ТЕМА РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Систему нелинейных уравнений с n неизвестными можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

или, более коротко, в векторной форме

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}, \tag{2}$$

где x - вектор неизвестных величин, f - вектор-функция

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В редких случаях для решения такой системы удается применить метод последовательного исключения неизвестных и свести решение исходной задачи к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Значения других неизвестных величин находятся соответствующей подстановкой в конкретные выражения. Однако в подавляющем большинстве случаев для решения систем нелинейных уравнений используются итерационные методы.

1. Метод Ньютона

Если определено начальное приближение $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T$, итерационный процесс нахождения решения системы (1) методом Ньютона можно представить в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)}, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, ..., \tag{3}$$

где значения приращений $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}, \ldots,$ $\Delta x_n^{(k)}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, все коэффициенты которой выражаются через известное предыдущее приближение $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$

$$\begin{cases} f_1(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0, \\ f_2(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

В векторно-матричной форме расчетные формулы имеют вид

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \Delta\vec{x}^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5)$$

где вектор приращений $\Delta\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \ldots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ находится из решения уравнения

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) + J(\vec{x}^{(k)})\Delta\vec{x}^{(k)} = 0 \qquad (6)$$

Здесь $J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ – матрица Якоби первых производных вектор-функции $\vec{f}(\vec{x})$.

Выражая из (6) вектор приращений $\Delta x^{(k)}$ и подставляя его в (5), тогда итерационный процесс нахождения решения можно записать в виде

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J^{-1}(\vec{x}^{(k)})\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) \qquad k = 0,1,2,..., \tag{7}$$

где $J^{-1}(x)$ – матрица, обратная матрице Якоби.

Формула (7) есть обобщение формулы (3) на случай систем нелинейных уравнений.

При реализации алгоритма метода Ньютона в большинстве случаев предпочтительным является не вычисление обратной матрицы $J^{-1}(x^{(k)})$, а нахождение из системы (4) значений приращений $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$,…, $\Delta x_n^{(k)}$ и вычисление нового приближения по (3). Для решения линейных систем можно привлекать самые разные методы, как прямые, так и итерационные с учетом размерности *n* решаемой задачи и специфики матриц Якоби $J(x)$ (например, симметрии, разреженности и т.п.).

Использование метода Ньютона предполагает дифференцируемость функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ и невырожденность матрицы Якоби ($\det J(x^{(k)}) \neq 0$). В случае, если начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности искомого корня, итерации сходятся к точному решению, причем сходимость квадратичная.

В практических вычислениях в качестве условия окончания итераций обычно используется критерий

$$\left\| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right\| \le \varepsilon, \tag{8}$$

где ε - заданная точность.

Для системы двух уравнений расчетная формула (7) имеет вид

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \dfrac{\det A_1^{(k)}}{\det J^{(k)}}, \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \dfrac{\det A_2^{(k)}}{\det J^{(k)}} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где $$J^{(k)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(k)} = \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\[2ex] f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \qquad A_2^{(k)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

Пример. Методом Ньютона найти положительное решение системы нелинейных уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0.1x_1^2 + x_1 + 0.2x_2^2 - 0.3 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0.2x_1^2 + x_2 - 0.1x_1x_2 - 0.7 = 0, \end{cases}$$

Решение. Для выбора начального приближения применяем графический способ. Построив на плоскости (x_1, x_2) в интересующей нас области кривые $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$ (рис.), определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате $0 < x_1 < 0.5, \quad 0.5 < x_2 < 1.0$.

$$y1(x) := \sqrt{1.5 - 0.5 \cdot x^2 - 5 \cdot x} \qquad y2(x) := \frac{0.7 - 0.2 \cdot x^2}{1 - 0.1 \cdot x}$$

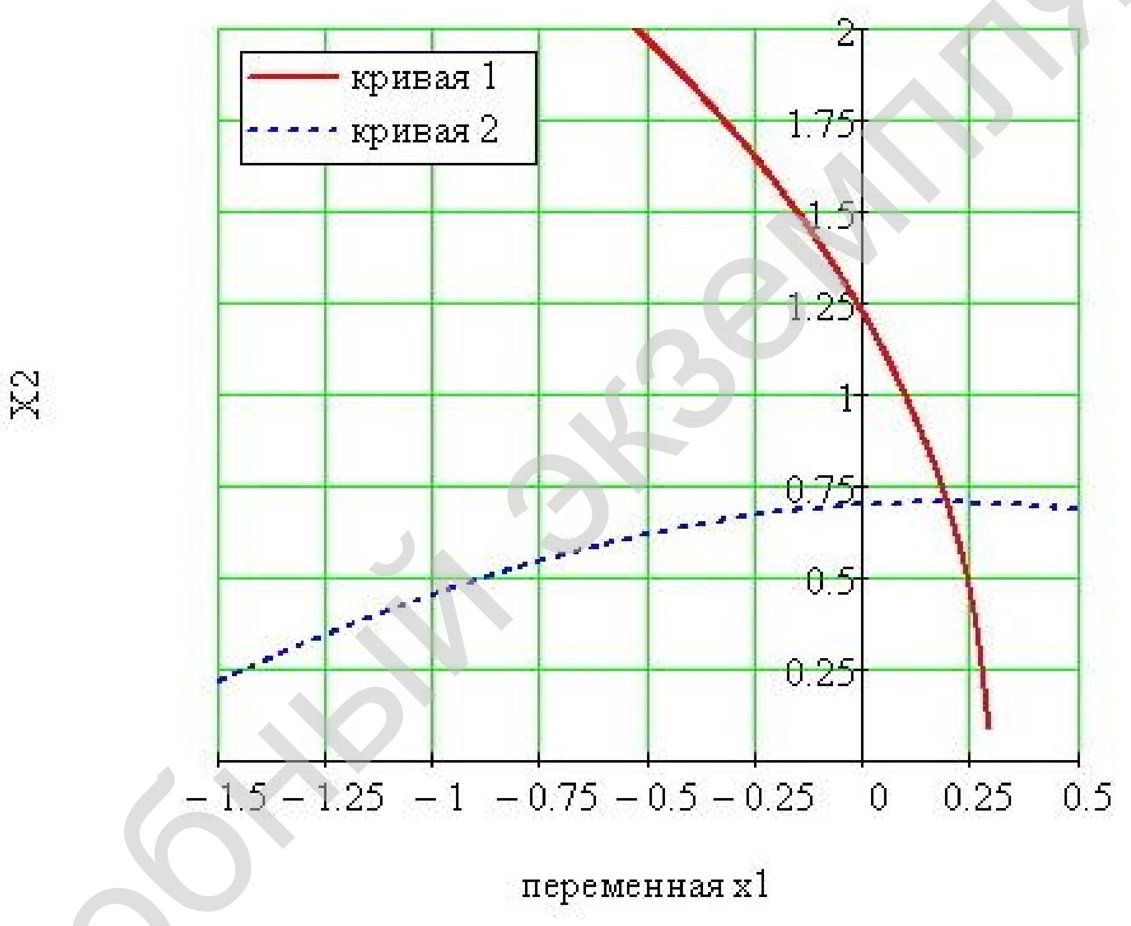

Рис.

За начальное приближение примем $x_1^{(0)} = 0.25,\ \ x_2^{(0)} = 0.75.$

В рассматриваемом примере:

$$f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.1\left(x_1^{(k)}\right)^2 + x_1^{(k)} + 0.2\left(x_2^{(k)}\right)^2 - 0.3,$$

$$f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.2\left(x_1^{(k)}\right)^2 + x_2^{(k)} - 0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 0.7,$$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.2x_1^{(k)} + 1, \qquad \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 0.4x_2^{(k)}$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.4x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)}, \qquad \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 1 - 0.1x_1^{(k)}.$$

Подставляя в правые части соотношений (9) выбранные значения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$, получим приближение $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$, используемое, в свою очередь, для нахождения $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ и т.д. Итерации продолжаются до выполнения условия (8).

Результаты вычислений содержатся в таблице

k	$x_1^{(k)}$ $x_2^{(k)}$	$f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})$ $f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})$	$\dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1}$ $\dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1}$	$\dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2}$ $\dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2}$	$\det \mathbf{A}_1^{(k)}$	$\det \mathbf{A}_2^{(k)}$	$\det \mathbf{J}^{(k)}$
0	0.25000 0.75000	0.06875 0.04375	1.01250 0.02500	0.30000 0.97500	0.05391	0.04258	0.97969
1	0.19498 0.70654	-0.00138 0.00037	1.00760 0.00734	0.28262 0.98050	-0.00146	0.00038	0.98588
2	0.19646 0.70615	0.00005 0.00000	1.00772 0.00797	0.28246 0.98035	0.00005	0.000001	0.98567
3	0.19641 0.70615						

$$x_1^{(*)} \approx 0.1964, \quad x_2^{(*)} \approx 0.7062.$$

Исходеая система

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0.1x_1^2 + x_1 + 0.2x_2^2 - 0.3 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0.2x_1^2 + x_2 - 0.1x_1x_2 - 0.7 = 0, \end{cases}$$

Приближенное решение

$x1 := 0.1964 \quad x2 := 0.706$

Проверка

$f1(x1, x2) := 0.1 \cdot x1^2 + x1 + 0.2 \cdot x2^2 - 0.3$

$f2(x1, x2) := 0.2 \cdot x1^2 + x2 - 0.1 \cdot x2 \cdot x1 - 0.7$

$f1(x1, x2) = -0.0000555$

$f2(x1, x2) = -0.00015125$