Faculté des sciences et de génie — Université Laval

Processus aléatoires : méthodes d'étude et applications
GEL-7000
Automne 2024
Date de remise : 13 décembre 2024

Devoir 3

Destinataire

Ming Zeng

Maxence Quélennec 536 899 537

Problème 1

Question 9.5

a)

$$P[A = 1] = P[A = -1] = \frac{1}{2}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 \; si \; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Cas possibles pour $X(t)$:

- $g(t) = 1$

$$X(t) = 1 \; avec \; probabilité \; \frac{1}{2}$$

$$X(t) = -1 \; avec \; probabilité \; \frac{1}{2}$$

- $g(t) = 0$

$$X(t) = 0$$

Donc la pmf est :

$$P_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \; si \; x = 1 \; et \; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \; si \; x = -1 \; et \; 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \; si \; x = 0 \; et \; t < 0 \; ou \; t > 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

b)

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[A \cdot g(t)] = g(t) \cdot E[A]$$

$$= g(t) \cdot (1 \cdot P[X(t) = 1] + (-1) \cdot P[X(t) = -1])$$

$$= g(t) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$m_X(t) = \{0 \; pour \; tout \; t$$

c)

$$P_{X(t),X(t+d)}(x_1, x_2)$$

- $t \in [0,1]\ et\ t+d \in [0,1]$

$$g(t) = 1$$
$$g(t+d) = 1$$
$$X(t) = A$$
$$X(t+d) = A$$
$$P_{X(t),X(t+d)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ si\ x_1 = x_2\ car\ A_t = A_{t+d} \\ 0\ sinon \end{cases}$$

- $t \in [0,1]\ et\ t+d \notin [0,1]$

$$g(t) = 1$$
$$g(t+d) = 0$$
$$X(t) = A$$
$$X(t+d) = 0$$

$$P_{X(t),X(t+d)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ si\ x_1 = \pm 1\ et\ x_2 = 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$$

- $t \notin [0,1]\ et\ t+d \notin [0,1]$

$$g(t) = 0$$
$$g(t+d) = 0$$
$$X(t) = 0$$
$$X(t+d) = 0$$
$$P_{X(t),X(t+d)}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1\ si\ x_1 = 0\ et\ x_2 = 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$$

d)

$$C_X(t, t+d) = E[X(t) \cdot X(t+d)] = E[A \cdot g(t) \cdot A \cdot g(t+d)] = g(t) \cdot g(t+d) \cdot E[A^2]$$

$$E[A^2] = 1^2 \cdot P[X(t) = 1] + (-1)^2 \cdot P[X(t) = -1] = 1$$

$$C_X(t, t+d) = g(t) \cdot g(t+d)$$

- $t \in [0,1]\ et\ t+d \in [0,1]$
  $$C_X(t, t+d) = g(t) \cdot g(t+d) = 1 \cdot 1 = 1$$
- $t \in [0,1]\ et\ t+d \notin [0,1]$
  $$C_X(t, t+d) = g(t) \cdot g(t+d) = 1 \cdot 0 = 0$$
- $t \notin [0,1]\ et\ t+d \notin [0,1]$
  $C_X(t, t+d) = g(t) \cdot g(t+d) = 0 \cdot 0 = 0$

Problème 2

Question 9.16

a)

$$
\begin{aligned}
&E[Y_n] = c(n)E[X_n] = 0\\
&Var[Y_n] = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2 = E[Y_n^2]\\
&= c(n)^2E[X_n^2] = c(n)^2\\
&Var[Y_n] = c(n)^2
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&F_{Y_n,Y_{n+1}}(y_1, y_2) = P[Y_n < y_1, Y_{n+1} < y_2]\\
&= P[c(n)X_n < y_1, c(n+1)X_{n+1} < y_2]\\
&= \begin{cases}
P\left[X_n < \dfrac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} < \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right] \ si\ c(n) > 0\ et\ c(n+1) > 0\\
P\left[X_n < \dfrac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} > \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right] si\ c(n) > 0\ et\ c(n+1) < 0\\
P\left[X_n > \dfrac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} < \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right] si\ c(n) < 0\ et\ c(n+1) > 0\\
P\left[X_n > \dfrac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} > \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right] si\ c(n) < 0\ et\ c(n+1) < 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Réécriture des probabilités pour obtenir uniquement des termes inférieurs

$$
P\left[X_n < \frac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} > \frac{y_2}{c(n+1)}\right] = P\left[X_n < \frac{y_1}{c(n)}\right] - P\left[X_n < \frac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} < \frac{y_2}{c(n+1)}\right]
$$

$$
P\left[X_n > \frac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} < \frac{y_2}{c(n+1)}\right] = P\left[X_{n+1} < \frac{y_2}{c(n+1)}\right] - P\left[X_n < \frac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} < \frac{y_2}{c(n+1)}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&P\left[X_n > \frac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} > \frac{y_2}{c(n+1)}\right]\\
&\qquad = 1 - P\left[X_n < \frac{y_1}{c(n)}\right] - P\left[X_{n+1} < \frac{y_2}{c(n+1)}\right] + \left[X_n < \frac{y_1}{c(n)}, X_{n+1} < \frac{y_2}{c(n+1)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
F_{X_n,X_{n+1}}\left(\dfrac{y_1}{c(n)}, \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right) \ si\ c(n) > 0\ et\ c(n+1) > 0\\
F_{X_n}\left(\dfrac{y_1}{c(n)}\right) - F_{X_n,X_{n+1}}\left(\dfrac{y_1}{c(n)}, \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right) \ si\ c(n) > 0\ et\ c(n+1) < 0\\
F_{X_{n+1}}\left(\dfrac{y_2}{c(n+1)}\right) - F_{X_n,X_{n+1}}\left(\dfrac{y_1}{c(n)}, \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right) \ si\ c(n) < 0\ et\ c(n+1) > 0\\
1 - F_{X_n}\left(\dfrac{y_1}{c(n)}\right) - F_{X_{n+1}}\left(\dfrac{y_2}{c(n+1)}\right) + F_{X_n,X_{n+1}}\left(\dfrac{y_1}{c(n)}, \dfrac{y_2}{c(n+1)}\right) \ si\ c(n) < 0\ et\ c(n+1) < 0
\end{cases}
$$

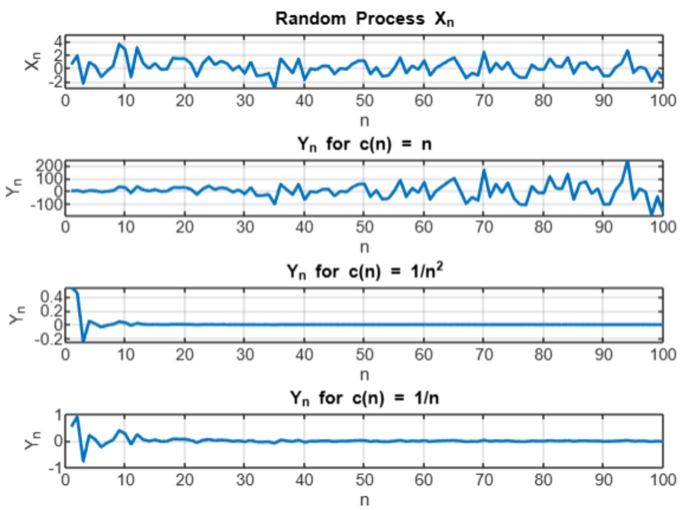
c)

$$Cov(Y_{n_1}, Y_{n_2}) = E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - E[Y_{n_1}]E[Y_{n_2}]$$

$$E[Y_n] = E[c(n)X_n] = c(n)E[X_n] = 0$$

$$Cov(Y_{n_1}, Y_{n_2}) = E[Y_{n_1} Y_{n_2}] = c(n_1)c(n_2)E[X_{n_1} X_{n_2}]$$
$$= c(n_1)c(n_2)Cov(X_{n_1}, X_{n_2})$$

d)



Pour c= 1/n^2 (matlab):

```
N = 100; % Number of samples

n = 1:N; % Time indices

X_n = randn(1, N); % Gaussian random variables with mean 0 and variance 1

c2 = 1 ./ n.^2;    % c(n) = 1/n^2

Y2 = c2 .* X_n; % Case c(n) = 1/n^2

figure;

subplot(4, 1, 3);

plot(n, Y2, 'LineWidth', 1.5);

title('Y_n for c(n) = 1/n^2');

xlabel('n');

ylabel('Y_n');

grid on;
```

Question 9.18

a)

$$R_{X_n,Y_n} = E[X_nY_n] = c(n)E[X_n^2] = c(n)$$

$$Cov(X_n, Y_n) = E[X_nY_n] - E[X_n]E[Y_n] = E[X_nY_n] = c(n)$$

b)

$$P[X_n < x, Y_{n+1} < y] = \begin{cases} F_{X_n,X_{n+1}}\left(x, \dfrac{y}{c(n+1)}\right) \; si \; c(n+1) > 0 \\ F_{X_n}(x) - F_{X_n,X_{n+1}}\left(x, \dfrac{y}{c(n+1)}\right) \; si \; c(n+1) < 0 \end{cases}$$

c)

$$Cov(X_n, Y_n) = c(n)$$

Donc Xn et Yn ne sont pas décorrélés car C(n) n’est pas égal à 0

$$Y_n = c(n)X_n$$

Clairement, Xn et Yn ne sont pas inépendants car Yn est directement dépendant de Xn.

$$E[X_nY_n] = c(n)$$

Donc Xn et Yn ne sont pas orthogonaux car c(n) n’est pas égal à 0.

Problème 3

Question 7.2

a)

$$\mu_Z(t) = E[Z(t)] = E[aX(t) + bY(t)] = aE[X(t)] + bE[Y(t)] = 0$$

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z(t_2)] = E\big[\big(aX(t_1) + bY(t_1)\big)\big(aX(t_2) + bY(t_2)\big)\big]$$

$$= a^2E[X(t_1)X(t_2)] + b^2E[Y(t_1)Y(t_2)] + abE[X(t_1)Y(t_2)] + abE[Y(t_1)X(t_2)]$$

Par indépendance de X et Y

$$= a^2E[X(t_1)X(t_2)] + b^2E[Y(t_1)Y(t_2)]$$

X et Y sont stationnaires au sens large, donc on peut réécire

$$R_Z(t_1, t_2) = a^2C_X(\tau) + b^2C_Y(\tau) = C_X(\tau)(a^2 + b^2)$$

La moyenne de Z(t) est constante dans le temps (=0).

Son autocorrélation dépend de τ et de constantes.

Alors Z(t) est stationnaire au sens large.

b)

$$\begin{aligned}\mu_V(t) &= E[V(t)] = E[X(t)\cos(2\pi f t) + Y(t) sin(2\pi f t)] \\ &= \cos(2\pi f t)\, E[X(t)] + sin(2\pi f t) E[Y(t)] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_V(t_1, t_2) &= E[V(t_1)V(t_2)] \\
&= E\big[\big(X(t_1)\cos(2\pi f t_1) + Y(t_1) sin(2\pi f t_1)\big)\big(X(t_2)\cos(2\pi f t_2) + Y(t_2) sin(2\pi f t_2)\big)\big] \\
&= \cos(2\pi f t_1)\cos(2\pi f t_2)\, E[X(t_1)X(t_2)] + \sin(2\pi f t_1)\sin(2\pi f t_2)\, E[Y(t_1)Y(t_2)] \\
&= \cos(2\pi f t_1)\cos(2\pi f t_2)\, C_X(\tau) + \sin(2\pi f t_1)\sin(2\pi f t_2)\, C_Y(\tau) \\
&= C_X(\tau)(\cos(2\pi f t_1)\cos(2\pi f t_2) + \sin(2\pi f t_1)\sin(2\pi f t_2)) \\
&= C_X(\tau)\cos\big(2\pi f(t_1 - t_2)\big) \\
&= C_X(\tau)\cos(2\pi f \tau)
\end{aligned}$$

V(t) est également stationnaire au sens large

c)

$$\mu_W(t) = E[W(t)] = E[aX(t)\cos(2\pi ft) + bY(t)sin(2\pi ft)]$$
$$= a\cos(2\pi ft)\, E[X(t)] + b\ sin(2\pi ft)E[Y(t)] = 0$$

$$R_W(t_1, t_2) = E[W(t_1)W(t_2)]$$
$$= E\big[\big(aX(t_1)\cos(2\pi ft_1) + bY(t_1)sin(2\pi ft_1)\big)\big(aX(t_2)\cos(2\pi ft_2) + bY(t_2)sin(2\pi ft_2)\big)\big]$$
$$= \mathrm{a}^2\cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2)\, E[X(t_1)X(t_2)] + \mathrm{b}^2\sin(2\pi ft_1)\sin(2\pi ft_2)\, E[Y(t_1)Y(t_2)]$$
$$= \mathrm{a}^2\cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2)\, C_X(\tau) + \mathrm{b}^2\sin(2\pi ft_1)\sin(2\pi ft_2)\, C_Y(\tau)$$
$$= C_X(\tau)(\mathrm{a}^2\cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2) + b^2\sin(2\pi ft_1)\sin(2\pi ft_2))$$

Si $\mathrm{a}^2 \neq b^2$, alors W(t) n'est pas stationnaire au sens large

d)

$$\mu_Z(t) = 0$$

$$Var\big(Z(t)\big) = E[Z(t)^2] = E\left[\big(aX(t) + bY(t)\big)^2\right]$$

En développant et par indépendance de X et Y

$$Var\big(Z(t)\big) = a^2E[X(t)^2] + b^2E[Y(t)^2] = a^2C_X(0) + b^2C_X(0) = (a^2 + b^2)C_X(0)$$

La pdf de Z(t) est :

$$f_{Z(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a^2 + b^2)C_X(0)}}\, e^{\left(-\frac{z^2}{2(a^2+b^2)C_X(0)}\right)}$$

Problème 4

Question 9.24

a)

$$E[Y_n] = E\left[\frac{1}{2}(X_n + X_{n-1})\right] = \frac{1}{2}E[X_n] + \frac{1}{2}E[X_{n-1}] = p$$

$$E[Z_n] = E\left[\frac{2}{3}X_n + \frac{1}{3}X_{n-1}\right] = \frac{2}{3}E[X_n] + \frac{1}{3}E[X_{n-1}] = p$$

$$Var(Y_n) = Var\left(\frac{1}{2}(X_n + X_{n-1})\right) = \frac{1}{4}Var(X_n) + \frac{1}{4}Var(X_{n-1}) + \frac{1}{2}Cov(X_n, X_{n-1})$$

Indépendance de deux variables de Bernoulli

$$= \frac{1}{2}p(1-p) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}p(1-p)$$

$$Var(Z_n) = Var\left(\frac{2}{3}X_n + \frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{4}{9}Var(X_n) + \frac{1}{9}Var(X_{n-1}) = \frac{5}{9}p(1-p)$$

La covariance :

$$Cov(Y_n, Z_n) = E[Y_n Z_n] - E[Y_n]E[Z_n]$$

$$E[Y_n Z_n] = E\left[\frac{1}{2}(X_n + X_{n-1})\left(\frac{2}{3}X_n + \frac{1}{3}X_{n-1}\right)\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{3}X_n^2 + \frac{1}{3}X_n X_{n-1} + \frac{1}{6}X_{n-1}^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}E[X_n^2] + \frac{1}{3}E[X_n X_{n-1}] + \frac{1}{6}E[X_{n-1}^2]$$

$$= \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{6}p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}p^2$$

$$Cov(Y_n, Z_n) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}p^2 - p^2 = p\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}p\right)$$

b)

Problème 9.25

a)

W(n) croit exponentiellement puisqu'il est le double de l'élément précédent

Z(n) décroit exponentiellement sauf quand Xn =1 qui vient perturber la décroissance en la remontant

b)

$$W_n = 2W_{n-1} + X_n$$

$$= 2(2W_{n-2} + X_{n-1}) + X_n$$

$$= 4(2W_{n-3} + X_{n-2}) + 2X_{n-1} + X_n$$

$$= 2^{n-1}X_1 + \cdots + 4X_{n-2} + 2X_{n-1} + X_n$$

$$E[W_n] = E[X]\frac{1-2^n}{1-2} = (2^n - 1)E[X]$$

$$Z_n = \frac{3}{4}Z_{n-1} + X_n$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}Z_{n-2} + X_{n-1}\right) + X_n$$

$$= \frac{9}{16}\left(\frac{3}{4}Z_{n-3} + X_{n-2}\right) + \frac{3}{4}X_{n-1} + X_n$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} X_1 + \cdots + \frac{9}{16}X_{n-2} + \frac{3}{4}X_{n-1} + X_n$$

$$E[Z_n] = E[X]\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)E[X]$$

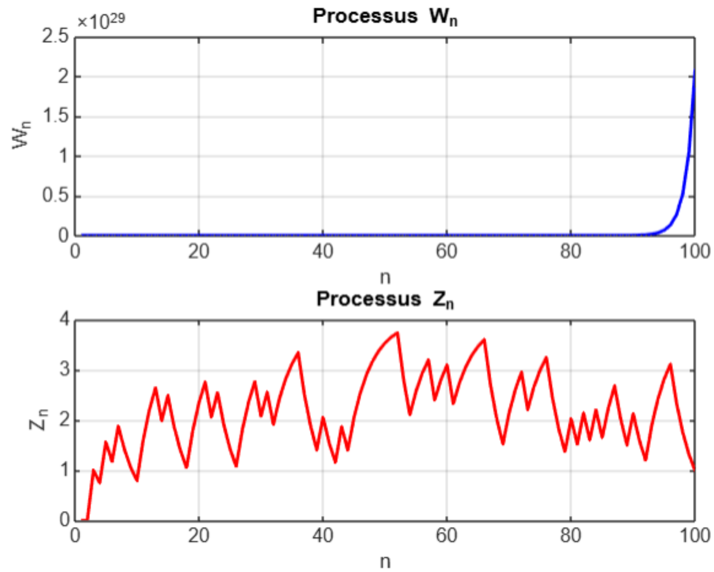
c)

$$W_n - W_{n-1} = 2W_{n-1} + X_n - W_{n-1} = W_{n-1} + X_n$$

$$Z_n - Z_{n-1} = \frac{3}{4}Z_{n-1} + X_n - Z_{n-1} = -\frac{1}{4}Z_{n-1} + X_n$$

Pour W(n) comme pour Z(n), les différences successives dépendent de n, donc les incréments ne sont ni indépendants ni stationnaires (i.e les incréments changent avec n donc pas stationnaires, et les incréments dépendent des valeurs précédentes donc pas d'indépendance).

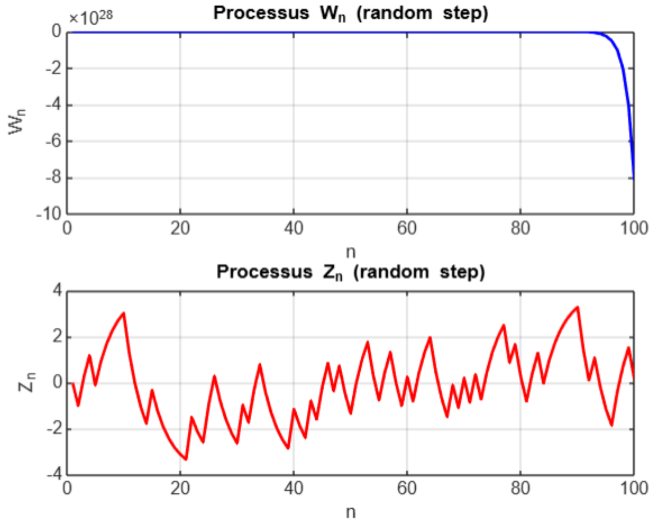
d)



La moyenne de W(n) n'est pas importante puisque sa valeur finale atteint $2 \cdot 10^{29}$

La moyenne de Z(n) est importante puisque le processus converge vers cette valeur.

e)



Le processus Wn agit encore une fois exponentiellement, donc sa moyenne est négligeable.

Le processus Zn converge encore vers une valeur (0) qui est sa moyenne donc cette dernière est significative.

Problème 5

Question 9.45

- PMF de Y(t)

$$P[Y(t) = 0] = P[Y(t) = 1] = \frac{1}{2}$$

- PMF de RTS

$$P[RTS(t) = -1] = P[RTS(t) = 1] = \frac{1}{2}$$

Concernant les pmf, les deux signaux se comportent similairement (i.e leurs probabilités sont également distribuées). La seule différence réside dans les valeurs prisent par les signaux.

- Covariance de Y(t)

$$C_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] - E[Y(t)]^2$$

$$E[Y(t)]^2 = \left(0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$E[Y(t_1)Y(t_2)] = P[Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1]$$

Cette probabilité conjointe dépend du nombre de transitions produites entre $t_1\ et\ t_2$. Pour notre cas :

$$P[Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1] = P[Y(t_1)] \cdot P[Nombre\ pair\ de\ transitions]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(1 + e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}$$

$$C_Y(t_1, t_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\lambda|t_2 - t_1|} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}$$

- Covariance de RTS

$$C_{RTS}(t_1, t_2) = E[RTS(t_1)RTS(t_2)] - E[RTS(t)]^2$$

$$E[RTS(t)]^2 = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$E[RTS(t_1)RTS(t_2)] = P[RTS(t_1) = 1, RTS(t_2) = 1] - P[RTS(t_1) \neq RTS(t_2)]$$
$$= P[Nombre\ pair\ de\ transitions] - P[Nombre\ impair\ de\ transitions]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}\right) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}$$

L'ajout des $\frac{1}{4}$ pour la covariance de Y vient de l'absence de symétrie dans les valeurs que le signal peut prendre

Problème 6

Question 9.2

a)

$$K_X = \begin{bmatrix} Var\big(X(t)\big) & Cov\big(X(t), X(t+\tau)\big) \\ Cov\big(X(t), X(t+\tau)\big) & Var\big(X(t+\tau)\big) \end{bmatrix}$$

$$Var\big(X(t)\big) = C_X(t,t) = 4e^{-2|t-t|} = 4$$

$$Var\big(X(t+\tau)\big) = C_X(t+\tau, t+\tau) = 4e^{-2|t+\tau-t-\tau|} = 4$$

$$Cov\big(X(t), X(t+\tau)\big) = C_X(t, t+\tau) = 4e^{-2|t-t-\tau|}$$

$$K_X = \begin{bmatrix} 4 & 4e^{-2|\tau|} \\ 4e^{-2|\tau|} & 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$f_{X(t),X(t+\tau)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(K_X)}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^T k_X^{-1} x\right)}$$

$$\det(K_X) = 16 - 16e^{-4|\tau|} = 16\big(1 - e^{-4|\tau|}\big)$$

$$K_X^{-1} = \frac{1}{16(1 - e^{-4|\tau|})} \begin{bmatrix} 4 & -4e^{-2|\tau|} \\ -4e^{-2|\tau|} & 4 \end{bmatrix}$$

$$f_{X(t),X(t+\tau)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{16(1 - e^{-4|\tau|})}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{16\left(1-e^{-4|\tau|}\right)} x^T \begin{bmatrix} 4 & -4e^{-2|\tau|} \\ -4e^{-2|\tau|} & 4 \end{bmatrix} x\right)}$$

$$f_{X(t),X(t+\tau)}(x_1, x_2) = \frac{1}{8\pi\sqrt{(1 - e^{-4|\tau|})}} e^{\left(-\frac{1}{32\left(1-e^{-4|\tau|}\right)} x^T \begin{bmatrix} 4 & -4e^{-2|\tau|} \\ -4e^{-2|\tau|} & 4 \end{bmatrix} x\right)}$$

Problème 7

a)

$$\mu_X(t) = E[\alpha A + \beta] = \alpha E[A] + \beta = \alpha \frac{-2+3}{2} + \beta = \frac{1}{2}\alpha + \beta$$

La moyenne ne dépend pas de t alors elle est stationnaire en moyenne

b)

$$\mu_x(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (\alpha A + \beta) dt = \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T} (\alpha A) dt + \int_{-T}^{T} (\beta) dt\right)$$

$$\frac{1}{2T}(\alpha A \cdot 2T + \beta \cdot 2T) = \alpha A + \beta$$

$$\mu_X(t) \neq \mu_X(T)$$

Le processus n'est pas ergodique en moyenne.

c)

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(\alpha A + \beta)(\alpha A + \beta)]$$

$$= E[\alpha^2 A^2 + 2\alpha A\beta + \beta^2] = E[\alpha^2 A^2] + E[2\alpha A\beta] + E[\beta^2]$$

$$E[\alpha^2 A^2] = \alpha^2 E[A^2] = \alpha^2(Var(A) + E[A]^2)$$

$$= \alpha^2\left(\frac{(3 - -2)^2}{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{3}\alpha^2$$

$$E[2\alpha A\beta] = 2\alpha \frac{1}{2}\beta = \alpha\beta$$

$$E[\beta^2] = \beta^2$$

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{7}{3}\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

Le processus est stationnaire en autocorrélation car cette dernière est indépendante de t1 et t2.

d)

$$R_x(\tau,T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)X(t)dt$$

$$X(t+\tau)X(t) = \alpha^2A^2 + 2\alpha A\beta + \beta^2$$

$$R_x(\tau,T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \alpha^2A^2 + 2\alpha A\beta + \beta^2 dt = \alpha^2A^2 + 2\alpha A\beta + \beta^2$$

Clairement, on a que

$$\lim_{T\to\infty} R_x(\tau,T) \neq R_X(\tau)$$

Le processus n’est pas ergoditque en autocorrélation.