数值计算第二次作业——20195633李燕琴

注：22题的代码和结果附后

数值计算 homework2　　20195633 李燕琴　　2020-04-04

<数值计算 Hw2>

14. 证明：(1). 对于常值函数 $f(x)=1$，有 $(x_1,1),(x_2,1),\cdots,(x_n,1)$ 进行 Lagrange 插值

则 $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\cdot y_i=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=1$

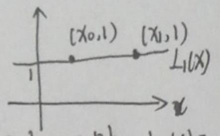
$R(x)=f(x)-R_n(x)=1-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

需判断插值余项　其中 $f^{(n+1)}(\xi)=0$. 故 $L_n(x)=f(x)=1$

结论即证.

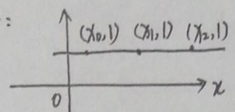
① 当 $n=1$ 时，$L_1(x)=l_0(x)+l_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

即对 $(x_0,1),(x_1,1)$ 进行 lagrange 线性插值，可以得到常值函数.



② 当 $n=2$ 时，$L_2(x)=\sum_{i=0}^{2} l_i(x)$. 知 对 $(x_0,1),(x_1,1),(x_2,1)$ 进行抛物线插值可以得到 $L_2(x)$

几何上表示如下：



(2). 对 $f(x)=x^j$ 进行 Lagarange 插值. 得选点 $(x_1,x_1^j),(x_2,x_2^j),\cdots,(x_n,x_n^j)$. 得

$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\cdot y_k=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\cdot x_k^j=x^j$. 结论即证.

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Omega(x)=0$.　$\Omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$f^{(n+1)}(\xi)=0$.

(3) $(x_k-x)^j=\sum_{i=0}^{j}C_j^i(x_k)^i\cdot(-x)^{j-i}$

$\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j\,l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{j}C_j^i\,x_k^i\cdot(-x)^{j-i}\right]l_k(x)=\sum_{i=0}^{j}C_j^i(-x)^{j-i}\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}x_k^i\cdot l_k(x)\right]$

由(2)知 $\sum_{k=0}^{n}x_k^i\,l_k(x)=x^i$.

原式 $=\sum_{i=0}^{j}C_j^i(-x)^{j-i}\cdot x^i=x^j\sum_{i=0}^{j}C_j^i\cdot(-1)^{j-i}\cdot1^i=x^j\cdot(1-1)^j\equiv0$，结论即证.

(4). $\Omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

$\Omega'(x)=\cancel{\prod_{i\neq0}(x-x_i)+}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i\neq j}^{n}(x-x_i)$

$\Omega'(x_k)=\sum_{j=0}^{n}\prod_{i\neq j}^{n}(x_k-x_i)=\prod_{i\neq k}^{n}(x_k-x_i)$

$\therefore \frac{\Omega(x)}{(x-x_k)\,\Omega'(x_k)}=\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(x-x_k)\prod_{i\neq k}^{n}(x_k-x_i)}=\prod_{i\neq k}^{n}(x_k-x_i)=l_k(x)$，结论即证.

22. 实验发现，与高次插值 Runge 现象相反，随着插值函数 $P_n(x)$ 的指数最高项次数增加，$P_n(x)$ 对 $f(x)=\sin x$ 越来越好。

29. 证明：令 $R(x)=f(x)-H(x)$. 则 $R'(x)=f'(x)-H(x)$

由题意得 $R(a)=0$，$R(b)=0$，$R(c)=0$，$R'(c)=0$.

故设 $R(x)=k\cdot(x-a)(x-c)^2(x-b)$，其中 k 为与 x 相关的待定系数.

令 $g(x)=f(x)-H(x)-R(x)=f(x)-H(x)-k(x-a)(x-c)^2(x-b)$

则可找到4个零点 x_0,a,b,c.

根据罗尔定理，$\exists\ m_1, m_2, m_3$，且 $a<m_1<x_0<m_2<c<m_3<b$，使得

$$g'(m_1)=g'(m_2)=g'(m_3)=0，且 g(c)=0$$

同理，$\exists\ n_1, n_2, n_3$ 且 $m_1<n_1<m_2<n_2<m_3$，使得
$<c<n_3$

$$g''(n_1)=g''(n_2)=g''(n_3)=0$$

同理，$\exists\ l_1, l_2$，且 $n_1<l_1<n_2<l_2<l_3$，使得

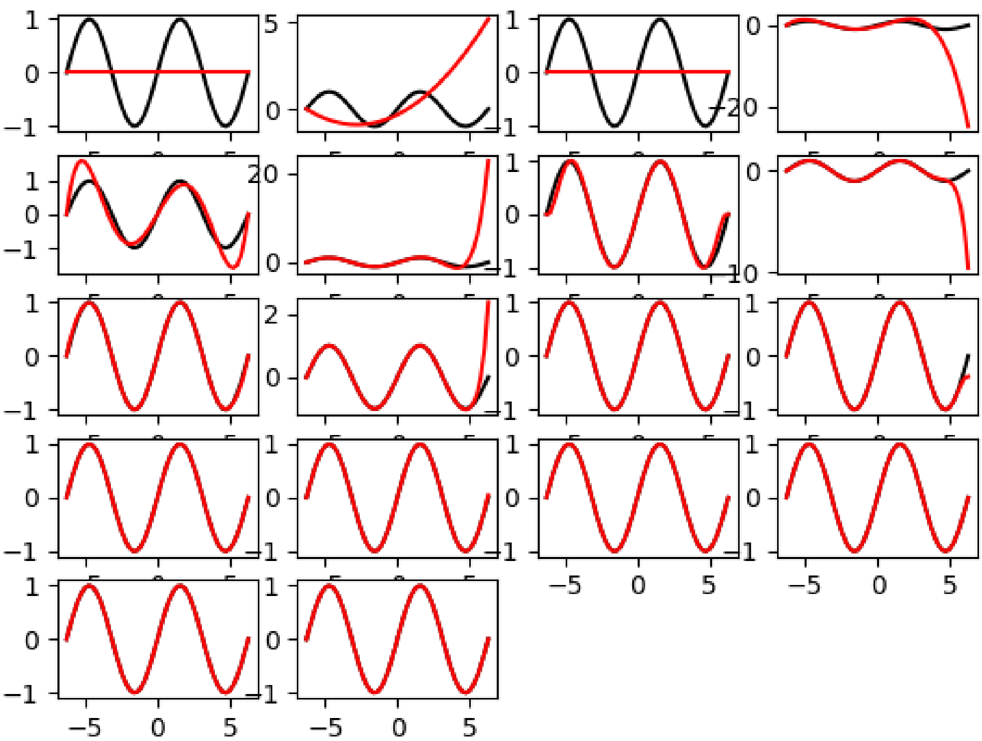
$$g^{(3)}(l_1)=g^{(3)}(l_2)=0$$

亦 $\exists\ \xi_x\in(l_1,l_2)$，使得 $g^{(4)}(\xi_x)=f^{(4)}(\xi_x)-0-k\times 4!=0$

得 $k=\dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}$ 且 $a<\xi_x<b$

即证 $f(x)-H(x)=\dfrac{(x-a)(x-c)^2(x-b)}{4!}f^{(4)}(\xi_x)$.

结果：



代码：

```
# -*- codeing = utf-8 -*-
```

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def Lagrange(x, n):
    '''
    :param x: x原始序列
    :param n: 一共有n个插值互异点
    :return: y插值结果序列
    '''
    x0 = np.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, n, endpoint=False)
    y0 = np.sin(x0)  # 构成插值点(x0,y0)
    y = np.zeros(np.size(x))
    l = np.ones(np.size(x0))  # 拉格朗日基函数
    for k in range(np.size(x)):  # 求(x,y)中的y
        for i in range(np.size(x0)):  # 求l_i[x_j]
            for j in range(np.size(x0)):
                if i != j:
                    l[i] = l[i] * (x[k] - x0[j]) / (x0[i] - x0[j])
        y[k] = np.dot(l,y0)
        l = np.ones(np.size(x0))
    return y

x = np.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, 50, endpoint=True)
y1 = np.sin(x)
for i in range(2, 20):
    plt.subplot(5, 4, i - 1)
    plt.plot(x, y1, "k", x, Lagrange(x, i), "r")
plt.show()
```