МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Мочалов Максим Сергеевич

Отчет по второй половине 7 семестра. Задача 4

4 курс, группа 424

Москва, 2019 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления:

$$
\begin{aligned}
B_0 = \int_0^{\pi/2} u^2(t)dt \to inf \\
\dot{x}(0) = 0, x(\pi/2) = 0.8, \\
\alpha \in [0, 25]
\end{aligned} \tag{1}
$$

Требуется формализовать задачу, как задачу оптимального управления, пользуясь принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов.

2 Формализация задачи

Формализуем задачу, как задачу оптимального управления. Для этого обозначим $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2, \;\; \dot{x}_2 = u0 + x_1(t) * e^{-\alpha * t}$.
Тогда исходная система (1) перепишется в виде :

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = \varphi_1(t, x, u) = x_2 \\
\dot{x}_2 = \varphi_2(t, x, u) = u - x_1(t) * e^{-\alpha * t} \\
x_2(0) = 0, \; x_1(\pi/2) = 0.8 \\
u \in \Re \\
B_0 = \int_0^{\pi/2} u^2(t)dt \to inf \\
\alpha \in [0, 25]
\end{cases}
$$

3 Система необходимых условий оптимальности

Выпишем функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi/2} Ldt + l$$

лагранжиан : $L = \lambda_0 u^2(t) + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u + x_1(t) * e^{-\alpha * t})$

терминант : $l = \lambda_1 x_1(\pi/2) + \lambda_2 x_2(0)$

$$H = p_1 x_2 - p_2 x_1(t) * e^{-\alpha * t} + p_2 u(t) - \lambda_0 u^2(t)$$

Применим к задаче оптимального управления принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

а) Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряжённая система уравнений, условие стационарности по x_1, x_2 : $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$)

$$
\begin{cases}
\dot{p}_1 = p_2 e^{-\alpha * t} \\
\dot{p}_2 = -p_1
\end{cases} \tag{2}
$$

б) Условие оптимальности по управлению, $\hat{u} = arg\ abs\ max H(u)$ при $u \in \Re$:

$$\hat{u} = arg\ abs\ max(\lambda_0 u^2(t) - p_2 u) \tag{3}$$

в) Условия трансверсальности по x_k : $p(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}$, где $k = 0, 1$:

$$\begin{gathered} p_1(0) = 0,\ p_2(0) = -\lambda_1, \\ p_1(\pi/2) = -\lambda_1,\ p_2(\pi/2) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

г) Условий стационарности по t_k: нет, так как в задаче t_k - известные константы

д) Условий дополняющей нежёсткости: нет, так как в задаче отсутствуют условия вида "меньше или равно"

е) Условие неотрицательности $\lambda_0 \geq 0$

ж) Условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя) выбрано 0.5

з) НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю)

4 Анормальный случай

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$; $U = \Re$
Если допустим вначале
$*p_2(t) \neq 0$ при $t \in [0, \pi/2]$
$H(u) = \hat{p_2}$ линейна по u $\Rightarrow \{\hat{u} = (+|-)\inf \mid$ при t $\in [0, \pi/2]\}$
Иначе $*p_2(t) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$из условия трансверсальности следует $\xrightarrow{Condtransver} \hat{p_2} = 0 = \lambda_1$,что противоречит условию НЕРОН

Выберем следующее условие нормировки : $\lambda_0 = 0.5$.

5 Краевая задача

Таким образом, на основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления (1) сводится к краевой задаче :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \hat{p_2} - \hat{x_1}(t) * e^{-\alpha * t} \\ \dot{p}_1 = \hat{p_2} * e^{-\alpha * t} \\ \dot{p}_2 = -\hat{p_1} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & x_2(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 0.8 \\ & p_1(0) = 0,\ p_2(\pi/2) = 0 \\ & \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in [0, 25] \end{aligned} \tag{6}$$

Краевая задача (7)–(8) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$: $x_1(0) = \alpha_1, p_2(0) = \alpha_2$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $[0, 25]$, получим соответствующие выбранному значению $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ функции $x_1(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2],\ x_2(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2],\ p_1(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2],\ p_2(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (7), начальных условий в 0 момент времени (8) и условий $t = 0$: $x_1(0) = \alpha_1, p_2(0) = \alpha_2$ решается численно явным методом Рунге-Кутты 13-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана- Принса с автоматическим выбором шага. Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения α_1, α_2 так, чтобы выполнились условия:

$$\begin{aligned} & x_1(\pi/2)[\vec{\alpha}] = 0.8, \\ & p_2(\pi/2)[\vec{\alpha}] = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

соответственно вектор-функцией невязок будет функция

$$X(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} x_1(\pi/2)[\vec{\alpha}] - 0.8 \\ p_2(\pi/2)[\vec{\alpha}] \end{pmatrix} \tag{8}$$

Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных. Корень $\vec{\alpha}$ системы алгебраических уравнений $X(\vec{\alpha}) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса.

6 Тест решения задачи Коши

В таблице ниже приведены результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ с начальными условиями: $x(0) = 0, y(0) \ \ = 1$

для различного конечного времени T и различных значений максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования $\Delta_{\text{лок}}$.

$|x(T) - sinT|$ и $|y(T) - cosT|$ - невязки в конце; $\delta_K(T)$ - оценка глобальной погрешности по формуле $\delta_K(t_{i+1}) = err_i + \delta_K(t_i)e^{L_i}$, где err_i - главный член в оценке локальной погрешности, а $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu dt$; μ - логарифмическая норма матрицы Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, равная максимальному собственному значению матрицы $(J+J^T)/2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то есть $0 => \delta_K(t_{i+1}) = err_i + \delta_K(t_i)$.

Числа Рунге $R_x = |\frac{x_{10^{-8}}(T) - x_{10^{-10}}(T)}{x_{10^{-10}}(T) - x_{10^{-12}}(T)}|$, $R_y = |\frac{y_{10^{-8}}(T) - y_{10^{-10}}(T)}{y_{10^{-10}}(T) - y_{10^{-12}}(T)}|$ должны быть примерно равны $100^{7/8} \approx 56.23$ — проверка правила Рунге.

T	$\Delta_{\text{лок}}$	$\lvert x(T) - sinT\rvert$	$\lvert y(T) - cosT\rvert$	$\delta_K(T)$	R_x	R_y
50π	10^{-8}	$5,9 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$9.2 \cdot 10^{-6}$	10.1	75.8
50π	10^{-10}	$5,8 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$9.1 \cdot 10^{-7}$	10.1	75.8
50π	10^{-12}	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$9.1 \cdot 10^{-8}$	10.1	75.8
100π	10^{-8}	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	10.3	78.3
100π	10^{-10}	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	10.3	78.3
100π	10^{-12}	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$	$9.1 \cdot 10^{-7}$	10.3	78.3
150π	10^{-8}	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$	10.4	80.5
150π	10^{-10}	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	10.4	80.5
150π	10^{-12}	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$6.5 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-7}$	10.4	80.5
200π	10^{-8}	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	10.6	82.4
200π	10^{-10}	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	10.6	82.4
200π	10^{-12}	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$8.7 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	10.6	82.4

7 Аналитическое решение

Краевая задача решается аналитически.Рассмотрим при a=0,Система (4) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \hat{p_2} - \hat{x_1}(t) * e^{-0*t} \\ \dot{p}_1 = \hat{p_2} * e^{-0*t} \\ \dot{p}_2 = -\hat{p_1} \end{cases} \quad \begin{cases} : x_2(0) = 0, \ x_1(\pi/2) = 0.8 \\ p_1(0) = 0, \ p_2(\pi/2) = 0 \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in [0, 25] \end{cases} \tag{9}$$

Из последних двух уравнений находим что $p_2'' = -p_1' \Rightarrow p_2 = c_1 sin(t) + c_2 cos(t)$.
где c_2 c_1 — константs. Подставив условие $p_2(\pi/2) = 0$, получим $c_1 = 0$.
Значит:$p_2 = c_2 cos(t) \Rightarrow p_1 = c_2 sin(t)$и начальное усл удовляется всегда из первых двух находим x_1"$+x_1 = c_2 cos(t)$
Решим общее однородное уравнение: $\dot{x_1}(0) = 0 \Rightarrow x_1 = c_4 cos(t)$
Подставив условие $x_1(\pi/2) = 0.8$, получим 0=0.8 противоречие граничных условий Для исходного решение возможно не существует.(в вольфраме ничего не посчиталось)

8 Результаты численного решения

В приведённой ниже таблице с результатами численного решения задачи $\alpha = 0.0, 0.1, 1.0, 10.0$ — параметры задачи; $x_1(0)$,$p_2(0)$ недостающие начальные условия для решения задачи Коши, найденные методом Ньютона; $|x_1(\pi/2) - 0.8|$, $|p_2(\pi/2) - 0|$ — невязки. Относительная погрешность на шаге решения задачи Коши $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$

α	$x_1(0)$	$p_2(0)$	$\lvert x_1(\pi/2) - 0.8\rvert$	$\lvert p_2(\pi/2) - 0\rvert$
0	1.	1.	0.0145751229	0.0000000087
0.1	−2.17046066385471	0.00000000000121	0.00000000337160	0.00000000000045
1.0	47.85396853558370	−0.00000000000004	0.000000005024403	0.00000039784006
10	0.98661371531293	−0.00000000000011	0.0000000023720	0.00000000000022

9 Графики решений

Для вычисления функционала $B_0(t) = \int_0^{\pi/2} u^2(t)dt$ можно в методе численного интегрирования задачи Коши в систему дифференциальных уравнений добавить формальное соотношение $\dot{B}_0 = u^2(t)$ с начальным условием $B_0(0) = 0$.

Для $\alpha = 0$

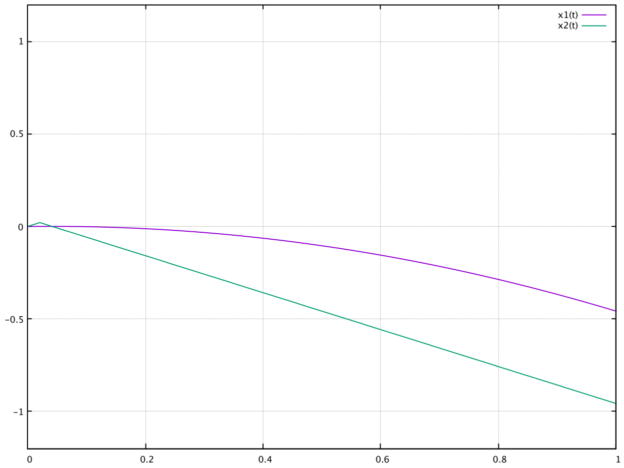

Рис. 1: $x_1(t), x_2(t)$

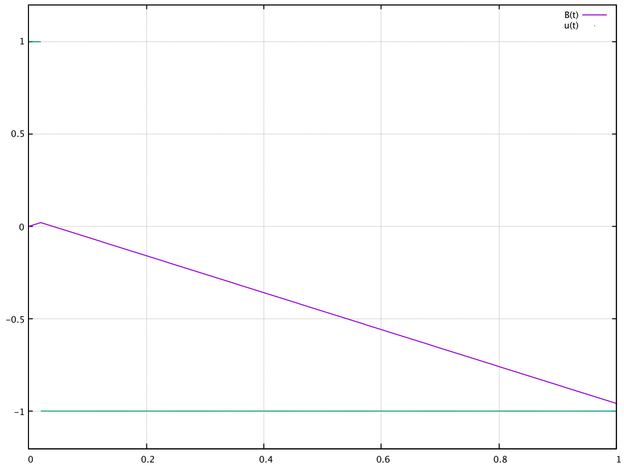

Рис. 2: $B_0(t), u(t)$

Для $\alpha = 0.1$

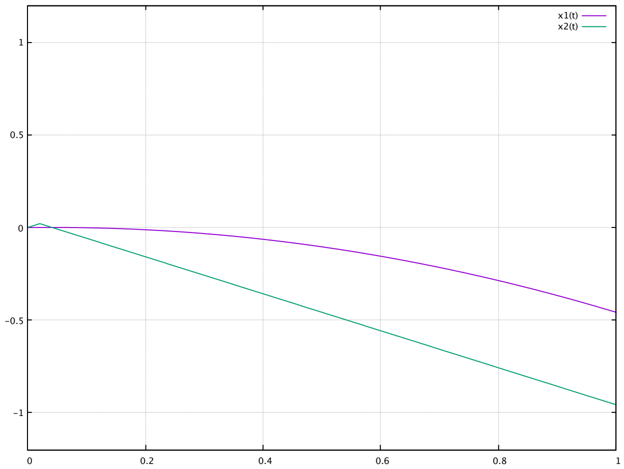

Рис. 3: $x_1(t), x_2(t)$

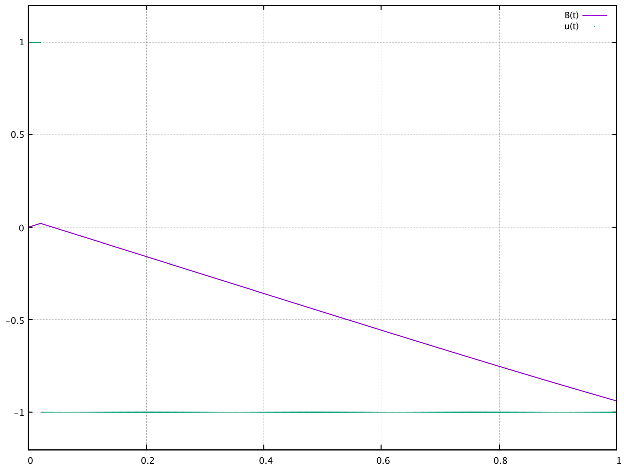

Рис. 4: $B_0(t), u(t)$

Для $\alpha = 1$

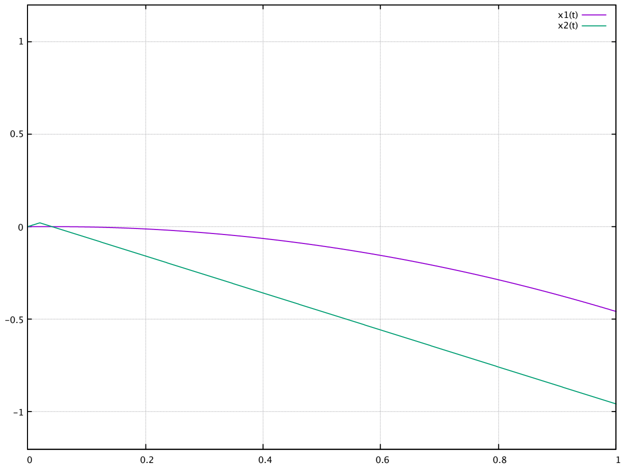

Рис. 5: $x_1(t), x_2(t)$

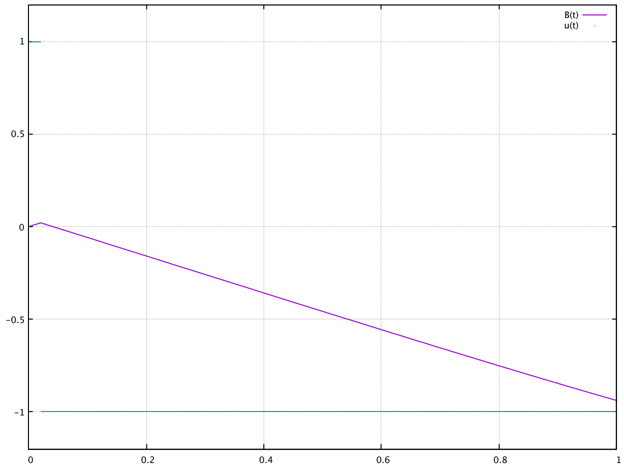

Рис. 6: $B_0(t), u(t)$

Для $\alpha = 10$

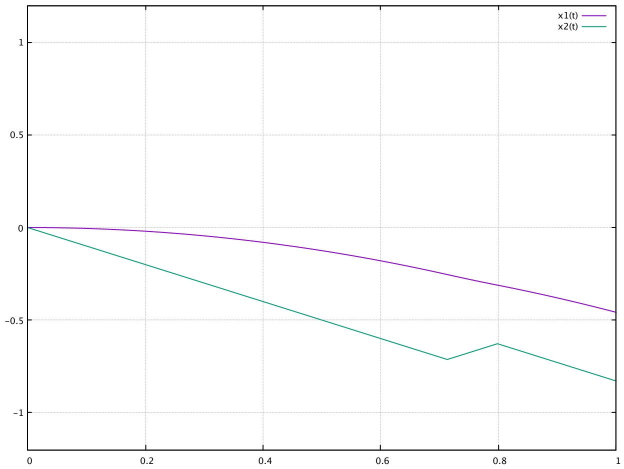

Рис. 7: $x_1(t), x_2(t)$

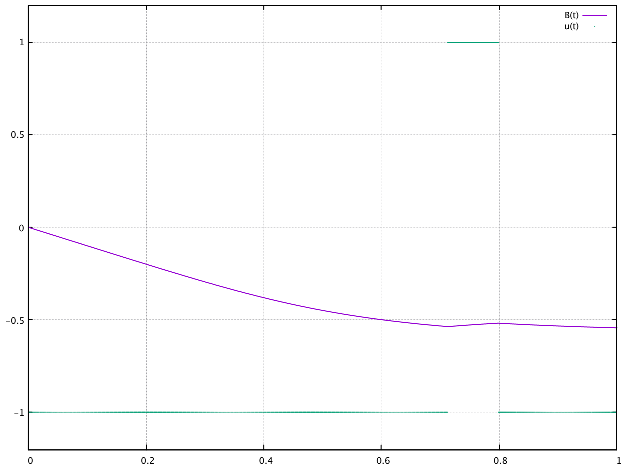

Рис. 8: $B_0(t), u(t)$

10 Оценка погрешности (δ Коши по всей траектории, глобальная погрешность)

Глобальна погрешность на k – ом шаге вычисляется следующим образом:

$$\delta_{k+1} = err_k + \delta_k \cdot e^{L_k}, \tag{10}$$

где предполагается $\delta_0 = 0$, err_k — локальная погрешность на k – ом шаге.

$$L_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} l(s)ds \approx (t_{k+1} - t_k) \cdot l(t_k) \ , \tag{11}$$

где $l(t_k)$ — максимальное собственное значение матрицы $(J + J^T)/2$ на k – ом шаге и J — матрица Якоби системы дифференциальных уравнений.
В приведённой ниже таблице с результатами оценки глобальной погрешности численного решения задачи при выбранных $\alpha = 0.0, 0.1, 1.0, 10.0$

α	δ	tol
0.0	0.00000191771770768049	10^{-10}
0.0	0.000002295984123234003	10^{-12}
0.1	0.00000235590361114887	10^{-10}
0.1	0.00000023560016720707	10^{-12}
1.0	0.00000892632202628754	10^{-10}
1.0	0.00000089247347400720	10^{-12}
10.0	0.00000060081836854973	10^{-10}
10.0	долго считает	10^{-12}

11 Оценка локальной погрешности. Правило Рунге

Контроль шага осуществляется следующим образом: программа выполняет два шага длинны h и один шаг длинны 2h, затем вычисляется погрешность err по формуле

$$err = \frac{1}{2^p - 1} \cdot max|y_{2,i} - w_i| \tag{12}$$

где $p = 5$ – порядок точности, $y_{2,i}$ — значение i–й фазовой переменной после двух шагов, w_i — значение i–й фазовой переменной после двойного шага. Если для заданной точности tol имеем $err \leq tol$, то два сделанных шага считаются принятыми и вычисления продолжаются с новым шагом

$$h_{new} = h \cdot min(facmax, max(facmin, fac \cdot (tol/err)^{1/(p+1)})), \tag{13}$$

в противном случае оба шага не принимаются и вычисления начинаются заново с новым шагом. В формуле (10) коэффициенты $facmax$, $facmin$ предотвращают слишком быстрое увеличение и уменьшение шага соответсвенно, а fac некий гарантийный фактор. Для решения задачи были использованый следующие коэффициенты:

$$fac = 0.95, \ facmax = 1.5, \ facmin = 1/1.16 \tag{14}$$

Для оценки локальной погрешности будем использовать правило Рунге:

$$R_y = \left| \frac{y_{10^{-8}}(T) - y_{10^{-10}}(T)}{y_{10^{-10}}(T) - y_{10^{-12}}(T)} \right| \approx 100^{s/(s+1)}, \tag{15}$$

где y — фазовая переменная, нижний индекс —макимально допустимая локальная погрешность, T — некоторый момент времени.

В приведённой ниже таблице оценки локальной погрешности численного решения задачи,по строкам выписаны Числа Рунге нашей задачи
при выбранных $\alpha = 0.0, 0.1, 1.0, 10.0$

1ая колонка для альфа,
остальные для времени
(у меня от 0 до 2)
$\Rightarrow i \in (1, 2, 3, 4) \quad i * [(2-0)/4]$

α	0.5	1	1.5	2
0.0	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	10.0	9.9
	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	9.7	10.0
0.1	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	9.9	10.1
1.0	9.9	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	9.9	9.9
10.0	9.7	10.0	10.0	10.0
	10.0	10.0	10.0	10.0
	10.3	10.2	10.3	10.2
	10.1	10.0	9.9	9.9

12 Просчет назад

Пересчитал с обратным отсчетом от 2 до 0, в качестве начальных условий сам вектор, конечные искал при выбранных $\alpha = 0.0, 0.1, 1.0, 10.0$
Справа на лево различные отклонения от начальных x1,x2,p1,p2 соответсвено:

0.0	0.000047516527903024	0.000072700603355341	0.000025582070238544	0.00014989298216217
0.1	0.000131072140010957	0.000107661927308492	0.000000000000000015	0.000000000000000015
1.0	0.000190569070696256	0.000421913092777949	0.000000000000000000	0.000000000000000000
10	0.000022921322958780	0.000009830976079771	00.000000000000000000	0.00000000000000000

Замечу лишь,что погрешность полученная в пробразе порядка 10^{-4---5}*,в то время как прямая точность порядка* $\approx 10^{-8}$*.*
Графики от времени еще могу чуть позже построить и отправить.

Список литературы

[1] И. С. Григорьев. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. — М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005

[2] Эрист Хайрер, Сиверт Пауль Нёрсетт, Герхард Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений — М.: Мир, 1989