DS
Traitement du Signal

Durée : 1h55
Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés.

Toute tentative de fraude sera sanctionnée par une note de 0/20 et signalée en Jury.

Les 3 parties sont indépendantes et à rendre sur des **feuilles séparées**.

REMARQUES

- Le danger le plus grand est de se perdre dans ses documents ... Faites ce que vous savez faire sans ouvrir vos documents.

- Les courbes peuvent être tracées grossièrement à main levée tant que les points importants et les phénomènes importants apparaissent clairement.

- Les questions sont souvent indépendantes, alors lisez tout ...

PARTIE I
"A la dérive ..."

On s'intéresse dans cet exercice à la conception d'un "bon" filtre numérique dérivateur.

On rappelle que le filtre analogique dérivateur idéal a pour fonction de transfert $H(p)=p$ et donc pour réponse en fréquence en module $|H(f)|=|2\pi f|$

Notations :
T_e : période d'échantillonnage
f_e : fréquence d'échantillonnage
f_n : fréquence numérique normalisée, $f_n = f/f_e$

Question 1 : Filtre dérivateur simple
a) Représentez le module de la réponse en fréquence d'un filtre <u>numérique</u> dérivateur idéal pour f_n variant de 0 à 1.

Soit le filtre numérique de fonction de transfert $H_1(z)=1-z^{-1}$.
b) Quels sont les propriétés notables de ce filtre ? Tracez sa réponse impulsionnelle.
c) Calculez et tracez le module de sa réponse en fréquence.
d) Comparez la réponse en fréquence de $H_1(z)$ avec celle du filtre numérique idéal.

Question 2 : Transformation bilinéaire du dérivateur analogique
Pour obtenir un filtre numérique proche du dérivateur idéal, on applique la méthode de la transformation bilinéaire sur le filtre analogique idéal.

a) Calculez $H_2(z)$ obtenu par transformation bilinéaire (avec $K=2/T_e$) de $H(p)=p$.
b) En déduire l'équation de récurrence de ce filtre.
c) Représentez le diagramme des pôles et des zéros. Conclusion.

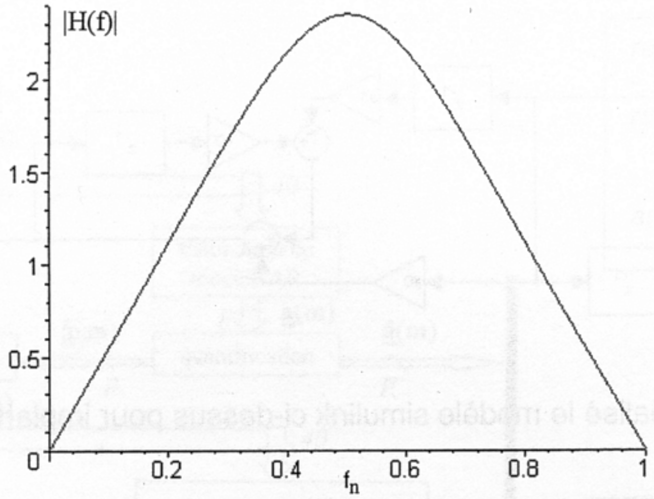
Question 3 : Filtre passe-bas réjecteur
Soir le filtre passe-bas analogique de pulsation de coupure w_c et de fonction de transfert $H_{pb}(p)=\dfrac{1}{1+p/w_c}$.
En appliquant la méthode de la transformation bilinéaire (avec $K=2/T_e$) sur $H_{pb}(p)$, on obtient : $H_3(z)=A.\dfrac{1+z^{-1}}{1+dz^{-1}}$ avec $A = w_c/(w_c+K)$ et $d = (w_c-K)/(w_c+K)$
a) Calculer w_c pour que la fréquence de coupure correspondante (à -3dB) soit égale à $4/(10.T_e)$.
b) Que vaut le gain de ce filtre à la fréquence $1/(2T_e)$?
c) Représentez sans calcul l'allure du module de la réponse en fréquence de $H_3(z)$.

Question 4 : Filtre dérivateur composé
Soit le filtre numérique donc la fonction de transfert $H_4(z)$ est donnée par :
$H_4(z) = H_3(z) \times H_2(z)$.

a) Donnez l'expression de $H_4(z)$. On ne prendra pas de valeurs particulières pour A et d.

b) Représentez le diagramme des pôles et des zéros.

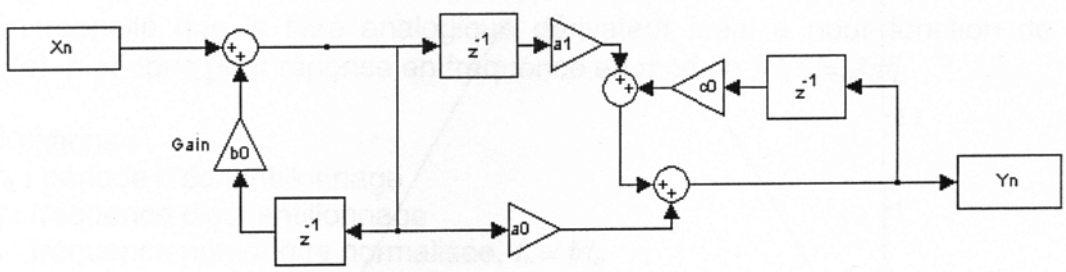
c) Que pensez vous de l'inconvénient observé sur le filtre $H_2(z)$?



Avec A = Te/2 et d=0,15, on obtient le module de la réponse en fréquence ci-dessus.

d) Que pensez vous de ce résultat par rapport au filtre idéal ? Quel est le rôle du coefficient d ?

PARTIE II
Implantation de filtres



Un élève brillant a réalisé le modèle simulink ci-dessus pour implanter un filtre numérique.

Question 1

a) Donnez la fonction de transfert de ce filtre en fonction de b0, a0, a1, c0 qui sont les valeurs des gains statiques du modèle.

b) Quels sont les conditions de stabilité de ce filtre ?

c) Donnez l'équation de récurrence liant l'entrée et la sortie du modèle

Question 2

L'élève a choisi les valeurs suivantes pour les gains statiques :

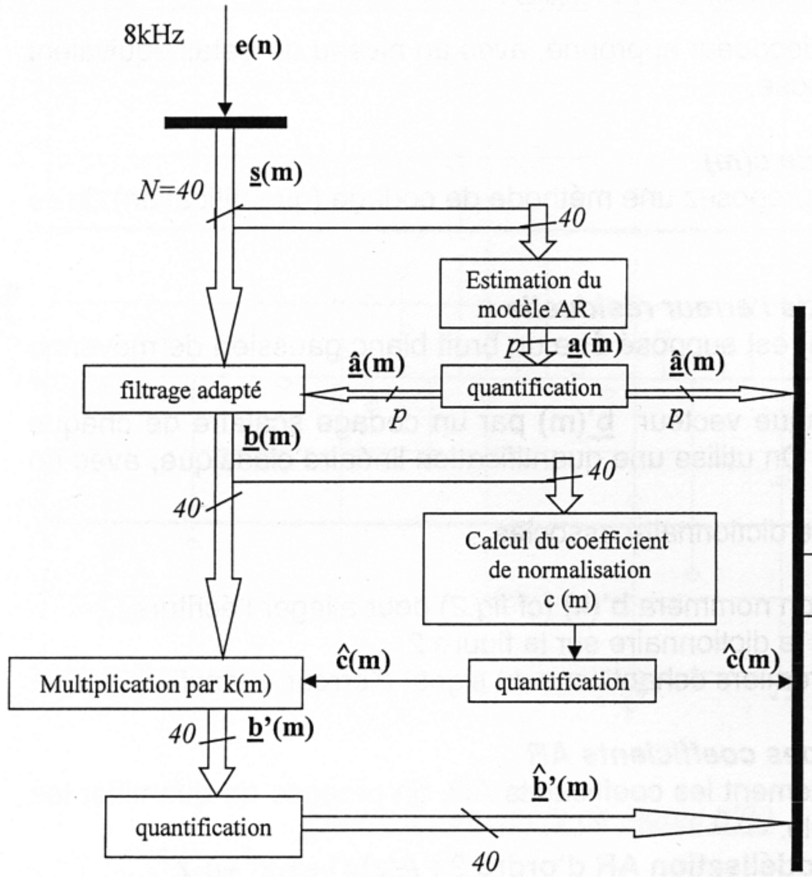
(c0 = -2) (b0 = 0.5) (a0= 2) (a1 = 4)

a) Le filtre est il stable ?

b) Proposez une structure (utilisant retard et gain) d'implantation plus simple adaptée à ce cas particulier.

PARTIE III
Codage et quantification

La figure suivante représente le schéma fonctionnel d'un codeur de parole.



remarques :
- Les variables soulignées représentent des vecteurs.
- Le ^ indique des variables après quantification.

Figure 1 : Schéma de principe du codeur .

Les différents signaux vérifient les relations suivantes :

e(n) : signal audio d'entrée, échantillonné à 8kHz ; n : indice des échantillons temporels
$\underline{s}$(m) : vectorisation (ou bufferisation) de e(n) :
N : nombre d'échantillons par buffer (N=40)
m : indice des vecteurs
$\underline{s}$(1)=[e(1)…e(40)] ;
$\underline{s}$(m)=[e((m-1).N+1)…e(m.N)]

on notera **s(m,k)** le k^{ième} échantillon de **$\underline{s}$(m)** **s(m,k)= e((m-1).N+k).**

$\underline{a}$(m) : coefficients AR du modèle adapté à **$\underline{s}$(m)**. **$\underline{a}$(m) =[a_1,a_2,…a_p]**
$\underline{b}$(m) : sortie du filtrage de **$\underline{s}$(m)** par le filtre :**$H_m(z)=1+\hat{a}(m,1)z^{-1}+\hat{a}(m,2)z^{-2}+\ldots+\hat{a}(m,p)z^{-p}$**
$\underline{b}$'(m) : normalisation : **b'(m,k)=c(m).b(m,k)**

$$c(m)=1\Big/\sqrt{\frac{\sum_k |\underline{b}(m,k)|^2}{N}}$$

Question 1 : analyse du codeur

a) Expliquez les différents principes mis en œuvre par ce codeur.
b) De quel type de codeur s'agit-il ?

Question 2 : décodage

a) Proposez le schéma d'un décodeur approprié, avec un niveau de détail équivalent à l'algorithme de codage proposé.

Question 3 : quantification de c(m)

a) Précisez le rôle de c(m) et proposez une méthode de codage (quantification) de ce coefficient, sur 12 bits.

Question 4 : quantification de l'erreur résiduelle

Chaque vecteur d'erreur **b'(m)** est supposé être un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1$.
On propose de quantifier chaque vecteur **b'(m)** par un codage scalaire de chaque échantillon **b'(m,k)** sur 2 bits. On utilise une quantification linéaire classique, avec un facteur de charge égal à 2.
a) Déterminez la partition et le dictionnaire associés.

Soit un de ces vecteurs que l'on nommera **b'(k)** (cf fig.2) pour alléger l'écriture.
b) Représentez la partition et le dictionnaire sur la figure 2.
c) Tracez également les 10 premiers échantillons du signal d'erreur quantifié $\hat{b}$'(k).

Question 5 : quantification des coefficients AR

Plutôt que de quantifier directement les coefficients AR, on propose de quantifier les pôles correspondant au modèle.
On prend **l'exemple d'une modélisation AR d'ordre 2 : $A(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$**.
a) Donnez l'expression des pôles du modèle en fonction des coefficients AR du modèle.
Pour des signaux réels, le modèle AR(2) peut appartenir à 2 familles (voir figure 3).
b) Décrivez à quoi correspondent ces 2 familles de modèles à 2-pôles, et l'espace de valeurs que peuvent prendre les pôles dans les 2 cas. Y a-t-il une intersection entre ces 2 familles ?

Pour quantifier ce modèle d'ordre 2, on souhaite utiliser 7 bits a0…a6. Le premier bit a0 sert à déterminer si le modèle est de type I (a0=0) ou de type II (a0=1).
Si le modèle est de type I, on code la valeur du 1^er^ pôle avec les bits a1…a3, et la valeur du 2^ième^ pôle avec les bits a4….a6.
Si le modèle est de type II, on code le module du 1^er^ pôle avec les bits a1…a2, et sa phase avec les bits a3…a6.
c) Représentez sur la figure 3 les partitions et dictionnaires correspondant aux 2 types de modèles.
d) Quel est l'intérêt de travailler sur les pôles, plutôt que sur les coefficients AR ?
e) Comment peut-on généraliser cette méthode à un modèle AR d'ordre supérieur ?

Question 6 : débit global

En reprenant les paramètres de quantification précisés dans les questions précédentes, et en prenant le cas d'un modèle AR d'ordre 8, déterminez le nombre de bits nécessaires pour coder une trame et le débit binaire de ce codeur.

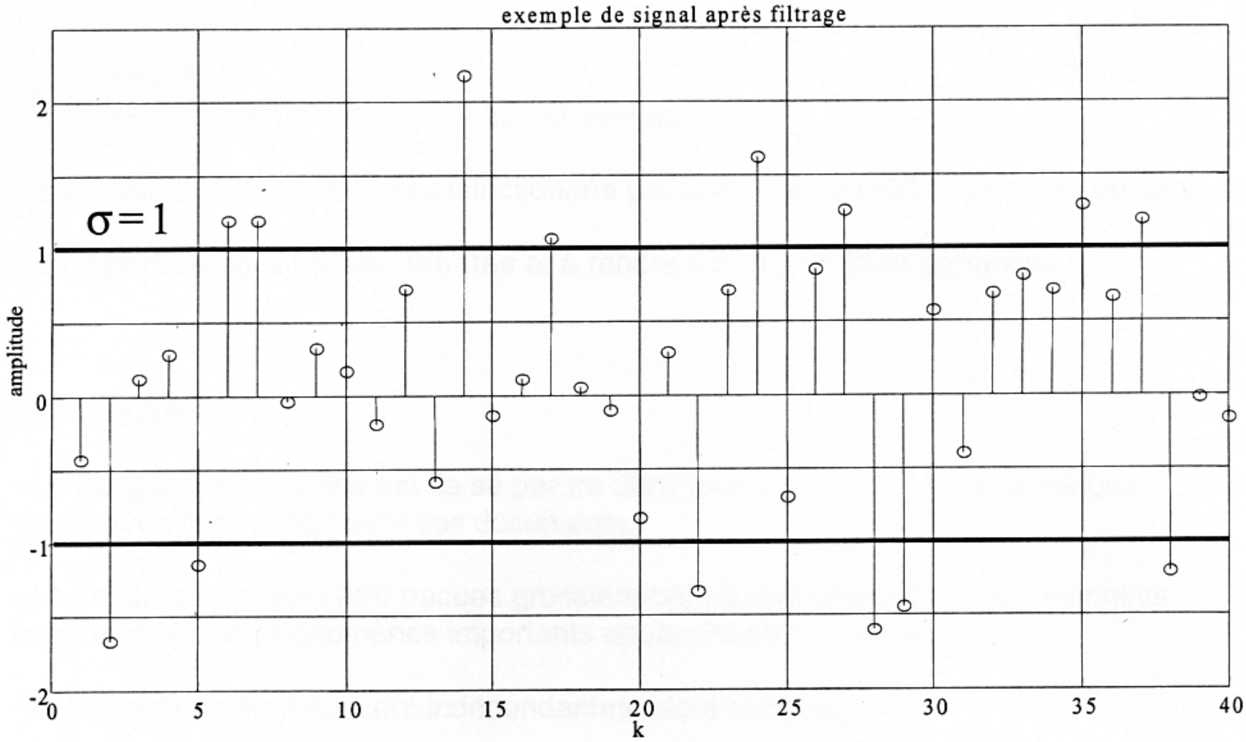


Figure 2 : exemple de signal b'(k)

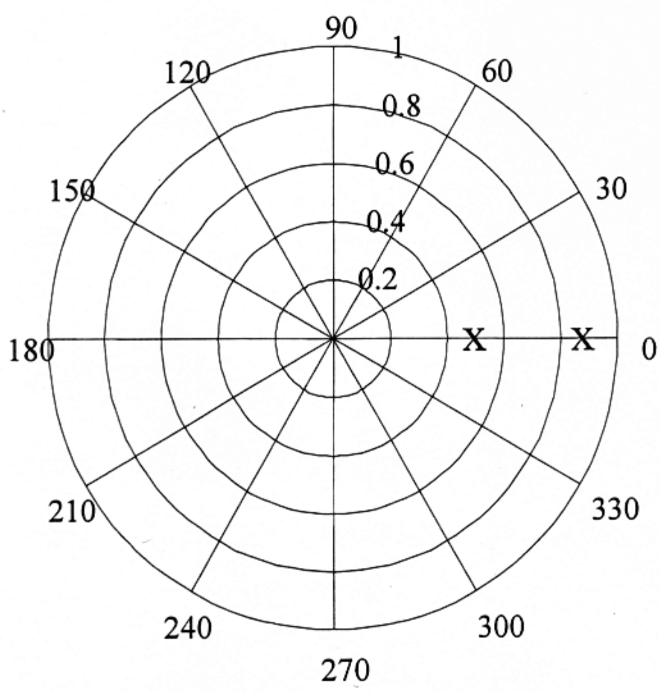


Figure 3a : modèles AR(2) de type I

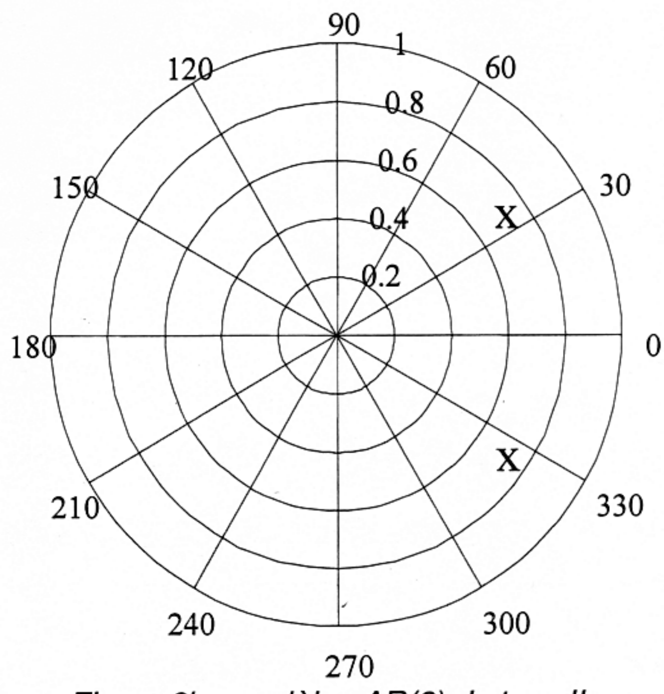


Figure 3b : modèles AR(2) de type II