2. Метод итерации

При использовании метода простой итерации система уравнений (1) приводится к эквивалентной системе специального вида

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \qquad (10)$$

или, в векторной форме

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(x), \qquad \vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \qquad (11)$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ – определены и непрерывны в некоторой окрестности искомого изолированного решения $\vec{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, ..., x_n^{(*)})^T$.

Если выбрано некоторое начальное приближение $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T$, последующие приближения в методе простой итерации находятся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

или, в векторной форме

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\varphi}(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots \,. \tag{13}$$

Если последовательность векторов $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ сходится, то она сходится к решению $\vec{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)})^T$.

Достаточное условие сходимости итерационного процесса (12) формулируется следующим образом :

Теорема. Пусть вектор-функция $\vec{\varphi}(\vec{x})$ непрерывна, вместе со своей производной

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2} \dots \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2} \dots \dfrac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_2} \dots \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

в ограниченной выпуклой замкнутой области G и

$$\max_{x \in G} \left\| \vec{\varphi}'(x) \right\| \le q < 1,$$

Если начальное приближение $x^{(0)} \in G$ и все последовательные приближения

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\varphi}(x^{(k)}), \quad k = 0,1,2,...$$

также содержатся в области G, то процесс итерации (13) сходится к единственному решению уравнения (11).

В области G справедливы оценки погрешности $(\forall k \in N)$:

$$\left\| \vec{x}^{(*)} - \vec{x}^{(k+1)} \right\| \le \frac{q^{k+1}}{1-q} \left\| \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)} \right\|,$$

$$\left\| \vec{x}^{(*)} - \vec{x}^{(k+1)} \right\| \le \frac{q}{1-q} \left\| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right\|.$$

Рассмотрим систему из двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Для применения метода простой итерации система (14) приводится к виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y); \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \qquad (15)$$

Последовательные приближения вычисляются по формулам

$$x_{i+1} = \varphi_1(x_i, y_i),$$
$$y_{i+1} = \varphi_2(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (16)$$

где x_0 и y_0 – найденные приближенные значения искомого корня.

Пусть в некоторой замкнутой области R($a \le x \le A$, $b \le y \le B$) имеется только одно решение $x=\xi$, $y=\eta$ системы (14).

Теорема. Если

1) функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в области R;

2) начальные приближения x_0 и y_0 и все последующие приближения x_i, y_i, $i=1,2,\ldots$ принадлежат R;

3) в R выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1; \quad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1, \qquad (17)$$

то процесс последовательных приближений (15) сходится к решению $x=\xi$, $y=\eta$ системы, т.е. $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \xi$, $\quad \lim\limits_{i\to\infty} y_i = \eta$.

Условие (17) можно заменить условием

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|\le q_1<1;\quad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\le q_2<1.$$

Итерационный процесс можно считать законченным, как только выполниться неравенство

$$\frac{M}{1-M}\left(\left|x_i-x_{i-1}\right|+\left|y_i-y_{i-1}\right|\right)<\varepsilon, \tag{18}$$

где M – наибольшее из чисел q_1 и q_2, входящих в неравенства (16), ε – точность решения системы.

Если M<0.5, то в этом случае можно воспользоваться неравенством следующего вида:

$$\left|x_i-x_{i-1}\right|+\left|y_i-y_{i-1}\right|<\varepsilon.$$

Укажем способ преобразования системы (14) к системе (15) допускающей применение метода итерации. Правую часть системы (15) запишем в виде

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y)=x+\lambda_{11}f_1(x,y)+\lambda_{12}f_2(x,y),\\ \varphi_2(x,y)=x+\lambda_{21}f_1(x,y)+\lambda_{22}f_2(x,y).\end{cases} \tag{19}$$

Для того чтобы выполнялось условие теоремы о сходимости должно выполнять следующие условия в начальной точке (x_0, y_0)

$$\begin{cases} 1+\lambda_{11}\dfrac{\partial}{\partial x}f_1(x,y)+\lambda_{12}\dfrac{\partial}{\partial x}f_2(x,y)=0, \\ \lambda_{11}\dfrac{\partial}{\partial y}f_1(x,y)+\lambda_{12}\dfrac{\partial}{\partial y}f_2(x,y)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{21}\dfrac{\partial}{\partial x}f_1(x,y)+\lambda_{22}\dfrac{\partial}{\partial x}f_2(x,y)=0, \\ 1+\lambda_{21}\dfrac{\partial}{\partial y}f_1(x,y)+\lambda_{12}\dfrac{\partial}{\partial y}f_2(x,y)=0, \end{cases} \qquad (20)$$

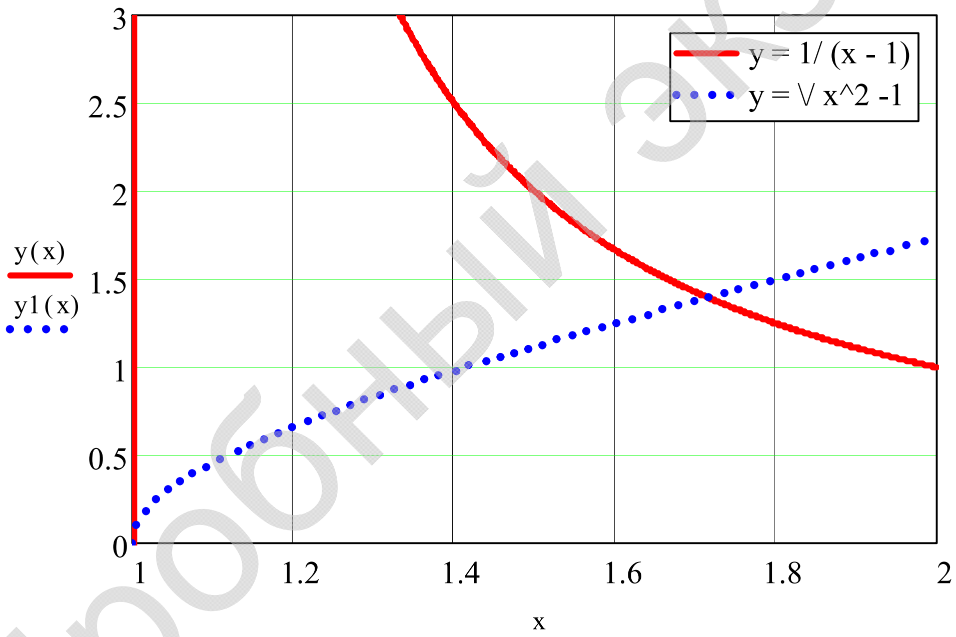
$$\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}\neq 0.$$

Пример. Найти приближенное решение системы с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ в первой четверти

$$\begin{cases} (x-1)y - 1 = 0, \\ x^2 - y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для определения начального приближения изобразим эти кривые.

За начальное приближение (графическая интерпретация) возьмем точку $x_0 = 1{,}5; y_0 = 1{,}5.$



Вычислим производные в начальной точке

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) = y = 1{,}5, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = x - 1 = 0{,}5, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = 2x = 3, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y) = -2y = -3.$$

Составляем системы (20)

$$\begin{cases} 1 + 1{,}5\lambda_{11} + 3\lambda_{12} = 0, \\ 0{,}5\lambda_{11} - 3\lambda_{12} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}5\lambda_{21} + 3\lambda_{22} = 0, \\ 1 + 0{,}5\lambda_{21} - 3\lambda_{22} = 0. \end{cases}$$

Решая системы, находим, что $\lambda_{11} = \lambda_{21} = -1/2; \quad \lambda_{12} = -1/12; \quad \lambda_{22} = 1/4$.

Тогда система (15) имеет представление

$$\begin{cases} x = x - \frac{1}{2}((x-1)y - 1) - \frac{1}{12}(x^2 - y^2 - 1), \\ y = y - \frac{1}{2}((x-1)y - 1) + \frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 1). \end{cases}$$

$x0 := 1.5 \qquad y0 := 1.5$

$$x1 := x0 - 0.5\cdot[(x0-1)\cdot y0 - 1] - \frac{\left(x0^2 - y0^2 - 1\right)}{12} = 1.708$$

$$y1 := y0 - 0.5\cdot[(x0-1)\cdot y0 - 1] - \frac{\left(x0^2 - y0^2 - 1\right)}{-4} = 1.375$$

$(x1-1)\cdot y1 - 1 = -0.026 \qquad x1^2 - y1^2 - 1 = 0.028$

$x0 := x1 \qquad y0 := y1$

$$x1 := x0 - 0.5\cdot[(x0-1)\cdot y0 - 1] - \frac{\left(x0^2 - y0^2 - 1\right)}{12} = 1.7190394$$

$$y1 := y0 - 0.5\cdot[(x0-1)\cdot y0 - 1] - \frac{\left(x0^2 - y0^2 - 1\right)}{-4} = 1.39496528$$

$(x1-1)\cdot y1 - 1 = 0.00303 \qquad x1^2 - y1^2 - 1 = 0.00917$

$x0 := x1 \quad y0 := y1$

$$x1 := x0 - 0.5\cdot[(x0-1)\cdot y0 - 1] - \frac{\left(x0^2 - y0^2 - 1\right)}{12} = 1.7167579$$

$$y1 := y0 - 0.5\cdot[(x0-1)\cdot y0 - 1] - \frac{\left(x0^2 - y0^2 - 1\right)}{-4} = 1.3957399$$

$(x1 - 1)\cdot y1 - 1 = 0.000408 \qquad x1^2 - y1^2 - 1 = -0.00083$