_n) bornée et $V_n \longrightarrow 0 \Rightarrow U_n V_n \longrightarrow 0$ Preuve

13 $U_n \to \ell_1$ et $V_n \to \ell_2 \Rightarrow U_n V_n \longrightarrow \ell_1 \ell_2$ Preuve

14 $U_n \to +\infty$ et V_n minoré par $m \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow U_n V_n \to +\infty$ Preuve

15 $U_n \to +\infty$ et $V_n \to +\infty \Rightarrow U_n V_n \to +\infty$ Preuve

15 $U_n \to +\infty$ et $V_n \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow U_n V_n \longrightarrow +\infty$ Preuve

16 $U_n \to \ell \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ U_n \neq 0$ Preuve
et $\frac{1}{U_n} \longrightarrow \frac{1}{\ell}$

17 $U_n \to \ell_1$ et $V_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \frac{U_n}{V_n} \longrightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}$ Preuve

18 $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $U_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{U_n} \longrightarrow +\infty$ Preuve

Chap 13

19 $|U_n| \longrightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{U_n} \longrightarrow 0$ Preuve

19 $U_n \longrightarrow l \Rightarrow |U_n| \longrightarrow |l|$ Preuve

20 (U_n) et (V_n) cv & $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant V_n \Rightarrow \lim U_n \leqslant \lim V_n$ Preuve

20 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant U_n \leqslant V_n$ et $\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = 0$ Preuve

21 $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$ et $U_n \longrightarrow l$ et $W_n \longrightarrow l$ Preuve

$\Rightarrow V_n$ converge et $V_n \longrightarrow l$

22 $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant V_n$: Preuve

$U_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow V_n \longrightarrow +\infty$

$V_n \longrightarrow -\infty \Rightarrow U_n \longrightarrow -\infty$

23 $q = 1 \Rightarrow q^n \longrightarrow 1$ Preuves

$q > 1 \Rightarrow q^n \longrightarrow +\infty$ —

$q \in]-1;1[\Rightarrow q^n \longrightarrow 0$ —

$q \leqslant -1 \Rightarrow (q^n)$ n'a pas de limite —

23 $\forall q \in \mathbb{R}, \frac{q^n}{n!} \longrightarrow 0$ Preuve

24 (U_n) croissante : Thm lim monotone

(U_n) majorée $\Rightarrow U_n \longrightarrow \sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ Preuve

(U_n) pas majorée $\Rightarrow U_n \longrightarrow +\infty$ —

26 Suites adjacentes :

$(V_n)\nearrow ; (U_n)\searrow ; \; U_n - V_n \longrightarrow 0$

28 Suite extraite

$U_n \longrightarrow l \Rightarrow U_{\varphi(n)} \longrightarrow l$ Preuve

29 $U_n \longrightarrow l \Leftrightarrow U_{2n} \longrightarrow l$ et $U_{2n+1} \longrightarrow l$ Preuve

30 Thm de Bolzano Weierstraß Preuve

31 Caracterisations séquentielles Preuves

33 A dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \exists (U_n) \in A^{\mathbb{N}}, U_n \longrightarrow x$

Dans les complexes :

34 (Z_n) bornée $\Leftrightarrow$

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |Z_n| \leqslant M$

$\Leftrightarrow (Im(Z_n))_n$ et $(Re(Z_n))_n$ bornée

35 (Z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |Z_n - \ell| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow Re(Z_n) \longrightarrow R_e(\ell)$ et $Im(Z_n) \longrightarrow Im(\ell)$

36 $Z_n \longrightarrow \ell \quad \Rightarrow \quad \overline{Z_n} \longrightarrow \overline{\ell}$

...

1 def matrice à n lignes, p colonnes : $A : [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$
$(i,j) \longmapsto a_{i,j}$

2 $M_{n,p}(\mathbb{K})$; $M_{n,1}(\mathbb{K})$: matrice colonne à n lignes
$M_{1,p}(\mathbb{K})$: matrice ligne à p colonnes
$O_{n,p}$; $I_n : \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[I_n]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

3 le scalaire $\delta_{i,j}$

3 Triangulaire supérieure
Triangulaire inférieure
diagonale
scalaire

4 $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

5 $A+B$
λA
$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ Preuve
$A+B = B+A$: commutativité Preuve
$(A+B)+C = A+(B+C)$: associativité Preuve
$O_{n,p} + A = A$
$\exists! D \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ tq $A+D = O_{n,p}$ (c'est $-A$)
$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

7 $E_{i,j}$: matrice elementaire Preuve

7 $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j}) E_{i,j}$

8 Produit de Matrices $A_{n,p}$ $B_{p,q}$

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \left([A]_{i,k} \times [B]_{k,j} \right)$$

Chap 14

10 $(AB)C = A(BC)$: associativité

$A(\lambda B + \mu B') = \lambda AB + \mu AB'$ } bilinéarité

$(\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B$

$I_n A = A I_p = A$

$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)$

11 $AE_{i,1} = i^{ème}$ colonne de A

$E_{1,j}A = j^{ème}$ ligne de A

$X_1 \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

$AX_1 = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_p C_p$

$X_2 \in M_{1,n}(\mathbb{K})$

$X_2 A = x_1 L_1 + x_2 L_2 + \dots + x_n L_n$

12 $A \in M_n(\mathbb{K})$; $A^0 = I_n$; $A^k = AA \cdots A$

Si A et B commutent : $(AB)^k = A^k B^k$

12 Nilpotence

13 Binome de Newton ; commutatif

15 A et B triangulaire sup

alors AB triang sup et

$\forall i \in [\![1, n]\!], [AB]_{i,i} = [A]_{i,i} [B]_{i,i}$

15 Produit par bloc

16 Transposée d'une matrice : def.

$(A^T)^T = A$

$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$ Preuve

$(AB)^T = B^T A^T$ Preuve

si $A^T = A$: symetrique

si $-A^T = A$: antisymetrique

18 Trace : $Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$

$Tr(\lambda A + \mu B) = \lambda Tr(A) + \mu Tr(B)$: linéarité : preuve

$Tr(AB) = Tr(BA)$ preuve

20 $A \in M_n(\mathbb{K})$, A inversible $\iff \exists B \in M_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA = I_n$

21 $(A^{-1})^{-1} = A$

si A et B inversible alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$

$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

et $GL_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices inversibles.

22 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

AB inversible $\iff$ A et B inversibles

25 systèmes

28 A Triang sup : A inversible $\iff \forall i \in [\![0, n]\!], [A]_{i,i} \neq 0$

31 Technique magique pour inverser

35 A inversible $\iff \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$

36 Si $AB = I_n$ alors $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$

1 LCI : $* : E \times E \longrightarrow E$

- associative
- commutative
- $*$ distributive par rapport à $+$

3 elem neutre $e \in E$ si $\forall x \in E, xe = ex = x$

- unicité elem neutre

4 x inversible $\Leftrightarrow \exists y \in E$ Tq $xy = yx = e$

- unicité de x^{-1}
- xy inversible si x et y inversibles
- $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

5 x est "régulier" pour la LCI. (x inversible)

$xy = xz \Rightarrow y = z$

$yx = zx \Rightarrow y = z$

5 $A \in P(E)$, A stable par $* \Leftrightarrow \forall a, b \in A, a * b \in A$

6 $x^0 = e$; $x^{n+1} = xx^n$

- $x^{m+n} = x^m x^n$
- (x inversible), x^n inversible et $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$
- $x^n = (x^{-1})^{-n}$ (si $n < 0$)
- $\{x^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est la plus petite partie stable contenant x
- et si x inversible de même pour $\{x^n, n \in \mathbb{Z}\}$

8 $(G, *)$ est un groupe ssi :

- $*$ associative
- $*$ possede un elem. neutre
- Tout element de G est inversible pour $*$

Chap 15

10 $S(E)$ est l'ensemble des bijections de E dans E.
Le groupe symétrique est $(S(E), \circ)$

12 Produit direct de G_1 et G_2 : $((G_1 \times G_2), \otimes)$
avec $\forall (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$:
$(g_1, g_2) \otimes (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 \circ h_2)$
et avec $(G_1, *)$ et $(G_2, \circ)$

14 $(G, *)$ un groupe. $H \in P(G)$
$(H, *)$ est un ss-gpe de $(G, *)$
$\Leftrightarrow$ H est stable par $*$
$(H, *)$ est un groupe
$\Leftrightarrow$ H est stable par $*$
$e_G \in H$
$\forall h \in H, h^{-1} \in H$
$\Leftrightarrow$ $e_G \in H$
$\forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H$

17 Une ~~union~~ intersection de sous-gpe est un sous-gpe.

17 $\langle g \rangle = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$, avec $g \in G$: sous-groupe engendré par g.
$\langle g \rangle = \bigcap_{\substack{H \text{ ss-gpe de } G \\ \text{tq } g \in H}} H$

18 $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux gpe ; $f : G_1 \longrightarrow G_2$
f morphisme de groupe
$\Leftrightarrow \forall g, g' \in G_1, f(g *_1 g') = f(g) *_2 f(g')$

19 $f(g_1 *_1 g_2 *_1 \cdots *_1 g_n) = f(g_1) *_2 f(g_2) *_2 \cdots *_2 f(g_n)$
$f(e_1) = e_2$

$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

20 $f : G_1 \longrightarrow G_2$ et $g : G_2 \longrightarrow G_3$ deux morphismes
alors $g \circ f$ est un morphisme

20 si H_1 ss-gpe de G_1 alors $f(H_1)$ ss-gpe de G_2
si H_2 ss-gpe de G_2 alors $f^{-1}(H_2)$ ss-gpe de G_1
en particulier pour $f^{-1}(\{e_2\})$

21 noyau de f : $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{e_2\}) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$
f injectif ssi $\mathrm{Ker} f = \{e_1\}$

22 f mor. gr. bijectif $\Longrightarrow f^{-1}$ mor. gr. (bijectif?)
isomorphisme ; automorphisme

22 $(A, +, \times)$ un anneau
$\Longleftrightarrow$ $(A, +)$ est un groupe commutatif
$\times$ associatif et possède un elem neutre
$\times$ distributif par rapport à $+$.

23 $a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$
$a \times (-b) = (-a) \times (b) = -(a \times b)$
$a \times (nb) = (na) \times b = n(a \times b)$

24 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

25 $(A, +, \times)$ un anneau, $B \subset A$; $(B, +, \times)$ un ss-anneau
$\Longleftrightarrow$ B stable pour $+$ et $\times$
$1_A \in B$

$(B, +, \times)$ est un anneau
$\iff$ $1_A \in B$
$\forall x, y \in B$, $x - y \in B$
et $x \times y \in B$

26 L'exemple fondamental

27 $a \in A \setminus \{0_A\}$, a diviseur de zéro $\iff \exists b \in A \setminus \{0_A\}$
Tq $a \times b = 0_A$ ou $b \times a = 0_A$

28 $(A, +, \times)$ est intègre
$\iff$ A possède au moins 2 elements
A est commutatif
A ne contient pas de diviseur de zéro.

29 $(A, +, \times)$, $a \in A$, a inversible $\iff$ a inversible pour $\times$

29 $A^\times$ ou $U(A)$: ensemble des elements inversible de A
$(A^\times, \times)$ est un groupe : appelé groupe des unités de A

29 $a \in A^\times$, alors a n'est pas un diviseur de zero.

30 $(A, +_A, \times_A)$ et $(B, +_B, \times_B)$ deux anneaux. $f : A \longrightarrow B$
f morphisme d'anneaux
$\iff$ $f(1_A) = 1_B$
$\forall x, y \in A$, $f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$
$\forall x, y \in A$, $f(x \times_A y) = f(x) \times_B f(y)$

De plus : $f(0_A) = 0_B$, $\forall a \in A$, $f(-a) = -f(a)$
et f injectif $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$

31 Corps = anneau commutatif à plusieurs elts
où tout elt est inversible, sauf 0_A.

1 $a | b$ $\forall a \in \mathbb{Z}, \pm 1 | a$ et $a | 0$

$D(n)$; est fini

2 $n | a$ et $n | b \Rightarrow n | a+b$

$n | a \Rightarrow \forall b \in \mathbb{Z}, n | ab$

ainsi $n | a$ et $n | b \Rightarrow n | au + bv$

3 $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n] \Rightarrow a+c \equiv b+d [n]$

et $ac \equiv bd [n]$

$a \equiv b [n] \Leftrightarrow am \equiv bm [nm]$

4 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2$ avec $0 \leq r < b$

Tq $a = bq + r$

6 $a \equiv b [n] \Leftrightarrow a \% n = b \% n$

6 relation de congruence mod n possède n classes d'équivalences : $cl(0), cl(1), \ldots, cl(n-1)$

7 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k | n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)$

8 Def nb premier

$n \in \mathbb{N}^*$, n est un produit de nombre premier

9 infinité de nombre premiers

10 $pgcd(a, b) = a \wedge b = max(D(a) \cap D(b))$

10 $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ Tq $d = au + bv \Rightarrow a \wedge b | d$

11 $a \wedge b = a \wedge (b + ka)$: <u>Euclide</u>

si $a = bq + r$ $(a \% b)$ alors $a \wedge b = r \wedge b$

algo d'euclide

$n | a$ et $n | b \Leftrightarrow n | a \wedge b$

Chap 16

12 $d = a \wedge b \iff \begin{cases} d \mid a \text{ et } d \mid b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \mid a \text{ et } n \mid b) \Rightarrow n \mid d \end{cases}$

13 associativité du PGCD
$\forall k \in \mathbb{Z},\quad (ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$

14 $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq $au + bv = a \wedge b$: id de <u>Bezout</u>
algo d'Euclide étendu

16 a et b premiers entre eux $\iff a \wedge b = 1$
~~a premier~~ $a \wedge bc = 1 \iff a \wedge b = 1$ <u>et</u> $a \wedge c = 1$
$a \wedge (b_0 b_1 \cdots b_n) = 1 \iff \forall i \in [\![0,n]\!],\ a \wedge b_i = 1$

17 $a \mid bc$ <u>et</u> $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \mid c$: <u>Gauss</u>
$a \mid m$ <u>et</u> $b \mid m$ <u>et</u> $a \wedge b = 1 \Rightarrow ab \mid m$
$ka \equiv kb\ [n]$ <u>et</u> $k \wedge n = 1 \Rightarrow a \equiv b\ [n]$

18 $d = a \wedge b \Rightarrow \exists a', b' \in \mathbb{Z},\ a' \wedge b' = 1$
<u>et</u> $a = da'$ <u>et</u> $b = db'$
$\exists (d, a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2,\ a' \wedge b' = 1$ <u>et</u>
$a = da'$ <u>et</u> $b = db' \Rightarrow d = a \wedge b$

18 La forme irréductible de $r = \frac{a}{b}$

19 $a \vee b = \min(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*)$: PPCM
$m = a \vee b \iff \begin{cases} a \mid m \text{ et } b \mid m \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a \mid n \text{ et } b \mid n) \Rightarrow m \mid n \end{cases}$
$(ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$

20 $(a \vee b) \times (a \wedge b) = ab$

20 PGCD de $a_1, \dots, a_n$: definition
soit d le pgcd de $a_1, \dots, a_n$, $D(d) = \bigcap_{i=1}^{n} D(a_i)$
identité de Bézout généralisé

21 $PGCD(a_1, \dots, a_n) = 1 \iff a_1, \dots, a_n$ sont premiers entre eux.
$\iff \exists\, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}$ tq $1 = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$
thm de Bezout généralisé

22 p premier, $p \nmid n \implies p \wedge n = 1$
$p \mid ab \iff p \mid a$ <u>ou</u> $p \mid b$

22 definition valation p-adique
$n = v_p(a) \iff \exists\, a' \in \mathbb{Z}$, $a' \wedge p = 1$ et $a = p^n a'$
$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

23 decomposition en produit de premier

24 $a \mid b \iff \forall p \in \mathbb{P}, v_p(a) \leq v_p(b)$
$v_p(a \wedge b) = \min(v_p(a), v_p(b))$
$v_p(a \vee b) = \max(v_p(a), v_p(b))$
$a \wedge b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$ et $a \vee b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$

25 $a \wedge b = 1 \iff \forall p \in \mathbb{P}, v_p(a) = 0$ ou $v_p(b) = 0$

25 $a^p \equiv a\,[p]$ <u>Fermat</u>
et si $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$

26 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{k},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$, avec $\overline{k} = cl(k)$

27 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif

27 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad k \longmapsto \overline{k}$$ est un morphisme d'anneau surjectif

27 $\overline{k}$ inversible $\Leftrightarrow$ $n \wedge k = 1$

27 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ anneau intègre $\Leftrightarrow$ n premier
$\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

Quelques anneaux / corps à connaître :

1 def V_a voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$

a adhérent à $I \iff \forall V_a,\ V_a \cap I \neq \emptyset$

def $\overline{I}$

3 Les 9 limites

4 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall V_\ell,\ \exists W_a,\ \forall x \in I \cap W_a,\ f(x) \in V_\ell$

4 Unicité de la limite

6 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in I \implies f(a) = \ell$ (donc $\ell \in \mathbb{R}$)

6 f continue en $a \iff f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$

6 soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à I

f est défini à gauche au voisinage de a

$\iff$ a adhérent à $I \cap]-\infty, a[$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ I \cap]a-\varepsilon, a[\neq \emptyset$

7 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \eta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

8 $a \in I,\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \ell$

et

$a \notin I,\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$

9 $a \in \overline{I},\ \ell \in \overline{\mathbb{R}},\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

$\iff \forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

10 Opérations sur les limites, composition

12 $\forall x \in I,\ f(x) \leq M \implies \ell \leq M$

$\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_2$

$\implies \ell_1 \leq \ell_2$

Chap 17

13 Thm des gendarmes
13 utilisation d'inegalité

14 Thm limite monotone

15 Continuité sur I

16 $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}^I, +, \times)$

17 caractérisation séquentielle de la continuité

18 continuité à droite/gauche

19 Prolongement par continuité

20 TVI
20 f ne s'annule pas sur $I \Rightarrow f$ de signe constant.
21 l'image d'un intervalle est un intervalle

thm de la bijection

21 Une fonction continue sur un segement possède un min et un max TBA
l'image d'un segement est un segement

22 si f continue : sur un intervalle :
f injective $\Leftrightarrow f$ stt monotone

f continu et ... $\Rightarrow f^{-1}$ continue

23 Extension au complexes.

24 En fait c'est tout pareil
mais attention ! pas de signe " < ".

1 Def $\mathbb{K}[X]$: a_k : coeff de deg k
$\deg(P)$

2 $P \times Q = (C_n)_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\tilde{\lambda} = (\lambda, 0, 0, \dots)$

3 $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ anneau commutatif.
def $\mathbb{K}_n[X]$

4 $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P . \deg Q)$

5 $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \Rightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ <u>ou</u> $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$
$P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ <u>et</u> $PQ = PR \Rightarrow Q = R$

5 $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$

$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$

6 $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

$\deg(P^{(n)}) = \begin{cases} \deg P - n & \text{si } \deg P \geq n \\ -\infty & \text{si } \deg P < n \end{cases}$

7 $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ formule de <u>Leibniz</u>.

7 $\tilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction polynomiale
$\lambda \longrightarrow P(\lambda)$ associé à P.

$\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$; $\widetilde{PQ} = \tilde{P}\tilde{Q}$; $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$, $\widetilde{(P')} = (\tilde{P})'$

Chap 18

8 def $P \mid Q$: reflexivité, transitivité.

$(P \mid Q$ et $Q \mid P) \Rightarrow (P = Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ <u>ou</u> $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, P = \lambda Q)$

$U(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}^*$

9 $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, div eucl de A par B :
$\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]$, Tq $\deg R < \deg B$ et $A = BQ + R$

9 $a \in \mathbb{K}$ racine de $P \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow X - a \mid P$

10 def : multiplicité de a dans P.

10 $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$ <u>Taylor</u>

10 a racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$
$\Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ <u>et</u> $P^{(m)}(a) \neq 0$

11 a racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\Rightarrow a$ racine de P', de multiplicité $m - 1$

11 $(X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_n)^{m_n} \mid P$

12 $\sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant \deg P$

$\deg P \leqslant n$ <u>et</u> P possède $n+1$ racines $\Rightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]}$
et en particulier si P possède une infinité de racine.

13 P est scindé
$\Leftrightarrow \deg P \geqslant 1$ et $\sum_{i=1}^{n} m_i = \deg P$
$\Leftrightarrow P = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{m_i}$ (α coeff dominant de P)

P est unitaire $\Leftrightarrow$ coeff dominant $= 1$

13 Soit P scindé
$P \mid Q \Leftrightarrow$ ~~$\forall$~~ toute racine de P est une racine de Q et de multiplicité inférieur ou égal à celle de Q.

13 $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant alors P possède au moins une racine. <u>d'Alembert-Gauss</u>

Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est scindé.

$P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
α racine $\Rightarrow \bar{\alpha}$ racine et de même multiplicité

14 $(\deg P \geq 1)$ P est irréductible
$\Leftrightarrow \forall Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $P = QR \Rightarrow \deg Q = 0$ ou $\deg R = 0$

14 Tout polynome non constant est produit d'un nombre fini d'irreductible.

15 factorisation en produit d'irred dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

15 $$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}$$

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$ (avec n le degré ; a les coeffs et λ les racines

16 $\mathbb{K}$ un corps infini
$P \longmapsto \tilde{P}$ est une bijection de $\mathbb{K}[X]$ et l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}$.

17 $$L_i := \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}$$

L_i est le $i^{ème}$ polynome de Lagrange associé à $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$j \in [\![0, n]\!]$

$$L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si } j\neq i \end{cases}$$

L_i est l'unique polynome $\in \mathbb{K}_n[X]$ Tq $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(\lambda_j) = \delta_{i,j}$

17 Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\exists!(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ Tq $P = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_n L_n$

et alors $P\xi = \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i$

Bonus

$$(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = (X^2 - 2X\,\mathrm{Re}(\lambda) + |\lambda|^2)$$

0 Def $U_n \underset{n\to+\infty}{=} o(V_n)$ $\left(\Leftrightarrow \frac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$

2 Les opérations

3 $U_n = o(V_n) \Rightarrow U_{\varphi(n)} = o(V_{\varphi(n)})$

3 Les croissances comparées

3 Def $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$ $\left(\Leftrightarrow \frac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right)$

4 $U_n \sim V_n \Leftrightarrow U_n \underset{n\to+\infty}{=} V_n + o(V_n)$

4 $\sim$ est une relation d'équivalence

4 $U_n \sim V_n$ et $V_n \to P \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow U_n \to P$
$V_n \to P \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (U_n \sim V_n \Leftrightarrow U_n \to P)$

4 $U_n \sim V_n \Rightarrow U_n$ et V_n de même signe à partir d'un n_0

5 Les opérations sur les équivalents

5 $U_n = o(V_n)$ et $V_n \sim W_n \Rightarrow U_n = o(W_n)$

6 Theoreme des gendarmes

6 $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ Sterling

6 Définition pour les fonctions

7 composition <u>à droite</u>

Chap 19

8 $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = 0 \Rightarrow e^{f(x)} \underset{x \to a}{\sim} e^{g(x)}$

$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ $\boxed{(\ell \neq 1)}$

$\Rightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$

9 $x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$ etc... pour $\mathbb{R}$

$x^\alpha \underset{x \to 0}{=} o(|\ln x|^\beta)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$

Pour les fonctions polynomiales :
plus grand terme en $\pm\infty$
plus petit terme en 0

9 $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ <u>Taylor</u>

10 Les équivalents usuels !

11 $U_n = O(V_n) \Leftrightarrow \left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ bornée

1 Def espace vectoriel

$E \times F$ est un $\mathbb{K}$-ev

$F(I, E)$ est un $\mathbb{K}$ev

3 Def ss-ev

$\Leftrightarrow$ 1/ $0_E \in F$

2/ $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$

3 $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev

4 $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \, , (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$

est un sev

4 Si F est un sev qui contient les e_i, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$

5 $(e_1, \dots, e_n)$ est generatrice de $E \Leftrightarrow E = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$

7 $(e_1, \dots, e_n)$ est libre $\Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

libre $\leftrightarrow$ indépendants

lié $\leftrightarrow$ dépendants

9 x et y colinéaires $\Leftrightarrow (x, y)$ lié

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \; x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$

9 Une famille qui contient une sous-famille lié est lié

Une sous-famille d'une famille libre est libre.

$(e_1, \dots, e_n)$ est libre $\Leftrightarrow \forall x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

9 $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$, degré 2 à 2 distincts $\Rightarrow (P_1, \dots, P_n)$ libre

Chap20

10 extension familles infinies (on veut une somme finie !)
$\mathbb{K}^{(I)}$: ensemble des familles presque nulles.
$(e_i)_{i\in I}$ est libre $\Leftrightarrow$ toutes ses sous familles sont libre.

12 Une base est une famille libre et génératrice
$\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I, \ x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$

12 Le n-uplet des coordonnées de x dans la base B

12 $F+G = \{ x_F + x_G, (x_F, x_G) \in F \times G \}$
est un sev qui contient F et G
$F \cup G \subset H \Rightarrow F+G \subset H$

$\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y)$

13 $F+G$ est directe $(F \oplus G)$
$\Leftrightarrow \forall x_F \in F, \forall x_G \in G, \ x_F + x_G = 0_E \Rightarrow x_F = x_G = 0_E$
$\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$
$\Leftrightarrow \forall x \in F+G, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, \ x = x_F + x_G$

14 F et G supplémentaires dans $E \Leftrightarrow E = F \oplus G$
$\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, \ x = x_F + x_G$

16 Somme et somme direct de n sous-espaces.

18 f linéaire $\Leftrightarrow f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

19 $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

$f, g \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \lambda f + g \in \mathcal{L}(E, F)$

19 $\mathcal{L}(E,F)$ est un sev de $F(E,F)$

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$

19 Def endomorphisme d'ev

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau

def endomorphisme de F induit par f

21 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

$\operatorname{Ker} f$ est un sev de E

$\operatorname{Im} f$ est un sev de F

$\operatorname{Ker} \lambda f = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} \lambda f = \operatorname{Im} f$

Soit (e_i) une famille generatrice de E. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $(f(e_i))$ est generatrice de $\operatorname{Im}(f)$

21 def isomorphisme, automorphisme

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective $\Rightarrow f^{-1}$ linéaire

$GL(E)$: ensemble des automorphismes.

$(GL(E), \circ)$ est un groupe.

22 $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

$\Leftrightarrow f_B : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

22 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, Soit $B = (e_i)_{i \in I}$,

f est un isomorphisme $\Leftrightarrow (f(e_i))_{i \in I}$ est une base de F.

22 homothétie : λid_E

22 La projection sur F parallèlement à G $\quad p : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \end{array}$

22 $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$

p est un projecteur $\Leftrightarrow$ p est une projection

$\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaire dans E

p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ // à $\operatorname{Ker} p$

23 $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - id_E)$ = ensemble des points fixes de p

24 Symétrie par rapport à F parallèlement à G

$$s : E \longrightarrow E$$
$$x = x_F + x_G \longmapsto x_F - x_G$$

s est un endomorphisme $\qquad (s = 2p - id_E$

$s \circ s = id_E$

si $s^2 = id_E$ 24 $\operatorname{Ker}(s - id_E)$ et $\operatorname{Ker}(s + id_E)$ sont supplémentaires dans E

s est la symétrie par rapport à $K(s - id_E)$ // $\operatorname{Ker}(s + id_E)$

25 $E = F \oplus G$, $u \in \mathcal{L}(F, H)$, $v \in \mathcal{L}(G, H)$

$\exists! f \in \mathcal{L}(E, H)$, $f_{|F} = u$ et $f_{|G} = v$

1 Def $DL_n(a)$
Si f possède un $DL_n(a)$, alors f possède un $DL_p(a)$ avec $p \in [\![1, n]\!]$

2 Unicité du $DL_n(a)$
Partie régulière du $DL_n(a)$ de f
$f(x)$ est équivalent au 1er terme non nul de son $DL_n(a)$

3 f possède un $DL_0(a) \iff f$ continue en a
et alors $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1)$

f possède un $DL_1(a) \iff f$ est dérivable en a
et alors $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

3 Relation entre la parité de la fonction et la nulité des coefficients de son $DL_n(0)$

3 On peut intégrer terme à terme des DL.

4 def $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$

4 Théorème de Taylor-Young.
$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

5 Les Développements limités par coeur.
- savoir retrouver arctan et arcsin à l'aide de leur dérivées.
- savoir retrouver Tan en intégrant.

7 Somme et Produit de DL c'est facile.

Chap21

8 La composition

9 Attention les quotients peuvent diminuer l'ordre.

11 Si $x \to a$ alors on pose $h = x - a$ et ainsi $h \to 0$ et on applique nos DL.

12

→ $\forall x \in I,\ f(x) \geq x \Rightarrow U_n$ croissante
$\forall x \in I,\ f(x) \leq x \Rightarrow U_n$ decroissante

→ f croissante $\Rightarrow (U_n)$ monotone
de monotonie donnée par $U_1 - U_0$

→ f decroissante $\Rightarrow (U_{2n})$ et (U_{2n+1}) sont
monotones de monotonie contraire.

f continue et (U_n) converge vers ℓ
$\Rightarrow \ell$ est un point fixe de f

Faux Chap21

1 Théorème de la base extraite
Théorème de la base incomplète
E un $\mathbb{K}$-ev dim n.

card (famille libre) $\leqslant n$
card (famille generatrice) $\geqslant n$
card (famille libre) $= n \Rightarrow$ est une base
card (famille generatrice) $= n \Rightarrow$ est une base

3 $\dim E \times F = \dim E + \dim F$
E est un $\mathbb{C}$-ev fini $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$

4 F est un sev de E $\Rightarrow \dim F \leqslant \dim E$
$E = F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$

F et G sont en somme direct
$\Leftrightarrow$ la concatenation de B_F et B_G est une base de $F+G$
$\Leftrightarrow \dim F+G = \dim F + \dim G$

definition base adapté à la somme directe $F \oplus G$

$F \oplus G \Rightarrow$
$\left.\begin{array}{l} F \cap G = \{0_E\} \\ E = F + G \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{array}\right\}$ deux des trois impliquent le reste

5. $\dim F+G + \dim F \cap G = \dim F + \dim G$ <u>Grassmann</u>

$\dim \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$
il y a égalité ssi $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe

5 F un sev de E, $\exists$ un supplémentaire de F dans E

Chap22

6 $u = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \iff \forall i \in I,\ u(e_i) = 0_F$

$u = v \iff \forall i \in I,\ u(e_i) = v(e_i)$

$(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$

$\exists! u \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = y_i$

$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \cdot \dim F$

7 $\exists$ un isomorphisme entre E et $F \iff \dim E = \dim F$

$\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire $S \Rightarrow f_{|S}^{\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ <u>thm du rang</u>

seulement une famille

$rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$

$rg(e_1, \dots, e_n) = \dim \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

$rg(e_1, \dots, e_n) = n \iff (e_1, \dots, e_n)$ est libre

~~$rg(f)$~~

8 $(b_1, \dots, b_n)$ base de E

$rg(f) = rg(f(b_1), \dots, f(b_n))$

E et F deux ev fini, $f \in \mathcal{L}(E,F)$

$\dim E < \dim F \Rightarrow f$ n'est pas surjective

$\dim F < \dim E \Rightarrow f$ n'est pas injective

9 $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim E = \dim F$,

f bijective

$\iff f$ injective

$\iff f$ surjective

E un $\mathbb{K}$ev fini, $f \in \mathcal{L}(E)$:

f inversible dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ ($\iff f$ bijective)

$\Leftrightarrow \beta$ inversible à droite
$\Leftrightarrow \beta$ inversible à gauche

10 $u \in GL(E)$, F un sev de dim fini
$\dim u(F) = \dim F$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang fini,
$\forall v \in GL(F)$, $rg(v \circ u) = rg(u)$
$\forall w \in GL(E)$, $rg(u \circ w) = rg(u)$

Une forme linéaire est un element de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

11 E un $\mathbb{K}$-ev, H un sev de E,
H est un hyperplan
$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}\}$, $H = \operatorname{Ker} \beta$

12 $\Leftrightarrow H$ possède un supplémentaire de dim 1
$\Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\}$ Tq $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$

Les hyperplans de E sont les sev de dim $n-1$

13 f_1, f_2 deux formes linéaires
$\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ Tq $f_1 = \lambda f_2$

14 $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant \dim E - p$

F un sev de E, E de dim fini $= n$, $\dim F = n-p$
$\exists H_1, \dots, H_p$ Tq $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$

1 $\exists$ injection $E \to F$ avec F fini
$\Rightarrow$ $\text{card}\, E \leq \text{card}\, F$
$\exists$ surjection $E \to F$ avec E fini
$\Rightarrow$ $\text{card}\, E \geq \text{card}\, F$

<u>Tiroirs de Dirichlet :</u>
$\text{card}\, E > \text{card}\, F \Rightarrow f$ n'est pas injective

E et F de même cardinal :
f injective
$\Leftrightarrow$ f surjective
$\Leftrightarrow$ f bijective

$$\text{card}\, A \cup B = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cap B$$

$$\text{card}\, E = \sum_{y \in F} \text{card}(f^{-1}(\{y\}))$$ <u>lemme des bergers</u>

$$\text{card}\, E \times F = \text{card}\, E \times \text{card}\, F$$

$$\text{card}\, F^E = (\text{card}\, F)^{\text{card}\, E}$$

$$\text{card}\, P(E) = 2^{\text{card}\, E}$$

3 p-arrangement de E A_E^p

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

E de cardinal p, F de cardinal n
$\text{card}(\{\text{application injective de } E \to F\}) = A_n^p$

Chap 23 ~~puis Chap 24~~

card $S_E = n!$.

4 p-combinaison

$\binom{n}{p}$

~~Chap 2.5~~

1 Def $\mathring{I}$, def derivable
Tangente

2 $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable $\Leftrightarrow$ $Re(f)$ et $Im(f)$ dérivables
$f'(a) = (Re(f))'(a) + i(Im(f))'(a)$

3 dérivées à gauche et à droite
f dérivable en $a \in \mathring{I}$
$\Leftrightarrow$ f dérivable à droite et à gauche et $f'_g(a) = f'_d(a)$

4 Opérations sur les dérivées
f dérivable en $f^{-1}(a)$
f^{-1} dérivable en $a \Leftrightarrow f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ et $(f^{-1})'(a) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))}$

4 def $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) := \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$
opérations sur $\mathcal{C}^n$

5 f possède un maximum local en a
$\Leftrightarrow$ $\exists\, \eta > 0, \forall x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$, $f(a) \geqslant f(x)$

f dérivable possède un extremum local en $a \in \mathring{I}$
$\Rightarrow$ $f'(a) = 0$

a point critique de $f \Leftrightarrow f'(a) = 0$

6 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(a) = f(b)$ <u>Rolle</u>
f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
$\exists\, c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ <u>accroissements finis TAF</u>
f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
$\exists\, c \in]a, b[$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Chap24

7 Les dk peuvent être intégrés.

8 $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. <u>IAF</u>

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in I, |f'(t)| \leq M$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

8 $f : I \to \mathbb{C}$ est k-lipschitzienne

$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in D^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

Lipschitzienne $\Rightarrow$ continue

8 f est constante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) = 0$

$f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$

f est croissante

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$

f' positive sur $\mathring{I}$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points

$\Rightarrow f$ est $\nearrow$

9 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$

$\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ et si $\ell \in \mathbb{R}$ alors $f'(a) = \ell$

$f :]a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$

f et f' possèdent des limites finies en a

$\Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k(]a,b], \mathbb{R})$,

$\forall i \in [\![0,k]\!]$, $\lim\limits_{x \to a} f^{(i)}(x) \in \mathbb{R}$,

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$

1 $\Delta_{a,b}$: droite passant par $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

$$\tau_{a,b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

1 $[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0,1]\}$

1 f convexe $\Leftrightarrow \forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0,1]$

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

2 $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $a < b \in I$

$\forall x \in I \setminus [a,b]$, $f(x) \geq \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)}_{= \Delta_{a,b}}$

f est convexe $\Leftrightarrow -f$ est concave

2 f est convexe $\Leftrightarrow \forall a \in I$

$$\tau_a : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \tau_a(x) \quad \text{est croissant}$$

3 f convexe sur un intervalle ouvert

$\Rightarrow f$ continue

$f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $a < b < c$,

$$\tau_a(b) \leq \tau_a(c) \leq \tau_b(c)$$

<u>inégalité des pentes</u>

Chap25

3 $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$,
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

4 $f\ I \to \mathbb{R}$ dérivable
f est convexe
$\Leftrightarrow$ f' est croissante
$\Leftrightarrow \forall a, b \in I,\ f(b) \geq f'(a)(b-a) + f(a)$

4 a est un point d'inflexion de f.
$\Leftrightarrow \exists \eta > 0$, Tq f convexe sur $I \cap]a-\eta, a]$
f concave sur $I \cap [a, a+\eta[$
ou le contraire

1,3 $Mat_{B,\mathcal{C}}(f)$, matrice d'une famille

2 $Mat_{B,\mathcal{C}} : \mathcal{L}(E,f) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K})$ est bijective
isomorphisme

3 $Mat_{B,\mathcal{C}}(f) = Mat_{\mathcal{C}}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$
application canoniquement associé à une matrice.

4 $\forall u \in E$, $Mat_{\mathcal{C}}\, f(u) = M_{B,\mathcal{C}}(f) \times Mat_B(u)$

4 $Mat_{B_E,B_G}(g \circ f) = Mat_{B_F,B_G}(g) \times Mat_{B_E,B_F}(f)$

4 f bijective $\Longleftrightarrow$ $Mat_{B,\mathcal{C}}(f)$ inversible

6 $rg(A) = rg(C_1, \dots, C_n) = dim(Vect(C_1, \dots, C_n))$

6 $\leq \min(n,p)$

6 $rg(x_1, \dots, x_p) = rg(Mat_B(x_1, \dots, x_p))$ $(\forall x_i \in E)$
$rg(f) = rg\, Mat_{B,\mathcal{C}}(f)$

7 A est inversible
$\Longleftrightarrow$ $rg A = n$
$\Longleftrightarrow$ ses colonnes forment une fam libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

7 multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.

7 Def Echelonnée

9 $(x_1, \dots, x_n)$ est une base $\Longleftrightarrow$ $Mat_B(x_1, \dots, x_n)$ inversible

9 Matrice de passage de B à $\mathcal{C}$:
$P_B^{\mathcal{C}} = Mat_B(\mathcal{C}) = Mat_{\mathcal{C},B}(id_E)$ $= (P_{\mathcal{C}}^{B})^{-1}$

Chap26

10 $P_{B_1}^{B_3} = P_{B_1}^{B_2} \cdot P_{B_2}^{B_3}$

10 $Mat_B(x) = P_B^e \times Mat_e(x) \qquad x \in E$

11 $Mat_{B_2,e_2}(f) = P_{e_2}^{e_1} \, Mat_{B_1,e_1}(f) \, P_{B_1}^{B_2}$

$Mat_e(f) = P_e^B \, Mat_B(f) \, P_B^e \qquad f \in \mathcal{L}(E)$

12 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ semblables $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), A = P^{-1}BP$

$\Rightarrow rg A = rg B$ <u>et</u> $tr A = tr B$

13 $Def\ tr(f)$ et $tr\ g \circ f = tr\ f \circ g$

15 $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalent $\Leftrightarrow$ ~~$rg A = rg B \Leftrightarrow$~~
$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_p(\mathbb{K}), A = PBQ$

15 $J_{r,n,p} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

15 E de dim p, F de dim n, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $rg(f) = r$
$\exists B_E, B_F$, $Mat_{B_E,B_F}(f) = J_{r,n,p}$

15 $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. A est équivalent à $J_{r,n,p}$

15 $rg A = rg A^T$

16 Matrice extraite
$rg B \leq rg A$, B extraite de A

16 Le rang de A est la taille maximale d'une matrice extraite de A qui est inversible, $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
$\operatorname{Ker} A := \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\}$
$\operatorname{Im} A := \{AX \ , \ X \in M_{p,1}(\mathbb{K})\}$

17 Thm du rang matriciel
$A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = p$

19 Système homogène $\Leftrightarrow$ second membre nul

L'ensemble des solutions de $AX = 0_{n,1}$ est un sev de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ de dimension $p - \operatorname{rg} A$

19 Le système $AX = B$ est compatible
$\Leftrightarrow B \in \operatorname{Im} A$

1 f uniformément continue $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$
$\forall x, y \in I, \ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

f est Lipschitzienne
$\Rightarrow f$ uniformément continue
$\Rightarrow f$ continue

f continue sur $[a,b]$ <u>Heine</u>
$\Rightarrow f$ uniformément continue sur $[a,b]$

2 Def subdivision de $[a,b]$
Def fonction en escalier
$\mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$ ensemble des fonctions en escalier.
3 Def integrale des fonctions en escalier
Propriétés

3 Def continue par morceaux sur $[a,b]$ (puis $]a,b[$)
$\mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$ ens. fct. continues par morceaux.

4 $\|f\|_{\infty, I} := \sup\{|f(t)|, t \in I\}$ (f bornée)

$\|f-g\|_\infty$: distance uniforme entre f et g.

5 Théorème de l'approximation uniforme par des fonctions en escalier.
$f \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$,
$\exists \varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$, $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$

5 $\exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions en escalier telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$
(φ_n) converge uniformément vers f.

Chap 27

5 $f \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$. (f_n) convergant uniformément vers f

$$\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)_n \text{ converge}$$

il y a unicité

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

Propriétés

6 f continue, $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \geq 0$ et $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.
$\forall t \in [a,b]$, $f(t) = 0$.

6 théorème fondamental de l'analyse.

f continue sur $[a,b]$, F une primitive de f,
$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

7 $f \in \mathcal{C}_m([-a,a], \mathbb{K})$ paire,
$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$

$f \in \mathcal{C}_m([-a,a], \mathbb{K})$ impair,
$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$$

$f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, T-périodique,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$

7 Formule de Taylor avec reste intégral
$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$; I intervalle,
$a \in I$, $b \in I$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt$$

7 Inégalité de Taylor-Lagrange.
$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. I intervalle
$a, b \in I$,
M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$)

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

8 $f \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$$

de même $$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$$

Ce sont les sommes de Riemann.

1 Un univers fini Ω est un ensemble fini non vide
$x \in \Omega$ est un evenement elementaire
$A \in P(\Omega)$ est un evenement
$\overline{A}$ est le contraire de A
$A \cap B = \emptyset \iff A$ et B sont incompatibles
$\{A_1, \dots, A_n\}$ est un système complet d'événements
$\left| \begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \text{ sont deux à deux incompatible} \\ \bigcup A_i = \Omega \end{array} \right.$

2 $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité sur Ω
$P(\Omega) = 1$
$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2 (Ω, P) est un espace probabilisé

2 $\omega \mapsto P(\omega)$ est constante sur Ω.
C'est la probabilité uniforme.
$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$

2 règles de calcul des probabilités

3 $P_A(B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (et est une proba sur Ω)

3 Théorème des probabilités composées
$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$
$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

4 Théorème des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B)$$

Chap28

5 Formule de Bayes

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(A)}$$

5 A et B sont independants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$
$\Leftrightarrow P(B) = P_A(B)$

$\Leftrightarrow \bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont $\Leftrightarrow \bar{A}$ et B le sont $\Leftrightarrow A$ et $\bar{B}$ le sont

$A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement independant
$\Leftrightarrow \forall I \subset [\![1,n]\!], \ P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

$\Rightarrow$ Les evenements sont 2 à 2 independants

6 $X : \Omega \longrightarrow E$ est une variable aléatoire

$[X \in A] := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

$X(\Omega)$ est le support de de X
$\{[X=x], x \in X(\Omega)\}$ est un sce

La loi de X est $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \longmapsto [0,1]$
$A \longmapsto P([X \in A])$
c'est une probabilité sur $X(\Omega)$

$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \ P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X=x)$

8 Pour donner la loi d'une variable aléatoire:
$X(\Omega)$ son support
$\forall x \in X(\Omega), \ P(X=x)$

Deux variables suivant la même loi ne sont pas forcément égales !

8 X et Y ont la même loi ($P_X = P_Y$) $\Leftrightarrow X \sim Y$
$\Leftrightarrow$ X et Y sont identiquement distribuées.

8 Existence d'espace probabilisé et de VA.

9 X suit la loi certaine égale à a ($a \in E$)
$\Leftrightarrow P(X=a) = 1$ et $a \in X(\Omega)$

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p
$\Leftrightarrow X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X=1) = p$
$\Leftrightarrow X \sim B(p)$

X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$
$\Leftrightarrow X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et
$\forall k \in [\![0,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}$
$X \sim B(n,p)$

X suit la loi uniforme sur E
$\Leftrightarrow X(\Omega) = E$
$\forall x \in E, P(X=x) = \frac{1}{Card(E)}$ $X \sim U(E)$

1 Def série
la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k$
indifférence des premiers termes

3 si $\sum U_n$ converge alors $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

3 Le reste d'ordre n
$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$ et $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

3 $\sum q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$ <u>séries géométrique</u>
et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

4 $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x <u>exponentielle</u>

5 (U_n) positive
$\sum U_n$ converge $\Leftrightarrow$ La suite de ses sommes partiels est majorée

5 $0 \leq U_n \leq V_n$
$\sum U_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum V_n$ diverge
$\sum V_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum U_n$ converge

6 $f : [1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et pos
$\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow \left(\int_1^n f(t)\,dt \right)_{n \geq 1}$ converge

6 <u>Séries de Riemann</u> $\alpha \in \mathbb{R}$
$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

8 U_n et V_n positives et $U_n \sim V_n$
alors $\sum U_n$ et $\sum V_n$ de même nature

Chap 29

8 $\sum U_n$ est absolument convergente
$\Leftrightarrow \sum |U_n|$ est convergente
$\Rightarrow \sum U_n$ est convergente

9 $(U_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $(V_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$
$U_n \underset{n \to +\infty}{=} O(V_n)$ et $\sum V_n$ converge
$\Rightarrow \sum U_n$ converge absolument

de même si $U_n \underset{n \to +\infty}{=} o(V_n)$

10 règle $n^\alpha U_n$

10 séries Telescopiques

11 Critère de d'Alembert.
$(U_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ne s'annule pas,
Tq $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| \longrightarrow \rho$
si $\rho < 1$, alors $\sum U_n$ converge
si $\rho > 1$, alors $\sum U_n$ diverge

12 Critère des séries alternées
$(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, decroissante Tq $U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
$\sum (-1)^n U_n$ converge

Développement décimal d'un réel

4 $\mathrm{supp}(\sigma)$: l'ensemble des points non fixe.

5 p-cycle, transposition
une transposition est son propre inverse.
$\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ à support disjoint $\Rightarrow$ $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$

6 $\mathcal{O}_\sigma(i) = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{Z}\}$: orbite de i sous l'action de σ
(est une relation d'équivalence)

Les orbites sous l'action de σ forment une partition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est produit de cycle à support disjoint.
7 Toute permutation est produit de transposition

7 $\exists! \, \varepsilon : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ non constant tel que.
$\forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$
et on a alors. $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition.

σ est un p-cycle, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$

1 Def multilinéaire
2 si $\exists x_i = 0_{E_i}$ alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$
Def n-linéaire
alterné $\Leftrightarrow$ antisymétrique

3 L'image par f d'une famille lié est nulle.
ajout de combinaison linéaire des autres vecteurs

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n \\ \vdots \\ 1 \leq i_p \leq n}} a_{i_1,1} \cdot a_{i_2,2} \cdots a_{i_p,p} \, f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

Chap30

et si $n=p$ et f alterné

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}\ f(e_1,\dots,e_n)$$

7 f n-linéaire alternée

$$f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\,f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

8 $$\det_B(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$$

8 $\det_B(e_1,\dots,e_n)=1$

8 $f=f(e_1,\dots,e_n)\det_B$

9 $$\det_{B'}(x_1,\dots,x_n)=\det_{B'}(e_1,\dots,e_n)\det_B(x_1,\dots,x_n)$$

$(x_1,\dots,x_n)$ base de $E \iff \det_B(x_1,\dots,x_n)\neq 0$

9 $$\det(A)=\det_B(C_1,\dots,C_n)$$

$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}=\begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}_{[n]}$$

10 $$\det_B(x_1,\dots,x_n)=\det \mathrm{Mat}_B(x_1,\dots,x_n)$$

$\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$

$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ (! A et B carrés)

A est inversible $\iff \det(A)\neq 0$ (et $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$)

A et B semblables $\Rightarrow \det(A)=\det(B)$

$\det(A)=\det(A^T)$

ex $\Delta_{i,j}(A)$: mineur d'ordre (i,j) de A

$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$: cofacteur d'ordre (i,j)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A)$$

11 A triangulaire $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

11 $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{vmatrix} = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_p)$$

<u>Vandermonde</u>

12 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

12 $[\mathrm{com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$

$$A\,(\mathrm{com}A)^T = \det(A)\, I_n = (\mathrm{com}A)^T A$$

13 $f \in \mathcal{L}(E)$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_B(f)) = \det(\mathrm{Mat}_B(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)))$$

$$= \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$\det(g \circ f) = \det g \det f$

f bijectif $\Leftrightarrow \det f \neq 0$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$

$\det_B(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det f \det_B(x_1, \dots, x_n)$

1 $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

$E(B(p)) = p$; $E(B(n,p)) = np$; $E(\mathcal{U}([\![a,b]\!])) = \frac{a+b}{2}$

$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$

2 $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$

2 X est centré $\Leftrightarrow E(X) = 0$
$X - E(X)$ est centré

2 Soit X une VAR tq $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, $E(X) \geq 0$
$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

3 $X : \Omega \longrightarrow E$ et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>formule de transfert</u>
$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$

3 $X \geq 0$ <u>Inégalité de Markov</u>
$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

$V(X) = E((X - E(X))^2)$
$E(X^k)$ est le moment d'ordre k
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ <u>formule de Huygens</u>

4 $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ suit une loi certaine
$V(aX+b) = a^2 V(X)$

$V(X) = 1 \Leftrightarrow X$ est réduite
$\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est centrée, réduite.

4 $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ <u>Inégalité Bienaymé Tchebychev</u>

Chap 31

$V(B(p)) = p(1-p)$
$V(B(n,p)) = np(1-p)$
$V(\mathcal{U}([\![a,b]\!])) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

6 La loi conjointe de (X,Y) est la loi de la variable aléatoire (X,Y)
La première loi marginale de (X,Y) est loi de X, la seconde celle de Y.

On passe de la conjointe à marginale FTP

8 la loi conditionelle de X sachant $[Y=y]$ est la loi de X pour la probabilité $P_{[X=y]}$

8 un n-uplet de VA sur Ω est un VA sur Ω
$(X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_n$
$\omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$

9 X et Y sont indépendants $P(Y \in B)$
$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E'), P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A)$
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in X(\Omega) \times X(\Omega), P(X=x \cap Y=y) = P(X=x)P(y=X)$
$\Leftrightarrow \forall y \in Y(\Omega)$ tq $P(Y=y) \neq 0$, loi de X et loi de X sachant $[X=y]$ sont égales.

10 $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement independantes
$\Leftrightarrow \forall A_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), \dots, \forall A_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega))$
$P([X_1 \in A_1] \cap \dots \cap [X_n \in A_n]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$

$\Leftrightarrow \forall x_i \in X_1(\Omega), \dots, \forall x_n \in X_n(\Omega)$
$P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$

11 $X_1, \dots, X_n$ des variable aléatoire mutuellement indep
$f_1, \dots, f_n$ des fonctions $\mathcal{A}$ sur $X_i(\Omega)$
$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont independantes

<u>lemme des coalitions</u>

11 $X_1, \dots, X_n$ independantes
$\{I_1, \dots, I_p\}$ une partition de $[\![1, n]\!]$
Y_k qui ne dépend que des X_i, $i \in I_k$
$Y_1, \dots, Y_p$ sont mutuellement independantes.

12 $X_1 \sim B(n_1, p)$ $X_2 \sim B(n_2, p)$ indépendantes
$X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$
de même,
$X_i \sim B(n_i, p) \Rightarrow \sum X_i \sim B(\sum n_i, p)$

12 $$E(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy\, P([X=x] \cap [Y=y])$$

X et Y indep $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
$X_1, \dots, X_n$ indep $\Rightarrow E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$

12 $\mathrm{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
$\mathrm{cov}(X, X) = V(X) \geq 0$

X et Y indep $\Rightarrow \mathrm{cov}(X, Y) = 0$

formule de <u>Huygens</u>

$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

cov est bilinéaire symétrique

13 $V(X+Y) = V(X) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y) + V(Y)$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(X_i, X_j)$$

si les X_i sont deux à deux independants :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

1 Les identités remarquables des formes bilinéaire symétrique

2 Un produit scalaire est bilinéaire symétrique défini positif.

2 Un espace préhilbertien est un $\mathbb{R}$-ev et un ps.
Si il est de dim finie, c'est un espace euclidien.

3 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Inegalité de <u>Cauchy - Schwarz</u>.
$\forall (x,y) \in E^2, \ |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
$(\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \iff x, y$ colinéaires$)$

3 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$d(x,y) = \|x-y\|$
identités de polarisations
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

3 $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme
$\iff$ $N(x) = 0 \iff x = 0$
$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

5 x et y sont orthogonaux $\iff \langle x, y \rangle = 0$

F et G deux sev de E sont orthogonaux
$\iff \forall x \in F, \forall y \in G, \ \langle x, y \rangle = 0$

Chap 32

5 F et G sont deux sev orthogonaux
$\Rightarrow$ F et G sont en somme direct

$(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ sont orthogonaux
$\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \langle x_i, y_j \rangle = 0$
$\Leftrightarrow$ Vect$(x_1, \dots, x_n)$ et Vect$(y_1, \dots, y_p)$ sont orthogonaux.

$(e_i)_{i \in I}$ est orthogonal
$\Leftrightarrow$ ses vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux
(et orthonormé ssi tout les e_i sont aussi unitaire)

6 Une famille orthogonal sans le nul est libre

y et x sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
$(x_1, \dots, x_n)$ orthogonal $\Rightarrow \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

7 $(e_1, \dots, e_n)$ famille libre, soit $(x_1, \dots, x_n)$ tels que

$x_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ et $k \in [\![2,n]\!]$, $x_k = \frac{x_k^*}{\|x_k^*\|}$ avec $x_k^* = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, x \rangle x_i$

alors - $(x_1, \dots, x_n)$ est orthonormé
- Vect$(e_1, \dots, e_n)$ = Vect$(x_1, \dots, x_n)$

C'est le procédé orthonormalisation de <u>Gram-Schmidt</u>

8 E espace euclidien, $\exists$ base orthonormé de E

8 Théorème de la base orthonormé incomplète

$B = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E

$x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$, $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$$

Sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ est un ps $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \mathrm{Mat}_B(x)^T \mathrm{Mat}_B(y)$

9 A une partie de E, l'orthogonal de A est
$$A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$$

F, G sev orthogonaux $\Rightarrow F \subset G^\perp$ et $G \subset F^\perp$

A, B deux parties de E
$A^\perp$ est un sev de E
si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$
$A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$

10 F un sev de E, $F \subset (F^\perp)^\perp$

10 F un sev de dim fini de E
- $E = F \oplus F^\perp$
- Si G est un supplémentaire orthogonal à F dans E alors $G = F^\perp$
- $F = (F^\perp)^\perp$

11 $p_F : x_F + x_{F^\perp} \longmapsto x_F$
$\mathrm{Ker}\, p_F = F^\perp = (\mathrm{Im}\, p_F)^\perp$

méthode pour calculer un projeté orthogonal.

12 $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormé de F
$x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

2ème méthode pour calculer un projeté orthogonal

12 $A \in \mathcal{P}(E)$, $x \in E$

$d(x, A) = \inf\{\|x-a\|, a \in A\}$

13 F sev de dim finie de E

$\forall x \in E$, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

et $d(x, F) = \min(\|x-y\|, y \in F)$

trace d'un proj est son rang.

1 Def $P \in \mathbb{K}[X]$ irreductible
P, Q associés

2 P est un PGCD de A et B ssi P est un diviseur de A et B de degré maximal

3 $A \wedge B$ est le PGCD unitaire de A et B

D est un diviseur commun de A et B
$\Leftrightarrow$ D est un diviseur de $A \wedge B$

4 $\exists U, V \in \mathbb{K}[X]$ Tq $AU + BV = A \wedge B$
<u>identité de Bezout</u>

<u>lemme d'Euclide</u> : $A \wedge B = A \wedge (A \% B)$

4 $(AC) \wedge (BC)$ est associé à $C(A \wedge B)$

$A \wedge B = 1 \Leftrightarrow A$ et B premiers entre eux
$\Leftrightarrow \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ Tq $AU + BV = 1$ <u>Thm de Bezout</u>

P premier avec $Q_1 \cdots Q_n$
$\Leftrightarrow$ P est premier avec chacun d'entre eux

<u>Theoreme de Gauss</u>
$A \mid BC$ et $A \wedge B = 1 \Rightarrow A \mid C$

$P \in \mathbb{K}[X]$ irreductible, $Q \in \mathbb{K}[X]$
$P \wedge Q \neq 1 \Rightarrow P \mid Q$
P divise un produit $\Leftrightarrow$ P divise un des facteurs

Chap33

5 Factorisation en produit d'irreductible

5 PPCM de A et B : Tout polynome de degré minimal parmi les multiples communs non nuls de A et B

$A \vee B$ est le PPCM unitaire de A et B

P est un PPCM de A et B

$$\iff \begin{cases} A \mid P \\ B \mid P \\ \forall Q \in \mathbb{K}[X], (A \mid Q \text{ et } B \mid Q) \Rightarrow P \mid Q \end{cases}$$

5 $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls

$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$ est le PGCD unitaire de degré maximal parmi les diviseurs commun des A_i.

$(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \dots) \wedge A_n$

6 $\exists U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ Tq $\sum_{i=1}^{n} A_i U_i = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$

$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1 \iff A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble

6 $(P_1, Q_1) \sim (P_2, Q_2) \iff P_1 Q_2 = Q_1 P_2$

$\mathbb{K}(X)$ est l'ensemble des classes d'equivalence de $\sim$

$F \in \mathbb{K}(X)$, $\exists (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ Tq $P \wedge Q = 1$ et $F = \frac{P}{Q}$

(P, Q) est un représentant irreductible de F

7 $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, $\deg F = \deg A - \deg B$

$\deg(F+G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
$\deg(FG) = \deg F + \deg G$

7 $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}[X]$ sous forme irreductible
les racines de A sont les zéros de F
les racines de B sont les pôles de F

8 E l'ensemble des poles de $F \in \mathbb{K}(X)$
$\tilde{F} : \mathbb{K} \setminus E \longrightarrow \mathbb{K}$ est la fonction rationnelle
$x \longmapsto \frac{A(x)}{B(x)}$ associé à F.

8 $\exists! (E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ avec $\deg G < 0$ Tq $F = E + G$
E est la partie entière de F

11 $F \in \mathbb{K}(X)$ est un element simple
$\Leftrightarrow F = \frac{P}{Q^k}$, avec Q irreductible, et $\deg P < \deg Q$

10 Decomposition en elem simple $F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{Q_i^k}$
(lorsque $\deg F < 0$)

11 Si Q_i est de la forme $(X - \lambda_i)$
$\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{(X-\lambda_i)^k}$ est la partie polaire de F associée au pole λ_i

1 $B_o(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| < r\}$
$B_f(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| \leq r\}$

$\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
$\iff \forall a \in \mathcal{O}, \exists r > 0, B_o(a,r) \subset \mathcal{O}$

F est un fermé $\iff$ $\overline{F}$ est un ouvert

2 $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ est un ouvert $\qquad \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ est un ouvert

$\bigcap_{i \in I} F_i$ est un ~~ouvert~~ fermé $\qquad \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé

2 $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \Rightarrow x \in F$

3 $C_\lambda(f) := \{(x,y) \in A \mid f(x,y) = \lambda\} = f^{-1}(\lambda)$

3 $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en $a \iff$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x-a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

4 $f(x,y) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \lambda_{i,j} x^i y^j$ est polynomiale

5 f continue
$f^{-1}(]-\infty, a[)$ et $f^{-1}(]a, +\infty[)$ sont des ouverts
$f^{-1}([a, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, a])$ sont des fermés

6 f admet une première dérivée partielle en a
$\iff \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \in \mathbb{R} \qquad \left(= \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\right)$

6 $\nabla f(a) := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$: gradient de f en a.

Chap 34

7 $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$

$\iff \forall a \in \mathcal{O}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent

et $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont continues.

9 $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$, $a \in \mathcal{O}$, $r > 0$ Tq $B_o(a, r) \subset \mathcal{O}$,

$\exists \varepsilon : B_o(0_{\mathbb{R}^2}, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ Tq

1/ $\varepsilon(0,0) = 0$

2/ ε continue en $(0,0)$

3/ $\forall h \in B_o((0,0), r)$

$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$

<u>Taylor-Young à l'ordre 1</u>

10 $g : \left] \frac{-r}{\|u\|}, \frac{r}{\|u\|} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$

$t \longmapsto f(a + tu)$

$g'(t) = \langle \nabla f(a+tu), u \rangle$

10 $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, $x : t \mapsto x(t)$, $y : t \longmapsto y(t)$ $\mathcal{C}^1$

$g : t \longmapsto f(x(t), y(t))$ est $\mathcal{C}^1$

$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t)$

$= \langle \nabla f(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle$

11 <u>règle de la chaîne</u>

$f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\varphi : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et $\psi : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ Tq $(\varphi(a), \psi(a)) \in \mathcal{O}$

$g : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u,v) \longmapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ est $\mathcal{C}^1$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(u,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \frac{\partial \psi}{\partial y}(u,v)$$

13 f possède un maximum en a
ssi $\forall b \in A$, $f(b) \leq f(a)$

14 f possède un maximum local en a
ssi $\exists r > 0$, $\forall x \in B_0(a, r)$, $f(x) \leq f(a)$

15 $a \in \mathcal{O}$ est un point critique de $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$
$\Leftrightarrow \nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ possède un extremum local en $a \in \mathcal{O}$
alors a est un point critique de f

15 $A \in \mathbb{R}^2$ est bornée
$\Leftrightarrow \exists r > 0$, $A \subset B_0(0_{\mathbb{R}^2}, r)$
$\Leftrightarrow \exists M > 0$, $\forall (x, y) \in A$, $|x| \leq M$ et $|y| \leq M$

K partie fermée bornée, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
f possède un max et un min
(<u>Théorème des bornes atteintes</u>)