



MODELACIÓN NUMÉRICA  
(CB051) CURSO CAVALIERE

# Trabajo Práctico

## Resolución de EDOs

### Dimensionamiento de Bomba de Desagote



29 de junio de 2024

Máximo Gismondi  
110119

Cristhian Noriega  
109164

Benicio Braunstein  
110126

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Análisis del problema</b>	<b>4</b>
<b>3. Desarrollo</b>	<b>6</b>
3.1. Discretización de la ecuación 4 . . . . .	6
3.2. Implementación del modelo para caudal de salida nulo . . . . .	6
3.3. Discretización de la ecuación 6 . . . . .	7
3.4. Dimensionamiento de la bomba . . . . .	8
<b>4. Comparación de Métodos</b>	<b>10</b>
4.1. Discretización de la ecuación 4 con Runge-Kutta orden 2 . . . . .	10
4.2. Simulación con $h = 0.08$ y $h = 0.17$ . . . . .	10
4.3. Planteando Runge Kutta de orden 4 . . . . .	11
4.4. En búsqueda de un $\Delta t$ crítico . . . . .	12
<b>5. Resultados</b>	<b>15</b>
5.1. Resultados de las simulaciones con Euler Explícito . . . . .	15
<b>6. Conclusión</b>	<b>20</b>
<b>7. Anexo</b>	<b>21</b>
7.1. Invariantes del problema . . . . .	21
7.2. Interpretación del coeficiente de infiltración . . . . .	21
7.2.1. Incompatibilidad en el nombre . . . . .	21
7.2.2. Ejercicio A1 . . . . .	21
7.2.3. Incompatibilidad con en el caudal de entrada . . . . .	22

## 1. Introducción

En este informe se realizará el modelado de un sistema de desagote, conformado por una bomba que expulsa el agua acumulada en el sótano de un edificio, con el fin de evitar su inundación durante las tormentas.

Se contemplarán múltiples variables, tales como la intensidad y duración de la tormenta, la potencia y el rango de operación de la bomba, y las dimensiones del sótano y del terreno, entre otras, que se detallarán a continuación.

El objetivo es realizar simulaciones con métodos numéricos para analizar el comportamiento de la bomba frente a distintos tipos de precipitaciones. Para ello, se modelará cómo se relacionan las variables del sistema y se buscarán distintas soluciones que prioricen la exactitud o la velocidad de la simulación.

Con toda esta información, podremos extraer diversas conclusiones, analizando cuáles son las tormentas más peligrosas para nuestro sótano y cuáles son los márgenes de seguridad que tenemos. También nos permitirá, en caso de no contar con una bomba, elegir un modelo con especificaciones que satisfagan las necesidades del edificio y eviten problemas de mantenimiento a largo plazo.

## 2. Análisis del problema

Nos encontramos en un terreno con área  $A_{terr}$ , sobre el mismo se tiene una edificación con un sótano cuyas dimensiones de área y profundidad son  $A_{sot}$  y  $H_{sot}$ , respectivamente. Por desgracia, la zona frecuente lluvias de alta duración e intensidad y no se cuenta con un sistema de cloacas que permita desagotar las infiltraciones del sótano con facilidad.

Para resolver este problema, se quiere instalar una bomba capaz de extraer el agua acumulada y expulsarla a la superficie. Esta bomba tiene una capacidad máxima de extracción  $Q_{max}$  que determina el caudal máximo de agua que la misma puede expulsar. A su vez, tiene desnivel de agua máximo  $\Delta H_{max}$  y desnivel de agua mínimo  $\Delta H_{min}$  que representan los límites sobre los cuales la bomba puede operar siempre respecto al desagote.

La bomba no opera siempre a su máxima potencia, sino que su caudal de agua extraído varía siguiendo la siguiente curva:

$$Q_{sal} = Q_{max} \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - \Delta H}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \quad (1)$$

Donde  $\Delta H$  es el desnivel entre la superficie del agua y el desagote:

$$\Delta H = H_s - H \quad (2)$$

$H$  es la altura del agua por encima del piso del sótano, que se puede calcular como la relación entre el volumen total de agua en el sótano y el área del sótano.

$$H = \frac{V}{A_{sot}} \quad (3)$$

Siendo  $V$  el volumen de agua, que responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{ent} - Q_{sal} \quad (4)$$

Sabiendo esto, podemos predecir con exactitud el desagote de un sótano inundado.

Como nos interesa que la bomba también funcione en momentos de lluvia para minimizar constantemente la cantidad de agua en el sótano, debemos entender entonces cómo aumenta el volumen de agua acumulada en función de las lluvias exteriores.

Para analizar las precipitaciones, instalamos un pluviómetro que mide la intensidad de lluvia  $I$ , es decir, la cantidad de agua que cae por unidad de tiempo.

Sabiendo esto y la duración de las mismas, tan solo nos queda conocer el caudal de agua que entra al sótano  $Q_{ent}$ . Este no solo depende de la lluvia, sino que depende de las condiciones de infiltración del suelo y se puede calcular de la siguiente forma:

$$Q_{ent} = CIA_{terr} \quad (5)$$

Donde el coeficiente de infiltración  $C$  varía en función de la cantidad de agua almacenada en el sótano y nos dice qué porción del total de agua llovida ingresa al sótano. Este coeficiente responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{V}{V_{sot} t_k} (C_{sat} - C) \quad (6)$$

En nuestro caso,  $C$  varía entre 1, donde todo el agua que llueve entra al sótano, y 0, donde al sótano no ingresa ni una sola gota de agua. Similar a otros coeficientes como el de rozamiento y transferencia de calor, este nunca vale exactamente 0 o 1, ya que representaría situaciones irreales de permeabilidad o impermeabilidad total. Tras hacer un análisis del suelo, determinamos que

como mínimo este coeficiente siempre varía entre  $C_0$  y  $C_{sat}$ , un punto en que el terreno está tan saturado que ya no puede dejar pasar más agua. Además se añade un tiempo característico  $t_k$  que se encarga de regular con que velocidad impactan los cambios del coeficiente de infiltración a lo largo del tiempo.

Con este modelo teórico y la información recopilada sobre las lluvias, podemos simular y calcular cómo variará el volumen de agua en el sótano para todo tipo de tormentas. Además, podemos determinar cuánto tiempo tardará en vaciarse una vez pasado el temporal y adquirir una bomba que se ajuste a nuestras necesidades. De esta manera, evitamos comprar una bomba que no pueda hacer frente a las condiciones climáticas o, por otro lado, adquirir una con especificaciones excesivas, lo que incrementaría los costos innecesariamente.

### 3. Desarrollo

#### 3.1. Discretización de la ecuación 4

La ecuación (4) es una ecuación diferencial que modela la variación del volumen de agua en el sótano en función del tiempo. Para resolver numéricamente esta ecuación, es necesario discretizarla, es decir, dividir el tiempo en intervalos pequeños y aproximar la derivada del volumen con respecto al tiempo mediante una diferencia finita. La condición inicial para esta ecuación es  $V(0) = 0$ , la cual indica que inicialmente no hay agua en el sótano.

Para poder discretizar la ecuación, primero debemos discretizar el tiempo.

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (7)$$

Luego, aplicamos el método de Euler explícito a la ecuación diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{ent} - Q_{sal} \quad (8)$$

La forma discretizada de esta ecuación utilizando el método de Euler explícito es:

$$V_{n+1} = V_n + \Delta t f(t, V) \quad (9)$$

#### 3.2. Implementación del modelo para caudal de salida nulo

Como primer acercamiento al problema y al modelo en cuestión, se realizará una simulación para precipitaciones de 60 minutos, con la particularidad de que el caudal de salida será nulo  $Q_{sal} = 0$ , es decir, no hay extracción de agua por la bomba durante ese intervalo de tiempo. Además se tomará como coeficiente de infiltración  $C = 1$ , lo cual indica que toda la precipitación se infiltra en el terreno.

##### Cálculo teórico del volumen de lluvia

Antes de realizar la simulación con nuestro modelo, calculamos el volumen de lluvia teórico que cae sobre el área del terreno durante los 60 minutos de precipitación. Dadas las condiciones, el volumen de agua se calcula como:

$$V_{lluvia} = I \times A_{terr} \times T \quad (10)$$

Donde:

1.  $I$  es la intensidad de la precipitación
2.  $A_{terr}$  es el área del terreno
3.  $T$  es el la duración de la precipitación

Usando los valores dados:  $I = \frac{85,0}{1000} \text{ m/h}$ ,  $A_{terr} = 17,32 \times \frac{110119}{3000} \text{ m}^2$ ,  $T = 1 \text{ h}$

Entonces, el volumen teórico de lluvia es:

$$V_{lluvia} = \frac{85,0}{1000} \times 17,32 \times \frac{110119}{3000} \times 1 = 54,04 \text{ m}^3 \quad (11)$$

## Parámetros de la Simulación

Para esta simulación se utilizan los siguientes parámetros:

- Intensidad de la precipitación ( $I$ ): 85.0 mm/h
- Duración de la precipitación: 60 minutos (1 hora)
- Intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ): 5 minutos (0.0833 horas)

## Resultados de la Simulación

El modelo simulado con estos parámetros muestra que el volumen final de agua en el sótano es de 54.04 m<sup>3</sup>. Este resultado coincide con el volumen de lluvia acumulada.

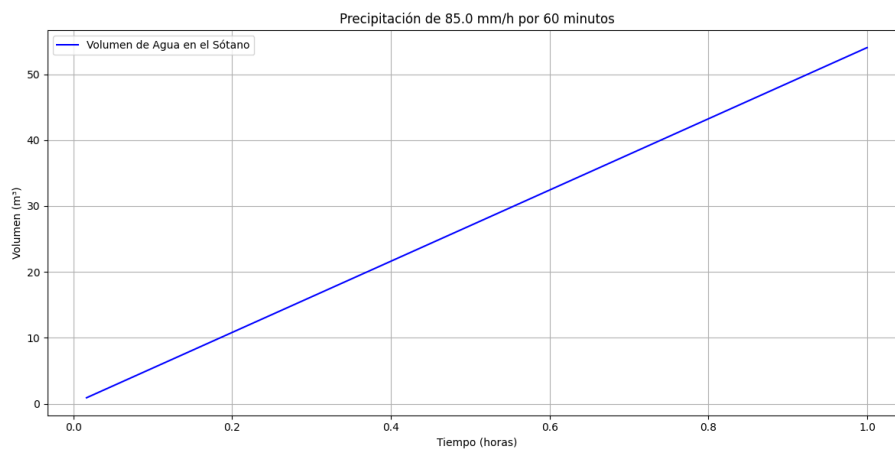


Figura 1: Gráfico de la evolución del volumen de agua en el sótano

Concretamente, en esta situación, la elección del intervalo de tiempo, no debería afectar al resultado final, ya que la variación de volumen en cada instante se mantiene constante, por lo que la evolución del volumen de agua acumulado en el sótano tendrá un comportamiento lineal por lo que el resultado final no dependerá del intervalo de tiempo sino que dependerá únicamente de las características de la lluvia.

### 3.3. Discretización de la ecuación 6

La ecuación (6) modela la variación del coeficiente de infiltración. Se considera el coeficiente de infiltración  $C$  como variable dependiente del volumen de agua en el sótano.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{V}{V_{tot}t_k}(C_{sat} - C) \quad (12)$$

La forma discretizada de esta ecuación utilizando el método de Euler explícito es:

$$C_{n+1} = C_n + \Delta t f(t, V, C) \quad (13)$$

## Resultados de la Simulación

Considerando la siguiente tabla de valores para distintas precipitaciones con sus respectivas duración de tiempo, y con el modelo ya establecido, se procede a simular el modelo para cada uno de esos valores hasta que el sótano se vacíe completamente, siendo el tiempo esperado la cantidad de tiempo hasta vaciar el sótano.

Duración [min]	Intensidad [mm/h]	Tiempo esperado [min]
5	241.4	570.7
10	190.7	719.2
15	162.6	815.55
30	119.6	997.8
60	85.0	1213.2
180	41.7	1589.4
360	26.4	1926.0
720	16.7	2361.6
1440	10.9	3038.4
4320	5.2	5313.6

Para ello se corre el modelo en dos fases, una para la duración de la lluvia, y otra para el desagote del sótano. Es importante considerar la segunda fase, ya que después de la lluvia, el sótano aún puede contener una cantidad significativa de agua, por lo que la segunda fase permite simular cómo se desagota el agua restante. El tiempo total esperado para que se vacíe se representa en la tabla de la figura.

Para cada una de las lluvias se realizaron gráficos para poder visualizar la evolución del volumen de agua y el coeficiente de infiltración a lo largo del tiempo. Los mismos se encuentran en la sección Resultados.

### 3.4. Dimensionamiento de la bomba

Como requerimiento del edificio, se establece que la altura del agua por sobre el nivel del fondo del sótano no puede superar los 0.25m, llamaremos a esta constante  $H_{lim}$ . Para ello, debemos encontrar cual es el valor de  $Q_{max}$  de la bomba de modo que esta altura no se vea superada, respetando los valores de  $\Delta H_{max}$  y  $\Delta H_{min}$ . Como deberemos hacer una redimensión de la bomba ya instalada, debemos encontrar el valor que mínimo de  $Q_{max}$  que satisfaga esta condición para ahorrar en gastos de consumo y de instalación.

Para asegurarnos que la bomba cumple con los requerimientos, debemos validar que este nuevo  $Q_{max}$  evite que el sótano se inunde para todas tormentas detalladas anteriormente por encima de  $H_{lim}$ . Para ello iremos eligiendo algunos  $Q_{max}$  y simularemos todas las tormentas para asegurarnos que  $H$  en cada instante de la simulación no supere  $H_{lim}$ , y en caso de hacerlo rechazaremos el valor elegido.

Ahora, debemos determinar con que valores probar esta simulación y para hacerlo debemos hacerlo de forma inteligente, ya que probar un valor conlleva a simular todas y cada una de las tormentas, determinando para cada instante si se supera o no el  $H_{lim}$ .

Estableceremos inicialmente los límites, tanto superior, como inferior.

Para el límite inferior podemos usar el  $Q_{max}$  inicial, ya que como vimos en las simulaciones este superaba  $H_{lim}$ .

Ahora, para el límite superior podemos buscar una cota superior teórica que nos asegure no superar este límite. Debemos asegurarnos que para el  $H_{lim}$  el  $\frac{dV}{dt}$  sea  $\leq 0$ . Podemos tomar que la  $I$  sea la máxima de todas las tormentas, lo llamaremos  $I_{max}$  y el  $C$  como el más alto del terreno, el  $C_{sat}$ .

De esta forma de la ecuación:

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \quad (14)$$

Podemos despejar el  $Q_{max}$ :

$$Q_{max} \leq C_{sat} I_{max} A_{terr} \left( \sqrt{\frac{\Delta H_{max} - \Delta H_{lim}}{\Delta H_{max} - \Delta H_{min}}} \right)^{(-1)} \quad (15)$$



Si reemplazamos los valores, nos encontramos que el  $H_{max}^S = 93.39$  [m3/h] y el  $H_{max}^I = 8.00$  [m3/h]

Ahora sabiendo los limites podemos aplicar un algoritmo similar a bisección conocido como búsqueda binaria en el que por cada iteración calcularemos un nuevo  $Q_{max}$  como el punto medio entre mi  $Q_{max}^S$  y  $Q_{max}^I$  de la siguiente forma:

$$Q_{max}^M = \frac{Q_{max}^S - Q_{max}^I}{2} \quad (16)$$

Y haremos la simulación de las tormentas para ese  $Q_{max}$  en particular.

En el caso de resultar suficiente para mantener el agua por debajo del  $H_{lim}$  para todos los instantes de las tormentas podemos actualizar nuestro  $Q_{max}^S$  por este  $Q_{max}^M$ . En caso contrario, como el  $Q_{max}$  no es suficiente para satisfacer las necesidades del edificio, por lo que actualizaremos nuestro valor de  $Q_{max}^I$ .

Por cada iteración, nos aseguramos que el valor de la  $Q_{max}^S$  será suficiente para satisfacer el problema de drenaje.

Ahora para determinar el error con el que hallaremos el valor óptimo, llamaremos  $n$  a la cantidad de iteraciones realizadas y podemos acotar nuestro error de la siguiente forma:

$$\epsilon_{abs} \geq \Delta Q_{max} 2^{-n} [\text{m3/h}] \quad (17)$$

Siendo  $\Delta Q_{max}$  la diferencia entre el  $Q_{max}^S$  y  $Q_{max}^I$  iniciales.

En nuestro caso, nos alcanzaba con un  $\epsilon_{abs} \leq 0.005$  [m3/h] es decir que debemos hacer al menos 15 iteraciones.

Una vez modelado el problema, realizamos la simulación y nos encontramos con que una bomba con  $Q_{max} = 31.88$  [m3/h] es suficiente para mantener el nivel del agua por debajo de  $H_{lim}$

## 4. Comparación de Métodos

### 4.1. Discretización de la ecuación 4 con Runge-Kutta orden 2

El método de Runge-Kutta tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} q1 &= h \cdot u_n \\ q2 &= h \cdot f(u_n + h \cdot v_n, t_{n+1}) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{2}(q1 + q2) \end{cases} \quad (18)$$

Aplicándolo a nuestra ecuación queda:

$$\begin{cases} q1_v &= \Delta t \cdot v_n \\ q2_v &= \Delta t \cdot f(v_n + \Delta t \cdot v_n, t_{n+1}) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{2}(\Delta t \cdot (v_n + f(v_n + \Delta t \cdot v_n, t_{n+1}))) \end{cases} \quad (19)$$

El desarrollo de este estudio se centró en la simulación de un evento de precipitación con una duración de 60 minutos y una intensidad de 85 mm/h. El volumen resultante se determinó inicialmente mediante la aplicación del método de Runge-Kutta de segundo orden, considerándolo como el valor de referencia exacto.

Posteriormente, se realizó una nueva simulación del mismo evento de precipitación utilizando el método de Euler. En este caso, se emplearon dos tamaños de paso diferentes para llevar a cabo la comparación con el resultado obtenido previamente con el método de Runge-Kutta. El objetivo de esta comparación era evaluar la precisión y la eficiencia del método de Euler frente a un método más avanzado y preciso, proporcionando así una comprensión más completa de la aplicabilidad y las limitaciones de cada uno.

### 4.2. Simulación con $h = 0.08$ y $h = 0.17$

Se ejecutaron ambos métodos con un paso de tiempo  $h = 0.08$ . Se observó que la diferencia acumulada entre los resultados de RK-2 y Euler explícito se mantuvo baja, indicando que el método de Euler es consistente con un error que parece ser de primer orden. Luego se procedió a correr nuevamente los métodos con un paso de tiempo más grande,  $h = 0.17$ . La diferencia entre RK-2 y Euler explícito aumentó ligeramente, pero aún sigue mostrando un comportamiento consistente con la expectativa de un método de primer orden.

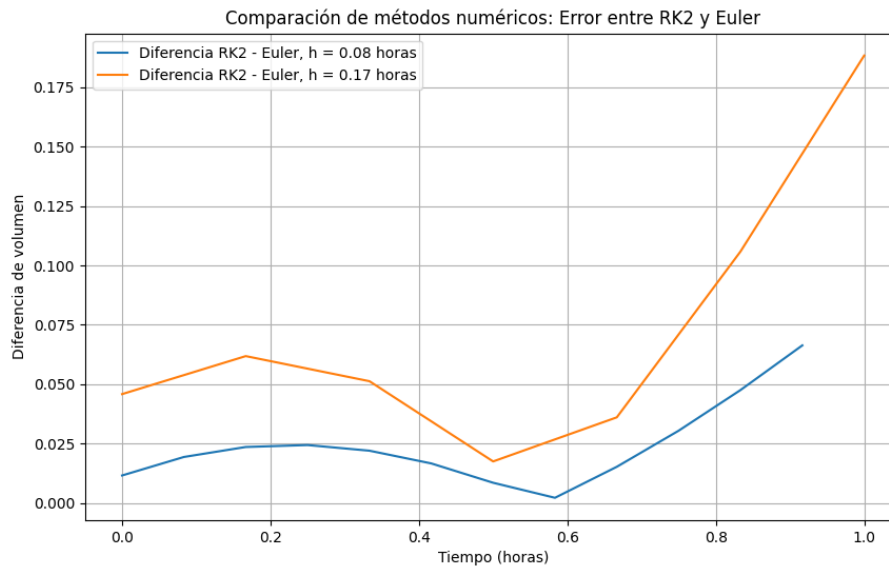


Figura 2: Diferencia entre Euler y Runge-Kutta orden 2

Como se puede apreciar en el gráfico, al comparar el error entre la solución exacta y la obtenida mediante el método de Euler con dos tamaños de paso temporal diferentes, se observa un patrón lineal. Inicialmente, se registra un error que corresponde al paso de tiempo más pequeño y luego, al emplear un segundo paso de tiempo mayor, se observa un incremento en el error proporcional al incremento al aumento de tamaño.

#### 4.3. Planteando Runge Kutta de orden 4

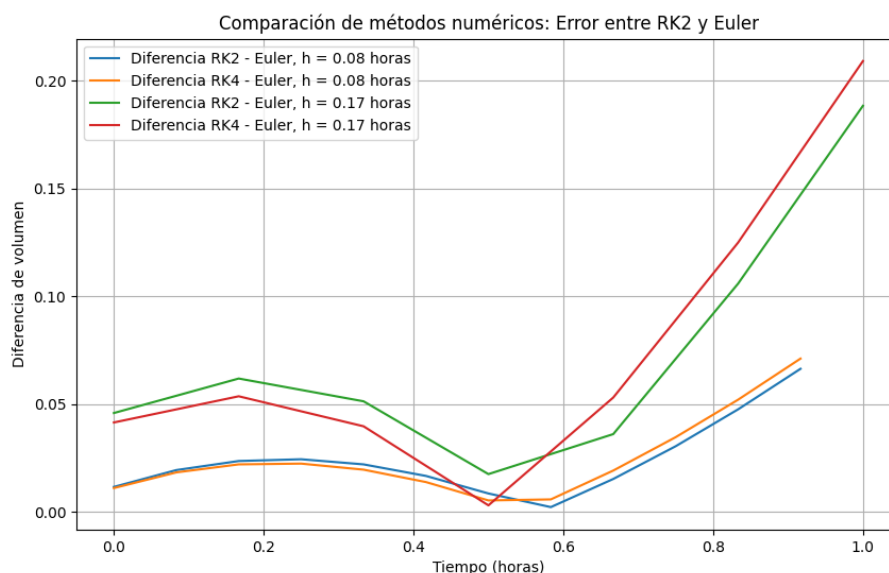


Figura 3: Diferencia entre Euler, Runge-Kutta orden 2 y Runge-Kutta orden 4

En este caso, se procedió a realizar una simulación adicional utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con el objetivo de comparar la variación del error obtenido con el método de Runge-Kutta de segundo orden. Esta simulación adicional permitió observar que, aunque el

error en ambos métodos de Runge-Kutta es relativamente bajo, la precisión del método de cuarto orden es notablemente superior.

Al realizar un análisis comparativo entre los resultados obtenidos mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden y los obtenidos mediante el método de Euler, se evidenció que la diferencia en los errores es considerablemente mayor. Esta diferencia significativa indica que el método de Runge-Kutta de cuarto orden proporciona una aproximación mucho más precisa en comparación con el método de Euler.

#### 4.4. En búsqueda de un $\Delta t$ crítico

La elección del tamaño de paso  $\Delta t$  es crucial para asegurar la estabilidad y precisión de los métodos numéricos utilizados en la simulación. El tamaño de paso crítico  $\Delta t_{crit}$  está relacionado con el coeficiente de estabilidad  $\lambda$ . Para determinar  $\lambda$ , consideramos las propiedades del sistema y los coeficientes involucrados.

Para diferentes métodos numéricos, el  $\Delta t$  crítico se calcula de la siguiente manera:

■ **Método de Euler Explícito:**

$$\Delta t_{Euler} = \frac{1}{\lambda} \quad (20)$$

■ **Método de Runge-Kutta de Segundo Orden:**

$$\Delta t_{RK2} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \quad (21)$$

■ **Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden:**

$$\Delta t_{RK4} = \frac{2}{\lambda} \quad (22)$$

#### Coefficiente de estabilidad para cada ecuación diferencial

El coeficiente de estabilidad  $\lambda$  para la ecuación diferencial (4) está relacionado con los cambios en el volumen respecto al tiempo y puede considerarse proporcional al máximo caudal entrante o saliente:

$$\lambda_v = \frac{\max(Q_{ent}, Q_{sal})}{V} \quad (23)$$

Para la ecuación diferencial (6), el coeficiente de estabilidad  $\lambda$  se puede identificar como el término que controla la rapidez del cambio en el coeficiente de infiltración  $C$ . Este término describe como el volumen de agua  $V$  y la constante de tiempo característico  $t_k$  afectan la tasa de cambio de  $C$ :

$$\lambda_c = \frac{V}{V_{sot} t_k} \quad (24)$$

Es importante notar la consistencia de unidades en ambos coeficientes de estabilidad, ya que los dos tienen como unidad  $[tiempo]^{-1}$ .

#### Determinación del coeficiente de estabilidad general

Para determinar el  $\lambda$  que garantice la estabilidad del sistema en conjunto, consideramos el valor máximo de  $\lambda$  para ambas ecuaciones diferenciales:

$$\lambda = \max \left( \frac{\max(Q_{ent}, Q_{sal})}{V}, \frac{V}{V_{sot} t_k} \right) \quad (25)$$

## Simulación y Análisis

Para poder hacer un análisis de los  $\Delta t$  críticos, se realizara la simulación para el caso de precipitación 85 mm/h y duración de 1 h. Los valores calculados de  $\Delta t$  crítico, para cada método, utilizando el coeficiente de estabilidad general, son los siguientes:

- Delta  $t$  crítico para Euler Explícito:  $\Delta t_{Euler} = 0,21343571428571428$
- Delta  $t$  crítico para Runge-Kutta 2:  $\Delta t_{RK2} = 0,3018436818376461$
- Delta  $t$  crítico para Runge-Kutta 4:  $\Delta t_{RK4} = 0,42687142857142857$

## Selección del $\Delta t$ adecuado

La determinación de los  $\Delta t$  para cada método numérico es crucial en el contexto del sistema de la bomba de desagote y la variación del volumen de agua y el coeficiente de infiltración. Cada método numérico tiene diferentes requisitos de estabilidad y precisión.

- Método de Euler Explícito: Es el más simple y rápido, pero requiere un  $\Delta t$  pequeño para asegurar la estabilidad.
- Método de Runge-Kutta de Segundo Orden: Ofrece un balance entre complejidad y estabilidad, permitiendo un  $\Delta t$  mayor que el método de Euler, pero sigue siendo más restrictivo que los métodos de orden superior.
- Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden: Es más complejo pero permite un  $\Delta t$  mayor lo que puede reducir significativamente el tiempo de simulación sin perder estabilidad. Esto implica a su vez que se pueda realizar menos pasos de tiempo para cubrir el mismo intervalo de tiempo, mejorando la eficiencia computacional.

En el contexto de la bomba de desagote, la elección del  $\Delta t$  adecuado es crítica para asegurar que la simulación represente correctamente el comportamiento del volumen de agua y el coeficiente de infiltración. Un  $\Delta t$  inadecuado podría llevar a simulaciones inestables o inexactas.

## Análisis de estabilidad

Se realizaron las mismas simulaciones que se encuentra en la sección "Discretización de la ecuación 4 con Runge-Kutta orden 2", planteando las mismas condiciones, pero con la diferencia que además se realizó una tercera simulación, utilizando un  $\Delta t$  mayor al  $\Delta t_{critico}$  de Euler encontrado. El objetivo fue analizar la estabilidad del método, ya habiendo calculado su respectivo  $\Delta t_{critico}$ , y el comportamiento del método superando el mismo.

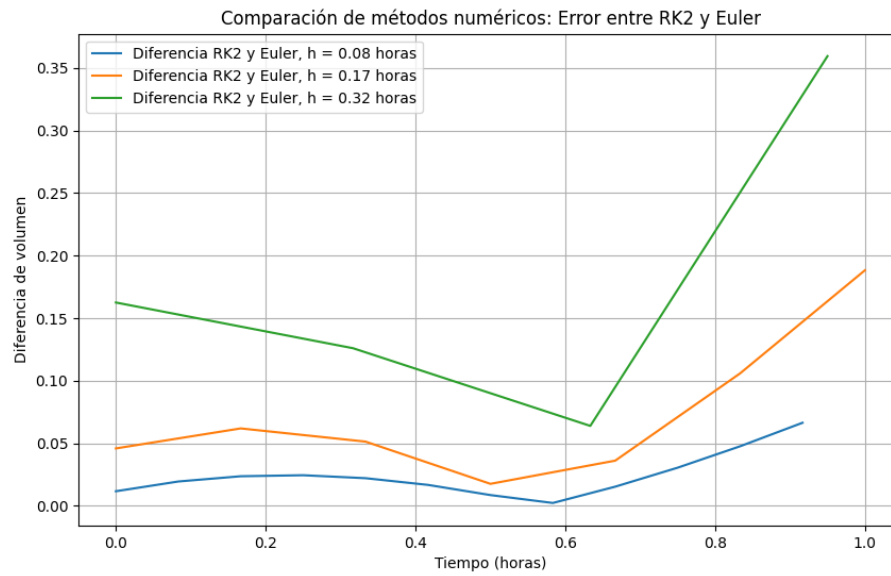


Figura 4: Diferencia entre Euler y Runge-Kutta orden 2

## 5. Resultados

### 5.1. Resultados de las simulaciones con Euler Explicito

A continuación se muestran los resultados para cada una de las simulaciones de las precipitaciones. Se puede ver que en los gráficos de la evolución del volumen de agua para cada precipitación, se llega a un máximo de volumen para cada uno de ellos, y este empieza a descender a medida que se vacía el sótano y se detiene la lluvia. Es importante aclarar que este comportamiento no se logra ver en el gráfico de la última precipitación, ya que la misma representa un caso en el que la precipitación es débil respecto a la bomba causando que la misma logre equiparar el  $Q_{sal}$  con el  $Q_{ent}$ . Esto se logra ver con una gráfica lineal constante en volumen 0.

Por otro lado, el coeficiente de infiltración también es representado para cada una de las precipitaciones. El mismo, a medida que pasa el tiempo, siempre va en aumento dado que el suelo se satura progresivamente, lo que reduce la capacidad de infiltración. Cabe destacar que a medida que va aumentando el volumen acumulado de agua, el coeficiente de infiltración se aproxima asintóticamente al coeficiente de infiltración de suelo saturado, estableciendo un límite a la proporción de precipitación que el sótano ingresa.

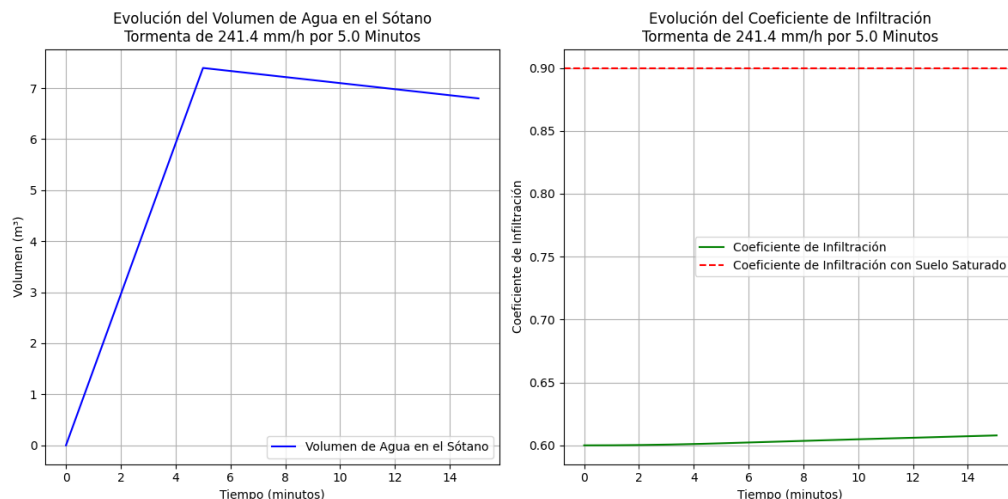


Figura 5: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

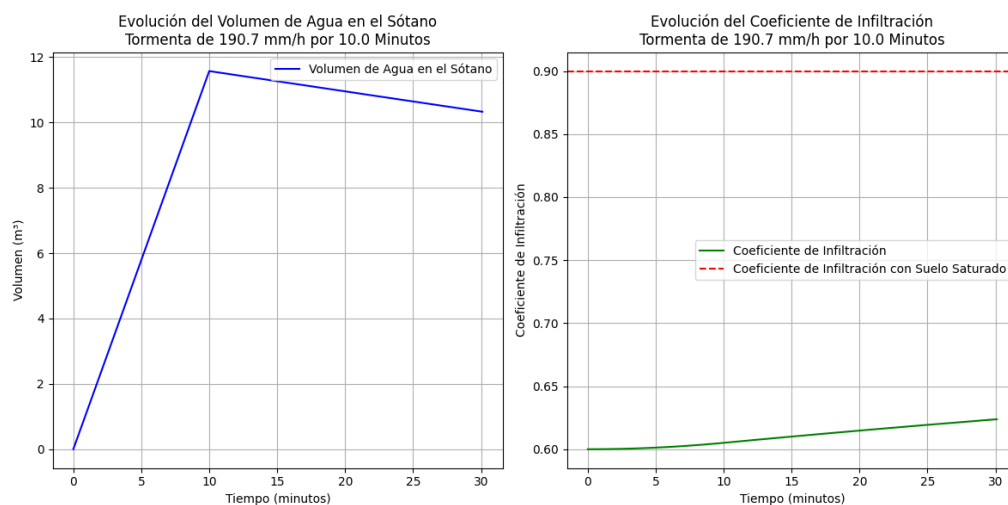


Figura 6: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

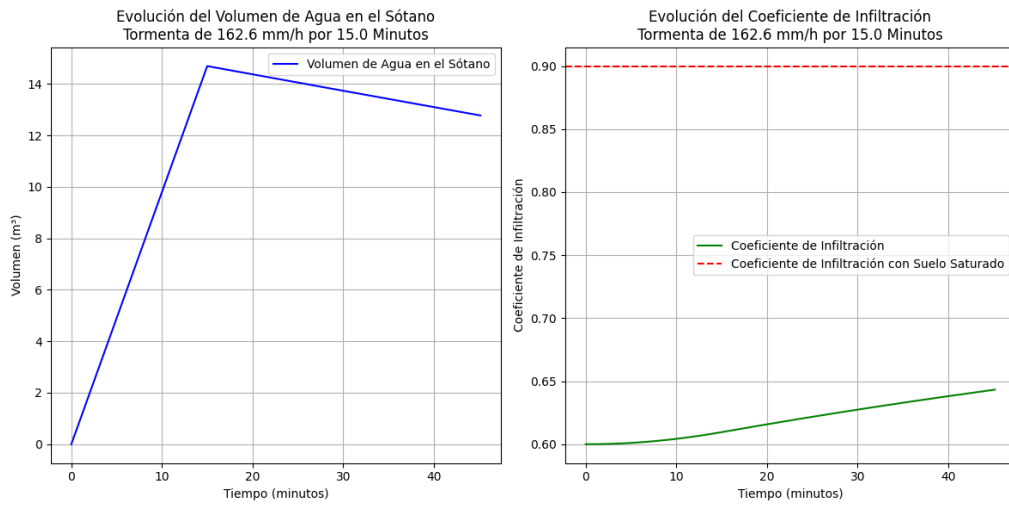


Figura 7: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

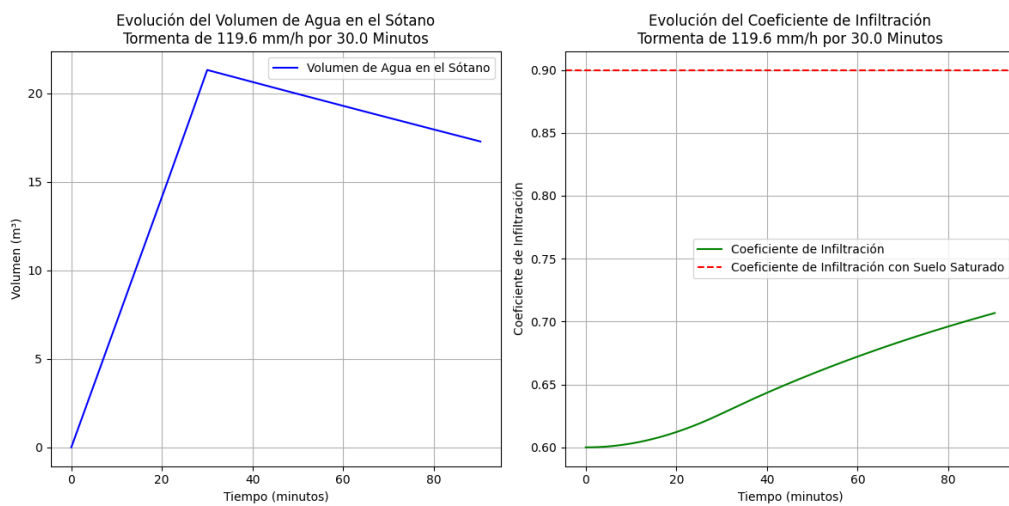


Figura 8: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración



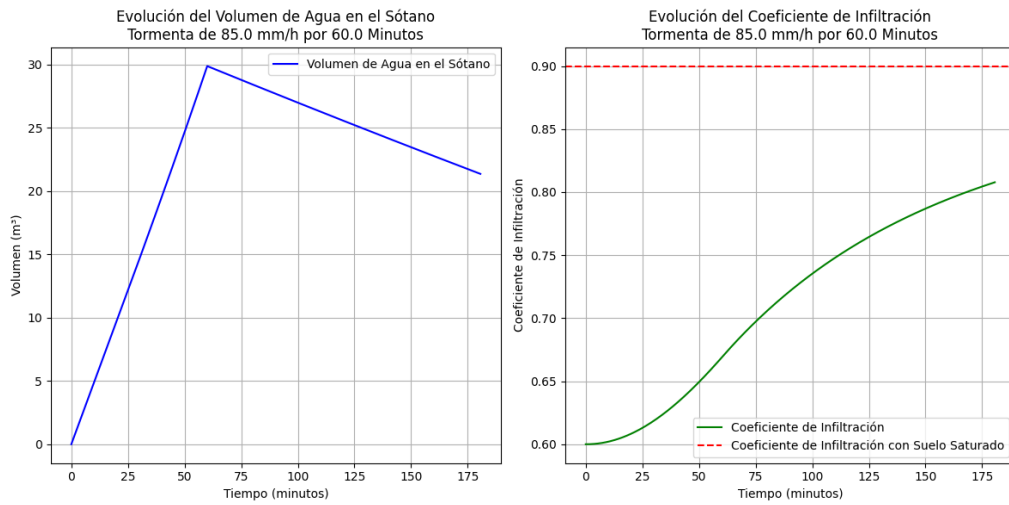


Figura 9: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

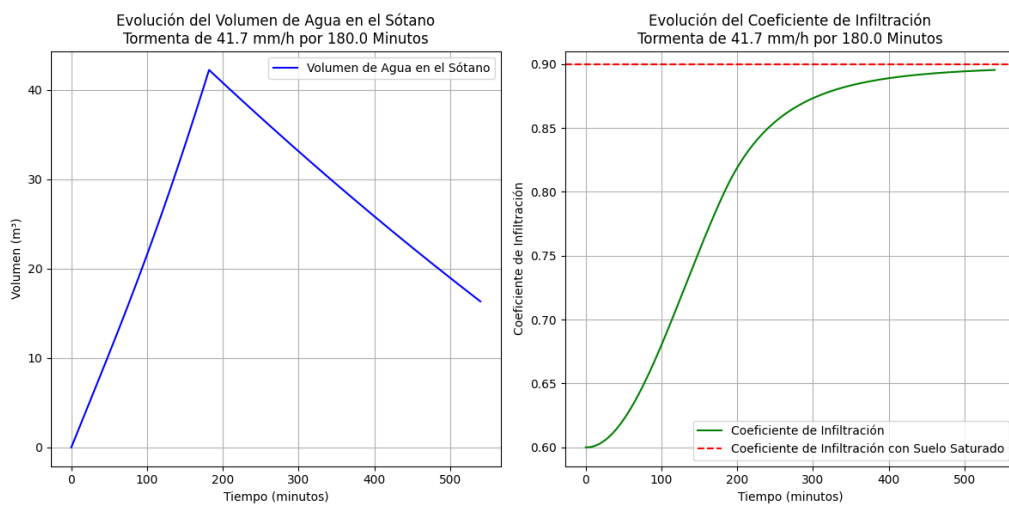


Figura 10: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

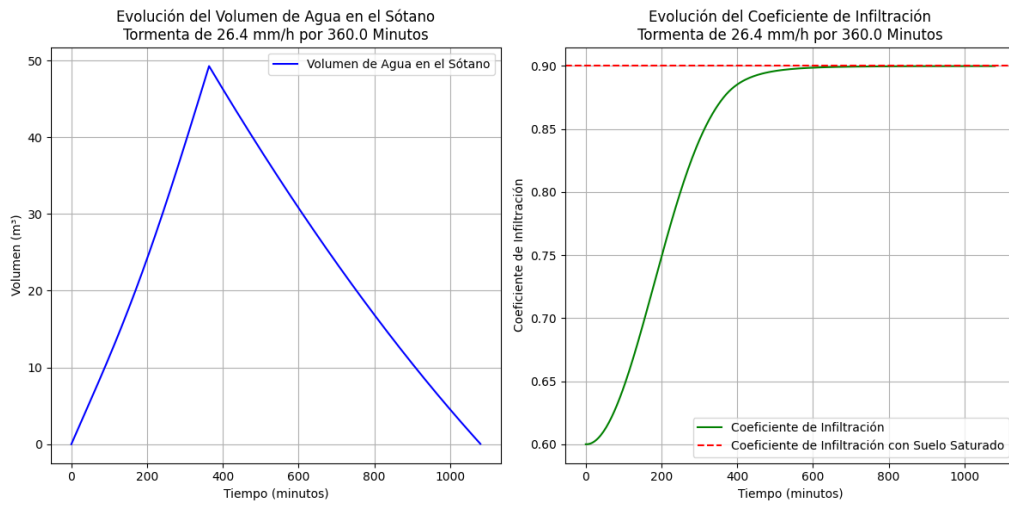


Figura 11: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

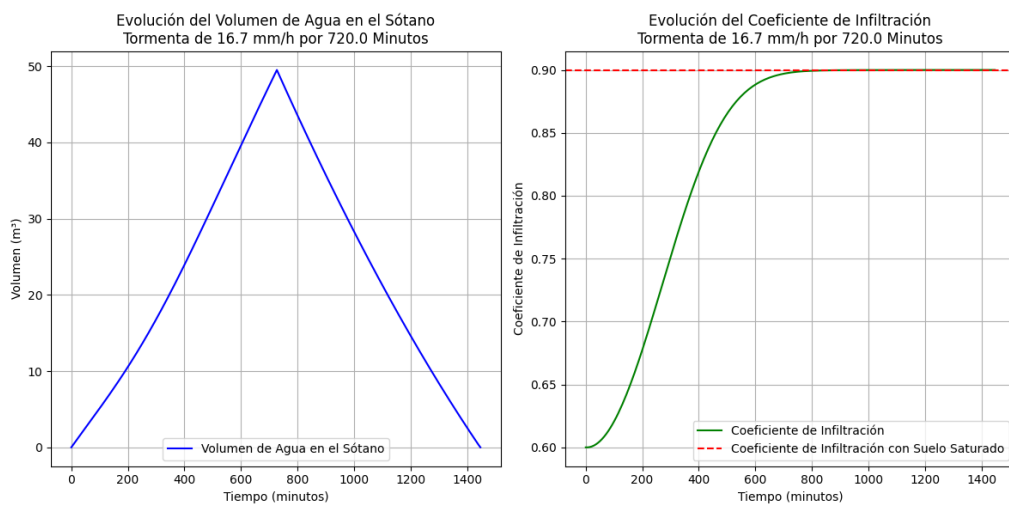


Figura 12: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

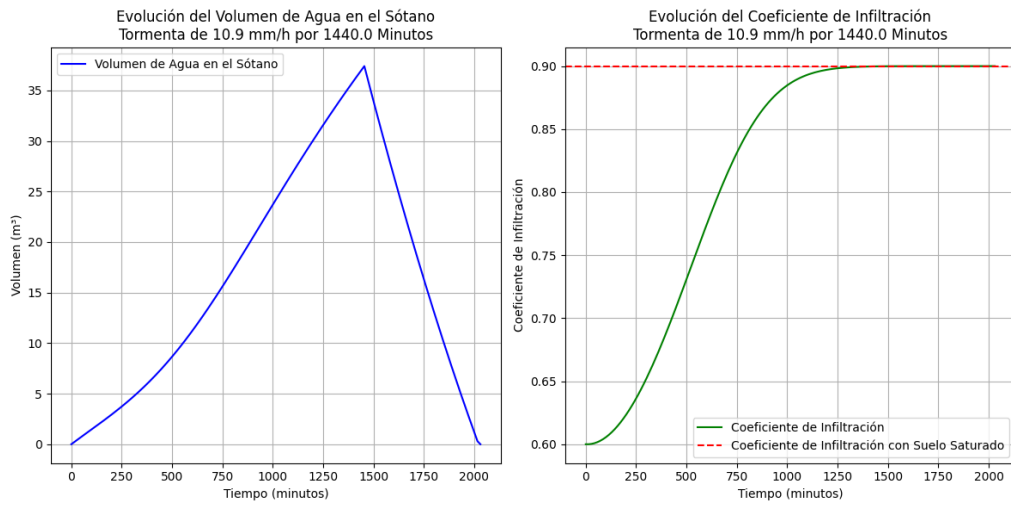


Figura 13: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

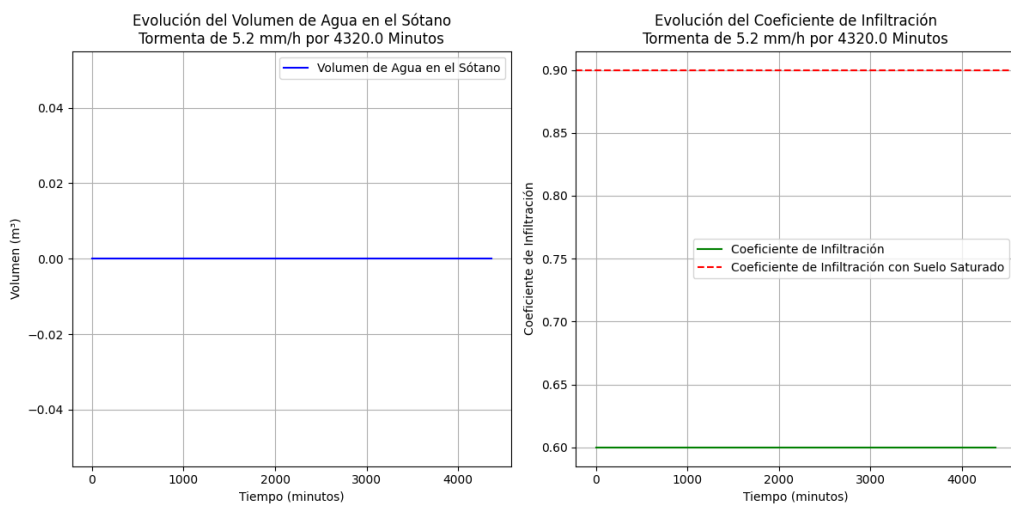


Figura 14: Evolución del Volumen y Coeficiente de Infiltración

## 6. Conclusión

Este experimento, nos ayuda a comprender la importancia de los métodos numéricos a la hora de resolver problemas de la vida real. En este caso el problema planteado, es modelado con un sistema de ecuaciones diferenciales que es difícil de resolver analíticamente. Optamos por usar métodos numéricos ya que nos permiten tener un control sobre las cotas de errores que tenemos a la hora de simular los casos de ejemplo y hallar aproximaciones lo suficientemente buenas para los desafíos físicos e ingenieriles que se presentan a lo largo del desarrollo.

En particular, hicimos uso concreto de los siguientes métodos numéricos:

- Euler explícito
- Runge-Kutta 2
- Runge-Kutta 4

El primero permite, hallar soluciones aproximadas y veloces para entender como opera una bomba para las diferentes tormentas. Este método es fácil de codificar y es bastante rápido incluso para intervalos de tiempo del orden de los segundos. Aún así, se trata de un método de orden 1 que si duplicamos el intervalo de tiempo, se duplica la cota de error. Por eso y para simular con exactitud tormentas de larga duración discretizamos nuestro modelo para el método de Runge-Kutta 2, que requiere algunos cálculos adicionales pero tiene la ventaja de que si reducimos el intervalo de tiempo a la mitad, la cota de error se reduce a una cuarta parte ya que el método es de orden 4. Finalmente para obtener una simulación prácticamente indistinguible a la realidad usamos Runge-Kutta 4, un método de orden 4 que con tan solo unos cálculos adicionales, podemos simular días de tormenta usando intervalos de tiempo del orden de los minutos con una muy alta exactitud.

En términos de consistencia todos los métodos tienden al error 0 cuando el  $\Delta t$  tiende a 0, esto está más que demostrado teórica y empíricamente. En este informe hicimos particularmente la demostración empírica de la consistencia de Euler basándonos en el método de Runge-Kutta como "solución exacta".

Por otro lado, para encontrar valores que optimicen el funcionamiento dado ciertas restricciones, es conveniente usar métodos que permitan resolver ecuaciones no lineales, como podría ser bisección. Pero como el modelo no solo comprende problemas con ecuaciones no lineales sino con ecuaciones diferenciales, no podemos garantizar que este resultado sea correcto para todo el intervalo de tiempo a simular. Para eso usamos un algoritmo similar conocido como búsqueda binaria, que nos permite elegir valores de forma metódica y probar si satisface o no los requerimientos del problema, hallando soluciones que pueden ser refinadas a lo largo de las iteraciones. Esto es muy útil para encontrar que potencia de bomba es necesaria para garantizar condiciones de higiene o conocer que intensidad máxima puede soportar nuestro sótano sin salir del rango operatorio de nuestra bomba y garantizar que nuestro sótano se vaciará eventualmente.

Nuestras simulaciones dependen fuertemente de la precisión de los instrumentos utilizados ya que los valores medidos inicialmente impactan directamente en los resultados de nuestras predicciones. Como no tenemos un detalle de las tolerancias que proporcionan cada uno de los instrumentos de medición obviamos ese factor y nos centramos en comprender y analizar las simulaciones a lo largo del tiempo y como varía la cota de error según el método empleado.

Por último en términos de estabilidad podemos concluir que nuestro cálculo del  $\Delta t$  crítico es correcto y se condice con la realidad ya que en los resultados de las simulaciones se pueden apreciar como este se mantiene dentro de los valores esperados, donde la forma de la curva no presenta síntomas de un crecimiento exponencial del error ni un comportamiento ondulatorio a gran escala.

## 7. Anexo

### 7.1. Invariantes del problema

A continuación detallamos los datos proporcionados por el enunciado, estos se usaron en el cálculo de los resultados al menos que se haya indicado lo contrario:

- $A_{terr} = 17,32m \times \frac{110119}{3000}m$
- $A_{sot} = 8,66m \times 8,66m$
- $Q_{max} = 8m^3/h$
- $\Delta H_{max} = 4m$
- $\Delta H_{min} = 1m$
- $H_s = 3,50m$
- $C_{sat} = 0,90$
- $C_0 = 0,60$
- $t_k = (1 - \frac{110119}{140000})h$

Elegimos el numero de padrón 110119 de uno de los integrantes trabajo práctico. Este nos permito definir algunos invariantes del problema como el  $A_{terr}$  y el  $t_k$

### 7.2. Interpretación del coeficiente de infiltración

En una parte del enunciado se mencionaba lo siguiente respecto al coeficiente de infiltración:

El coeficiente de infiltración presente en la ec. 2 varía teóricamente entre 0 (suelo permeable) y 1 (suelo impermeable), y depende a su vez del volumen de agua almacenado en el sótano, puesto que, a mayor volumen, el suelo se satura y disminuye su capacidad de absorber agua.

Este extracto a la hora de definir que valor representaba la impermeabilidad y la permeabilidad se nos hacía bastante incompatible con el resto del trabajo en su totalidad. Por lo que decidimos interpretar el coeficiente de infiltración de manera opuesta a lo que proponía el enunciado con el fin de preservar las ecuaciones planteadas por el mismo. Esto también implica que el coeficiente de saturación se alcanza cuando el terreno está en su punto máximo de infiltración de agua y que este coeficiente aumenta cuanto más agua se acumule en el sótano.

A continuación las razones por las que decidimos tomar esta decisión

#### 7.2.1. Incompatibilidad en el nombre

Por un lado, como bien dice el coeficiente de infiltración, indica que proporción de agua se infiltra, no cuanta es obstruida por el suelo.

#### 7.2.2. Ejercicio A1

El ejercicio A1, plantea lo siguiente

Discretizar la ec. 1 con el método de Euler, tomando  $C = 1$ ,  $Q_{sal} = 0$ . Correr el modelo para la precipitación de 60 min y verificar que el volumen de agua almacenado en el sótano coincida con el volumen de lluvia.

Como bien indica, toda el volumen de agua que llueve, debe quedarse atrapado en el sótano y solo sería posible si  $C = 1$  indicara que el terreno tiene capacidad ideales para filtrar el agua de la superficie al sótano.

### 7.2.3. Incompatibilidad con en el caudal de entrada

La ecuación que permite calcular el caudal de entrada de agua es la siguiente:

$$Q_{ent} = CIA_{terr} \quad (26)$$

Como vemos, el coeficiente de infiltración es proporcional al caudal de entrada por lo que todo indica a que cuanto mayor sea el coeficiente, mas es la cantidad de agua que se filtra en el terreno y que por ende termina en el sótano. Esto indica que un coeficiente alto indicaría la alta permeabilidad del suelo y no lo contrario.