Université Paris Diderot
Informatique

Programmation Fonctionnelle
Année 2015-2016

TP n°3

Arbres binaires

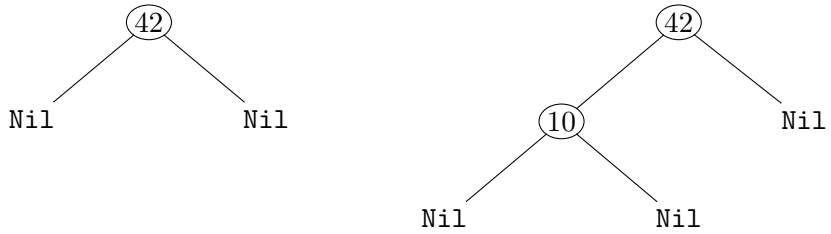
Il est possible d'effectuer en OCaml des *déclarations de types*, c'est-à-dire créer de nouveaux types de valeurs. On peut ainsi représenter en OCaml des arbres binaires à l'aide de la déclaration de type suivante :

```
type 'a tree =
 | Nil
 | Node of 'a * 'a tree * 'a tree;;
```

`Nil` et `Node` seront appelés les *constructeurs* du type des arbres binaires. Cette définition est *polymorphe* : les éléments contenus dans ces arbres ont un type `'a` qui n'est pas connu à l'avance. `Nil` est l'arbre vide. Les éléments se trouvent dans tous les nœuds de l'arbre. Une *feuille* est un arbre contenant exactement un élément. Une fois ce type déclaré, on peut construire par exemple des arbres binaire d'entiers, de type `int tree` :

```
Node (42, Nil, Nil);;
Node (42, Node(10, Nil, Nil), Nil);;
```

qui correspondent respectivement aux représentations graphiques suivantes (le premier arbre est une feuille) :



Ou bien encore on peut construire des arbres de chaînes, de type `string tree` :

```
Node ("abc", Nil, Node ("def", Nil, Nil));;
```

Comme pour les listes, une fonction peut être définie par cas sur la forme d'un arbre :

```
let rec f a = match a with
 | Nil       -> ...
 | Node(x,g,d) -> ...
;;
```

Exercice 1. Écrire les fonction suivantes (Ne pas oublier de les tester sur des cas pertinents) :

1. `taille : 'a tree -> int` renvoyant la taille d'un arbre, c'est-à-dire son nombre de noeuds.
2. `hauteur : 'a tree -> int` renvoyant la hauteur d'un arbre, c'est-à-dire la longueur de sa plus longue branche. On suppose que `Nil` est de hauteur 0 et une feuille de hauteur 1.

3. `mem : 'a -> 'a tree -> bool`, telle que `mem x a` renvoie `true` si et seulement si l'un des nœuds de l'arbre `a` est étiqueté par `x`.
4. `complet : 'a tree -> bool` déterminant si un arbre est complet, c'est-à-dire si toutes ses feuilles sont à la même profondeur et tous les nœuds ont soit 0 fils soit 2 fils.
5. `elements : 'a tree -> 'a list`, qui renvoie la liste des éléments présents dans l'arbre, dans l'ordre de leurs apparitions de gauche à droite dans l'arbre. Sauriez-vous écrire une version sans utiliser la concatenation (`@`) des listes ?

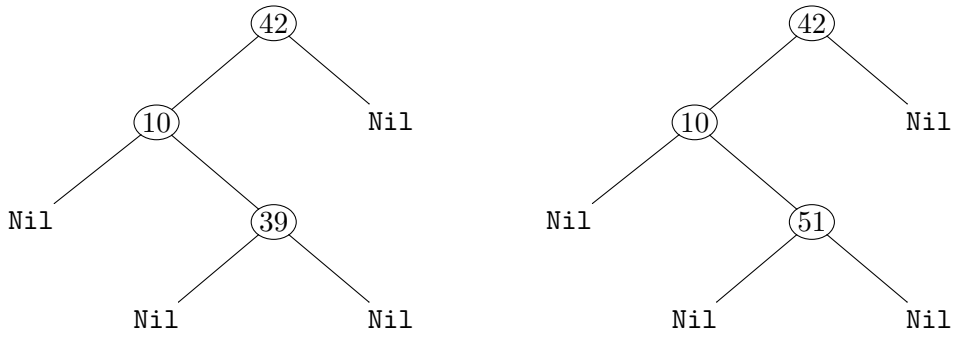
Un *arbre binaire de recherche* (ABR) est un arbre dans lequel *tous* les nœuds `Node(x,g,d)` vérifient la propriété suivante :

— toutes les étiquettes apparaissant dans le fils gauche `g` sont strictement inférieures à `x`.

— toutes les étiquettes apparaissant dans le fils droit `d` sont strictement supérieures à `x`.

La comparaison utilisée ici est la comparaison générique $<$ d'OCaml.

Par exemple, parmi les deux arbres binaires d'entiers suivants, le premier est un ABR et le deuxième non (pourquoi ?)



Exercice 2. Écrire les fonctions suivantes :

1. `mem_abr : 'a -> 'a tree -> bool` qui attend un élément `x` et un ABR `a`, et renvoie `true` si et seulement si `x` apparaît dans l'arbre `a`. L'exploration de `a` devra être minimale, en tenant compte du fait qu'il s'agit d'un ABR.
2. `add_abr : 'a -> 'a tree -> 'a tree` qui permet d'ajouter un élément dans un ABR s'il n'y est pas déjà. Le résultat devra encore être un ABR. Si l'élément est déjà dans l'arbre, cette fonction laissera l'arbre à l'identique.
3. `is_abr : 'a tree -> bool` prenant en argument un arbre quelconque, et déterminant s'il s'agit d'un ABR. Il pourra être utile de définir plusieurs fonctions auxiliaires.
4. `make_abr : 'a list -> 'a tree` transformant une liste triée d'éléments en un ABR contenant ces mêmes éléments. Vérifier sur des exemples que `elements (make_abr l) = l`. Pour limiter au maximum la profondeur de l'arbre obtenu, il pourra être utile d'écrire d'abord une fonction découpant une liste en deux moitiés de tailles similaires.

Les fonctions des points 2 et 4 de cet exercices renvoient des arbres. Pour les tester, il est possible d'utiliser la fonction `print_tree : int tree -> unit` qui affiche les valeurs de types `int tree`. Cette fonction est disponible sur didel, dans le fichier `print_tree.ml`, contenant aussi les définitions d'un certain nombre de valeur de type `int tree`.

Exercice 3.

1. Sans déclarer de fonctions auxiliaires et sans vous servir des fonctions prédéfinies, écrire :

`forall_labels : ('a -> bool) -> 'a tree -> bool`

telle que `forall_labels p a` renvoie `true` si et seulement si chaque étiquette `x` de `a` vérifie
`(p x) = true`. A partir de cette seule fonction, écrire une fonction

`is_uniform : 'a -> 'a tree -> bool`

tel que `is_uniform v a` renvoit `true` si et seulement si chaque étiquette de `a` est égale à `v`. Cette fonction ne devra pas être déclarée comme récursive, mais doit déléguer entièrement la récurrence à la précédente.

2. Toujours sans fonctions auxiliaires ou prédéfinies, écrire :

   `forall_subtrees : ('a -> 'a tree -> 'a tree -> bool) -> 'a tree -> bool`

   telle que `forall_subtrees p a` renvoie `true` si et seulement si pour chaque sous-arbre de `a` de la forme `Node(x, g, d)`, on a `p x g d = true`.

   Rappelons qu'un arbre est un *peigne droit* s'il est réduit à l'arbre vide, ou si son fils gauche est vide et son fils droit est un peigne droit. A partir de la seule fonction `forall_subtrees`, écrire :

   `est_peigne_droit : 'a tree -> bool`

   tel que `est_peigne_droit a` renvoit `true` si et seulement si `a` est un peigne droit, et déléguant entièrement la récurrence à la fonction `forall_subtrees`.

3. On définit pour les arbres un itérateur de la manière suivante :

```
let rec fold_tree fn vf a = match a with
    Nil -> vf
  | Node(n, g, d) -> fn n (fold_tree fn vf g) (fold_tree fn vf d);;
```

   Noter que `vf` spécifie la valeur à renvoyer si l'arbre `a` est réduit à un arbre vide. Si c'est un noeud interne, l'itérateur est appliqué aux sous-arbres avec les mêmes arguments, et les valeurs de retour sont combinées à la valeur étiquetant la racine via la fonction `fn`.

   Quel est le type de `fold_tree` ?

4. En utilisant uniquement `fold_tree`, et en lui déléguant la récurrence, écrire :

   `somme_etiquettes : int tree -> int`

   renvoyant la somme des étiquettes d'un arbre étiqueté par des entiers. Avec les mêmes contraintes, écrire :

   `map_tree : ('a -> 'b) -> 'a tree -> 'b tree`

   telle que `map_tree f a` renvoie l'arbre obtenu en remplaçant chaque étiquette `x` de `a` par `(f x)`.