

Metody Numeryczne - Zadanie XXI

Mateusz Kamiński

December 2025

1 Wstęp

Celem zadania było wyznaczenie wykładnika Lapunowa dla odwzorowania trójkątnego zdefiniowanego wzorem:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2rx_n & \text{dla } x_n < \frac{1}{2} \\ 2r(1-x_n) & \text{dla } x_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dla parametrów $r \in \left\{\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right\}$.

2 Opis teoretyczny

Wykładnik Lapunowa dla odwzorowania jednowymiarowego definiuje się jako:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|f'(x_n)|$$

W przypadku odwzorowania trójkątnego, moduł pochodnej wynosi:

$$|f'(x)| = \left|\frac{d}{dx}(2rx)\right| = 2r \quad \text{oraz} \quad |f'(x)| = \left|\frac{d}{dx}(2r(1-x))\right| = |-2r| = 2r$$

Pochodna nie istnieje jedynie w punkcie $x = \frac{1}{2}$. Stała wartość modułu pochodnej upraszcza wzór analityczny do postaci:

$$\lambda_{\text{analy}} = \ln(2r)$$

3 Implementacja

Do symulacji numerycznej przyjęto liczbę iteracji $N = 100\,000$. Punkt startowy ustalono na $x_0 = 0.123456789$.

```
1 import numpy as np Python
2
3 num = np.float64
4
5 def expected_Lapunow(r: num):
6     return np.log(2*r)
7
8 def recurrive_function(x: num, r: num):
9     return 2*r*x if x < 0.5 else 2*r*(1-x)
10
11 def Lapunow(x: num, r: num, N: num = 100000):
12     total = 0.0
13     for _ in range(N):
14         x = recurrive_function(x, r)
15         total += np.log(abs(2 * r)) # moduł pochodnej
16
17     return total / N
18
19 def main():
20     r_values = [3/4, 7/8, 15/16, 31/32]
21
22     for r in r_values:
23         l = Lapunow(0.5, r)
24         print(f"r={r}, lambda ~ {l:.5f}, lambda_analytical =
25             {expected_Lapunow(r):.5f}")
26
27 if __name__ == "__main__":
28     main()
```

4 Wyniki

Poniższa tabela przedstawia porównanie uzyskanych wartości numerycznych z rozwiązaniem analitycznym.

Parametr r	λ (numerycznie)	λ (analitycznie)
0.75 ($\frac{3}{4}$)	0.40547	0.40547
0.875 ($\frac{7}{8}$)	0.55962	0.55962
0.9375 ($\frac{15}{16}$)	0.62861	0.62861
0.96875 ($\frac{31}{32}$)	0.66140	0.66140