ТЕМА2. Решение уравнений и систем

Задачи, сводящиеся к решению алгебраических и трансцендентных уравнений, можно классифицировать по числу уравнений и в зависимости от предлагаемого характера и числа решений (Рисунок 1).

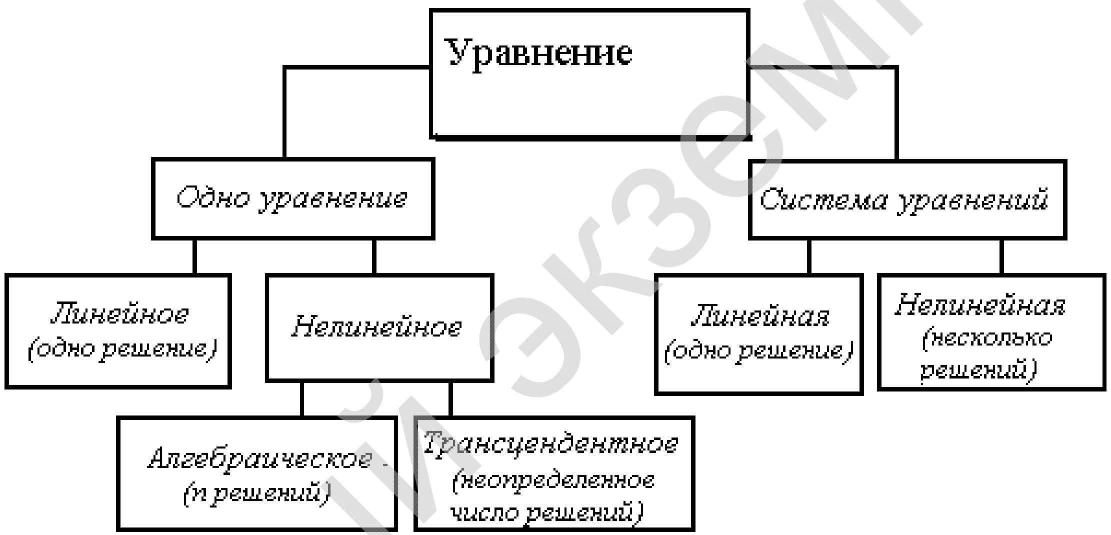


Рисунок 1. Классификация уравнений

Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими уравнениями* называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются *трансцендентными.*

Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы:

1) *точные методы*;
2) *итерационные методы*.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются *итерационные методы* с заданной степенью точности.

Решение нелинейных уравнений

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

где:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка,

2) значения $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки $f(a)\cdot f(b)<0$,

3) первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале $[a, b]$ находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что $f(x)$ на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.

Решить уравнение (1) *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что:

$$f(\xi)=0,$$

называется ***корнем уравнения*** (1) или *нулем* функции $f(x)$.

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

1) *отделение корня* - отыскание приближенного значения корня или отрезка, на котором содержится один корень;

2) *уточнение приближенного корня* - доведение его до заданной степени точности.

Процесс отделения корня можно осуществить аналитическим либо графическим способами:

1) составляют таблицу значений функции $y = f(x)$ на определённом промежутке изменения переменной *x,* и если окажется, что для соседних значений аргумента значения функции имеют разные знаки, то нуль функции (и корень уравнения) находится между ними,

2) принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1) - это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью *Ox,* или отметить на оси *Ox* отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение (1) *равносильным* ему уравнением:

$$f_1(x) = f_2(x)$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример. Выяснить, сколько корней имеет уравнение $4 - e^x - 2x^2 = 0$, и найти промежутки, в которых эти корни находятся.

Решение. Отделим корни данного уравнения.

1. Составим таблицу значений функции $y = f(x)$ на промежутке [-3, 1] с шагом изменения x, равным 1.

x	–3,0	–2,0	–1,0	0,0	1,0
f(*x*)	–14,05	–4,14	1,63	3,00	–0,72

Видно, что значения функции на концах отрезков [-2, -1] и [0, 1] имеют разные знаки. Следовательно, существуют корни уравнения $f(x) = 0$, принадлежащие этим отрезкам.

2. Построим график функции $y = 4 - e^x - 2x^2$ (рис.2) и более простые графики $y = f_1(x) = 4 - e^x$ и $y = f_2(x) = 2x^2$ (рис. 3)

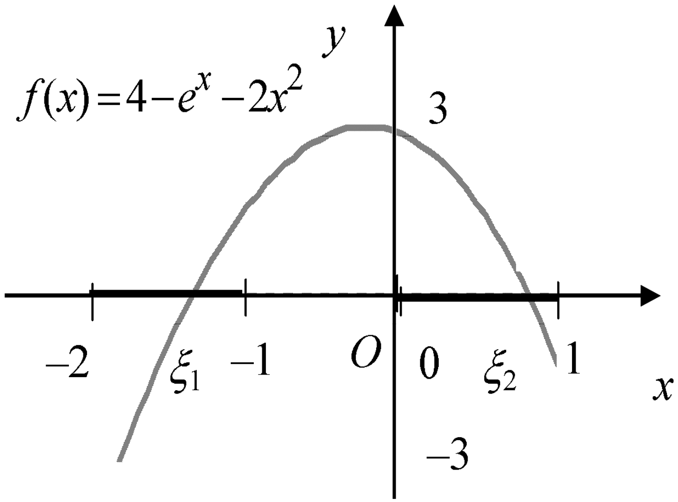


Рис.2

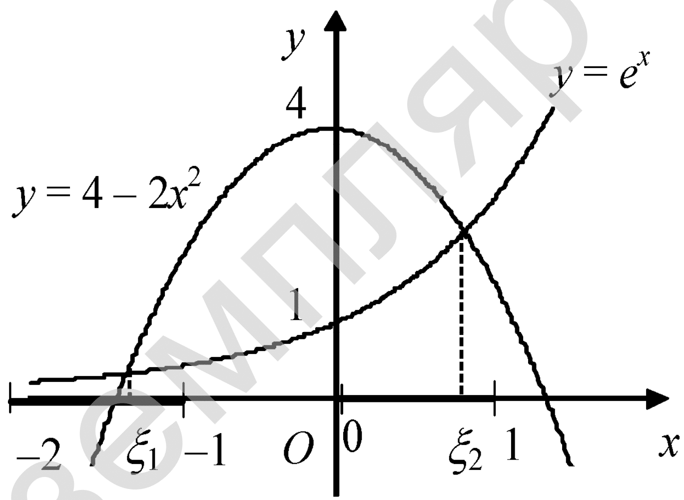


Рис. 3

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

1. Метод половинного деления (метод бисекции)

Пусть дано уравнение (1) и пусть найден отрезок [a, b], на котором находится единственный корень уравнения, причём функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a)f(b) < 0$.

Для вычисления корня уравнения, принадлежащего указанному промежутку, найдём середину этого отрезка: $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

Если $f(x_1) = 0$, то уравнение решено.

Если $f(x_1) \neq 0$, то для продолжения вычисления выберем ту из частей данного отрезка $[a; x_1]$ или $[x_1; b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим $[a_1; b_1]$.

Новый суженный промежуток снова делим пополам и проводим вычисления по указанной схеме и так далее. В результате получаем либо точный корень на одном из этапов, либо последовательность вложенных отрезков $[a, b]$, $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$, таких, что

$$f(a_i)f(b_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a). \tag{2}$$

Число ξ – общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - является корнем уравнения исходного уравнения. Оценку ε погрешности решения на *n* - м шаге вычислений можно получить из соотношения (2) в виде

$$0 \le \xi - a_n \le \frac{1}{2^n}(b-a) = b_n - a_n < \varepsilon \qquad (3)$$

Здесь $a_n \approx \xi$ с точностью ε, не превышающей $\frac{1}{2^n}(b-a) = b_n - a_n$.

Оценка (3) характеризует погрешность метода деления отрезка пополам и указывает на скорость сходимости: метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = 1/2$.

Пример._Методом половинного деления найти корень уравнения $4-e^{x}-2x^{2}=0$ с точностью ε=0,01.

Решение. Один из корней уравнения принадлежит отрезку $[0;1]$. На каждом шаге вычислений приближенное значение корня принимаем равным $x_n=\dfrac{a_n-b_n}{2}$ с погрешностью $d_n=b_n-a_n$. Будем производить вычисления и выбирать последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$.

Первоначально имеем

$$[a, b]=[0,\ 1],\quad x_1=\frac{a+b}{2}=0,5.$$

Вычисляем $f(a)=3,\ f(x_1)=1{,}8513,\ f(b)=-0,72$ и учитываем, что $f(x_1)f(b)<0$, то принимаем: $a_1=x_1=0,5,\quad b_1=1;\quad d_1=b_1-a_1=0,5$.

Тогда $[a_1, b_1]=[0,5;1],\ x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}=0,75$.

Вычисляем $f(a_1)=1{,}8513,\ f(x_2)=0,758,\ f(b_1)=-0,72,\ f(x_2)f(b_1)<0$.

Тогда $[a_2;b_2]=[0,75;1],\ x_3=\dfrac{a_2+b_2}{2}=0,875;\ d_3=0,125$.

Производя вычисления далее, можно убедиться, что требуемая точность достигается на 7-м шаге: $x_7=0,8828125$ с погрешностью $d_7=0,00785<\varepsilon=0,01$.

2. Метод простых итераций

Пусть исходное уравнение (1) представлено в виде:

$$x = g(x), \tag{4}$$

Функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Суть метода итераций состоит в следующем. Начиная с произвольной точки x_0, принадлежащей данному отрезку, последовательно получим:

$x_1 = g(x_0)$ – первое приближение,

$x_2 = g(x_1)$ – второе приближение,

…

$x_{k+1} = g(x_k)$ – k+1-е приближение,

…

Последовательность

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_k,\ x_{k+1}, \ldots \tag{5}$$

называется последовательностью итераций для уравнения (4) с начальной точкой x_0.

Если все точки последовательности (5) принадлежат отрезку $[a;b]$, и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \xi$, то последовательность (5) сходится.

Достаточные условия сходимости последовательности итераций.

Теорема. Пусть функция $g(x) \in C^{(1)}_{[a,b]}$ и выполнены два условия:

1) $|g'(x)| \le q < 1$ для любого $x \in [a; b]$;

2) значения функции $g(x) \in [a; b]$ для любого *x* из этого отрезка.

Тогда при любом выборе начального приближения $x_0 \in [a; b]$ процесс итераций сходится к единственному корню ξ уравнения (1) на отрезке $[a; b]$.

Оценка погрешности *k*-го приближения x_k к корню ξ такова:

$$|\xi - x_k| \le \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|, \quad |\xi - x_k| \le \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|, \quad \text{где } q = \max_{a \le x \le b}|g'(x)|.$$

Заметим, что чем меньше *q*, тем быстрее сходится процесс итераций.

Укажем теперь один из способов преобразования уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = g(x)$, допускающему применение метода итераций, сходящихся к корню ξ.

Для любого числа $\lambda \ne 0$ уравнению (1) можно преобразовать к виду (4), где $g(x) = x - \lambda f(x)$. Предположим, что производная $f'(x)$ положительна и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Пусть $M = \max_{[a;b]}|f'(x)|, \quad m = \min_{[a;b]}|f'(x)|$.

Подбираем число $\lambda \neq 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 \leq g'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq q < 1.$$

На основании оценки для производной функции $f(x)$ имеем

$$1 - \lambda M < 1 - \lambda m \leq q < 1.$$

Если положим $\lambda = \dfrac{1}{M}$, то $q = 1 - \dfrac{m}{M} < 1$. Следовательно

$$g(x) = x - \frac{1}{M} f(x). \tag{6}$$

Для этой функции выполняется достаточное условие сходимости метода итераций, сформулированное выше в теореме.

Замечание 1. Если окажется, что производная отрицательна на отрезке $[a; b]$, то уравнение (4) можно заменить равносильным уравнение $-f(x) = 0$ и применить указанное преобразование.

Замечание 2. Если вычисление точного значения *M* затруднительно, то можно заменить его произвольным числом $M_1 > M$. Однако при большом значении M_1 число $q = 1 - \dfrac{m}{M_1}$ ближе к единице и процесс итераций сходится медленнее.

На рис. 4.1 – 4.4 показаны четыре случая взаимного расположения линий $y = x$ и $y = \varphi(x)$ и соответствующие итерационные процессы.

Рис. 4.1 и 4.2 соответствуют случаю $|\varphi'(\text{x})| < 1$, и итерационный процесс сходится. При этом, если $\varphi'(x) > 0$ (рис. 4.1), сходимость носит односторонний характер, а если $\varphi'(x) < 0$ (рис. 4.2), сходимость носит двусторонний, колебательный характер.

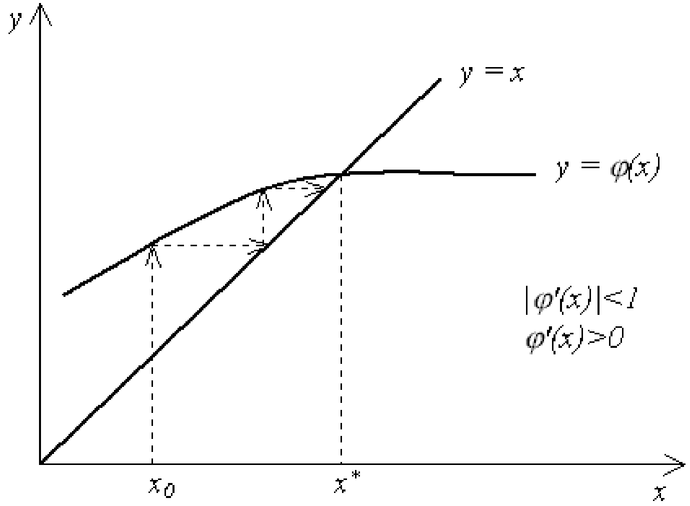


Рис. 4.1

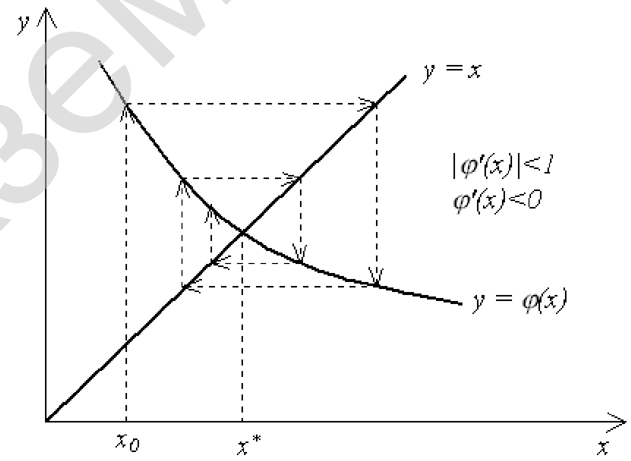


Рис. 4.2

Рис. 4.3 и 4.4 соответствуют случаю $|\varphi'(x)| > 1$ – итерационный процесс расходится. При этом может быть односторонняя (рис. 4.3) и двусторонняя (рис 4.4) расходимость.

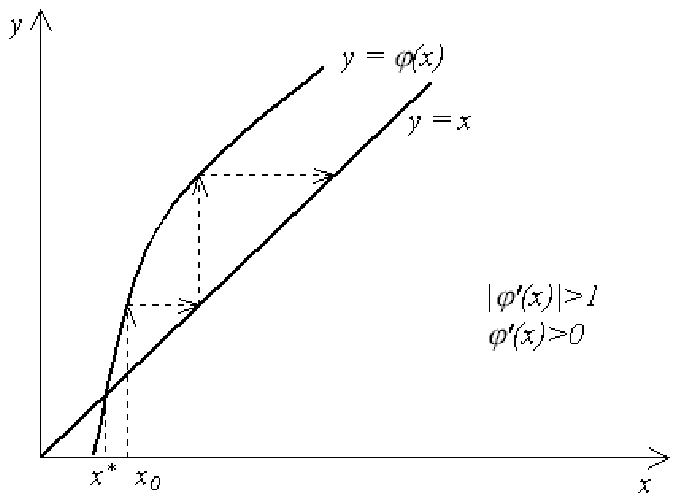


Рис. 4.3

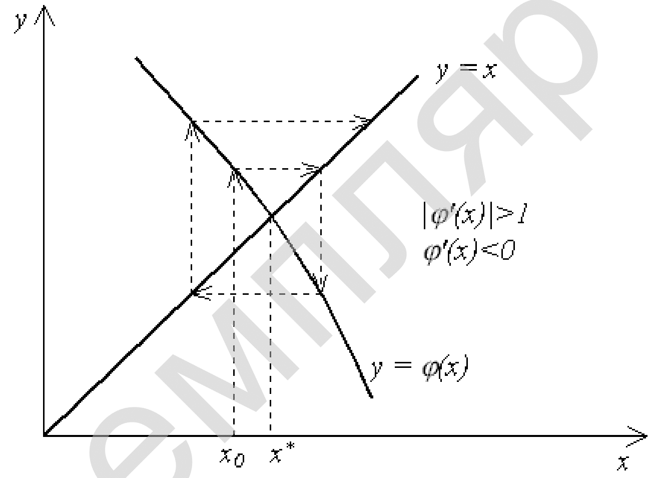


Рис. 4.4

Пример. Решить уравнение $2x - \cos x = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Для отделения корней представим данное уравнение в виде $x = 0{,}5\cos x$. Построив графики функций $y = x$ и $y = 0{,}5\cos x$, увидим, что корень уравнения содержится внутри отрезка $\left[0; \pi/2\right]$.

Преобразуем исходное уравнение к виду (4). Здесь

$$f(x) = 2x - \cos x, \quad f'(x) = 2 + \sin x > 0, \quad M = \max_{[0;\pi/2]}(2 + \sin x) = 3 \;\; \lambda = \frac{1}{M} = \frac{1}{3},$$

$$g(x) = x - \lambda f(x) = x - \frac{1}{3}(2x - \cos x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos x.$$

Последовательные приближения найдём по формулам $x_{k+1} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos x_k, \quad k = 0,1,2,3,...$

Положим $x_0 = 0{,}5$ и вычисляем

$x_1 = 0{,}4389128;\; x_2 = 0{,}45263292;\; x_3 = 0{,}44964938;\; x_4 = 0{,}450299978$.

Для оценки погрешности четвёртого приближения воспользуемся неравенством (7). Так как $q = \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\left|g'(x)\right| = \frac{1}{3}\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}(1 - \sin x) = \frac{1}{3}$, то $\left|\xi - x_4\right| \le \left|x_4 - x_3\right| = 0{,}0006504 < \varepsilon = 10^{-3}$.

Следовательно, $\xi \approx x_4 \approx 0,450$ с точностью $\varepsilon = 0,001$. Заметим, что мы получили приближённое значение корня с точностью более высокой, чем задано в условии.

3. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть $x = \xi$ единственный корень уравнения (1) на отрезке $[a; b]$.

Пусть найдено n– приближение к точному корню уравнения $x_n \approx \xi$. Мы можем уточнить его следующим образом, полагая, что

$$\xi = x_n + h_n, \quad h_n \text{ – малая величина.} \qquad (8)$$

Подставляем представление (8) в уравнение (1) и применяем формулу Тейлора, имеем

$$f(x_n + h_n) = f(x_n) + h_n f'(x_n) + O(h_n^2) = 0,$$

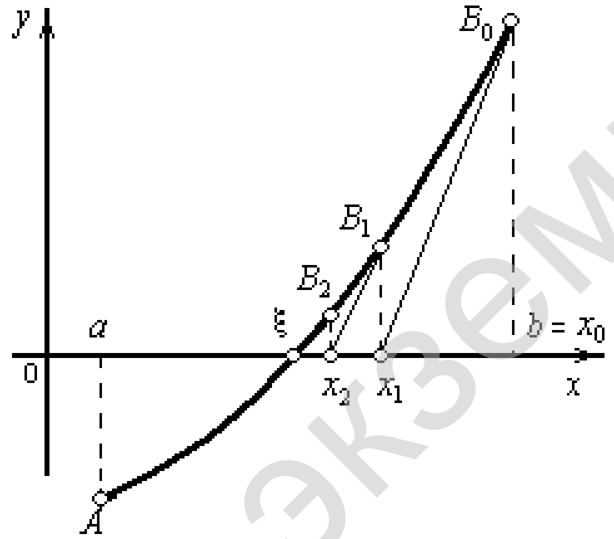
или

$$h_n \approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Внося эту поправку в формулу (8), найдем следующее приближенное значение корня

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (9)$$

Геометрическая интерпретация. Точка x_{n+1} является значением абсциссы точки пересечения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$ с осью Ox.



Справедливо следующее достаточное условие сходимости метода.

Теорема. Пусть f(x) определена и дважды дифференцируема на [a, b], причем $f(a)f(b) < 0$, а производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на [a, b]. Тогда, исходя из любого начального приближения x_0, удовлетворяющего условию $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно построить последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

сходящуюся к единственному на [a, b] решению уравнения $f(x) = 0$.

Для оценки погрешности приближения корня можно воспользоваться неравенством

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2, \qquad \text{где } M_2 = \max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|, \qquad m_1 = \min_{[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

Приведенная оценка погрешности означает, что метод Ньютона имеет *квадратичную сходимость* и при хорошем нулевом приближении может сходиться очень быстро. Однако следует понимать, что если вблизи корня значение $f'(x)$ становится малым, то сходимость итерационной последовательности замедляется.

Поскольку оценка производных функции $f(x)$ часто бывает затруднительной, то итерации прекращаем когда $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$, а приближенное значение корня полагаем равным x_n.

Корень уравнения $2x - \cos x = 0$

$$x0 := 0.5 \qquad f(x0)\cdot\frac{d^2}{dx0^2}f(x0) = 0.107$$

$$x1 := x0 - \frac{f(x0)}{\left(\frac{d}{dx0}f(x0)\right)} = 0.45062669 \qquad |x0 - x1| = 0.049$$

$$x2 := x1 - \frac{f(x1)}{\left(\frac{d}{dx1}f(x1)\right)} = 0.450183648 \qquad |x2 - x1| = 0.000443$$

$$x3 := x2 - \frac{f(x2)}{\left(\frac{d}{dx2}f(x2)\right)} = 0.450183611 \qquad |x2 - x3| = 3.6282901 \times 10^{-8}$$

Модификации метода Ньютона

Модификации метода Ньютона различаются способом аппроксимации производной $f'(x)$.

1.Упрощенный метод Ньютона. Итерационный процесс осуществляется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{10}$$

Метод можно использовать в случаях, когда производная функции мало меняется вблизи корня; метод обладает линейной сходимостью. Здесь $f'(x_n) \approx f'(x_0)$.

2. Разностный метод Ньютона (Метод ложного положения). Итерационный процесс осуществляется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{c - x_n}{f(c) - f(x_n)} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{11}$$

Здесь c – фиксированная точка вблизи простого корня; метод можно использовать в случаях, когда вычисление производной функции затруднительно или нежелательно; метод обладает линейной сходимостью. Здесь $f'(x_n) \approx \dfrac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n}$

Приложение

Применим метод Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}$, где $a > 0$, p – натуральное число. Вычисление $\sqrt[p]{a}$ эквивалентно решению уравнения $x^p = a$.

Таким образом, нужно найти корень уравнения $f(x) = 0$, $f(x) = x^p - a$,. Итерационная формула Ньютона примет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^p - a}{p(x_n)^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p(x_n)^{p-1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{12}$$

При p=2 имеем $x_{n+1} = = \frac{1}{2} x_n + \frac{a}{2x_n}$

$$\sqrt[6]{6} = 1.348006$$

Формула для расчета

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^p - a}{p(x_n)^{p-1}} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{a}{p(x_n)^{p-1}}, \quad n = 0, 1, 2,$$

$a := 6 \qquad p := 6 \qquad x0 := 1$

$$x1 := \frac{p-1}{p}\cdot x0 + \frac{a}{p\cdot x0^{p-1}} = 1.833 \qquad |x0 - x1| = 0.833$$

$$x2 := \frac{p-1}{p}\cdot x1 + \frac{a}{p\cdot x1^{p-1}} = 1.576 \qquad |x1 - x2| = 0.257$$

$$x3 := \frac{p-1}{p}\cdot x2 + \frac{a}{p\cdot x2^{p-1}} = 1.416 \qquad |x3 - x2| = 0.16$$

$$x4 := \frac{p-1}{p}\cdot x3 + \frac{a}{p\cdot x3^{p-1}} = 1.356 \qquad |x4 - x3| = 0.061$$