

EA4 – Éléments d’algorithmique

TP n° 2

Exercice 1 : produit de polynômes

À l’aide de compteurs, comparez l’efficacité des différents algorithmes de calcul du produit de deux polynômes vus en TD (TD 1 exercice 3).

Pour chacune des fonctions, testez sa correction sur de petits exemples. Puis comparez le nombre d’opérations effectuées par les trois fonctions sur de plus gros exemples.

1. Fonction itérative naïve de complexité $\Theta(n^2)$.

On se limite au cas des polynômes P dont le degré est de la forme $2^k - 1$, et pour tout tel polynôme P , on note $P^{(0)}$ et $P^{(1)}$ les polynômes de degré $2^{k-1} - 1$ tels que :

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} \cdot X^{2^{k-1}}.$$

2. Fonction récursive utilisant la formule suivante :

$$P \cdot Q = P^{(0)} \cdot Q^{(0)} + (P^{(0)} \cdot Q^{(1)} + P^{(1)} \cdot Q^{(0)})X^{2^{k-1}} + P^{(1)} \cdot Q^{(1)}X^{2^k}$$

3. Fonction récursive utilisant la formule suivante (algorithme de Karatsuba) :

$$P \cdot Q = P^{(0)} \cdot Q^{(0)} + ((P^{(0)} + P^{(1)}) \cdot (Q^{(0)} + Q^{(1)}) - P^{(0)} \cdot Q^{(0)} - P^{(1)} \cdot Q^{(1)})X^{2^{k-1}} + P^{(1)} \cdot Q^{(1)}X^{2^k}$$

(Quelle est sa complexité ?)

Exercice 2 : comptage

Soit T un tableau de n entiers compris entre 1 et m .

1. Écrire une fonction `compte` qui compte le nombre d’occurrences de l’entier i dans le tableau T . Quelle est la complexité de cette fonction ?

On souhaite maintenant remplir un tableau de taille m de sorte que la i^{e} case du tableau contienne la réponse à la question précédente.

2. Proposer un premier algorithme utilisant la fonction `compte` pour remplir le tableau. Quelle est sa complexité ?
3. Proposer un algorithme amélioré de complexité linéaire en n pour remplir le tableau.

Exercice 3 : dichotomie

Soit T un tableau de n entiers ordonnés dans l’ordre croissant (avec éventuellement des répétitions). Soit n_x le nombre d’occurrence de x dans T .

1. En utilisant un algorithme dichotomique, écrire une fonction `trouve` qui dit si le tableau T contient l’entier x . Quelle est la complexité de cette fonction ?
2. Modifier la fonction précédente pour qu’elle renvoie l’indice de la première occurrence de l’entier x s’il est présent dans le tableau T . Quelle est maintenant la complexité (en fonction de n et de n_x) ?
3. En utilisant un algorithme dichotomique, écrire une fonction `compteTrié` qui compte le nombre d’occurrences de l’entier x dans le tableau T . Quelle est la complexité de cette fonction ?

Exercice 4 : manipulation de tableaux

Décrire des algorithmes pour les problèmes suivants et en donner la complexité en temps et en espace :

1. Trouver le plus grand élément d’un tableau T (d’entiers par exemple).
2. Déterminer le nombre d’éléments du tableau T inférieurs à une valeur x .
3. Déterminer si le tableau T est trié en ordre croissant.
4. Déterminer si le tableau T est *circulairement* trié (en ordre croissant), *i.e.* s’il existe un indice i tel que $T[i:] + T[:i]$ soit trié.

Exercice 5 : pour aller plus loin

1. Télécharger les données publiques des vélib’s au format JSON à l’adresse :
<https://www.data.gouv.fr/fr/datasets/velib-paris-et-communes-limitrophes-ods/>
et placer le fichier `download.json` dans votre répertoire de travail.
2. Recopier la fonction `infoVelib` suivante :

```
def infoVelib():
    import json
    with open("download.json", 'r') as f:
        L = list(f)
        dump = json.loads(L[0])
        velib=[]
        for item in dump:
            velib.append((item['fields']['name'],
                           item['fields']['address'],
                           item['fields']['latitude'],
                           item['fields']['longitude'],
                           item['fields']['ville'],
                           item['fields']['dept']))
    return velib
```

Que renvoie un appel à `infoVelib()` ?

3. Écrire une fonction `ville` qui prend en argument un nom de ville et affiche les adresses de toutes les stations vélib de cette ville.
4. Écrire une fonction `plusProches` qui prend un argument la latitude et la longitude d’un point, un nombre n et renvoie la liste des n stations les plus proches de ce point. Quelles sont les 3 stations les plus proches de Paris 7 (coordonnées : (48.829652, 2.380098)) ? On rappelle que la distance au carré entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est donnée par $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$.