

Modelo de propagación de opiniones en una red social.  
Mecánica Estadística.

**Máximo Rodríguez Herrero**

# 1. Introducción teórica.

El modelo de Ising presenta una forma aproximada de simular el comportamiento de los espines presentes en un material ferromagnético permitiendonos, a través de un hamiltoniano, predecir los equilibrios colectivos estables y propiedades muy útiles del sistema. Una generalización de este modelo permitiría modelizar la interacción entre las opiniones de individuos de una población y obtener patrones globales muy útiles para discutir ciertas cuestiones sociales.

Códigos: <https://github.com/MaximoRdz/MODELO-ISING>

## 1.1. Modelo de Ising

De la mecánica estadística sabemos que la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado  $\mu$  con energía  $E_\mu$  es

$$p_\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\mu}$$

siendo  $Z = \sum_\mu e^{-\beta E_\mu}$  la función de partición

$$E_\mu = -h \sum_{i=1}^N \sigma_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

Probabilidad de transición del estado  $\mu$  al estado  $\nu$ ,

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}$$

## 1.2. Modificación para un modelo de dinámica social

Los individuos que conforman una sociedad no son entes aislados. De hecho, la opinión individual esta muy influenciada por su entorno, utilizando un hamiltoniano análogo al propuesto por Ising se puede modelizar este comportamiento interpretando que la situación de mínima energía de un individuo es aquella en la que comparte la opinión de sus contactos

$$e^{-(E_\nu - E_\mu)/T} \rightarrow e^{-S\sigma_i/T}$$

Donde  $S$  representa la opinión mayoritaria de los contactos y se define como

$$S = \left( \sum_{j \in \text{contactos}_i} \sigma_j \right) \sigma_i$$

Esto se traduce en que ahora la situación de menor energía para el individuo se corresponde con estar alineado con la opinión mayoritaria de sus vecinos. El parámetro asociado a la temperatura en el modelo de Ising cobra un nuevo significado representado ahora la influenciabilidad de cada individuo, o lo que es lo mismo, la fuerza de este para oponerse a una opción contraria en su entorno. Por lo que una  $T$  baja implica un individuo altamente influenciable por sus vecinos y una  $T$  alta un individuo menos condicionado por sus vecinos.

## 2. Primera aproximación. Red cuadrada 2D.

En esta primera aproximación se considera un conjunto de  $N$  individuos cada uno enlazado con sus cuatro vecinos más cercanos. Analogamente al modelo de Ising se observa un comportamiento de relajación del sistema hacia el estado de menor energía, figura 2. Dicho estado final es altamente dependiente del parámetro  $T$ .

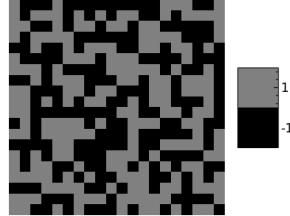


Figura 1: Ejemplo de población aleatoria de  $N \times N$  individuos.

### 2.1. Algoritmo de Metrópolis. Evolución del sistema.

Para asegurar que el sistema evolucione de acuerdo al hamiltoniano propuesto se utilizará el algoritmo de metrópolis (definido en los códigos). A continuación, se muestra una situación típica de la evolución del sistema al aplicar este algoritmo.

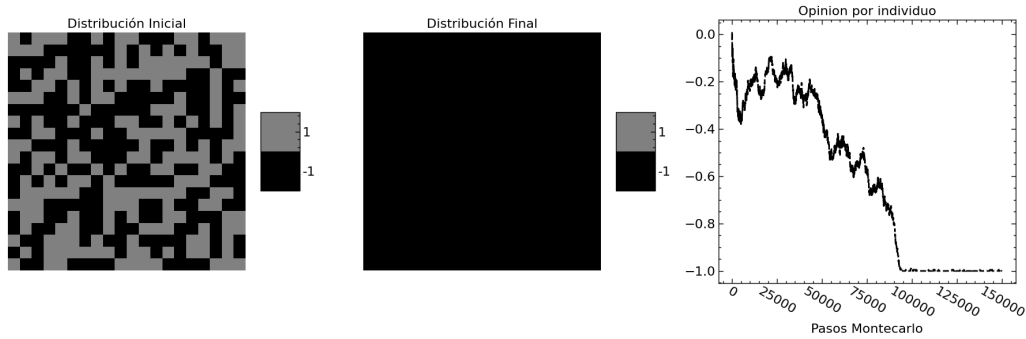


Figura 2: El sistema evoluciona hasta alcanzar el equilibrio donde todos comparten la misma opinión.  $N = 20$ ;  $T = 0,5$

Para optimizar la eficiencia del algoritmo es importante conocer los pasos de montecarlo típicos para que el sistema alcance el equilibrio, en caso de que el sistema tenga un equilibrio estable distinto de cero.

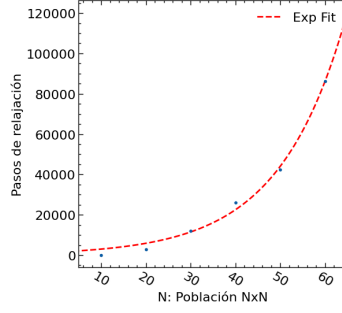


Figura 3: Estimación de los pasos necesarios para alcanzar el equilibrio termodinámico.

Se puede observar una dependencia exponencial en función del tamaño de la población.

## 2.2. Opinión por individuo en función de $T$ .

A continuación, se presenta un estudio de la dependencia de la opinión por individuo con la influenciabilidad. La opinión media se ha definido análogamente a la magnetización de un material ferromagnético, esto es

$$m = \frac{1}{N} \sum \sigma_i$$

Se utilizan dos poblaciones preparadas con un cierto sesgo inicial a favor o en contra y se dejan evolucionar hasta que alcanzan el equilibrio termodinámico.

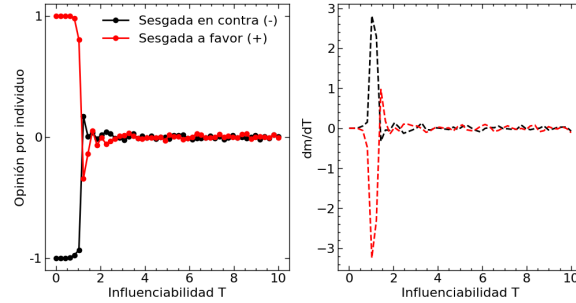


Figura 4: Opinión media por individuo (Izq). Derivada de la opinión media con respecto a  $T$  (Dch), esta derivada se utilizará para estimar la temperatura/influenciabilidad crítica  $T_c$ .

Como se puede ver la opinión por individuo en el equilibrio depende altamente de la influenciabilidad. En la figura superior, 4, se distinguen claramente dos regímenes,  $T < T_c$  estado global en el que el sistema presenta un opinión media no nula y  $T > T_c$  en el que el sistema tiene un opinión promedia por individuo nula.

## 2.3. Correlación.

La opinión de un individuo esta influenciada por toda la población, pero, además, existe una influencia entre individuos vecinos todavía más notable. Si se toma un individuo al azar y este, por

ejemplo, tiene una opinión positiva será energeticamente favorable (más probable) que sus vecinos tengan también una opinión positiva. Esto se da incluso en el régimen  $T > T_c$ , ya que aunque el promedio de toda la población sea cero (i.e. opiniones favorables y en contra se contrarrestan), seguirá siendo favorable la aparición de cúmulos de población con la misma opinión.

La función de correlación se define como

$$\Gamma(i) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

Una primera aproximación consistiría en trabajar únicamente en el régimen  $T > T_c$ , ya que en ese rango se cumple que el promedio estadístico de la opinión de un individuo es nulo,  $\langle \sigma_k \rangle \approx 0$ , por lo que el segundo término de la ecuación anterior es nulo facilitando el cálculo de la correlación.

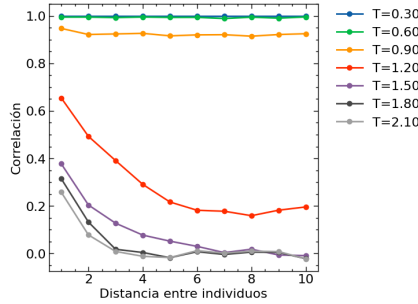


Figura 5: Correlación en una población de 21x21 individuos en función de la temperatura.

Como se puede observar en la figura 5, la correlación depende de la temperatura. Para  $T \ll T_c$  se encuentran totalmente correlacionados,  $\Gamma = 1$ , pues todo el sistema está alineado. Mientras que según aumenta  $T$  la correlación disminuye aunque no se convierte en una delta de Dirac por lo que aunque el promedio de las opiniones sea nulo existen cúmulos de población alineados. El tamaño de dichos cúmulos (distancia de correlación) para  $T > T_c$  se puede aproximar con un decaimiento exponencial de la forma

$$\Gamma(i) \approx \exp(-d_{i,j}/\epsilon)$$

Siendo  $\epsilon$  la distancia de correlación y  $d_{i,j}$  la distancia normalizada entre individuos. Este parámetro representa el tamaño promedio de los subconjuntos de población que comparten la misma opinión. Además, teniendo en cuenta que en una red de 2D el exponente crítico es  $\nu = 1$  se puede estimar la influenciabilidad crítica usando

$$\epsilon \approx \frac{1}{(T - T_c)^\nu}$$

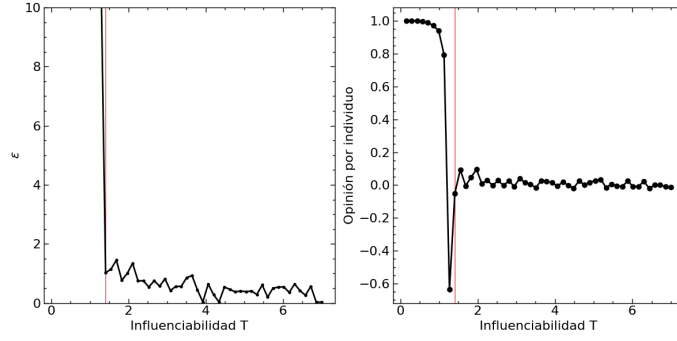


Figura 6: Distancia de correlación en función de  $T$  (Izq). Opinión por individuo en función de  $T$  (Dch). En rojo la  $T_c$  obtenida anteriormente usando  $\frac{dm}{dT}$  se observa una buena predicción de  $T_c$  a partir de  $\epsilon$  aún teniendo en cuenta las aproximaciones usadas. Población de 21x21 individuos.

A continuación se muestra, de una manera visual, la representación de dicho comportamiento.

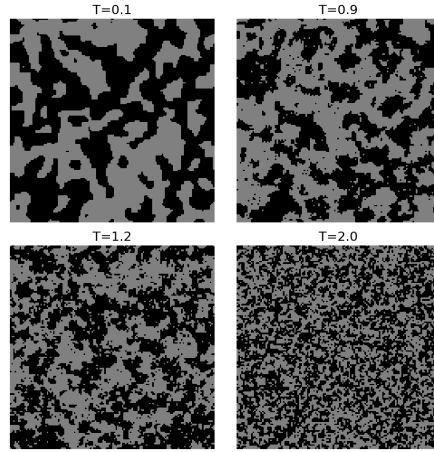


Figura 7: Ejemplo de la dependencia de  $\epsilon$  con  $T$  los cúmulos decrecen segun  $T$  aumenta, es decir, disminuye la correlación. Población de 128x128 individuos.

### 3. Vecinos aleatorios.

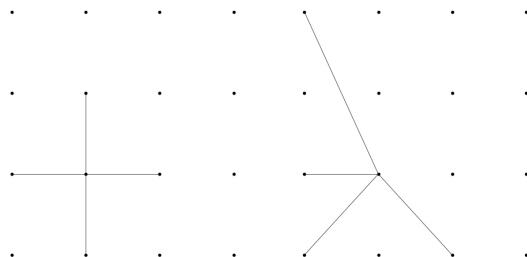


Figura 8: Primeros vecinos (Izq). Vecinos Aleatorios (Dch).

Hasta ahora, se ha trabajado con una población en la que cada individuo estaba conectado únicamente a sus 4 vecinos más cercanos. Ahora, se implementará una red de contactos distribuidos aleatoriamente de forma que cada individuo puede tener un número  $\nu$  de contactos posicionados en cualquier lugar de la red como se ejemplifica arriba, figura 8.

#### 3.1. Número de contactos aleatorios homogéneo.

Primero se comprobará la diferencia con el modelo a primeros vecinos en el caso de que los 4 contactos sean aleatorios y no adyacentes.

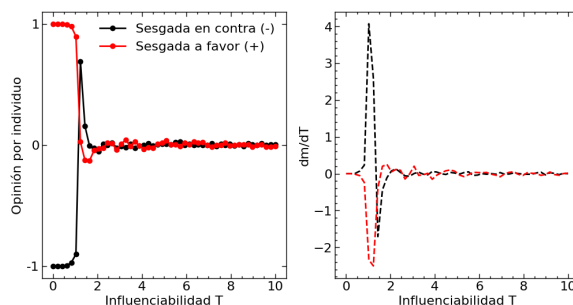


Figura 9: Opinión media por individuo (Izq). Derivada de la opinión media con respecto a  $T$  (Dch).

Como se observa en la figura de arriba se obtiene exactamente el mismo comportamiento y numéricamente se predice la misma temperatura crítica.

##### 3.1.1. Distancia de correlación.

Observando esta figura se puede ver como la correlación existente en el modelo anterior ha desaparecido. Esto se debe a que ya no es cierto que la opinión de un individuo concreto influya a los de su alrededor porque es altamente probable que este esté desconectado de su entorno inmediato.

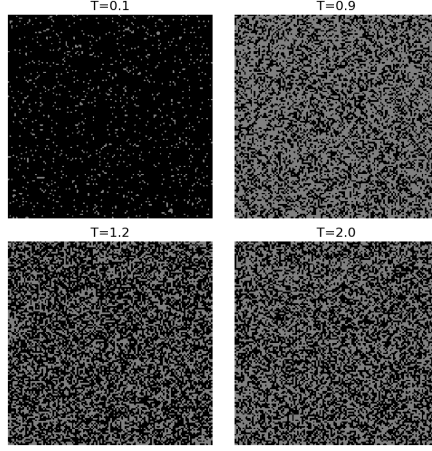


Figura 10: Cúmulos típicos para una población con contactos aleatorios. Población de 128x128 individuos.

$T_c$  en función de  $\nu$ .

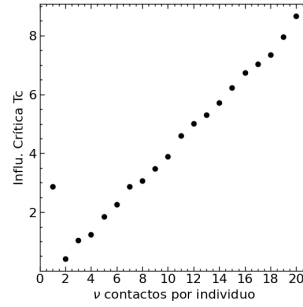


Figura 11: Influenciabilidad crítica en función del número de contactos por individuo. Población con  $N \times N$  individuos  $N = 20$ .

Como se puede observar, cuantos más contactos tenga un individuo más probable es que este se alinee con la opinión mayoritaria de estos. Esto se debe al hecho de que existe un sesgo inicial en la población por lo que al aumentar el número de contactos aumenta la cantidad de opiniones iguales al sesgo inicial. Una manera interesante de ampliar este trabajo sería trabajar con una población que no tenga un sesgo inicial o, más realista, que un individuo pueda decidir tener un grupo de contactos de opiniones variadas.

### 3.2. Distribución gaussiana del número de contactos.

Si se pretende hacer un modelo más aproximado de la realidad hay que tener en cuenta que no todos los individuos de una población tienen el mismo número de contactos. Una buena aproximación consiste en utilizar una distribución gaussiana ya que, de esta manera, la mayoría de



individuos tendrán un número de contactos comprendido dentro del rango  $\mu \pm \sigma$  donde  $\mu$  es la media de contactos y  $\sigma$  la desviación típica.

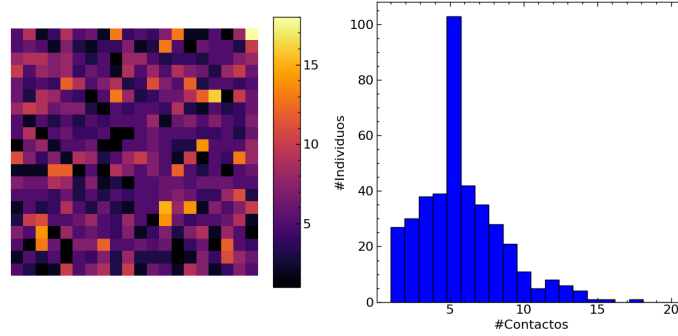


Figura 12: Ejemplo de como se distribuyen los contactos utilizando una distribución gaussiana de media 5 y desviación típica 4. Mapa de calor del número de contactos en la red (Izq). Histograma de la distribución (Dch).

### 3.2.1. $T_c$ en función de la desviación típica.

Un análisis interesante consiste en ver como afecta el aumento de la desviación típica pues de esta forma se puede variar el porcentaje de individuos de la población que tendrá un gran número de contactos frente al número de individuos que tienen un número medio de contactos.

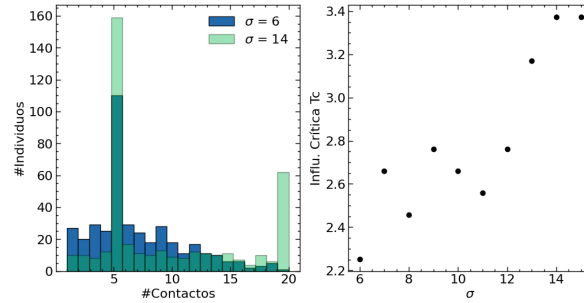


Figura 13: Ejemplo de la distribución de contactos para dos  $\sigma$  distintas (Izq).  $T_c$  en función de la desviación típica. (Dch).

Se observa un comportamiento similar al obtenido en la sección anterior, figura 11, con la salvedad de que ahora aparece un ruido extra debido a que el número de contactos depende del individuo afectando unos más que otros.

### 3.2.2. Distancia de correlación.

Observando esta figura se puede ver como la correlación existente en el modelo de primeros vecinos ha desaparecido.

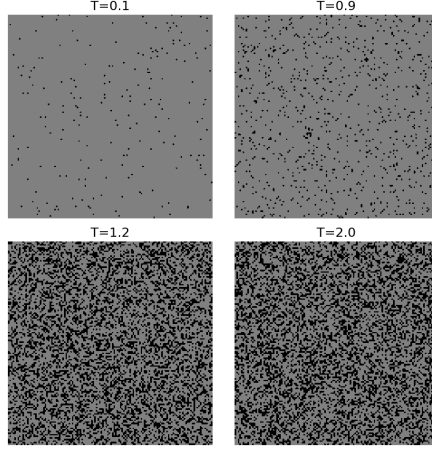


Figura 14: Cúmulos típicos para una población con contactos aleatorios repartidos de acuerdo a una distribución gaussiana. Población de 128x128 individuos.

## 4. Dinámica de contactos.

A continuación, se dará un paso más en la búsqueda de un modelo que se asemeje todavía más a una población real. Para esto, se introduce un grado de libertad más de forma que un individuo podrá cambiar su opinión, en función de la influencia de sus contactos, igual que antes y, además, podrá elegir si eliminar uno de sus contactos si este tiene una opinión distinta a la suya. En el caso de eliminar un vecino elegirá un nuevo contacto de forma aleatoria.

### 4.1. $T_c$ en función de $\nu$ .

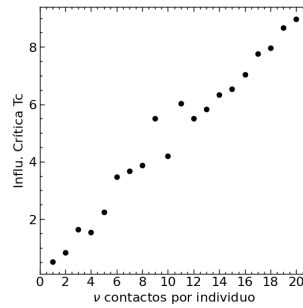


Figura 15: Influenciabilidad crítica en función del número de contactos por individuo. Población con  $N \times N$  individuos  $N = 20$ .

Se observa la misma dependencia proporcional que la obtenida anteriormente, figura 11, pero ahora aparece una cierta uniformidad que tiende a elevar el valor de  $T_c$  para un cierto  $\nu$  dado. O lo que es lo mismo, al elegir el individuo de forma consciente eliminar los contactos de opinión

contraria esta aumentando la influenciabilidad del sistema que ahora es más propenso a estados globales de opiniones idénticas.

#### 4.1.1. Distancia de correlación.

De nuevo se observa que se pierde la noción de correlación en el sistema.

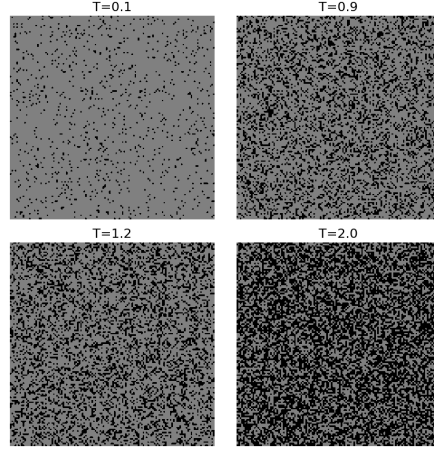


Figura 16: Cúmulos típicos para una población con contactos aleatorios. Población de 128x128 individuos. Población de 128x128 individuos.

#### 4.1.2. $T_c$ en función de la desviación típica.

Si se repite el mismo estudio de la desviación típica se observa un resultado análogo al obtenido para el análisis en función de  $\nu$  añadir la posibilidad de eliminar vecinos de opinión contraria aumenta la sensibilidad del sistema a caer en estados con la misma opinión.

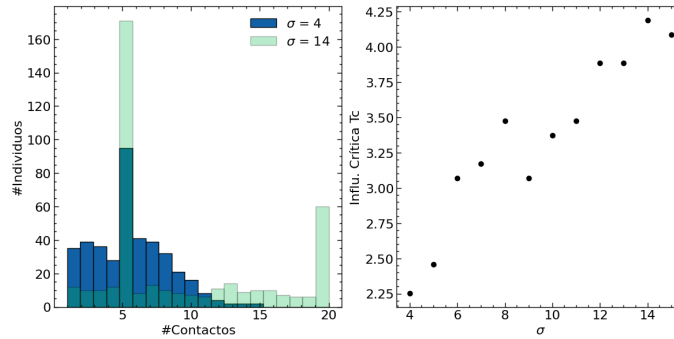


Figura 17: Ejemplo de la distribución de contactos para dos  $\sigma$  distintas (Izq).  $T_c$  en función de la desviación típica. (Dch).

#### 4.1.3. Distancia de correlación.

Una vez más, no aparece correlación en el sistema.

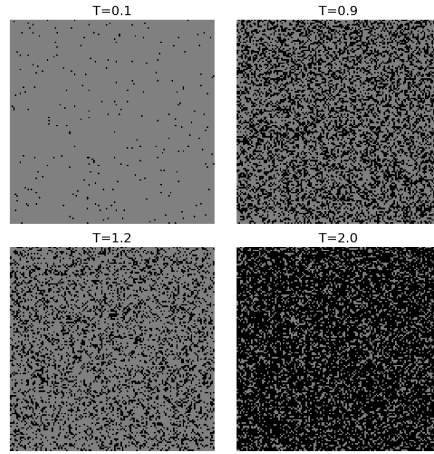


Figura 18: Población de 128x128 individuos.