Processus aléatoires : méthodes d'étude et applications
GEL-7000
Automne 2024
Date de remise : 3 octobre 2024

Devoir 1

Destinataire

Ming Zeng

Maxence Quélennec 536 899 537

Table des figures

Table of Contents

Problème 1

a) Système 1 : $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
b) Système 2 : $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
c) Système 3 : $(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Problème 2

a) Par définition, chaque essai de Bernoulli est indépendant du précédent et du suivant. Cela signifie que les n_1 premiers essais n'ont aucune influence sur les n_2 essais suivants. Par extension, les variables aléatoires X_1 et X_2 n'ont aucune influence l'une sur l'autre et sont donc indépendantes.

b) X_1 et X_2 représentent toutes les deux des succès dans des séries d'essais de Bernoulli ; elles suivent donc toutes deux la distribution binomiale. Leurs probabilités marginales se définissent comme suit :

$$p_{X_1}(k_1) = P(X_1 = k_1) = \binom{n_1}{k_1} p^{k_1}(1-p)^{n_1-k_1}\ avec\ k_1 = 0,1,2, \dots, n_1$$

$$p_{X_2}(k_2) = P(X_2 = k_2) = \binom{n_2}{k_2} p^{k_2}(1-p)^{n_2-k_2}\ avec\ k_2 = 0,1,2, \dots, n_2$$

c) Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, la probabilité conjointe est le produit des deux probabilités marginales respectvies.

$$p_{X_1X_2}(k_1, k_2) = P(X_1 = k_1 \wedge X_2 = k_2)$$
$$= \binom{n_1}{k_1} p^{k_1}(1-p)^{n_1-k_1} \times \binom{n_2}{k_2} p^{k_2}(1-p)^{n_2-k_2}$$
$$= \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2} p^{k_1+k_2}(1-p)^{n_1+n_2-(k_1+k_2)}$$

$$avec\ k_1 \in \{0,1,2, \dots, n_1\}\ et\ k_2 \in \{0,1,2, \dots, n_2\}$$

d) Dans cette question, nous cherchons $P(X = k)$ $où$ $X = X_1 + X_2$ avec X qui représente le nombre total de succès dans $n = n1 + n2$ essais. On peut dire que X suit une loi bionomiale $Bin(n1 + n2, p)$ car $X_1 et\ X_2$ sont indépendant mais ont la même probabilité de succès p. La probabilité d'obtenir k succès au cours de n essais est donc de :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\ avec\ n = n1 + n2\ et\ k = 0,1,2, \dots, n$$

Problème 3

a)

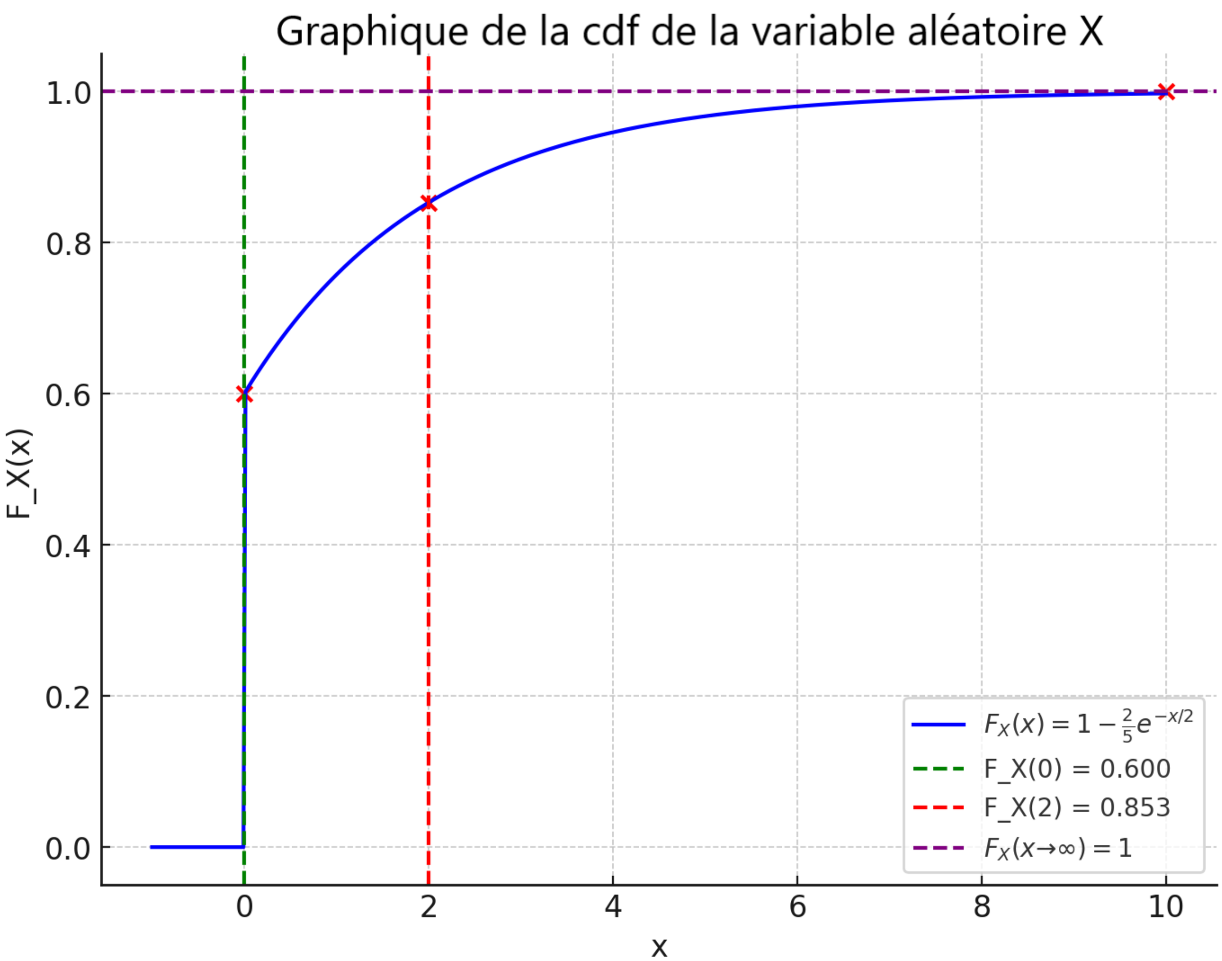

Figure 1. CDF de la variable aléatoire X

b)

i)

$$P[x \leq 1.3] = F_X(1.3) = 1 - \left(\frac{2}{5}e^{\frac{-1.3}{2}}\right) \approx 0.791$$

ii)

$$P[X = 0] = 0$$

Car la variable aléatoire est continue, donc toute probabilité d'une valeur précise vaut 0.

iii)

$$P[0.5 < X \leq 2.5] = F_X(2.5) - F_X(0.5) = 1 - \left(\frac{2}{5}e^{\frac{-2.5}{2}}\right) - \left(1 - \left(\frac{2}{5}e^{\frac{-0.5}{2}}\right)\right) \approx 0.197$$

c)

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \left(\frac{2}{5}e^{\frac{-x}{2}}\right)\right) = -\left(-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\right) = \frac{1}{5}e^{\frac{-x}{2}}$$

La pdf est donc :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; pour \; x < 0 \\ \frac{1}{5}e^{\frac{-x}{2}} \; pour \; x \geq 0 \end{cases}$$

d)

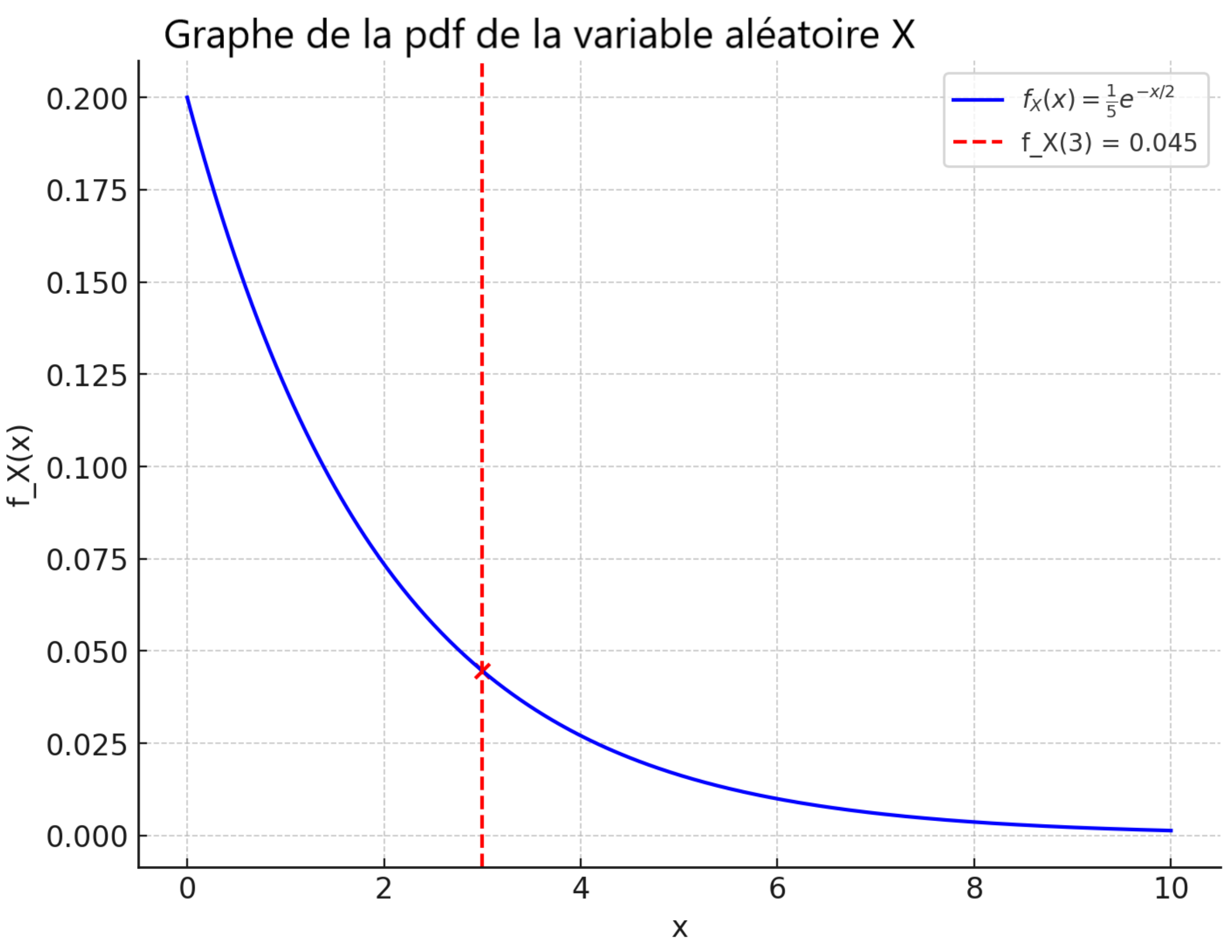

Figure 2. pdf de la variable aléatorie X

e) La variable aléatoire X est continue.

Problème 4

a) Code Matlab de création des histogrammes:

```
k = 1:10; % le set de valeurs possibles
pk = ones(1,10)./10; % distribution uniforme

% Génération des valeurs aléatoires
Xi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Xi
Yi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Yi

% Calcul des fréquences relatives avec affichage dans des histogrammes

figure;
[total_occurrences_xi, ~] = histcounts(Xi, 'BinLimits', [0.5, 10.5],
'BinWidth', 1); % calcul des occurrences pour chaque valeur dans [1,...,10]

frequences_relatives_xi = total_occurrences_xi / sum(total_occurrences_xi); %
calcul de chaque fréquence relative

bar(k, frequences_relatives_xi); % créations des axes

title('fréquences relatives de X');
xlabel('Valeurs');
ylabel('Fréquences relatives');


figure;
[total_occurrences_yi, ~] = histcounts(Yi, 'BinLimits', [0.5, 10.5],
'BinWidth', 1); % calcul des occurrences pour chaque valeur dans [1,...,10]

frequences_relatives_yi = total_occurrences_yi / sum(total_occurrences_yi); %
calcul de chaque fréquence relative

bar(k, frequences_relatives_yi); % créations des axes

title('Fréquences relatives de Y');
xlabel('Valeurs');
ylabel('Fréquences relatives');
```

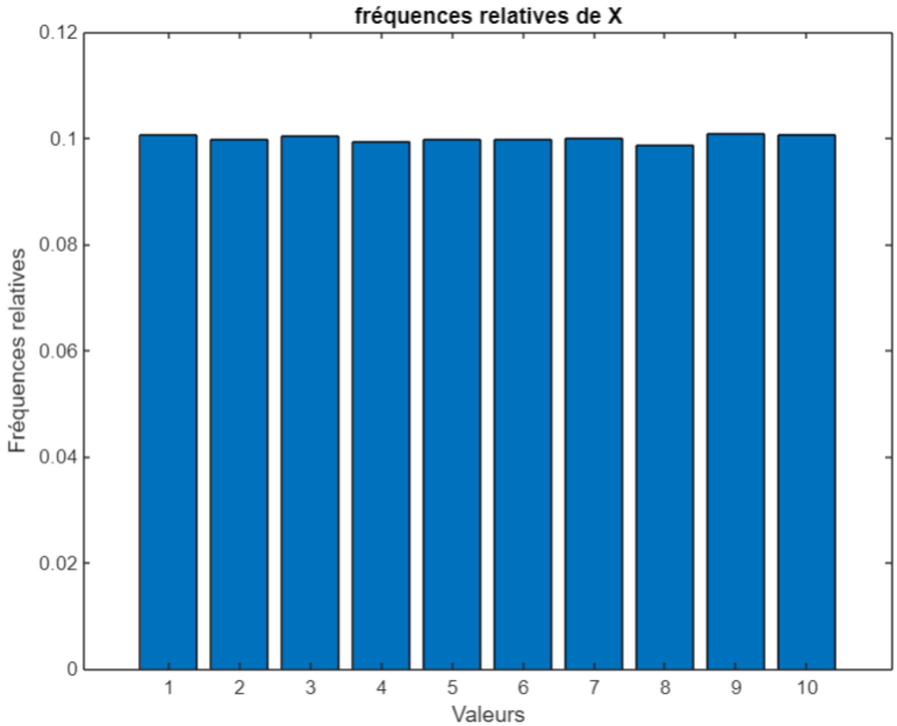

Figure 3. Histogramme de la fréquence relative de la variable aléatorie X

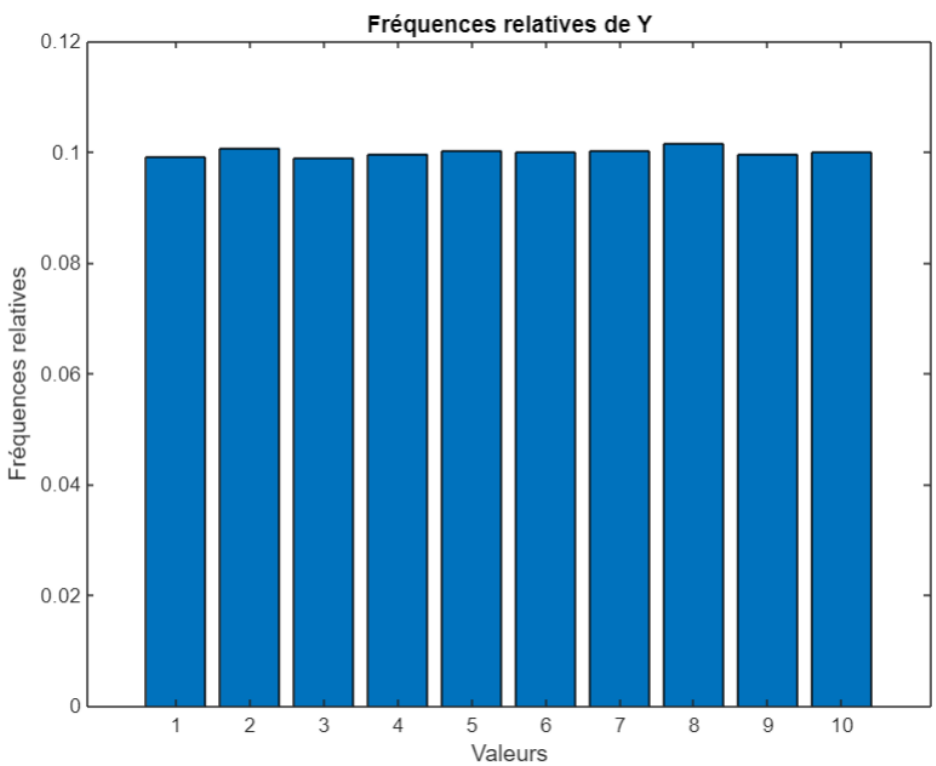

Figure 4. Histogramme de la fréquence relative de la variable aléatorie XY

b) Code MatLab :

```
k = 1:10; % le set de valeurs possibles
pk = ones(1,10)./10; % distribution uniforme

% Génération des valeurs aléatoires
Xi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Xi
Yi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Yi

% Calcul des fréquences relatives avec affichage dans un histogramme

Zi = Xi + Yi;
figure;

[total_occurrences_zi, ~] = histcounts(Zi, 'BinLimits', [1.5, 20.5],
'BinWidth', 1); % calcul des occurrences pour chaque valeur dans
[2,...,20]

frequences_relatives_zi = total_occurrences_zi /
sum(total_occurrences_zi); % calcul de chaque fréquence relative

bar([2:20], frequences_relatives_zi); % créations des axes

title('Fréquences relatives de Z');
xlabel('Valeurs');
ylabel('Fréquences relatives');
```

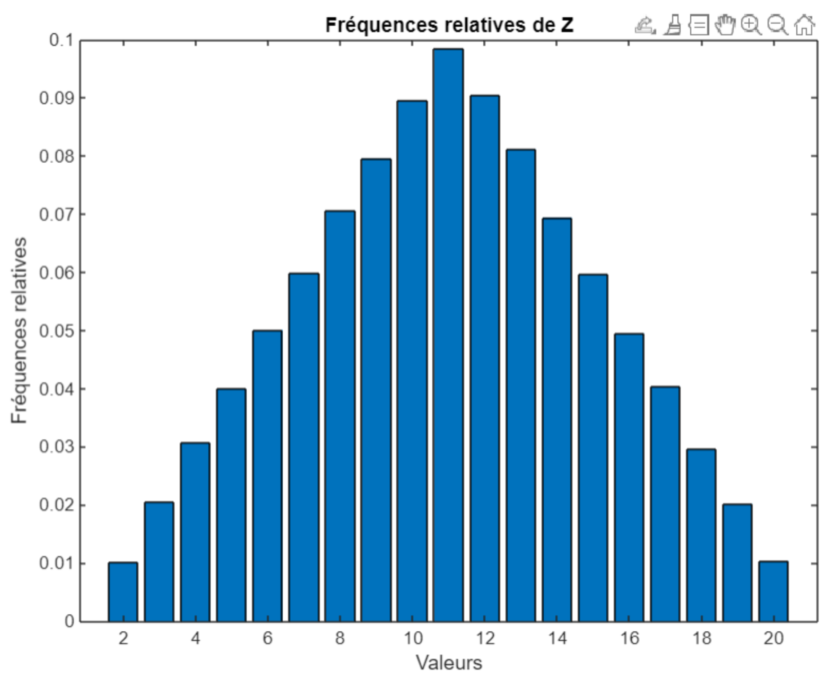

Figure 5. Histogramme de la fréquence relative de la variable aléatorie Z

La pmf est clairement identifiable, avec des fréquences relatives plus importantes dans les valeurs centrailes que dans les valeurs extrêmes, comme on s'y attendrait.

c) Code MatLab :

```
k = 1:10; % le set de valeurs possibles
pk = ones(1,10)./10; % distribution uniforme

% Génération des valeurs aléatoires
Xi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Xi
Yi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Yi

% Calcul des fréquences relatives avec affichage dans un histogramme

Wi = Xi .* Yi;
figure;

[total_occurrences_wi, ~] = histcounts(Wi, 'BinLimits', [0.5, 100.5],
'BinWidth', 1); % calcul des occurrences pour chaque valeur dans
[1,...,100]

frequences_relatives_wi = total_occurrences_wi /
sum(total_occurrences_wi); % calcul de chaque fréquence relative

bar([1:100], frequences_relatives_wi); % créations des axes

title('Fréquences relatives de W');
xlabel('Valeurs');
ylabel('Fréquences relatives');
```

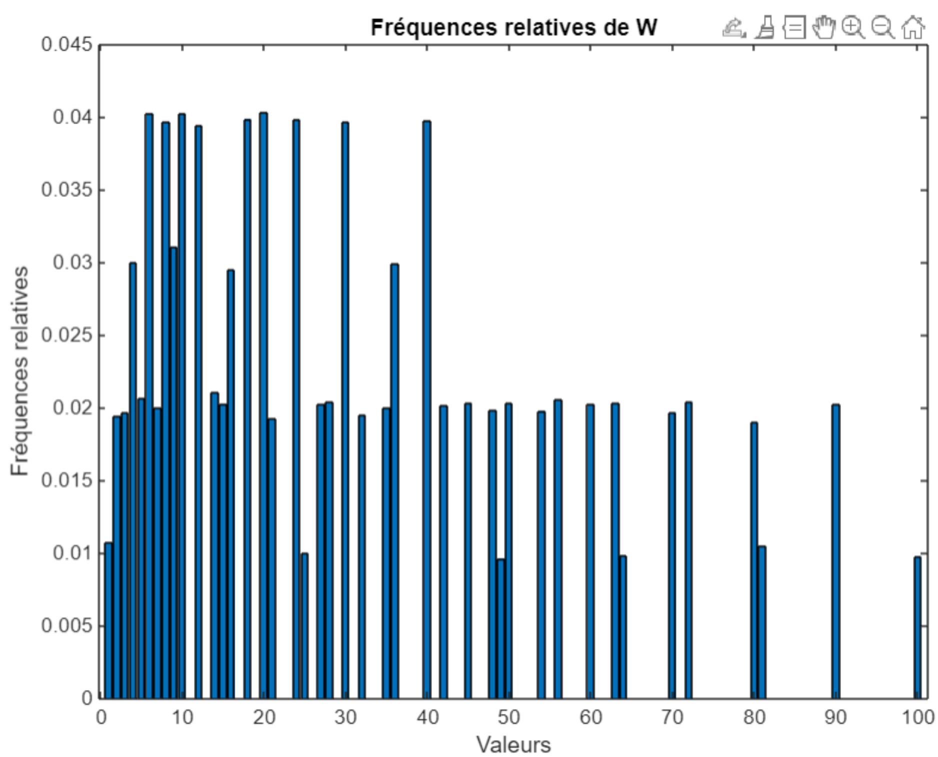

Figure 6. Histogramme de la fréquence relative de la variable aléatorie W

La pmf de W n’est pas clairement identifiable.

d) Code MatLab :

```
k = 1:10; % le set de valeurs possibles
pk = ones(1,10)./10; % distribution uniforme

% Génération des valeurs aléatoires
Xi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Xi
Yi = randsample(k, 100000, true, pk); % 100 000 Yi

% Calcul des fréquences relatives avec affichage dans un histogramme

Vi = Xi ./ Yi; % Division Xi par Yi
figure;

% Choix des intervalles de binning pour les valeurs de Vi
binEdges = 0:0.1:10; % Bins de 0.1 pour mieux capturer la distribution
[total_occurrences_vi, ~] = histcounts(Vi, binEdges); % calcul des
occurrences pour chaque bin

% Calcul de chaque fréquence relative
frequences_relatives_vi = total_occurrences_vi /
sum(total_occurrences_vi);

% Création de l'histogramme avec des bin centers
binCenters = binEdges(1:end-1) + diff(binEdges)/2; % Trouver les
centres des bins
bar(binCenters, frequences_relatives_vi, 'hist'); % Histogramme des
fréquences relatives

% Ajout du titre et des étiquettes
title('Fréquences relatives de V');
xlabel('Valeurs');
ylabel('Fréquences relatives');
```

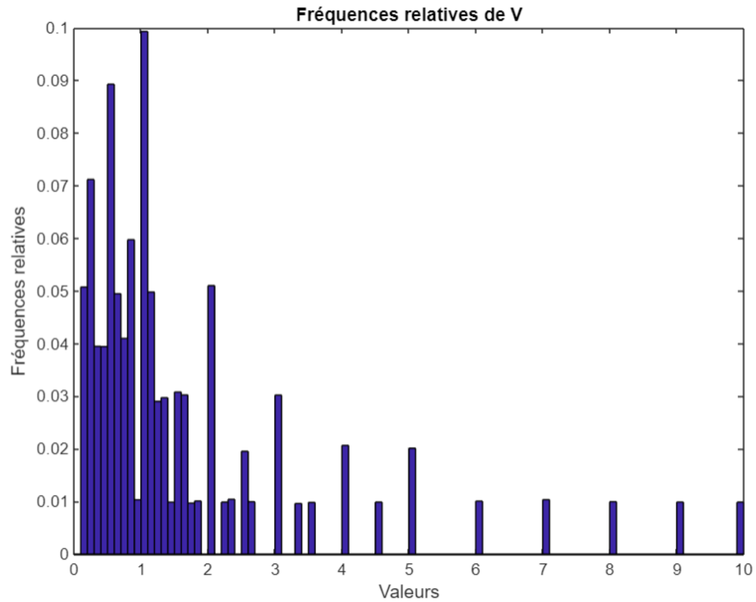

Figure 7. Histogramme de la fréquence relative de la variable aléatorie V

Sur cette histogramme, on voit une forme de courbe, donc la pmf est plus ou moins discernable. En gardant les groupes de données en valeurs entières, on obtient :

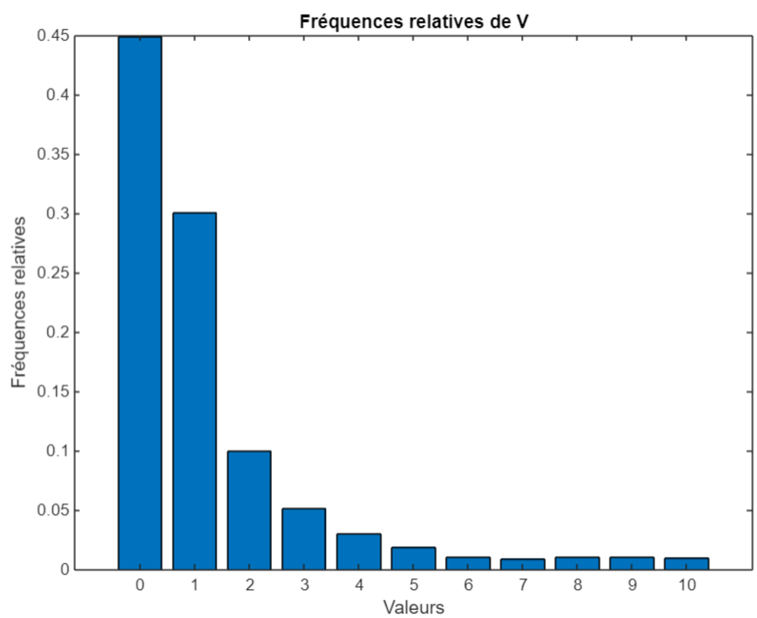

Figure 8. Histogramme de la fréquence relative de la variable aléatorie V

La pmf est plus discernable, toutefois l'histogramme est moins précis (il permet juste de mieux mettre en valeur la pmf).

Problème 5

Question 4.12

a) X est une variable aléatorie mixte en raison de ses sauts discontinus

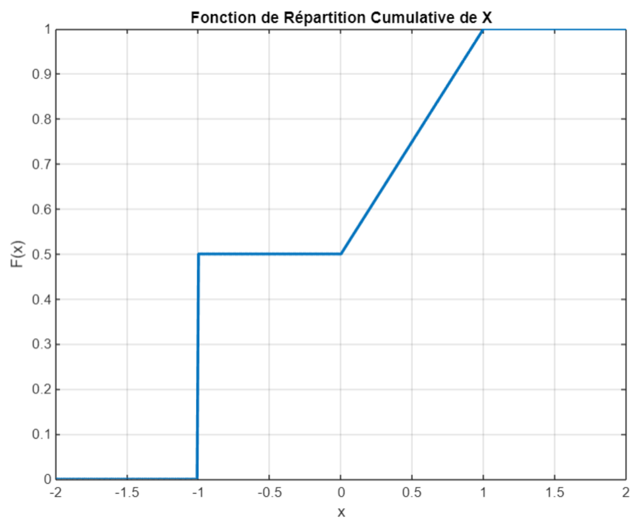

Figure 9. CDF de la variable aléatorie X

b)

$$P[x \leq -1] = 0.5$$

$$P[x = -1] = 0.5$$

$$P[x < 0.5] = P[x \leq 0.5] - P[x = 0.5] = \frac{1 + 0.5}{2} - 0 = 0.75$$

$$P[-0.5 < x < 0.5] = P[x < 0.5] - P[x \leq -0.5] = 0.75 - 0.5 = 0.25$$

$$P[x > -1] = 1 - P[x \leq -1] = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$P[x \leq 2] = 1$$

$$P[x > 3] = 1 - P[x \leq 3] = 1 - 1 = 0$$

Question 4.22

a)

- Cas $x < -1$:

$$F(x) = 0 \to f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = 0$$

- Cas $-1 \leq x \leq 0$:

$$F(x) = 0.5 \to f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = 0$$

- Cas $0 \leq x \leq 1$:

$$F(x) = \frac{1+x}{2} \to f(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1+x}{2}) = \frac{1}{2}$$

- Cas $x \geq 1$:

$$F(x) = 1 \to f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = 0$$

La pdf suivante est obtenue :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \; si \; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$$

Cette pdf ne fonctionne pas puisque elle n'aditionne pas à 1. Après des recherches, j'ai compris que c'est à cause d'un saut discontinu dans la cdf pour x = -1. En fait, X attribue une probabilité dirèctement à x = -1, donc une composante discrète, avec $P[X = -1] = 0.5$. En utilisant la distribution de Dirac, on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot \delta(x+1) \; si \; x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \; si \; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$$

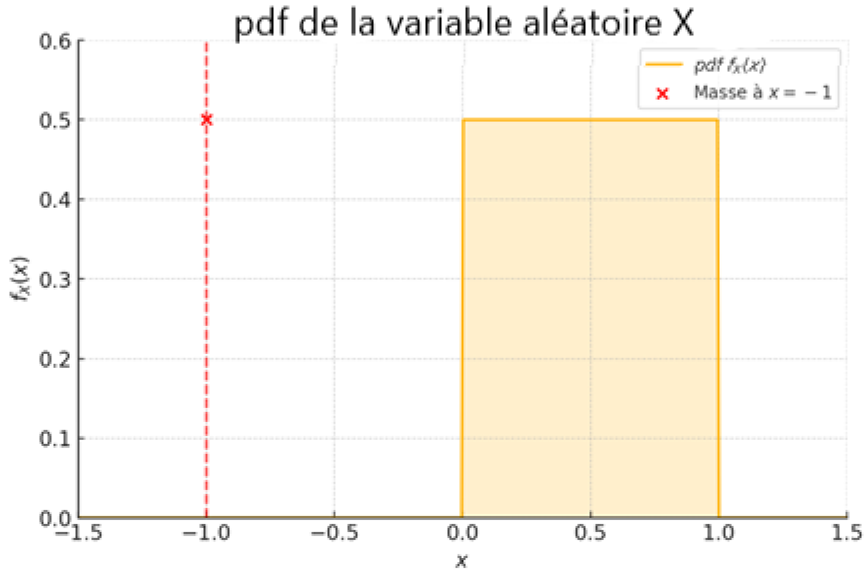

Figure 10. PDF de la variable aléatorie X

b)

$$P[-1 \leq x < 0.25] = \int_{-1}^{0.25} f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{0.25} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 0.5 \cdot \delta(x+1)dx + \int_{0}^{0.25} 0.5dx = 0.5x\Big|_{0}^{0.25} = 0.125 + 0.5 = 0.625$$

Question 4.44

En utilisant la pdf précédente et en la décomposant en partie discrète/continue, on trouve que :

$$E[X] = (-1 \times P[X = -1]) + \int_{0}^{1} x f_X(x)dx = (-0.5) + \left(0.5 \cdot \int_{0}^{1} xdx\right)$$

$$= (-0.5) + 0.5 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}\right) = -0.5 + 0.25 = -0.25$$

Pour la variance :

$$E[X^2] = (-1^2 \times P[X = -1]) + \int_{0}^{1} x^2 f_X(x)dx = 0.5 + 0.5 \cdot \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}\right) = \frac{4}{6}$$

$$VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{4}{6} - \frac{1}{16} = \frac{29}{48}$$

Problème 6

Question 4.56

a)

$$E[Y] = 3E[X] + 2$$

$$VAR[Y] = VAR[3X + 2] = VAR[3X] = 9 \cdot VAR[X]$$

b)

$$E[X] = 0 \wedge VAR[X] = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$E[Y] = 2 \wedge VAR[Y] = \frac{18}{\alpha^2}$$

c)

$$E[X] = \mu \wedge VAR[X] = \sigma^2$$

$$E[Y] = 3\mu + 2 \wedge VAR[Y] = 9 \cdot \sigma^2$$

d)

$$E[X] = \int_0^1 b \cdot \cos(2\pi u)\, du = b \cdot \int_0^1 \cos(2\pi u)\, du$$

$$= -b \cdot \sin(2\pi u)\Big|_0^1 = (-b \cdot 0) - (-b \cdot 0) = 0$$

$$E[Y] = 2$$

$$VAR[X] = b^2 \cdot \int_0^1 cos^2(2\pi u)\, du = b^2 \cdot \int_0^1 1 - sin^2(2\pi u)\, du$$

$$= b^2 \cdot \left(\int_0^1 1du - \int_0^1 sin^2(2\pi u)\, du \right) = b^2 \cdot \left(1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi u))du \right)$$

$$= b^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1du - \int_0^1 \cos(4\pi u)\, du \right) \right) = b^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(1 - 0)\right)$$

$$b^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{b^2}{2}$$

$$VAR[Y] = \frac{9b^2}{2}$$

Question 4.84

- X suit une loi de Laplace

$$f_X(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{a(x)} \; si \; x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-a(x)} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$$

Ensuite

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{y-2}{3}\right)$$

Ainsi que

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)$$

Donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{a}{2} e^{-a\left(\left|\frac{y-2}{3}\right|\right)}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\alpha\left(\frac{y-2}{3}\right)} \; si \; y < 2 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha\left(\frac{y-2}{3}\right)} \; si \; y \geq 2 \end{cases}$$

- X suit une loi gaussienne

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{y-2}{3} - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y-(2+3\mu)}{3\sigma}\right)$$

Et

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{y-2}{3}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{3\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-(2+3\mu))^2}{18\sigma^2}}$$

- X suit la fonction $b \cdot \cos(2\pi \cdot u)$

Par définition

$$f_U(u) = \frac{1}{b-a} = 1 \text{ où } 0 \le u \le 1;\ b = 1; a = 0$$

Posons

$$X = g(U) = b \cdot \cos(2\pi \cdot u)$$

Donc

$$U = g^{-1}(x) = \frac{1}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{X}{b}\right)$$

Passer de $f_U(u)$ à $f_X(x)$:

$$f_X(x) = f_U\left(g^{-1}(x)\right) \cdot \left|\frac{d}{dx} g^{-1}(x)\right| = f_U(u) \cdot \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{X}{b}\right)\right)\right|$$

$$= 1 \cdot \left|\frac{1}{-2\pi b\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}}\right| = \frac{1}{2\pi b\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}}$$

Pour $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi b\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{3b}\right)^2}}$$

Pour $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(X \le \frac{y-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)$$

$$F_X(x) = \int \frac{1}{2\pi b\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}} dx = \frac{1}{2\pi b}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}} dx = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}{2\pi}$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{y-2}{3b}\right)}{2\pi}$$

Problème 7

Table 4.2 :

```
x = [0:0.1:10];  % vecteur x avec valeures de 0 à 10 et pas de 0.1

% Q(x) = P(Z > x) = 1 - P(Z ≤ x) où Z ~ N(0,1)
y = 1 - normcdf(x);

% Afficher la table des y
format short e
y
```

Table 4.3 :

```
k = [1:1:10];              % k valeures entière de 1 à 10
p = 10 .^ (-k);            % on calcule 10^(-k) pour chaque k

% Q(x) = 1 − Φ(x)
% x = Q^{−1}(p) ⇒ Q(x) = p ⇒ p = 1 − Φ(x) ⇒ x = Φ^{−1}(1 − p)
% x = norminv(1 − p)

x = -norminv(p);       % par symétrie

% afficher la table des x
format long
x
```