小测习题讲解　第一章命题逻辑

1、试判断下列语句是否为命题，并指出哪些是简单命题，哪些是复合命题？ (1-1 P 2)

（4）我是个男人并且是教师。　(是，复合)

（5）x+y=z。　（不是）

判断是否为命题的要点：确定的对象
作出判断
陈述句

2、将下列命题符号化

（1）我看见的既不是老王也不是老李。

解： ① P: 我看见的是老王。Q: 我看见的是老李。

$\neg P \wedge \neg Q$

② P(x): 我看见的是x。a:老王。b:老李。

$\neg P(a) \wedge \neg P(b)$

（2）　$(P \wedge \neg Q) \rightarrow (R \vee S)$

A(x):　x 是A　一元谓词
B(x,y):　x 小于y　二元谓词
P(x 1 ,x 2 ,...,x n)表示n 元谓词

- 定义 一个原子命题用一个谓词(如P)和n个有次序的客体常元(如a_1，a_2，…，a_n)表示成$P(a_1$，a_2，…，$a_n)$，称它为该原子命题的谓词填式或命题的谓词形式。

一般来说，当谓词P给定，$x_1,x_2,...,x_n$是客体变元，$P(x_1,x_2,...,x_n)$ 不是一个命题，因为他的真值无法确定，要想使它成为命题，要用n个客体常项代替n个客体变元。$P(x_1,x_2,...,x_n)$ 就是命题函数。

4.求下列命题公式的主析取范式和主合取范式 **(1-7)**

$\neg(P \vee Q) \rightleftarrows (P \wedge Q)$

$$
\begin{aligned}
\neg(P \vee Q) \rightleftarrows (P \wedge Q) &\Leftrightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \vee (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \\
&\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge (P \wedge Q)) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)
\end{aligned}
$$

主析取范式求解方法：

①真值表法

一个公式的真值为T的指派所对应的小项的析取

②利用等价公式推演主析取范式

◆化归为析取范式

◆除去析取范式中所有永假的析取项

◆将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并

◆对合取项补入没有出现的命题变元，即添加 $\neg P \vee P$ 式，然后应用分配律展开公式，再经过整理。

6、甲、乙、丙、丁4个人中仅有两个人代表班级参加学校离散数学比赛，关于谁参加比赛，以下4中说法都是正确的：

(1) 甲和乙两人中只有一人参加；
(2) 若丙参加，则丁必参加；
(3) 乙和丁两人中至多参加一人；
(4) 若丁不参加，则甲也不参加。

试用命题逻辑推断那两个人参加了比赛。

解： A: 甲参加了比赛。B: 乙参加了比赛。C: 丙参加了比赛。D: 丁参加了比赛。

(1) $(\neg A \land B) \lor (A \land \neg B)$ ；
(2) $C \to D$；
(3) $\neg(B \land D)$；
(4) $\neg D \to \neg A$。

符号化为： $((\neg A \land B) \lor (A \land \neg B)) \land (C \to D) \land (\neg(B \land D)) \land (\neg D \to \neg A)$

符号化为： $((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (C \to D) \wedge (\neg(B \wedge D)) \wedge (\neg D \to \neg A)$

化为主析取范式：

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

只有两人参加，所以甲和丁参加了比赛。

主析取范式求解方法：

①真值表法

一个公式的真值为T的指派所对应的小项的析取

②利用等价公式推演主析取范式

◆化归为析取范式

◆除去析取范式中所有永假的析取项

◆将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并

◆对合取项补入没有出现的命题变元，即添加 $\neg P \vee P$ 式，然后应用分配律展开公式，再经过整理。

1.对于任意的正实数，都存在大于该实数的实数(2-1, 2-2)（P(x): x是实数; G(x, y): x大于y）

解：$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge G(y, x)))$

$\forall x((P(x) \wedge G(x, 0)) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge G(y, x)))$ 较严谨

2.设下面所有谓词的论域D={a, b, c}. 试将下面命题中的量词消除，写成与之等值的命题公式(2-4 P 65)

（1）$(\forall x)(R(x) \wedge (\exists y)S(x,y))$

解：$\forall x(R(x) \wedge (S(x,a) \vee S(x,b) \vee S(x,c)))$

$\Leftrightarrow \left(R(a) \wedge \left(S(a,a) \vee S(a,b) \vee S(a,c)\right)\right)$

$\wedge (R(b) \wedge (S(b,a) \vee S(b,b) \vee S(b,c)))$

$\wedge (R(c) \wedge (S(c,a) \vee S(c,b) \vee S(c,c)))$

消去量词

设论域元素为$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

3.指出下列公式中的自由变元和约束变元，并指出各量词的作用域（指出哪里的x,y)

（1）$\forall x(F(x)\rightarrow\exists yH(x, y))$

解： 无自由变元，

约束变元：x， y；$\forall x$的作用域为$(F(x)\rightarrow\exists yH(x, y))$，$\exists y$的作用域为$H(x, y)$。

- ∀、∃后面所跟的x叫做量词的**指导变元**或**作用变元**。
- $\forall xA(x)$, $\exists xP(x)$中的A(x)和P(x)分别叫做量词∀和∃的**作用域**或**辖域**。
- 在作用域中x的一切出现称为约束出现，亦称为被指导变元所约束的**约束变元**。不受约束的变元称为**自由变元**。

约束变元换名规则

（1）对于约束变元可以换名，其更改的变元名称范围是**量词中的指导变元**，以及该**量词作用域中所出现的该变元**，在公式的其余部分不变。

（2）换名时一定要更改为**作用域中没有出现过的变元名称**。

4.将下列公式化成等价的前束范式(2-6 P 73)

（2）$\exists x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\land\exists x\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$

解： $\exists xF(x)\land\exists xG(x) \Leftrightarrow \boxed{\exists xF(x)\land\exists yG(y) \Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\land G(y))}$

6.每个学术会的成员都是知识分子并且是专家，有些成员是青年人。证明有的成员是青年专家

P(x) : x是学术会的成员

E(x) : x是专家

G(x) : x是知识分子

Y(x) : x是青年人

(2-7 P 76)

解： 前提：$\forall x(P(x) \rightarrow (G(x)\land E(x))), \exists x(P(x)\land Y(x))$

结论：$\exists x(P(x)\land Y(x)\land E(x))$

前提： $\forall x(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \rightarrow (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}))), \exists x(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}))$

结论： $\exists x(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}))$

(1) $\exists x(P(x) \wedge Y(x))$	P
(2) $P(c) \wedge Y(c)$	ES(1)
(3) $P(c)$	T(2)I
(4) $\forall x(P(x) \rightarrow (G(x) \wedge E(x)))$	P
(5) $P(c) \rightarrow (G(c) \wedge E(c))$	US(4)
(6) $G(c) \wedge E(c)$	T(3),(5)I
(7) $E(c)$	T(6)I
(8) $P(c) \wedge Y(c) \wedge E(c)$	T(4)(7)I
(9) $\exists x(P(x) \wedge Y(x) \wedge E(x))$	EG(8)