Содержание

1 Постановка задачи

В области $Q_T = \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ рассматривается задача:

$$\begin{cases} \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\omega u = 0 \\ \qquad \omega = 1 - 16x^2(1-x)^2 \\ \qquad \text{Начальные условия} \\ x = 0\,, \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin(t) \\ x = 1\,, \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ t = 0\ : u = 0, \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

2 Схемы

Явная схема для решения задачи:

$$\hat{u}_m^{n+1} = \frac{\tau^2}{h^2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + (2 - 2\omega\tau^2)u_m^n - u_m^{n-1} \tag{1}$$

Неявная схема для решения задачи:

$$\hat{u}_m^{n+1} = \frac{\tau^2}{h^2}(\hat{u}_{m+1}^{n+1} - 2\hat{u}_m^{n+1} + \hat{u}_{m-1}^{n+1}) - 2\omega\tau^2 u_m^n + 2u_m^n - u_m^{n-1} \tag{2}$$

Представим $u_t(x,0) = \frac{u(x,t)-u(x,0)}{\tau} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \tau/2 * \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2}$
Обратимся к исходному уранению: $\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} + \omega u_m^0$
Поэтому $u_t(x,0) - 0.5\tau * (\omega u_m^0 + \frac{d^2 u_0}{dx^2}) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + O(\tau^2)$
$\rightarrow$ Начального условие второго порядка остается
$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 + 0.5\tau * (\omega u_m^0 + \frac{d^2 u_0}{dx^2}) + O(\tau^2)$
$y_t(x,0) = 0$ так как $u_m^0 = 0, u_0 = 0$(первое условие)$\rightarrow$
Начальные и граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} - \frac{u_1^n - u_0^n}{h} = \sin(n\tau) \\ &\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} + \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} = 0 \\ &u(mh,0) = 0 \qquad\qquad u(mh,\tau) = 0 \\ &(\text{из первого выразим явно } u_0^{n+1} \quad \text{из послед } u_M^{n+1}) \end{aligned} \tag{3}$$

$$u_1^{n+1} = u_0^n(\frac{h^2}{\tau^2} - \frac{h}{\tau} - 2\frac{\tau}{h} + 2\tau^2\omega) + u_0^{n-1} + u_1^n(\frac{h}{\tau} + 2\frac{\tau}{h}) + \frac{h^2}{\tau}\sin n\tau + 2\tau \sin n\tau$$ [0]

$$u_M^{n+1} = u_{M-1}^n(\frac{h^2}{\tau^2} + \frac{h}{\tau} + 2[1 + \frac{\tau}{h}] + 2[\omega h^2 - \frac{h^2}{\tau^2}]) - u_M^n(\frac{h}{\tau} + 2\frac{\tau}{h}) + u_{M-2}^{n+1}(\frac{h^2}{\tau^2} - 1)$$

$$u_0^{n+1} = \tau \sin n\tau + \frac{\tau}{h}(u_1^n - u_0) + u_0^n$$

Явно выражая $\hat{u}_m^{n+1}$ из (1) и используя условия (3)
находим решение на "новом временном слое".
Неявная схема (3) и условия (4), (5) дают систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\mathbf{v} \stackrel{*}{=} (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_N)^{\mathrm{T}}$.

Система в матричном виде $A^{(M+1\times N+1)}\vec{v} = \vec{b}$
выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{\tau^2}{h^2} & -\frac{\tau^2}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau^2}{h^2} & 1 + 2\frac{\tau^2}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1^{n+1} \\ \hat{u}_2^{n+1} \\ \dots\dots \\ \hat{u}_{M-2}^{n+1} \\ \hat{u}_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \text{Оставшиеся при } 1\ldots n-1, 1\ldots m-1 \\ -2\omega\tau^2 u_m^n + 2u_m^n - u_m^{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

3 Результаты расчетов лин&нелинейной задач

Выберем нормы $\|u\|_{C_h} = \max_{x_i \in layer_h} |u_i| \qquad \|u\|_{L(1,h)} = \sum\limits_{x_i \in layer_h} |u_i|$

Также абсолютные погрешности $\Delta(u)_{C_h} = \|u - v\|$
и относительные $\delta(u)_{C_h} = \frac{\Delta(v)}{\|u\|}$

Посчитаем нормы погрешностей

τ	h	$\Delta(u)_{C_h}$	$\delta(u)_{C_h}$	$\Delta(u)_{L_1^h}$	$\delta(u)_{L_1^h}$
0.01	0.01	1.03194	4.64864	1.28284	16.7129
0.005	0.005	0.103005	0.464262	0.0656159	0.861194
1/80	1/80	6639.33	29903.2	3289.21	42699.8

[0] Написал для удобства

Посчитаем нормы погрешностей

τ	h	$\Delta(u)_{C_h}$	$\delta(u)_{C_h}$	$\Delta(u)_{L_1^h}$	$\delta(u)_{L_1^h}$
0.01	0.01	0.156182	15.0308	0.0925129	80.1477
0.005	0.005	0.000682581	0.130575	0.000261452	0.461834
0.05	0.005	0.000682581	0.130575	0.000261452	0.461834Совпало с пред
0.1	0.01	0	nan	1.24166e+231	-4.09706e+142

4 Аппроксимация

$$\frac{[u_m(mh,nh) + \tau\dot{u}_m(mh,nh) + \tau^2/2 * \ddot{u}_m(mh,nh) + \ldots}{\tau^2} - \ldots$$
$$\frac{2 * u_m(mh,nh) + u_m(mh,nh) - \tau\dot{u}_m(mh,nh) + \tau^2/2 * \ddot{u}_m(mh,nh)]}{\tau^2} \ldots$$
$$+ \quad /\text{\textit{тоже по x}}/ \quad + \quad 2\omega u_m(mh,nh) \quad = \quad 0 \qquad (4)$$

Сокращая получаем:

$$\ddot{u} + \ddddot{u}\frac{\tau^2}{12} - u'' - u''''h^2/12 + O(h^3 + \tau^3) + 2\omega u = 0$$

Для неявной(Раскрывая$\hat{u}_{m+1}^{n+1}\hat{u}_{m-1}^{n+1}$):

$$\ddot{u} + \ddddot{u}\frac{\tau^2}{12} - (\frac{2\tau}{h^2}\dot{u} + u'' + \frac{\tau^2}{h^2}\ddot{u} + \tau\dot{u}'' + \frac{\tau^3}{3h^2}\dddot{u} + \frac{h^2}{12}u'''' + \tau^2/2\ddot{u}'' + \frac{\tau^4}{12h^2}\ddddot{u}) + 2\omega u = 0$$

5 СПУ

СПУ Явной схемы

Представляем u_m^n в виде $= \lambda(\phi)^n * \exp^{im\phi}$ необход признак$\|\lambda\| \leqq 1$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)e^{(i\phi)}h^2 - \lambda\tau^2(e^{(2i\phi)} - 2e^{(i\phi)} + 1) + 2\omega\lambda e^{(i\phi)}\tau^2 h^2 \ddot{u} = 0$$

$$\lambda^2 * h^2 e^{(i\phi)} - 2\lambda(h^2 e^{(i\phi)} - e^{(i\phi)}\tau^2 + \tau^2/2 + \tau^2 e^{(2i\phi)}/2 - \omega e^{(i\phi)}h^2\tau^2) + e^{(i\phi)}h^2 = 0$$

Поделим еще на $h^2 e^{(i\phi)}$

$$\lambda^2 - \lambda(2 - 2\tau^2/h^2 + \frac{\tau^2}{h^2 e^{(i\phi)}} + \frac{\tau^2 e^{(i\phi)}}{h^2} - 2\omega\tau^2) + 1 = 0$$

Соответственно ищем $\lambda_1\lambda_2 \ldots$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-2\tau^2/h^2+\frac{\tau^2}{h^2e^{(i\phi)}}+\frac{\tau^2e^{(i\phi)}}{h^2}-2\omega\tau^2)}{2} \begin{cases} + & \frac{\sqrt{(2-2\tau^2/h^2+\frac{\tau^2}{h^2e^{(i\phi)}}+\frac{\tau^2e^{(i\phi)}}{h^2}-2\omega\tau^2)^2-4}}{2} \\ - & \frac{\sqrt{(2-2\tau^2/h^2+\frac{\tau^2}{h^2e^{(i\phi)}}+\frac{\tau^2e^{(i\phi)}}{h^2}-2\omega\tau^2)^2-4}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\tau^2}{h^2 e^{(i\phi)}} + \frac{\tau^2 e^{(i\phi)}}{h^2} = \frac{\tau^2(2icos\phi)}{h^2}$$

$$\|\lambda_{1,2}\| = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 - 4}}{2} \leq 1$$

$$\|\lambda_{1,2}\| = (1 - \tau^2/h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}\cos(\phi) - \omega\tau^2)^2 \leq 1$$

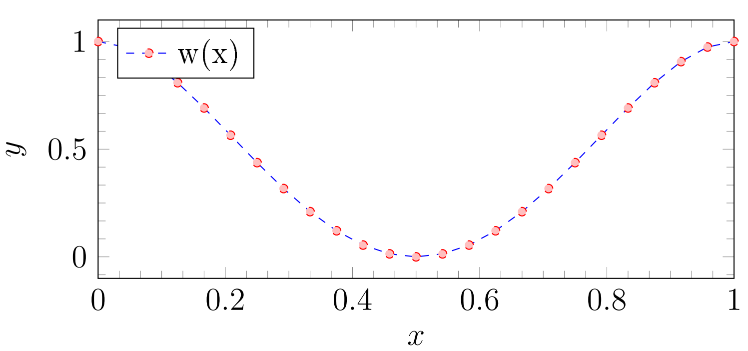
Получаем условия спектральной устойчивости :

1. $-\tau^2/h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}\cos(\phi) - \omega\tau^2 \leq 0$

2. $-\tau^2/h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}\cos(\phi) - \omega\tau^2 \leq -2$

Из 1 $\omega \geq \frac{cos(\phi)-1}{h^2}$:с учетом положительности ω выполняется
Из 2 $\omega \geq \frac{cos(\phi)-1}{h^2} + 2/\tau^2$максимум $\phi = 0 \Rightarrow \omega \geq 2/\tau^2$

w(x)



СПУ Неявной схемы

$$(\lambda^2-2\lambda+1)e^{(i\phi)}h^2-\lambda^2\tau^2(e^{(2i\phi)}-2e^{(i\phi)}+1)+2\omega\lambda e^{(i\phi)}\tau^2h^2=0$$

$\oplus$ поделим еще на $\lambda e^{(i\phi)}$

$$\lambda^2(1-\frac{\tau^2}{h^2}(e^{(i\phi)}-2+\frac{1}{e^{(i\phi)}}))-\lambda(2\omega\tau^2-2)+1=0$$

$$\lambda^2(1-\frac{2\tau^2}{h^2}(i\sin\phi-1))-\lambda(2-2\omega\tau^2)+1=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{(2-2\omega\tau^2)}{2(1-\frac{2\tau^2}{h^2}(i\sin\phi-1))}\begin{cases}+ & \frac{\sqrt{(2-2\omega\tau^2)^2-8*(1-\frac{2\tau^2}{h^2}(i\sin\phi-1)}}{2(1-\frac{2\tau^2}{h^2}(i\sin\phi-1)}\\ - & \frac{\sqrt{(2-2\omega\tau^2)^2-8*(1-\frac{2\tau^2}{h^2}(i\sin\phi-1)}}{2(1-\frac{2\tau^2}{h^2}(i\sin\phi-1)}\end{cases}$$

$$\|\lambda_{1,2}\|=\frac{\sqrt{(1-\omega\tau^2)^2-4(1-\frac{2\tau^2}{h^2}(i\sin\phi-1)}}{\sqrt{(1+\frac{4\tau^4}{h^4}(i\sin\phi-1)^2}}\leq 1$$

$$\phi=0\Rightarrow\|\lambda\|=\frac{\sqrt{(1-\omega\tau^2)^2-4(1+\frac{2\tau^2}{h^2})}}{\sqrt{(1+\frac{4\tau^4}{h^4})}}\leq 1$$

$$\frac{\tau^4}{h^4}+2\frac{\tau^2}{h^2}+\frac{4+2\omega\tau^2+\omega^4\tau^2}{4}\geq 0$$

$$\frac{\tau^4}{h^4}(\sin(\phi)^2+\sin(\phi)-1)+2\frac{\tau^2}{h^2}(i\sin(\phi)-1)-\frac{2\omega\tau^2+\omega^2\tau^4}{4}-1\leq 0$$

Максимум $\phi=\pi/2\Rightarrow\tau^4(\frac{1+i}{h^4}+\omega^2)+2\tau^2(\frac{i-1}{h^2}-2\omega)-4\leq 0$

$$\tau\in(-\tau_1,\tau_2)$$

6 Дифферинциальное приближение

Явной:

$$\ddot u-u''+2\omega u_m^n=-\ddddot u\frac{\tau^2}{12}+u''''h^2/12+O(h^3+\tau^3)=0$$

$$\dddot u-\dot u''+2\dot\omega u=-\ddddot u_m\frac{\tau^2}{12}+\dot u''''h^2/12+O(h^2+\tau^2)=O(h^2+\tau^2)$$

$$\ddddot u-\ddot u''=-2\omega\ddot u$$

$$\ddot u=-2\omega u+u''$$

$$\ddot u-u''+2\omega u=\frac{\tau^2}{6}(\omega u''-2u''''-2\omega(u''-2\omega u))+u''''h^2/12+O(h^3+\tau^3)$$

Неявной:

$$\ddot{u} - u'' + 2\omega u = -\dddot{\dot{u}}\frac{\tau^2}{12} + \frac{2\tau}{h^2}\dot{u} + \frac{\tau^2}{h^2}\ddot{u} + \tau\dot{u}'' + \frac{\tau^3}{3h^2}\dddot{u} + \frac{h^2}{12}u'''' + \tau^2/2\ddot{u}'' + \frac{\tau^4}{12h^2}\ddot{\ddot{u}} + O(h^3 + \tau^3 + \frac{\tau^4}{12h^2})$$

$$\dddot{u} - \dot{u}'' + 2\omega\dot{u} = \frac{2\tau}{h^2}\ddot{u} + \tau\ddot{u}'' + O(h^2 + \tau^2 + \frac{\tau^3}{h^2})$$

$$\ddot{u}' - u''' + 2\omega u' = \frac{2\tau}{h^2}\dot{u}' + \tau\dot{u}''' + O(h^2 + \tau^2 + \frac{\tau^3}{h^2})$$

$$\ddot{\ddot{u}} + 2\omega\ddot{u} = \ddot{u}'' + O(h + \tau)$$

$$\ddot{u}'' - u'''' + 2\omega u'' = O(h + \tau)$$

$\ddot{u}(1 - \frac{\tau^2}{h^2}) - (\frac{2\tau}{h^2} - 2\omega)\dot{u} - (\tau + \frac{\tau^3}{3h^2})\dot{u}'' - u'' + 2\omega u =$
$(\frac{\tau^2}{12} + \frac{\tau^4}{12h^2})(u'''' - 4\omega u'' + 2\omega u) + (\frac{\tau^2}{2} + \tau)(u'''' - 2\omega u'') + \frac{h^2}{12}u'''' + \frac{2\tau}{h^2}(u'' - 2\omega u) + O(h^3 + \tau^3 + \frac{\tau^4}{12h^2})$