Metody Numeryczne - Zadanie VIII

Mateusz Kamiński

December 2025

1 Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było zaimplementowanie interpolacji Lagrange'a w celu wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego dla zadanej funkcji.

2 Opis

2.1 Funkcja

Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{1+5x^2}.$$

W zadaniu mamy wyznaczyć wartości funkcji w punktach węzłowych

$$x_i = -\frac{7}{8},\ -\frac{5}{8},\ -\frac{3}{8},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}.$$

Następnie na podstawie tych punktów i wartości funkcji w węzłach skonstruujemy wielomian interpolacyjny Lagrange'a w przedziale $[-1.25, 1.25]$

2.2 Wzór bazowy

Wielomian interpolacyjny w postaci Lagrange'a ma postać:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \ell_j(x)\, f_j,$$

gdzie $\ell_j(x)$ są wielomianami bazowymi Lagrange'a:

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

W szczególności:

$$a_0 = P(0) = \sum_{j=1}^{n} \ell_j(0)\, f_j.$$

2.3 Rekurencja do wyznaczania kolejnych współczynników

Po odjęciu wyrazu wolnego otrzymujemy funkcję:

$$\frac{P(x) - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1},$$

która sama jest wielomianem stopnia o 1 mniejszego. Jej wartości w punktach węzłowych wynoszą:

$$\frac{f_i - a_0}{x_i}.$$

Korzystając ponownie z interpolacji Lagrange'a, możemy wyznaczyć kolejny współczynnik a_1:

$$a_1 = \sum_{j=0}^{n} \ell_j(0) \left(\frac{f_j - a_0}{x_j} \right).$$

Powtarzając ten proces, otrzymujemy rekurencję dla wszystkich współczynników:

$$a_k = \sum_{j=0}^{n} \ell_j(0)\, f_j^{(k)},$$

gdzie:

$$f_j^{(0)} = f_j, \qquad f_j^{(k)} = \frac{f_j^{(k-1)} - a_{k-1}}{x_j}.$$

Metoda działa w czasie $O(n^2)$ i pozwala wyznaczyć wszystkie współczynniki wielomianu bez rozwiązywania układu równań liniowych.

2.4 Schemat Hornera

Po wyznaczeniu współczynników wartości wielomianu obliczano za pomocą schematu Hornera:

$$P(x) = (\cdots((a_{n-1}x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \ldots)x + a_0.$$

3 Implementacja

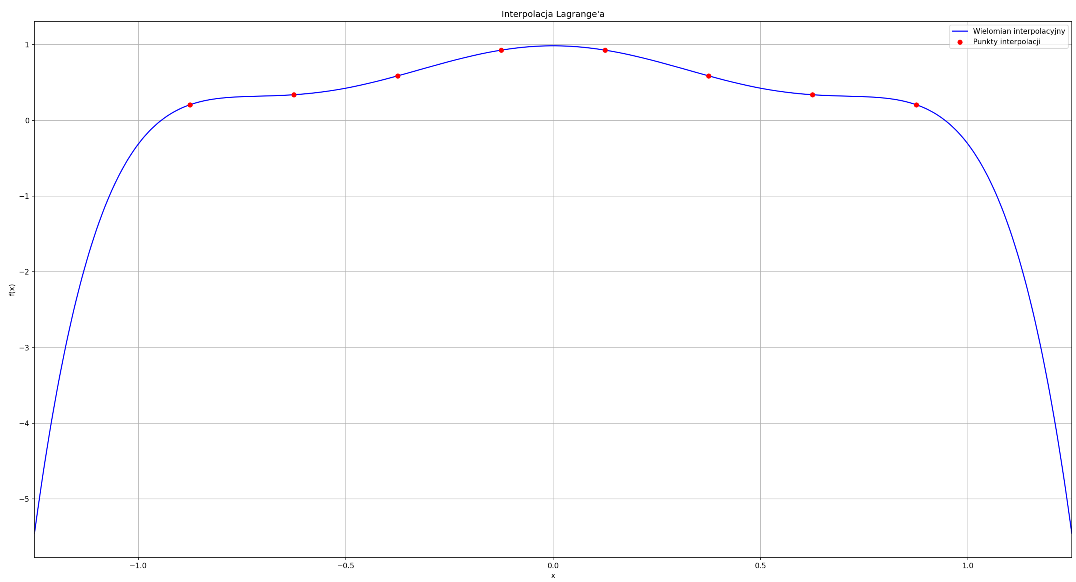
```
import numpy as np
from numpy.typing import NDArray
import matplotlib.pyplot as plt

vector = NDArray[np.float64]
matrix = NDArray[np.float64]
num = np.float64

def l_j(x_val: num, x: vector, j: int) -> num:
    n = len(x)
    numerator: num = np.float64(1.0)
    denominator: num = np.float64(1.0)

    # 0...j-1
    for k in range(0, j):
        numerator *= x_val - x[k]
        denominator *= x[j] - x[k]

    # j+1...n-1
    for k in range(j + 1, n):
        numerator *= x_val - x[k]
        denominator *= x[j] - x[k]

    return numerator / denominator

def coefficients(x: vector, f: vector) -> matrix:
    n = len(x)

    lj = np.zeros(n, dtype=num)
    for j in range(n):
        lj[j] = l_j(0, x, j)

    # współczynniki
    a = np.zeros(n, dtype=num)
    f_k = f.copy()

    for k in range(n):
        a[k] = np.sum(lj * f_k)

        for j in range(n):
            f_k[j] = (f_k[j] - a[k]) / x[j]

    return a

def P(x: num, a: vector) -> num:
    # Wyliczenie wielomianu schematem hornera
    val = 0.0
    for coeff in reversed(a):
```

```python
        val = val * x + coeff

    return val

def f_x(x: num) -> num:
    return 1.0 / (1 + 5 * x * x)

def main():
    x: vector = np.array([-7/8, -5/8, -3/8, -1/8, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8],
        dtype=num)
    n = len(x)
    f: vector = np.zeros(n, dtype=num)

    for i in range(n):
        f[i] = f_x(x[i])

    coeff = coefficients(x, f)
    print(coeff)

    x_plot = np.linspace(-1.25, 1.25, 1000)
    y_plot = np.array([P(x, coeff) for x in x_plot])

    plt.plot(x_plot, y_plot, label="Wielomian interpolacyjny", color="blue"
        )

    plt.scatter(x, f, color="red", label="Punkty interpolacji", zorder=5)

    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("f(x)")
    plt.title("Interpolacja Lagrange'a")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.xlim(-1.25, 1.25)
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    main()
```

4 Wyniki

Wektor współczynników **a** wielomianu interpolacyjnego:

$$a_0 = 0.9843,$$
$$a_1 = 0.0000,$$
$$a_2 = -3.7453,$$
$$a_3 = 0.0000,$$
$$a_4 = 7.2215,$$
$$a_5 = 0.0000,$$
$$a_6 = -4.7746,$$
$$a_7 = 0.0000.$$



Rysunek 1: Wyniki interpolacji Lagrange'a.