

Stage 2019: Introduction à la physique non-linéaire et aux attracteurs étranges

Maxime Langlet

Mars 2019

1 Introduction

Ce rapport est le fruit de mon stage réalisé à l'Institut Royal de météorologie, sous la guidance de Mr. Vannitsem. Le but du stage est purement pédagogique et destiné à un élève de troisième bachelier, ce pour quoi certaines notions abordées et certaines des étapes avancées ne seront pas revues en détail, mais plutôt résumées.

Dans un premier temps, il sera présenté un bref rappel théorique des systèmes dynamiques, des attracteurs pour ensuite parler des attracteurs étranges et leurs propriétés intéressantes. Par la suite, nous commencerons l'analyse numérique du système dynamique étudié, qui est l'attracteur de Lorenz. Nous parlerons aussi de la sensibilité aux conditions initiales en donnant un exemple, et ensuite nous aborderons les notions de stabilité dans un attracteur.

2 Rappel Théorique

2.1 Système dynamique

En mathématiques, en chimie ou en physique, un système dynamique décrit l'évolution d'une ou plusieurs données respectant une loi, qui caractérise l'évolution du système. Plusieurs exemples sont donnés dans l'ouvrage mis à disposition "L'ordre dans le Chaos" de P.Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, ceux-ci sont :

- La boussole
- La convection de Rayleigh-Bénard
- La réaction de Belousov-Zhabotinsky

D'autres exemples plus communs sont aussi des systèmes dynamiques comme le mouvement des planètes autour d'un système solaire.

Ce rapport fait beaucoup usage de notions de dynamique discrète, détaillons ce concept. Un système dynamique discret est souvent décrit par une application bijective (ou non-bijective) $\Phi : \Theta \rightarrow \Theta$ de l'espace des phases sur lui-même. L'espace des phases est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré, par exemple pour un système à n degré de liberté, un état complet est un vecteur à n composantes.

Étant donné une condition initiale x_0 de l'état du système, le premier état est alors :

$$x_1 = \Phi(x_0)$$

Le second est ensuite :

$$x_2 = \Phi(x_1) = \Phi \circ \Phi(x_0)$$

En itérant on trouve que :

$$x_n = \Phi^n(x_0)$$

On remarque une propriété de remontée dans le temps, pour ceci il suffit d'inverser l'application Φ en l'appliquant à notre solution finale, et ceci nous donnera la condition initiale. Attention que cette propriété n'est valable que pour des systèmes non dissipatifs. Pour des systèmes dissipatifs, la remontée dans le temps aura pour effet d'amplification et de ce fait présentera une solution tendant vers l'infini. Cependant, on peut regarder comment des perturbations (dans le système linéarisé de l'atmosphère par exemple) remontent le temps.

2.2 Les attracteurs et le Chaos

Une manière simple d'imaginer un attracteur est de considérer un système dissipatif, a priori quelconque, celui-ci supposé déterministe car décrit par

$$\frac{d\vec{X}}{dt}(t) = F(\vec{X}(t))$$

Ce système contient une contrainte μ . Logiquement, étant donné le caractère dissipatif du système, les trajectoires vont converger vers un **Attracteur**. Il est aussi nécessaire de préciser qu'un attracteur possède ce qu'on appelle un bassin d'attraction, n'importe quelles valeurs initiales pour n'importe quels attracteurs ne vont pas forcément toutes converger, sauf si ces conditions initiales sont dans ce bassin d'attraction.

Il existe 3 types d'attracteurs. Le *point attracteur* qui est en fait un état stationnaire, un *comportement périodique* dans le temps et le dernier qui est le *Tore T^r* pour r supérieur à 2 qui correspond à un régime quasi-périodique.

Un attracteur possède aussi des propriétés étonnantes comme par exemple la contraction des aires. Illustrons ce principe avec un attracteur simple qui est le pendule entrevenu. À partir de conditions initiales appartenant au bassin d'attraction, le comportement de l'aire contenant toutes ces conditions initiales (tous ces points) aura tendance à se contracter. En dimension supérieure n , nous parlons de contractions des volumes, respectant la relation suivante

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i}$$

Plusieurs conséquences se déduisent de cette propriété, comme par exemple l'oubli des conditions initiales, comme toutes les trajectoires mènent à la même courbe C ou surface S , ainsi que la non-intersection des trajectoires des phases. La dimension des attracteurs est particulière, par exemple pour notre pendule entrevenu, la dimension n'est pas la même que celle de l'espace des phases car une aire se contracte en une courbe. En généralisant à n dimensions, nous avons alors $d < n$.

La théorie de Floquet apporte une précision sur la stabilité de la solution. L'idée est la suivante, pour une solution périodique d'un flot autonome non linéaire de période T , on induit une petite perturbation autour d'une condition initiale, et celle-ci est transformée après la période T de la manière suivante :

$$\vec{X}_0 + \delta \vec{X} \rightarrow \vec{X}_0 + M \delta \vec{X}$$

où M est la matrice de Floquet $m \times m$. L'étude des valeurs propres de M nous donnera l'information sur la stabilité de la solution. Par exemple, si toutes les valeurs propres sont à l'intérieur du cercle unité du plan complexe, la solution est stable. Mais en modifiant le paramètre μ nous changeons la période de la solution et de ce fait les valeurs propres de M , et si maintenant ces valeurs propres sont en dehors de ce cercle unité, la solution ne sera plus stable. Voici un tableau représentant les transitions résultant de la perte de stabilité linéaire :

Croisement	Bifurcation	Phénomène
(+1)	noeud-col	intermittence 1
(-1)	sous-harmonique	cascade sous-harmonique, intermittence 3
$(\alpha \pm i\beta)$	Hopf	Quasi-périodicité, intermittence 2

N'ayant pas traité des intermittences durant ce stage, je renvoie le lecteur se documenter dans le livre de référence énoncé plus tôt.

Maintenant, attardons-nous un peu sur le concept du chaos. Aucune définition n'étant réellement établie par la communauté scientifique, on admet qu'un régime est chaotique si son spectre de puissance comporte une partie continue, indépendamment de la présence éventuelle de quelques raies. Nous perdons alors la mémoire du signal par rapport à lui-même. Le chaos se caractérise par son imprédictibilité, les prédictions parfaites sont impossibles autant d'ordre théorique que pratique. De plus, un système chaotique présente une sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.), ce qui veut dire qu'une infime perturbation des données initiales amène des trajectoires diamétralement opposées.

Les **Attracteurs Étranges** sont des attracteurs apériodiques, respectant les mêmes propriétés que les attracteurs précédents avec la particularité que ceux-ci sont sensibles aux conditions initiales (S.C.I.). Nous avons déjà précisé qu'un attracteur ne peut avoir la même dimension que son espace de phases, mais aussi pour que la S.C.I. soit possible, il faut que $d > 2$ où d est la dimension de l'attracteur. Ce qui implique que pour un espace de phases à 3 dimensions, l'attracteur possède une dimension non-entière $2 < d < 3$, que l'on dit fractale. C'est pour rappeler ce caractère particulier que nous les avons appelé "*Attracteurs Étranges*". Quelques exemples d'attracteurs étranges sont : l'attracteur de Hénon où encore l'attracteur de Lorenz que nous allons étudier par la suite.

3 Modèle de Lorenz

3.1 Dérivation des équation

Le modèle de Lorenz est en fait une simplification du phénomène de Rayleigh-Bénard, dans l'approximation de Boussinesq les équations sont :

$$\begin{aligned}
 Pr^{-1} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) &= -\nabla p + \theta \vec{\lambda} + \nabla^2 \vec{v} \\
 \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta &= Ra \vec{\lambda} \cdot \vec{v} + \nabla^2 \theta
 \end{aligned}$$

où $Pr = \frac{\nu}{D_T}$ et $Ra = \frac{\rho_0 g \alpha d^3}{\eta D_T} \delta T$

On remarque que ces équations ne sont pas linéaires notamment en $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \nabla \theta$.

En prenant connaissance du phénomène R.B., on sait que des rouleaux de convection apparaissent au-delà de l'instabilité R.B., et que ceux-ci sont tous parallèles en longueur. Le vecteur vitesse est perpendiculaire à l'axe de chaque rouleau, il y a aussi invariance par translation le long de la direction de cet axe. Nous avons 2 coordonnées d'espace : z (la hauteur) et x (la direction perpendiculaire aux rouleaux). On peut décomposer les champs de vitesses en 2 composantes, une parallèle et une perpendiculaire aux axes notés $u(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$, respectant la relation

$$u_x + w_z = 0$$

par l'équation d'incompressibilité.

En introduisant la fonction de courant de Lagrange $\Psi(x, z, t)$, en respectant les conditions aux bords et en effectuant les simplifications souhaitées nous tombons sur le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} &= Pr(Y - X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{cases}$$

où $b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2}$ et $r = \frac{q^2}{(\pi^2 + q^2)^3}$. La démonstration complète étant longue et fastidieuse, je me suis épargné les détails et encourage le lecteur à aller la voir dans le livre de référence.

3.2 Points Stationnaires

Les points stationnaires sont les points tels que la dérivée par rapport au temps est nulle, c-à-d $\frac{d\vec{X}}{dt} = 0 = f(\vec{X}_S, t)$, autrement dit ce sont ceux qui ne varient pas en fonction du temps.

$$\begin{cases} 0 &= Pr(Y - X) \\ 0 &= -XZ + rX - Y \\ 0 &= XY - bZ \end{cases}$$

On voit une première solution évidente, qui est le point $\vec{X}_S = (0, 0, 0)$. La deuxième solution se trouve facilement en résolvant le système, on voit rapidement que $X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)}$, que $Z = (r-1)$. On a alors 2 autres points qui sont $\vec{X}_S = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Regardons maintenant le comportement au voisinage des points stationnaires :

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{X}_S}{\partial t} = f(\vec{X}, \lambda) - f(\vec{X}_S, \lambda) \quad (1)$$

$$= f(\vec{X}_S, \lambda) + \frac{\partial f(\vec{X}_S, \lambda)}{\partial X} (\vec{X} - \vec{X}_S) - f(\vec{X}_S, \lambda) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \delta \vec{X}}{\partial t} = \frac{\partial f(\vec{X}_S, \lambda)}{\partial X} \delta \vec{X} \quad (3)$$

Où, à l'étape 2 nous avons effectué un développement de Taylor autour de \vec{X}_S . On remarque que le membre droit final est alors une matrice Jacobienne. Rappelons-nous de la théorie de Floquet, le calcul des valeurs propres déterminera l'instabilité de la solution en fonction d'un paramètre que nous ferons varier. La relation est alors la suivante :

$$\frac{\partial \delta \vec{X}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -Pr & Pr & 0 \\ -Z + r & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{bmatrix} \delta \vec{X}$$

En évaluant aux points stationnaires, on obtient les 2 matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} -Pr & Pr & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} -Pr & Pr & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{bmatrix}$$

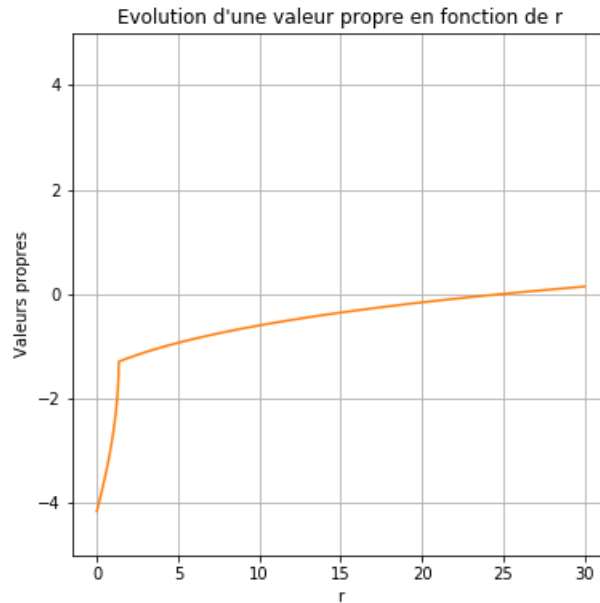
Une expression analytique pour les valeurs propres de ces 2 matrices ne peut être obtenue, du moins je n'ai pas réussi à en trouver une. Il faut donc procéder au cas par cas. Nous allons nous aider d'une résolution numérique pour nous faciliter la tâche lorsque nous allons itérer le calcul pour plusieurs valeurs de r . Dans `python`, une librairie nous permet de faire ceci facilement avec une commande sur une matrice. Comparons les valeurs numériques et les valeurs calculées analytiquement.

Dans le cas de la matrice du point stationnaire $X_S = (0, 0, 0)$, avec comme paramètre $Pr = b = r = 0$, nous avons comme valeurs propres $(0, 0, -1)$, et numériquement $(0, 0, -1)$. Avec $Pr, r=0$ et $b=1$ on trouve $(0, -1, -1)$, et numériquement $(0, -1, -1)$. Pour les points stationnaires $X_S = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ nous effectuons la même comparaison et nous remarquons que toutes les valeurs propres concordent.

Cependant, étant donné que cette méthode est une approximation numérique, les valeurs propres sont parfois un peu différentes. Par exemple, en itérant sur les paramètres Pr, b et r des points stationnaires $X_S = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, les valeurs propres calculées par le programmes sont quelques fois sous cette forme $[-4.93038066e - 32 + 0.j, -2.00000000e + 00 + 0.j, -0.00000000e + 00 + 0.j]$. Ceci peut s'expliquer par un "manque" de précision de la machine ou de la méthode, et que ce résidu apparaît de cette imprécision, de plus un facteur 10^{-32} ne viendra pas influencer dans nos prévisions. Nous en concluons que la méthode numérique nous procurera des prévisions totalement admissibles.

3.3 Instabilité et calcul de r

En utilisant la même algorithmique que précédemment sur les valeurs propres, en fixant $Pr = 10$, $b = 8/3$ et en itérant sur plusieurs valeurs de r (de 0 à 30 par pas de 0.0001), nous obtenons le graphique suivant :



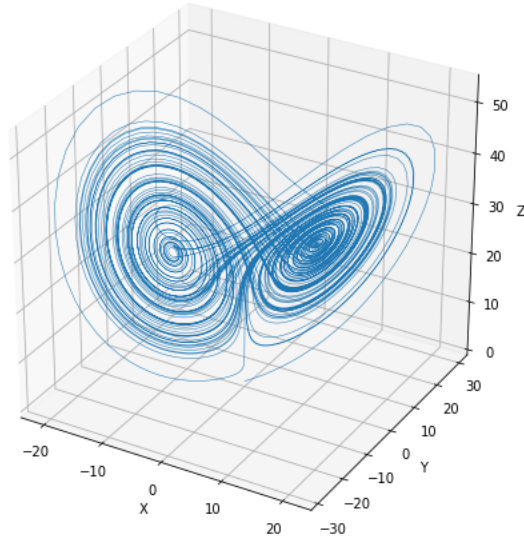
On remarque qu'aux alentours de $r \approx 25$, la valeur propre s'annule. C'est exactement pour cette valeur-là de r où notre système devient chaotique.

Il est facile de trouver la valeur de r de transition, il suffit de regarder où les valeurs propres changent de signes et de trouver le r correspondant. Nous n'aurons pas une précision parfaite sur cette valeur de r car nous l'avons discrétisée par la méthode utilisée. Au mieux, nous aurons une précision de 0.0001 sur cette valeur de transition, de plus une imprécision sur la méthode numérique est à rajouter. On a alors $r_t = 24.7368$. En comparant avec la littérature, nous sommes proches de la valeur attendue, par exemple dans le livre de référence "L'ordre dans le chaos", la valeur donnée est $r = 24,74$.

3.4 Résolution de l'attracteur de Lorenz

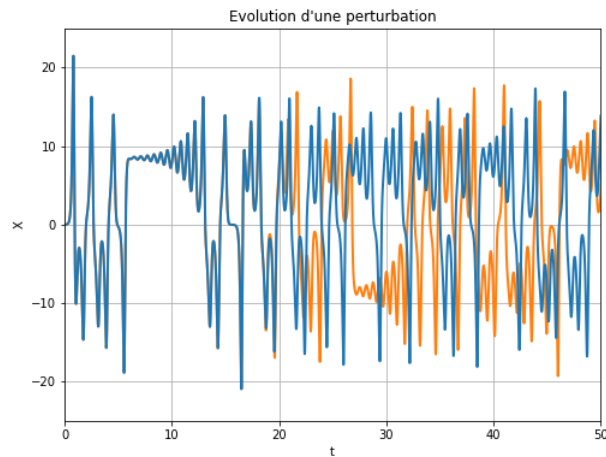
Dans cette section et les suivantes nous allons simuler par différentes méthodes numériques, les équations de Lorenz et essayer d'en tirer un maximum d'informations. Les méthodes seront Runge-Kutta 4 (RK4) et

la méthode d'Euler. Commençons par se donner une idée générale de la représentation de l'attracteur de Lorenz. Voici l'attracteur pour les valeurs $Pr = 10$, $b = 8/3$ et $r = 28$:



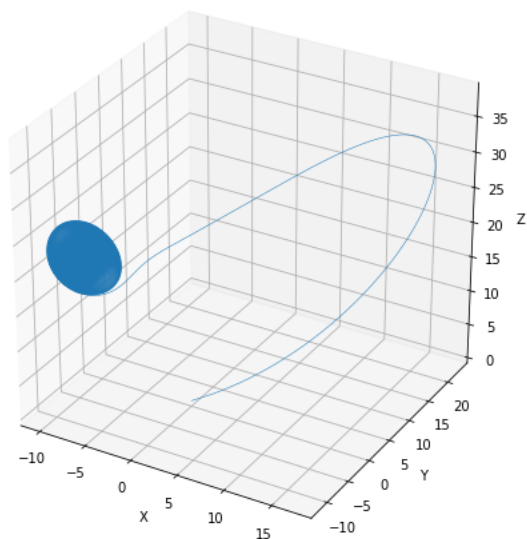
La méthode utilisée pour cette simulation est la méthode d'Euler. Dans un premier temps, nous n'utiliserons que cette méthode car la comparaison entre les méthodes n'est pas nécessaire, celles-ci nous donnerons une représentation tout à fait équivalente.

Nous avons choisi une valeur de r au-delà de la valeur de transition, cela implique que notre système présente un comportement chaotique et est donc sensible aux conditions initiales. Pour visualiser ceci, regardons l'évolution de X où on aurait induit une toute petite perturbation ($\delta X = 0.00001$) :

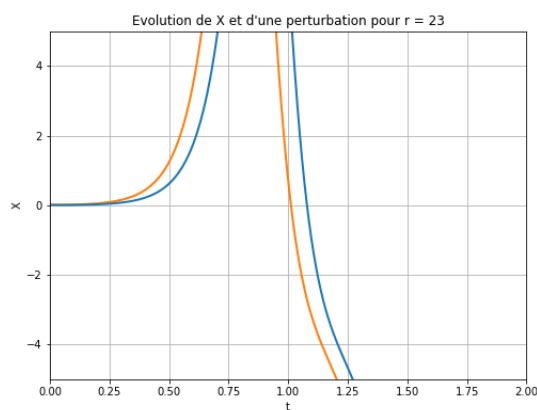
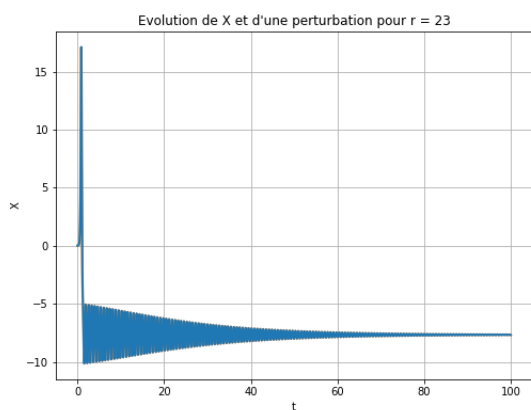


Assez rapidement, la trajectoire initiale (en bleu) et la trajectoire perturbée (en orange) prennent des chemins complètement différents. Nous avons bien remarqué que la S.C.I. est présente.

En prenant les mêmes conditions initiales et $r = 23$, comparons les 2 comportements. Nous nous attendons à voir une convergence de la solution étant donnée que nous n'avons pas encore passer le pallier de transition. Voici la forme de l'attracteur :



Et voici l'évolution de X en fonction du temps et sa perturbation ($\delta X = 0.1$) :

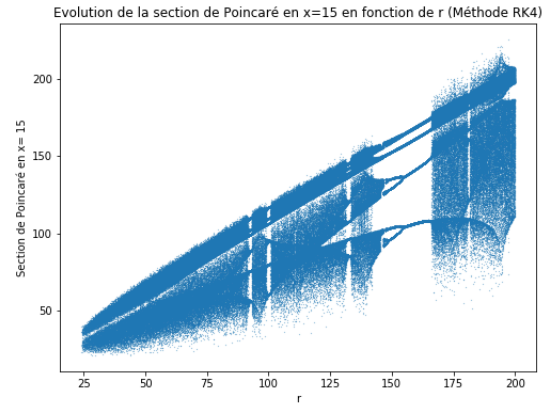
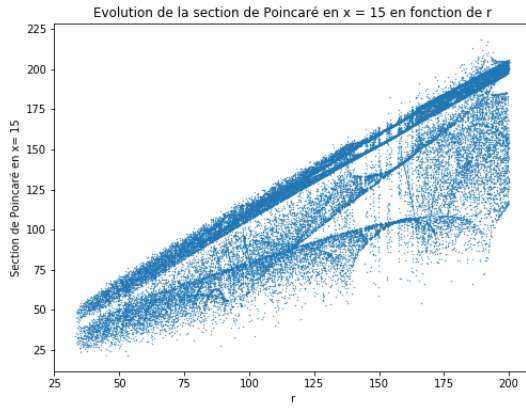


Le deuxième graphique est simplement un zoom sur la valeur initiale et la valeur perturbée car il est impossible de les différencier dans le premier graphique. Nous avons bien un attracteur présentant une solution périodique pour $r < r_t$ et une solution chaotique pour $r > r_t$.

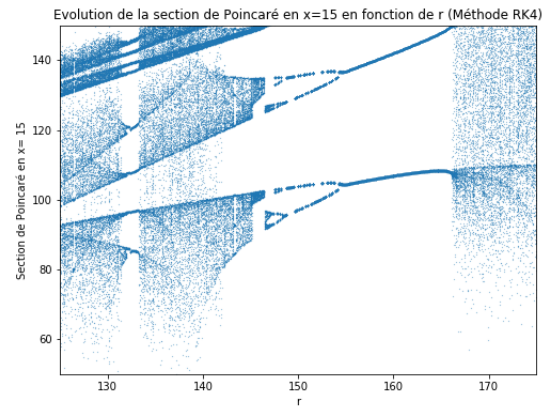
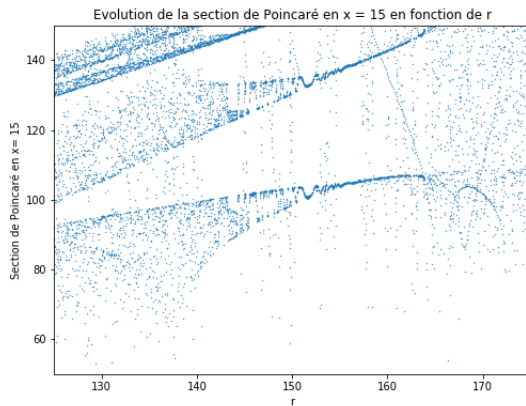
3.5 Section de Poincaré et r

Nous procédons ensuite à étudier l'évolution de la section de Poincaré autour d'un certain x en fonction de r . Une section de Poincaré est une découpe du graphique avec un plan, par exemple avec le plan $x = 15$. C'est ici que nous voyons une différence marquante entre les 2 méthodes numériques, Euler et RK4. L'algorithme est la suivante : nous prenons l'intersection des points de l'attracteur avec le plan $x = 15$. Nous effectuons ceci pour toutes les valeurs de r , par pas de 0.1 jusque 200. Nous rejetons les 2 premières unités de temps de chaque trajectoire car c'est environs le temps que prend une trajectoire pour se stabiliser dans l'attracteur. Dans le cas où nous prenons tous les points de la condition initiale, une courbe supérieure et inférieure viennent se rajouter sur les graphiques, mais celles-ci ne sont pas intéressantes et ne nous offrent rien à observer d'intéressant.

Observons le résultat obtenu :



On remarque déjà une augmentation en définition entre les 2 méthodes, ceci est dû au fait que RK4 est une méthode numérique d'ordre 2. Les points sont alors plus précis et moins disperser. Nous avons aussi l'impression que les points sont plus nombreux, je pense juste qu'ils sont plus regroupés grâce à la précision de RK4. Observons ce qui se passe aux alentours de $r \approx 150$.



On remarque ici encore, le second graphique est plus précis, mieux défini. De plus, dans le graphique pour la méthode RK4, il est plus facile de voir que r influence la stabilité de la solution, d'où ces longues

courbes avant de se diviser et ainsi de suite. Nous remarquons cela pour r venant de 160 vers 155 puis on a une bifurcation et ainsi de suite un peu plus loin pour arriver à une solution instable. Cependant, on remarque des "trous" et des courbes dans les nuages de points, ceux-ci correspondent à des solutions stables comme précédemment. Ces bifurcations et ce schéma présentent en fait un comportement fractal.

En vue de la précision des points générés par RK4, nous continuerons l'analyse du système avec cette méthode.

3.6 Erreur quadratiques sur les trajectoires

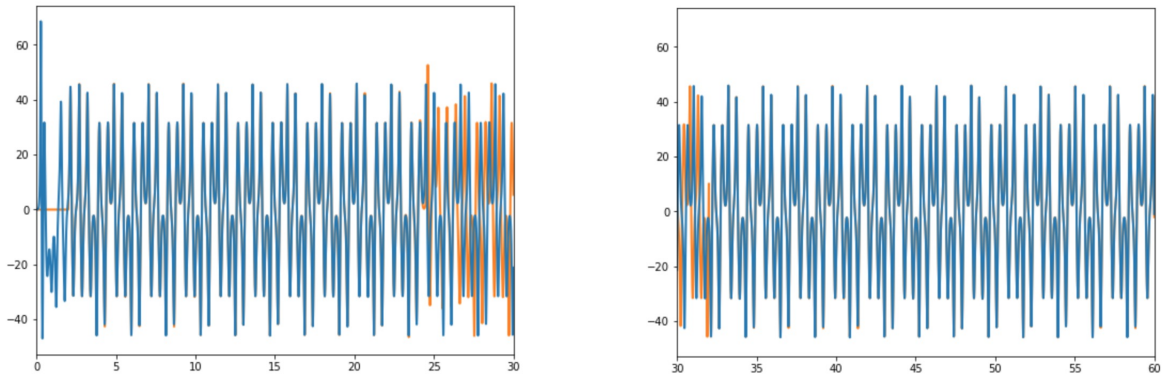
Nous étudions finalement l'erreur induite par une petite perturbation (aléatoire) sur la trajectoire pendant une unité de temps. C'est-à-dire, sur une unité de temps, nous regardons l'erreur quadratique grandissante entre la trajectoire initiale et la trajectoire perturbée.

L'algorithme est la suivante : nous induisons une petite erreur aléatoire sur un point de la trajectoire toutes les unités de temps, nous stockons ensuite la trajectoire initiale et la perturbée séparément. Ensuite, pour chaque élément nous additionnons la différence entre les 2 trajectoires en fonction du temps, avec la relation suivante :

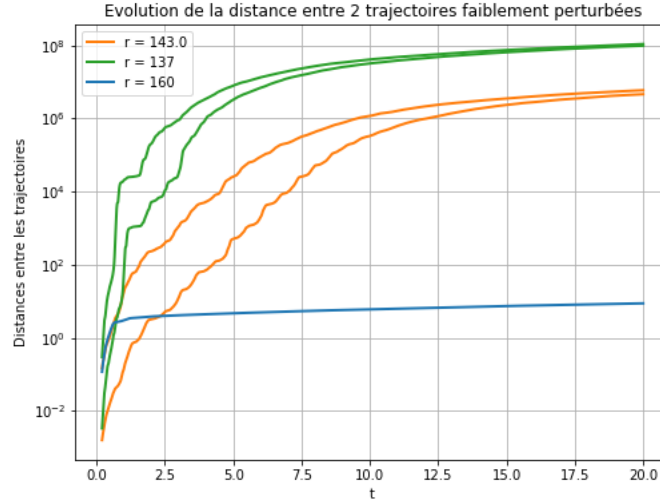
$$E_i^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(a_{ij} - b_{ij})^2}{N}$$

où a_i est la trajectoire perturbée et b_i la trajectoire initiale.

Pour illustrer ceci, voici l'évolution de la trajectoire initiale et les trajectoires perturbées sur une unité de temps, avec des perturbations exagérées.



Pour finir nous faisons un graphique de cette erreur quadratique moyenne en fonction du temps, autrement dit, nous regardons l'évolution de la différence des 2 trajectoires en fonction du temps. Le même algorithme est alors utilisé mais avec cette fois-ci des perturbations non-exagérées. Ceci nous donne :



où les courbes supérieures pour chaque r respectivement sont perturbées initialement de 0,01 multiplier par un nombre aléatoire entre -1 et 1 , les courbes inférieures sont perturbées initialement de 0,001 multiplier par un nombre aléatoire entre -1 et 1 . Nous avons une convergence vers une asymptote horizontale car la taille de l'attracteur est finie, la différence entre les 2 trajectoires ne dépassera pas la taille de cet attracteur. De plus, pour $r = 160$, nous sommes dans un régime périodique, on le remarque bien dans les graphiques plus haut (section 3.5), mais aussi dans l'évolution de l'erreur quadratique étant donné que l'erreur converge très rapidement vers son asymptote.

On voit avant d'atteindre l'asymptote, l'évolution de la distance suit une loi exponentielle. En effet, l'erreur évolue comme une presque droite jusqu'à $t = 7,5$, ceci se remarque mieux sur les courbes orange pour $r = 143$.

La taille de l'attracteur de Lorenz varie, en effet les équations dépendent du paramètre r , donc lorsqu'on prend un r plus élevé nous modifions l'attracteur en lui-même, ceci est la raison pour laquelle nous avons 2 asymptotes horizontales différentes.

4 Conclusion

Durant cette étude des systèmes non-linéaires, j'ai pu observer d'un meilleur angle les propriétés des attracteurs et du chaos. Il était très intéressant de pouvoir se servir d'informatique pour simuler et éventuellement résoudre certaines questions que l'on aurait pas pu résoudre autrement, comme par exemple le calcul de r_T pour lequel notre système devient chaotique. De plus, l'informatique nous aide à avoir une meilleure représentation de ces systèmes.

J'ai pu constater que le chaos possède beaucoup plus "d'ordre" que l'on y croit, de voir des phénomènes fractaux se présenter était totalement inattendu et assez surprenant. Ceci dit, ce travail mérite d'être approfondi et je suis impatient de pouvoir continuer mon apprentissage dans ce domaine de la physique particulièrement intéressant.

5 Références

1. L'ordre dans le chaos : Vers une approche déterministe de la turbulence, Pierre Bergé (II), Christian Vidal, Yves Pomeau
2. Wikipédia, Système dynamique : https://fr.wikipedia.org/wiki/Systeme_dynamique
3. Pierre Audibert, Equations non-linéaires et sections de Poincaré,
<http://www.pierreaudibert.fr/ens/7DUFFINGUEDA.pdf>
4. Youtube, ScienceEtonnate : Effet Papillon et Théorie du Chaos — Science étonnante #52,
<https://www.youtube.com/watch?v=YrOyRCD7M14>