Faculté des sciences et de génie — UNIVERSITÉ LAVAL

Processus aléatoires : méthodes d'étude et applications
GEL-7000
Automne 2024
Date de remise : 15 novembre 2024

Devoir 2

Destinataire

Ming Zeng

Maxence Quélennec 536 899 537

Problème 1

Question 5.27

a)

$$\int_0^1 \int_0^1 kx(1-x)y\,dxdy = 1$$
$$= k \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 = k \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}k = 1$$
$$k = 12$$

b)

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_0^y kx(1-x)y\,dxdy$$
$$= k \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^x \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^y = 12 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{y^2}{2}\right)$$
$$(3x^2 - 2x^3)(y^2)$$

c)

$$f_X(x) = \int_0^1 kx(1-x)y\,dy = 12(x)(1-x)\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 = 6(x)(1-x)$$
$$f_Y(y) = \int_0^1 kx(1-x)y\,dx = 12(y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = 2y$$

d)

$$P[Y < \sqrt{X}] = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} kx(1-x)y\,dxdy = \int_0^1 kx(1-x)\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{kx(1-x)x}{2} dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$P[X < Y] = \int_0^1 \int_0^y kx(1-x)y\,dydx = \int_0^1 k \cdot y\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^y dy$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{y^4}{8} - \frac{y^5}{15}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = 12 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{15}\right) = \frac{3}{2} - \frac{12}{15} = \frac{45 - 24}{30} = \frac{21}{30} = 0.7$$

5.46

$$f_{X,Y}(x,y) \overset{?}{\leftrightarrow} f_X(x) \cdot f_Y(y)$$
$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 6x(1-x) \cdot 2y = 12x(1-x)y = f_{X,Y}(x,y)$$

X et Y sont indépendantes puisque le produit de leur pdf marginales donnent la pdf conjointe.

5.66

Corrélation :

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 (x)(y)kx(1-x)y \, dxdy$$
$$= (12)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\left(\frac{y^3}{3}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = (12)\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

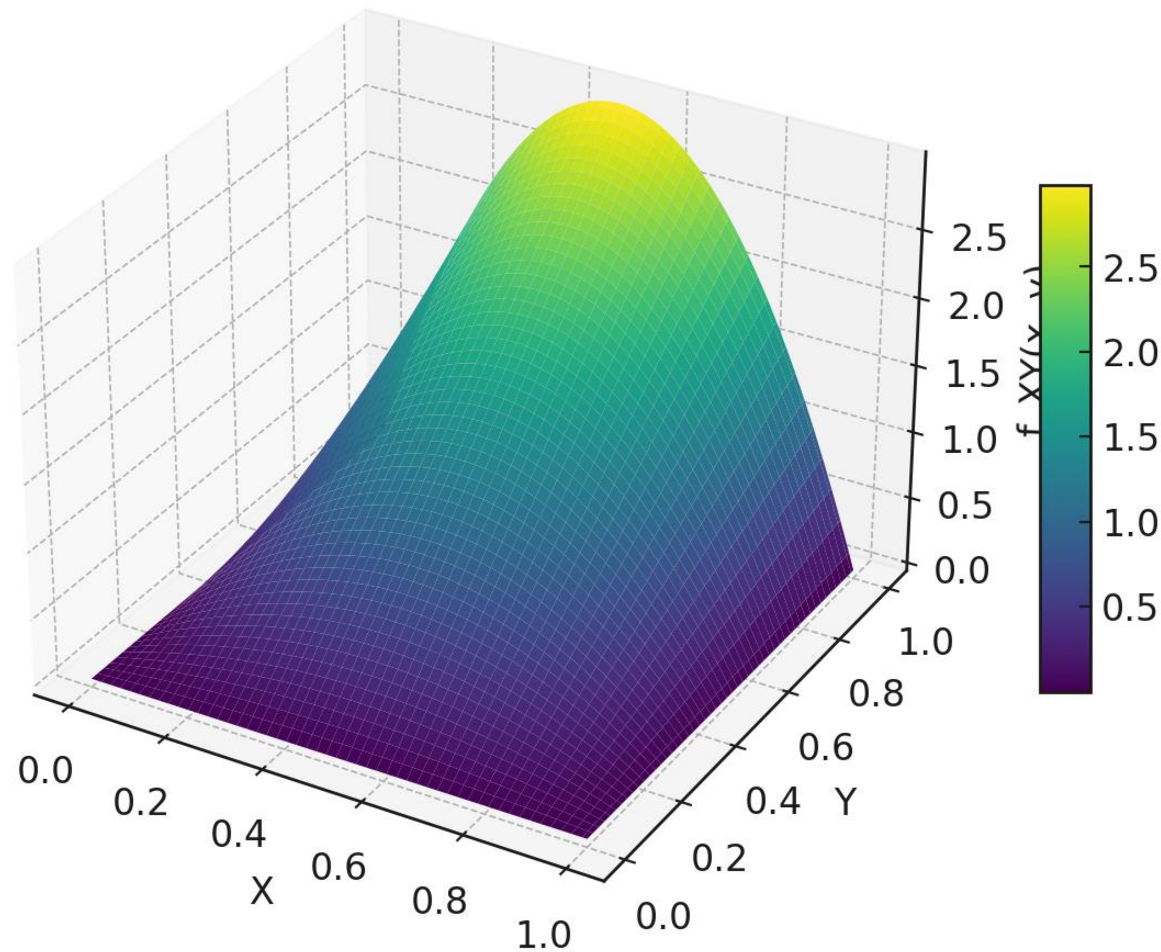
Covariance :

$$COV(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$
$$E[X] = \int_0^1 (x)f_X(x)dx = \int_0^1 (6)(x^2)(1-x)dx$$
$$= (6)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{1}{2}$$
$$E[Y] = \int_0^1 (y)f_Y(y)dy = \int_0^1 (y)(2y)dy$$
$$= (2)\left(\frac{y^3}{3}\right)\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{2}{3}$$
$$COV(X,Y) = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

X et Y sont indépendantes car la covariance est de 0.

Elles ne sont pas orthogonales car la corrélation ne vaut pas 0.

Elles ne sont pas corrélées.



0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
X
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Y
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

Problème 2

Question 5.105

a)

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{W+Z}{2} \; et \; Y = \frac{W-Z}{2}$$

$$f_{WZ}(w,z) = f_{XY}\left(\frac{w+z}{2}, \frac{w-z}{2}\right)$$

b)

$$f_{WZ}(w,z) = f_X\left(\frac{w+z}{2}\right) f_Y\left(\frac{w-z}{2}\right) = e^{-\left(\frac{w+z}{2}\right)} e^{-\left(\frac{w-z}{2}\right)} = e^{-w}$$

$$f_{WZ}(w,z) = f_X\left(\frac{w+z}{2}\right) f_Y\left(\frac{w-z}{2}\right)$$

c)

$$f_{WZ}(w,z) = f_X\left(\frac{w+z}{2}\right) f_Y\left(\frac{w-z}{2}\right)$$

$$= \frac{a \cdot x_m^a}{\left(\frac{w+z}{2}\right)^{a+1}} \cdot \frac{a \cdot x_m^a}{\left(\frac{w-z}{2}\right)^{a+1}} = \frac{a^2 x_m^{2a}}{\left(\frac{w^2-z^2}{4}\right)^{a+1}}$$

Problème 3

a)

$$\int_0^5 \int_0^4 \int_0^3 a(x_1 + x_2 + x_3)dx_1 dx_2 dx_3 = 1$$

$$= a\int_0^5 \int_0^4 \left(\int_0^3 x_1 dx_1 + \int_0^3 x_2 dx_1 + \int_0^3 x_3 dx_1\right) dx_2 dx_3$$

$$= a\int_0^5 \int_0^4 \left(\frac{3^2}{2} + 3x_2 + 3x_3\right) dx_2 dx_3$$

$$= a\int_0^5 \left(\int_0^4 \frac{9}{2} dx_2 + \int_0^4 3x_2 dx_2 + \int_0^4 3x_3 dx_2\right) dx_3$$

$$= a\int_0^5 \left(\frac{36}{2} + \frac{48}{2} + 12x_3\right) dx_3$$

$$= a\left(\frac{180}{2} + \frac{240}{2} + \frac{300}{2}\right) = 1$$

$$a = \frac{1}{360}$$

b)

$$f_{x_2 x_3}(x_2, x_3) = a\int_0^3 (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1$$

$$= a\left(\frac{9}{2} + 3x_2 + 3x_3\right) = \frac{1}{360}\left(\frac{9}{2} + 3x_2 + 3x_3\right)$$

$$0 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 5$$

c)

$$f_{x_3}(x_3) = a\int_0^4 \int_0^3 (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2$$

$$= a\int_0^4 \left(\frac{9}{2} + 3x_2 + 3x_3\right) dx_2 = a\left(\frac{36}{2} + \frac{48}{2} + 12x_3\right) = \frac{1}{360}(42 + 12x_3)$$

$$0 \leq x_3 \leq 5$$

d)

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2 | x_3) = \frac{f_x(x_1, x_2, x_3)}{f_{x_3}(x_3)}$$

$$\frac{a(x_1 + x_2 + x_3)}{a(42 + 12x_3)} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{(42 + 12x_3)}$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 5$$

e)

$$f_{x_1}(x_1 | x_2, x_3) = \frac{f_x(x_1, x_2, x_3)}{f_{x_2 x_3}(x_2, x_3)}$$

$$\frac{a(x_1 + x_2 + x_3)}{a\left(\frac{9}{2} + 3x_2 + 3x_3\right)} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3\left(\frac{3}{2} + x_2 + x_3\right)}$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 5$$

Problème 4

a)

$$E[Y] = A * E[X]$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

$$E[X] = (\mu, \mu, \mu, \mu)$$

$$E[Y] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{8}\mu \\ \frac{7}{4}\mu \\ \frac{3}{2}\mu \\ \mu \end{bmatrix}$$

b)

$$R_Y = E[YY^T] = E[(AX)(AX)^T] = AE[XX^T]A^T = AR_XA^T$$

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y = AR_XA^T = AA^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{85}{64} & \frac{21}{32} & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{21}{32} & \frac{85}{64} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$K_Y = R_Y - E[Y]E[Y]^T$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{85}{64} & \frac{21}{32} & \frac{5}{16} & 0\\ \frac{21}{32} & \frac{85}{64} & \frac{5}{8} & 0\\ \frac{5}{16} & \frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{15}{8}\mu\\ \frac{7}{4}\mu\\ \frac{3}{2}\mu\\ \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{15}{8}\mu & \frac{7}{4}\mu & \frac{3}{2}\mu & \mu\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{85}{64} & \frac{21}{32} & \frac{5}{16} & 0\\ \frac{21}{32} & \frac{85}{64} & \frac{5}{8} & 0\\ \frac{5}{16} & \frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{225}{64}\mu^2 & \frac{105}{32}\mu^2 & \frac{45}{16}\mu^2 & \frac{15}{8}\mu^2\\ \frac{105}{32}\mu^2 & \frac{49}{16}\mu^2 & \frac{21}{8}\mu^2 & \frac{7}{4}\mu^2\\ \frac{45}{16}\mu^2 & \frac{21}{8}\mu^2 & \frac{9}{4}\mu^2 & \frac{3}{2}\mu^2\\ \frac{15}{8}\mu^2 & \frac{7}{4}\mu^2 & \frac{3}{2}\mu^2 & \mu^2\end{bmatrix}$$

$$K_Y=\begin{bmatrix}\frac{85}{64}-\frac{225}{64}\mu^2 & \frac{21}{32}-\frac{105}{32}\mu^2 & \frac{5}{16}-\frac{45}{16}\mu^2 & -\frac{15}{8}\mu^2\\ \frac{21}{32}-\frac{105}{32}\mu^2 & \frac{85}{64}-\frac{49}{16}\mu^2 & \frac{5}{8}-\frac{21}{8}\mu^2 & -\frac{7}{4}\mu^2\\ \frac{5}{16}-\frac{45}{16}\mu^2 & \frac{5}{8}-\frac{21}{8}\mu^2 & \frac{5}{4}-\frac{9}{4}\mu^2 & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mu^2\\ -\frac{15}{8}\mu^2 & -\frac{7}{4}\mu^2 & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mu^2 & 1-\mu^2\end{bmatrix}$$

d)

$$K_{XY}=E[(X-E[X])(Y-E[Y])^T]=E[(X-E[X])(AX-E[Y])^T]$$

Le terme de droite est :

$$AX-E[Y]=AX-AE[X]=A(X-E[X])$$

Ainsi, par la propriété de la transposé, on a que :

$$E[(X-E[X])(AX-E[Y])^T]=E[(X-E[X])(X-E[X])^TA^T]$$

Ce qui se simplifie en :

$$K_{XY}=R_XA^T=A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

Problème 5

Question 6.57

a)

$\mathrm{K}_Y\ pour\ Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$

$K_Y = \begin{bmatrix} Var(Y_1) & Cov(Y_1,Y_2) & Cov(Y_1,Y_3) \\ Cov(Y_2,Y_1) & Var(Y_2) & Cov(Y_2,Y_3) \\ Cov(Y_3,Y_1) & Cov(Y_3,Y_2) & Var(Y_3) \end{bmatrix}$

$Var(Y_1) = Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 1 + 1 = 2$

$Var(Y_2) = Var(X_2 + X_3) = Var(X_2) + Var(X_3) = 1 + 1 = 2$

$Var(Y_3) = Var(X_3 + X_4) = Var(X_3) + Var(X_4) = 1 + 1 = 2$

$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$

$= Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) + Cov(X_2, X_2) + Cov(X_2, X_3)$

$= 0 + 0 + 1 + 0 = 1$

$Cov(Y_1, Y_3) = Cov(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

$Cov(Y_2, Y_3) = Cov(X_2 + X_3, X_3 + X_4) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$

$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(Y_2, Y_1);\ Cov(Y_1, Y_3) = Cov(Y_3, Y_1);\ Cov(Y_2, Y_3) = Cov(Y_3, Y_2)$

$K_Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b)

$$f_Y(y) = f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(\det K_Y)^{\frac{1}{2}}} e^{\left(-\frac{1}{2}(y-\mu_Y)^T K_Y^{-1}(y-\mu_Y)\right)}$$

$$\mu_Y = \begin{bmatrix} E[Y_1] \\ E[Y_2] \\ E[Y_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det k_Y = 4$$

$$K_Y^{-1} = \frac{1}{|K_Y|}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot 2} e^{\left(-\frac{1}{2}(y)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (y)\right)}$$

c)

$$\mu_{Y_1,Y_2} = \begin{bmatrix} E[Y_1] \\ E[Y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{Y_1,Y_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det k_{Y_1,Y_2} = 3$$

$$K_{Y_1,Y_2}^{-1} = \frac{1}{|K_{Y_1,Y_2}|} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}^T K_{Y_1,Y_2}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{3}(y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2)\right)}$$

$$\mu_{Y_1,Y_3} = \begin{bmatrix} E[Y_1] \\ E[Y_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{Y_1,Y_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det k_{Y_1,Y_3} = 4$$

$$K_{Y_1,Y_3}^{-1} = \frac{1}{|K_{Y_1,Y_3}|} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi} e^{\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix}^T K_{Y_1,Y_3}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix}\right)} = \frac{1}{4\pi} e^{\left(-\frac{1}{4}(y_1^2 + y_3^2)\right)}$$

d)

$$K_Y - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|K_Y - \lambda I| = 0$$

$$|K_Y - \lambda I| = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) - 1(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0$$

$$2 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - (4)(1)(2)}}{(2)(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

3 valeurs propres : 2 ; $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$

3 vecteurs propres :

$$(K_Y - 2I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = 0; v_3 = -v_1$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(K_Y - \left(2 + \sqrt{2}\right)I\right)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(K_Y - \left(2 - \sqrt{2}\right)I\right)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_2; v_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_3$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$D^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{bmatrix}$$

$$A = D^{-\frac{1}{2}}P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{bmatrix}$$

Question 6.61c

Z suit également une variable aléatoire gaussienne.

$$E[Z] = E[Y_1 + Y_2 + Y_3] = E[Y_1] + E[Y_2] + E[Y_3] = 0$$

$$Var(Z) = Var(Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

$$= Var(Y_1) + Var(Y_2) + Var(Y_3) + 2Cov(Y_1, Y_2) + 2Cov(Y_1, Y_3) + +2Cov(Y_2, Y_3)$$

$$= 2 + 2 + 2 + (2)(1) + (2)(0) + (2)(1) = 10$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} e^{\left(-\frac{z^2}{20}\right)}$$

Problème 6

Question 6.84

a)

$$Var(Y_K) = E[Y_k^2] = E\left[\left(\frac{X_k + X_{k-1}}{2}\right)^2\right] = E\left[\frac{X_k^2 + 2X_kX_{k-1} + X_{k-1}^2}{4}\right]$$

$$= \frac{E[X_k^2] + E[2X_kX_{k-1}] + E[X_{k-1}^2]}{4} = \frac{Var(X_k) + 0 + Var(X_{k-1})}{4} = \frac{1+0+1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Cov(Y_kY_{k+1}) = E[Y_kY_{k+1}] = E\left[\left(\frac{X_k + X_{k-1}}{2}\right)\left(\frac{X_k + X_{k+1}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{E[X_kX_{k+1}] + E[X_k^2] + E[X_{k-1}X_k] + E[X_{k-1}X_{k+1}]}{4} = \frac{(0+1+0+0)}{4} = \frac{1}{4}$$

$$Cov(Y_kY_i) = 0 \; pour \; i \neq k, k+1 \; par \; indépendance$$

$$K_Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) code matlab

```
X = randn(1, 50000);

Y = (X + [0, X(1:end-1)]) / 2;

cov(Y);
```

Question 6.85

a)

$$Var(Y_K) = E[Y_k^2] = E[(X_k - X_{k-1})^2] = E[X_k^2 - 2X_kX_{k-1} + X_{k-1}^2]$$

$$= E[X_k^2] - E[2X_kX_{k-1}] + E[X_{k-1}^2] = Var(X_k) + 0 + Var(X_{k-1}) = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$Cov(Y_kY_{k+1}) = E[Y_kY_{k+1}] = E[(X_k - X_{k-1})(X_{k+1} - X_k)]$$

$$= E[X_k X_{k+1}] - E[X_k^2] - E[X_{k-1}X_{k+1}] + E[X_{k-1}X_k] = 0 - 1 + 0 + 0 = -1$$

$$Cov(Y_k Y_i) = 0 \; pour \; i \neq k, k+1 \; par \; indépendance$$

$$K_Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

b) code matlab

```
X = randn(1, 50000);

Y = X - [0, X(1:end-1)];

cov(Y);
```

Problème 7

a)

$$E[S_n] = E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = n\mu$$

$$Var(S_n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= n\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{1\le i<j\le n} p^{|i-j|}$$

b)

$$E[S_8] = 8\mu$$

$$Var(S_8) = 8\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{1\le i<j\le 8} p^{|i-j|}$$

$$\sum_{1\le i<j\le 8} p^{|i-j|} = (p^1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7)$$
$$+(p^1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6) + (p^1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^5)$$
$$+ \cdots + (p^1) = 7p^1 + 6p^2 + 5p^3 + 4p^4 + 3p^5 + 2p^6 + 1p^7$$

$$Var(S_8) = 8\sigma^2 + 2\sigma^2(7p + 6p^2 + 5p^3 + 4p^4 + 3p^5 + 2p^6 + 1p^7)$$
$$= \sigma^2\big(8 + 2(7p + 6p^2 + 5p^3 + 4p^4 + 3p^5 + 2p^6 + p^7)\big)$$

c)

$$E[S_8] = (8)(5) = 40$$

$$Var(S_8) = 8 + 2(7p + 6p^2 + 5p^3 + 4p^4 + 3p^5 + 2p^6 + p^7)$$

d)

$$E[S_8] = 40$$

$$Var(S_8) = 8 + 2\left(\frac{7}{2} + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)$$
$$= (8) + 2\big((3.5) + (1.5) + (0.625) + (0.25) + (0.09375) + (0.03125) + (0.0078125)\big)$$
$$= (8) + (2)(6.0038125) = 20.007625$$

Problème 8

Temps d'arrivée du nième message :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

Ainsi, on trouve facilement que

$$E[S_n] = nE[X_i] = \frac{n}{15}$$

$$Var[S_n] = nVar[X_i] = \frac{n}{225}$$

La problématique est

$$P[S_{950} < 60] = P\left[\frac{S_{950} - E[S_{950}]}{\sigma_{950}} < \frac{60 - E[S_{950}]}{\sigma_{950}}\right]$$

$$= P\left[\frac{S_{950} - 63.33}{\sqrt{4.22}} < \frac{60 - 63.33}{\sqrt{4.22}}\right] = 1 - Q(-1.621) = Q(1.621) = 0.0525$$

Problème 9

a)

La moyenne de cet échantillon est :

$$\hat{X} = \frac{350}{10} = 35$$

La variance de cet échantillon est :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{10} X_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{10} X_j\right)^2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{10-1}\left(12645 - \left(\frac{350^2}{10}\right)\right) = 43.89$$

Pour l'intervalle de confiance de 90% pour la moyenne de X:

$$\left[\hat{X} - t_{0,05,9} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \hat{X} + t_{0,05,9} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \left[35 - 1.833 \cdot \frac{\sqrt{43.89}}{\sqrt{10}}, 35 + 1.833 \cdot \frac{\sqrt{43.89}}{\sqrt{10}}\right]$$

$$= [31.16\,, 38.84]$$

b)

L'intervalle de confiance de 90% pour la variance de X est donné par :

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0,05,9}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0,95,9}}\right] = \left[\frac{(9)(43.89)}{(16.42)}, \frac{(9)(43.89)}{(3.325)}\right] = [23.35\,, 118.79]$$

Problème 10

a)

Dans cette mise en situation, il semblait intéressant d'établir des variables aléatoires pour la représenter.

$$A = B + C$$

Où A est la sortie du receveur, et est donné par la somme de B (tension d'entrée) et C (variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et variance 4), possiblement du bruit.

L'hypothèse H0 est : B = 0.

Ainsi, une validation d'H0 signifie l'absence d'une tension d'entrée non nulle.

Par contradiction, H1 : B =/= 0

Le problème nous informe aussi que :

$$a = 0.01$$

$$\hat{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n}$$

Donc, nous allons rejeter H0 et accepter H1 si

$$|\hat{A}| > z_{0.005} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Accepter H0 autrement.

b)

Nous allons rejeter H0 et accepter H1 si

$$|-0.75| > z_{0.005} \frac{\sigma}{\sqrt{10}}$$

Accepter H0 autrement.

c)

$$P[Type\ II] = P[H0|H1] =$$

Problème 11

$$a = \frac{1}{5}$$

a)

$$X_i = \Theta + N_i$$

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Pour H1 :

$$H_1 \rightarrow X_i = 1 + N_i$$

$$E[X_i|H_1] = E[1 + N_i] = 1 + E[N_i] = 1$$

$$Var(X_i|H_1) = Var(N_i) = \sigma^2$$

$$E[X|H_1] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i|H_i] = \frac{1}{n} * n * 1 = 1$$

$$Var(X) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} * n * \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Similairement pour H0, on a que :

$$E[X|H_0] = -1$$

Ainsi :

$$H_1 \rightarrow X \sim N\left(1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$H_0 \rightarrow X \sim N\left(-1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

La règle de décision de vraisemblance maximale est :

$$\Lambda(x) = \frac{f_X(x|H_1)}{f_X(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

Ce qui est naturel puisque H1 sera choisi si $f_X(x|H_1) > f_X(x|H_0)$, H0 autrement.

On a donc les fonctions de densités de X selon H1 ou H0, qu'on peut remplacer dans l'équation :

$$\Lambda(x) = \frac{\frac{e^{\left(-\frac{(x-1)^2}{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)}}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}}}{\frac{e^{\left(-\frac{(x+1)^2}{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)}}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

En simplifiant, on enlève chaque diviseur et on applique un ln à chaque côté :

$$-\frac{(x-1)^2}{\frac{2\sigma^2}{n}} + \frac{(x+1)^2}{\frac{2\sigma^2}{n}} = \frac{-(x^2-2x+1)+(x^2+2x+1)}{\frac{2\sigma^2}{n}} = \frac{2x}{\frac{\sigma^2}{n}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

La simplification finale de la règle de décision est :

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

Signifiant que le seuil pour x est 0. La décision tend vers H1 si x>0, et tend vers H0 si x<0. Dans le cas où x=0, la décision ne prend pas de parties. Ce seuil fait du sens car x>0 signifie qu'il tend vers +1, donc H1 semble plus probable. X<0 signfie que x tend vers -1, donc H0 semble plus probable.

Calculons ensuite les probabilités d'erreur de Type I et II, puis la probabilité d'erreur totale :

$$P(erreur\ Type\ I) = P(x < 0|H_1) = P\left(Z \leq \frac{0-1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = \Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right)$$

$$P(erreur\ Type\ II) = P(x > 0|H_0) = P\left(Z > \frac{0+1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right)$$

$$P(erreur\ totale) = a * P(erreur\ Type\ I) + (1-a) * P(erreur\ Type\ II)$$

$$= \frac{1}{5}\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right) + \frac{4}{5}Q\left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\right)$$

b)

La règle de décision de Bayes est la suivante :

$$\Lambda(x) = \frac{f_X(x|H_1)}{f_X(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1-a}{a}$$

En réutilisant les calculs en a, on a que :

$$\frac{2x}{\frac{\sigma^2}{n}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) = \ln(4) = 1.3863$$

Comparaison avec la règle de décision en a :

Elle était de :

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

Avec Bayes, mous avons maintenant

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\ln(4)\,\sigma^2}{2n}$$

or

$$\frac{\ln(4)\,\sigma^2}{2n} > 0$$

Signifiant que la nouvelle règle décision tend à favoriser H0 plutôt que H1 par rapport à la première règle de décision, avec un a = 1/5.

c)