考试教室＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 专业、班＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

◉ A卷
○ B卷

重庆大学《概率论与数理统计 I》课程试卷

2017 — 2018 学年　第二学期

开课学院：数统学院　课程号：MATH20041　考试日期：2018.6.10

考试方式：○ 开卷 ◉ 闭卷 ○ 其他　　考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

分位数： $u_{0.95}=1.64$，$u_{0.975}=1.96$，$t_{0.95}(7)=1.895$，$t_{0.975}(7)=2.365$，

$\chi^2_{0.025}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.975}(8)=17.53$

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.4$，$P(B\,|\,A)=0.5$，则 $P(A\cup B)=$ _0.55_ 。
2. 设某地夏季天气只有三种状态：晴天、阴天（多云）和雨天，已知晴天的可能性是阴天的 2 倍，雨天的可能性是阴天的一半，则该地某日为雨天的概率为_1/7_。
3. 据统计，某小区在网购消费中，食品、图书、日用品、服饰类商品的包裹数比例分别占 20%，30%，40%，10%。又知这四类网购商品是通过京东配送的概率分别为 24%，21%，23%，18%。今天有一快递送达小区的“丰巢”快递柜，问这个快递是京东配送的概率为＿＿＿＿；开柜后发现是天天快递包裹，问其中最有可能是＿＿＿＿类商品。_22.1%，日用品_

4. 某城市有三条地铁线，各条线路独立运行，三条线每月发生故障的次数分别服从参数为 1,2,3 的泊松分布，则本月该城市地铁发生故障次数的期望为_6_，某月该城市发生故障为 3 次的概率为_$36e^{-6}$_。

4. 设连续型随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}1-(1+x)e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，则 X 的密度函数为 $f_X(x)=$ _$f(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$_，

$P\{X>2\}=$ _$3e^{-2}$_，请写出 $Y=2X-1$ 的密度函数 $f_Y(y)=$ _$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y+1}{4}e^{-\frac{y+1}{2}} & y>-1\\ 0 & y\le -1\end{cases}$_。

5. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(3,16;3,9;0.5)$，若 $Z=X-Y$，则 Z 的密度函数为 $f(z)=$ _$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{26\pi}}e^{-\frac{z^2}{26}}\quad z\in R$_，$E|X-Y|=$ _$\sqrt{\dfrac{26}{\pi}}$_。

6. $X_1,X_2,\cdots\cdots,X_{10}$ 是来自正态总体 $N(3,4)$ 的样本，$\overline{X},S^2$ 为其样本均值和样本方差，则 $E(\sum_{i=1}^{5}(X_{2i}-X_{2i-1})^2)=$ _40_，$E(\overline{X}S^2)=$ _12_.

命题人：李小娅　组题人：荣腾中　审题人：荣腾中　命题时间：2018.04.25　教务处制

7. $X_1,X_2,\cdots\cdots,X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu,4)$ 的样本，对统计假设问题 $H_0:\mu=1,H_1:\mu\neq 1$ 的拒绝域为 $\{|\overline{X}-1|>0.98\}$，则在判断中犯弃真错误的概率为__0.05__。

二、（12 分）随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$，设 $U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\}$ 。

求：(1) (U,V) 的联合分布律；

(2) 判断 (U,V) 的独立性；

(3) 求 U,V 的协方差 。

解：(1) (U,V) 有三种可能取值：(1,1)，(2,1)，(2,2)

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{4}{9}$$

$$P\{U=2,V=1\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2\}P\{Y=1\}=\frac{4}{9}$$

$$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\}=\frac{1}{9}$$

(U,V) 的联合分布律为：

U \ V	1	2	
1	4/9	0	4/9
2	4/9	1/9	5/9
	8/9	1/9	

(2) 因为 $P\{U=1,V=1\}=4/9\neq P\{U=1\}P\{V=1\}=32/81$

所以 (U,V) 不独立；

(3) $EU=14/9,\quad EV=10/9,EUV=16/9$

$$\operatorname{cov}(U,V)=EUV-EU\cdot EV=4/81$$

三、（18 分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}A(y-x)e^{-y}, & -y<x<y,0<y<+\infty\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求:（1）常数 A；（2）随机变量 X,Y 的边缘密度函数 $f_x(x),f_y(y)$ ；

（3）判断 X,Y 的独立性；

（4）求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

解（1） 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_{-y}^{y}A(y-x)e^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4A=1$，得 $A=\frac{1}{4}$。

（2） $$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{+\infty}\frac{1}{4}(y-x)e^{-y}dy & x<0\\ \int_{x}^{+\infty}\frac{1}{4}(y-x)e^{-y}dy & x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{(1-2x)e^{x}}{4} & x<0\\ \frac{e^{-x}}{4} & x\geq 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{1}{4}(y-x)e^{-y}dx & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

(3) 由 $f(x,y)\neq f(x)f(y)$，所以不独立；

(5)由卷积公式， $f(z-y,y)\neq 0$ 当且仅当 (y,z) 满足 $-y<z-y<y,0<y<+\infty$

即：　$0<z<2y, 0<y<+\infty$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty}\frac{1}{4}(y-(z-y))e^{-y}dy & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{z+1}{4}e^{-\frac{z}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

四、(12 分) 设总体 X 的分布函数为：$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\theta}} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$，$\theta>1$（未知），$X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$ 为来自总体的样本。求：

(1). 参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ ；(2). 参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$ 。

解：X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{-\theta-1} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$

1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{+\infty}x\theta x^{-\theta-1}dx=\frac{\theta}{\theta-1}$

令 $EX=\overline{X}$ ，即 $\frac{\theta}{\theta-1}=\overline{X}$　解得：$\hat{\theta}_1=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$ ；

2）θ 的似然函数：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{-\theta-1}=\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{-\theta-1}\qquad x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)>0$　且 $\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

由 $\frac{d\ln(\theta)}{d\theta}=0$　得：$\hat{\theta}_2=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

五、(10 分) 据报道：高校大学生平均每周上网时间为 8 小时。某校统计小组随机调查了该校 100 名学生，得知他们平均每周上网时间为 6.5 小时，样本标准差为 2 小时。设大学生每周上网时间服从正态分布，问在显著水平 α=0.05 下，能否认为该校学生每周上网时间明显低于 8 小时？

解：由题意知，设每周上网时间为 X，则

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$　$\bar{x}=6.5,\quad s=2,\quad \alpha=0.05$　$n=100$ 。

设立统计假设：$H_0:\mu=8$　　$H_1:\mu<8$

σ^2 未知，选择检验统计量：$T=\frac{\overline{X}-8}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域 $\chi_0=\{t\,|\,t<-t_{1-\alpha}(n-1)\}=\{t<-t_{0.95}(99)\}=\{t<-u_{0.95}\}=\{t<-1.65\}$

做出判断，检验统计量的样本值 $t=\frac{6.5-8}{2/\sqrt{100}}=-7.5\in\chi_0$

所以拒绝原假设，该校学生上网时间明显低于 8 小时。

六、(6 分) 国内市场对某种进口原材料的需求是一随机变量 X，据调查 $X\sim U[1000,3000]$(单位：吨)，售出一吨该原材料可获利 2000 元，积压一吨则将产生 1000 元的亏损。问进口经销商应进口多少吨货源可使得平均利润达最大？

解：设经销商应进口 a 吨该原材料，赢利 Y 元：

$$Y=g(X)=\begin{cases}2a, & a\le X\\ 2X-(a-X), & a>X\end{cases}$$

（3 分）

X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2000},\qquad 1000\le x\le 3000$$　（1 分）

则平均利润

$$EY = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$ （1 分）

$$= \frac{1}{2000}\left[\int_{1000}^{a}(3x-a)dx + \int^{a} 2adx\right] = \frac{1}{2000}\left[-\frac{3}{2}a^2 + 7000a - \frac{3}{2}\times 1000^2\right]$$ （2 分）

令 $(EY)'_a = 0$，解出 $a \approx 2333.3 \quad (t)$ (1 分)