线性代数

> 线性代数，用维度数据更直观的表示各种类型数据，有趣且实用。从学习的角度出发，比起各种基本概念、定理、公式，学习线代更看重学生的空间思维，这里非常推荐大家闲时观看3Blue1Brown的视频（正所谓思维在手，天下我有，咳咳咳，这句话我瞎编的）。从期末考试的角度出发，本次学习加油小站，将带大家从宏观上认识线性代数（教科书），梳理常见的题型和解题思路，最后提供一些期末福利和从基础到进阶的参考学习资料。
>
> By 李燕琴

1. 知识图谱

1.1. 思维导图

PDF版本： 附件1-线性代数思维导图.pdf

网页版本：线性代数思维导图

1.2. 用几何思维打开线代

1.2.1. 向量

- 空间中的箭头：大小和方向
- 有序的数列表：如[1,2]
- $\vec{v}$：保证线性运算（加法、数乘）有意义即可

1.2.2. 向量空间

- **张成的向量空间：**由给定向量组内的向量，其线性组合组成的所有向量集合
- **基向量：**向量空间的一组基，是张成该空间的一个线性无关向量集，且其线性组合可以张成一个这个向量空间

1.2.3. 线性相关&线性无关

- **线性相关：**有多个向量，并且可以移除其中一个而不减小张成的空间，则这些向量线性相关，其中一个向量，可以被其他向量线性表示
- **线性无关：**任意一个向量都不在其他向量张成的空间中，即任意a,b都无法满足$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

1.2.4. 矩阵

- **矩阵：**描述线性变换的语言：变换后基向量的坐标构成**矩阵。**
- **常见的线性变换：**旋转（对调）、伸缩（数乘）、剪切（线性运算）
- **矩阵*向量**，就是计算线性变换作用于给定向量的一种途径。
- **矩阵*矩阵**，两个线性变换相继（从右到左）作用后的复合效果

1.2.5. 行列式的定义

1. 代数角度：排列和逆序数定义
2. 代数角度：利用代数余子式按第一行展开进行归纳定义
3. 几何角度：行列式的各个列对应的向量张成的平行2n面体的有向体积（欧式空间中的有向体积）
4. 几何角度：**行列式就是矩阵对应的线性变换对空间的拉伸程度的度量，或者说物体经过变换前后的体积比。**

1. 行列式等于0，即线性变换将该线性空间压到更低维度的空间上。此时，一组基经过该线性变换后，得到的矩阵的列向量，线性相关。
2. $|AB|=|A||B|$，即空间变换的复合比例 = 比例1*比例2

1.2.6. 逆矩阵

- **逆矩阵**：原始矩阵A对应的线性变换的逆变换。

1.2.7. 基变换

P为基变换矩阵，对于在X坐标系中的某一线性变换A，在Y坐标系中对应的线性变换B为：$P^{-1}AP$，

- $y \rightarrow x=Py$ ，Y坐标系坐标，转为X坐标系坐标
- $x'=Ax=APy$，X坐标系中，向量x，经过A变换后对应的向量x'
- $y'=P^{-1}x'=P^{-1}APy$，X坐标系中的x'，转为Y坐标系中的y'，得到y到y'经历的线性变换即为 $B=P^{-1}AP$

1.2.8. 特征值和特征向量

特征向量：在A对应的线性变换中，一些向量只发生了伸缩变换，不对这些向量产生旋转的效果，这些向量成为矩阵的特征向量；其中伸缩的比例，即为特征值

引用《线性代数的几何意义》的描述：**“矩阵乘法对应了一个变换，是把任意一个向量变成另一个方向或长度都大多不同的新向量。在这个变换的过程中，原向量主要发生旋转、伸缩的变化。如果矩阵对某一个向量或某些向量只发生伸缩变换，不对这些向量产生旋转的效果，那么这些向量就称为这个矩阵的特征向量，伸缩的比例就是特征值”**。对于实对称矩阵来说，不同特征值对应的特征向量必定正交;我们也可以说，一个变换矩阵的所有特征向量组成了这个变换矩阵的一组基;

1.2.9. 行列式vs矩阵vs向量组

- **矩阵**：数表，代表的是一个线性变换规则，矩阵的乘法运行代表的是一个变换
  - **方阵**：方形的数表
- **行列式**：方阵的数表按照一定规则所确定的一个数
- **向量组**：若干个同维的向量组成的集合

1.2.10. 等价vs相似vs合同

等价矩阵：$PAQ=B$，则$A \backsim B$

- 几何意义：A通过初等行、列变换，可以得到B

相似矩阵：$\exists$可逆矩阵P，$P^{-1}AP=B$

- 几何意义：**同一个线性变换在不同的基下的表达形式**。具体推导见书P087。

合同矩阵：$\exists$可逆矩阵C，使得$C^TAC=B$，则$A \backsimeq B$

- 几何意义：**同一个双线性形（或二次曲线/二次型）在不同的基下的矩阵。**

2. 常见题型和解题思路

> 考试题型：填空，单选，判断，计算（行列式、线性方程组、二次型、矩阵方程），证明（线性相关、线性无关、正定矩阵）

2.1. 行列式

2.1.1. 计算行列式

1. 对角；反对角行列式，$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}|A_i|$
2. 上下三角
3. 分块对角$t=0$，分块反对角（只涉及两个的$A_{m\times n}$和$A_{n\times n}$，则$t=mn$
4. 行和、列和相等型
5. 爪形→转化为上、下三角行列式
6. 增边法
7. 伴随矩阵行列式，$|A^*|=|A|^{n-1}$
8. 范德蒙行列式，$D_n=\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$
9. 数学归纳法 (P15 例3)
    1. **验证**n=1时，结论正确
    2. **假设**n=k时，结论正确
    3. **验证**n=k+1时，结论正确
10. 行列式展开定理

2.1.2. 证明|A|=0

1. 齐次方程组Ax=0有非零解
2. A的列向量组线性相关
3. 反证法：假设$|A|\ne 0$，发现矛盾，则$|A|=0$
4. r(A)<n
5. $|A|=-|A|$

2.2. 矩阵

2.2.1. 计算矩阵的秩

- 初等行变换，A→行阶梯型矩阵→行最简形矩阵； 再初等列变换，得到A的标准形，进而得到其秩

2.2.2. 矩阵的秩相关不等式

- $A_{m\times n}$，则$R(A)<=min(m,n)$
- 拼接矩阵，$max(R(A),R(B))<=R(A|B)<=R(A)+R(B)$
- $A_{m\times n},B_{m\times n}$, 则 $R(A+B)<=R(A)+R(B)$，且 $<=m$，且 $<=n$
- $A_{m\times d},B_{d\times n}$, 则 $R(A)+R(B)-d<=R(AB)<=min(R(A),R(B))$

2.2.3. 计算逆矩阵

数值矩阵：

1. 初等行变换 $(A|E)==>(E|A^{-1})$
2. 初等列变换同理

抽象矩阵，如求$(A-B)^{-1}$：

1. 根据题目提供的等式，提取因子$(A-B)$，进而得到其逆矩阵的表达式
2. 一般提取因子，会用到**广义除法。**

抽象矩阵证明，如证明$(A-B)^{-1}=P$:

1. 一般将$(A-B)^{-1}=P$带入题目提供的等式，证明$(A-B)P$是否为E

2.3. n维向量线性相关

2.3.1. 解n个方程n个变量的线性方程组

1、齐次线性方程组 Ax = 0

2、非齐次线性方程组 Ax=b

方法一：克拉默法则

方法二：初等行变换：(A|b) →(E|x)

2.3.2. 证明线性相关\线性无关

线性相关：

1. 至少有一个变量，可以由其余变量线性表示
2. 对于公式$k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n=0$，$k_1,k_2,...,k_n$存在非零解
3. 秩<向量组的个数
4. 向量组构成的齐次线性方程组，有非零解

线性无关：

1. 最大线性无关组，为向量组本身
2. 对于公式$k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n=0$，$k_1,k_2,...,k_n$全为0
3. 秩=向量组的个数
4. 向量组构成的齐次线性方程组，只有零解

2.4. 线性方程组

2.4.1. 齐次线性方程组的求解

1. 对系数矩阵作初等行变换，化其为行阶梯形
2. r(A)确定自由变量的个数n-r(A)
3. 如果有非零解，则将第一步结果化为最简行阶梯形，找出一个秩为r(A)的矩阵，则其余的n-r(A)列对应的为自由变量
4. 每次给一个自由变量赋值为1，其余为0，重复n-r(A)次，得到n-r(A)个向量组成基础解系
5. 按照解的结构写出通解

2.4.2. 非齐次线性方程组的求解

1. 对增广矩阵作初等行变换，化其为行阶梯形
2. 求导出的齐次线性方程组的一个基础解系
3. 求方程组的一个特解（令自由变量全为0）
4. 按照解的结构写出通解

2.5. 特征值理论和相似对角化

2.5.1. 特征值和特征向量的求解

1. 求解特征方程$f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$，得到$A$的全部特征值
2. 每个不同的特征值，代入$(A-\lambda_i E)x=0$求其非零解向量，得到A的全部特征向量

2.5.2. 相似对角化的具体方法

充要条件：

- 每个r重根特征值对应由r个线性无关的特征向量
- n阶方阵A有n个线性无关的特征向量

普通矩阵的相似对角化：

1. 计算A的n个特征值，以及其对应的特征向量
2. 将A的n个线性无关的特征向量，按照特征值的顺序排列好，则构造可逆矩阵 $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$，对角矩阵 Λ的主对角元即为排好序的n个特征值

实对称矩阵A的相似对角化

1. 计算A的n个特征值，以及其对应的特征向量，单根对应的特征向量进行标准化；重根对应的特征向量进行正交化和标准化，保证得到
2. 标准正交化的特征向量，顺序排列，构成正交矩阵P，进而得到对角矩阵 Λ

2.5.3. 施密特正交化

公式见书，偶尔会考。

2.5.4. 矩阵的幂运算

A^n的计算：

1. 判断A^n能否写成$\alpha\beta^T$的形式，其中α和β均为列向量
   如果能，则$A^n=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\ldots(\alpha\beta^T)=(\beta^T\alpha)^{n-1}\alpha\beta^T$,其中$(\beta^T\alpha)^{n-1}$为数，$\alpha\beta^T$为矩阵
2. 判断A能否相似对角化，$A=P\Lambda P^{-1}$
   $A^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\ldots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^n P^{-1}$
3. 找规律，如$A,A^1,A^2\ldots$

2.6. 二次型

2.6.1. 二次型化为标准形

1. 特征值法：根据实对称矩阵的相似对角化，计算其二次型对角矩阵需要的正交变换矩阵
2. 拉格朗日(Lagrange)配方法
3. 初等变换法：初等行变换，同时进行对应的初等列变换：矩阵→行阶梯形

2.6.2. 证明二次型正定

获取二次型f的矩阵A

1. 理论上
   1. 任意x，有f(x)>=0
   2. A与单位矩阵E合同
2. 计算上

    1. A的特征值全为正
    2. A化为标准形后，正惯性指数大于0
    3. A的各阶顺序主子式为正

3. 期末福利&参考学习资料

期末福利：

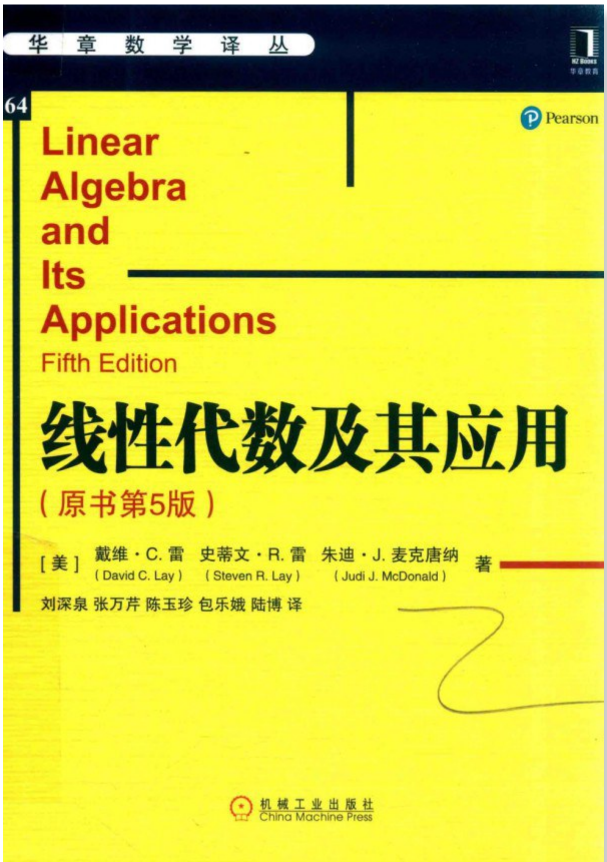
- 查看学习重点：[附件2-期末福利-线性代数教学日历.pdf]
- 查看考试重点：[附件3-期末福利-线性代数期末试卷.rar]

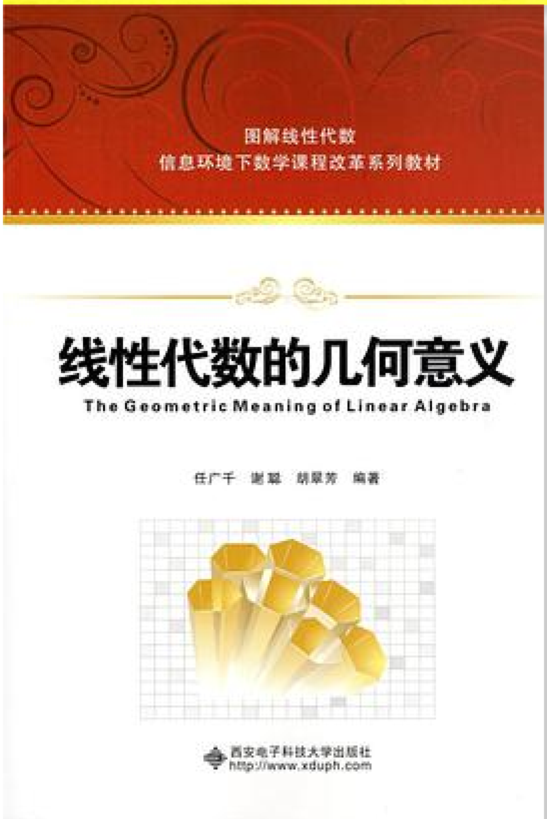
一些视频或笔记推荐

- ▲▲3Blue1Brown的科普视频：线性代数的本质_B站
    - 中文配音版本 【线性代数的本质】合集-转载于3Blue1Brown官方双语_B站
- ▲▲线性代数几何层次的理解及其应用 【完整版-麻省理工-线性代数】全34讲+配套教材_B站
    - 相关笔记：MIT 18.06 线性代数笔记
- 其他的视频，如宋浩、李永乐老师等，感觉偏向应试
- 机器学习数学基础：李宏毅《线性代数》笔记
- 很直观的笔记：《线性代数及其应用》笔记
- 推荐书籍
    - 《线性代数及其应用》
    - 《线性代数的几何意义》

最后，温馨提示，像高数、线代、概率论、离散等专业主修数学课、以及自己的专业课本，没升学前不要丢或给二手回收社团啦！！！当然不升学的人无视即可O(∩_∩)O

最后的最后，咱签个到：


华章数学译丛
64
Pearson
Linear
Algebra
and
Its
Applications
Fifth Edition
线性代数及其应用
（原书第5版）
[美] 戴维·C. 雷（David C. Lay） 史蒂文·R. 雷（Steven R. Lay） 朱迪·J. 麦克唐纳（Judi J. McDonald） 著
刘深泉 张万芹 陈玉珍 包乐娥 陆博 译
机械工业出版社
China Machine Press


图解线性代数
信息环境下数学课程改革系列教材
线性代数的几何意义
The Geometric Meaning of Linear Algebra
任广千 谢聪 胡翠芳 编著
西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

下期预告：


重庆大学虎溪校区舍区教育
学业生涯指导项目组
学业指导 ┆ 二〇二二年第3期
学习加油站
四六级通关之路——如何提高英语学习力
College English Test Band 4/6
扫码进入QQ群
扫码参与报名
时间：5.5(19:30)
松二216活动室
从听说读写四个维度切入，剖析四六级题型，
分享英语考试技巧。
四六级考试攻略指南
分享人：程涵禹
雅思8.0 六级637
全国大学生英语竞赛特等奖
大学生数学竞赛省级三等奖
2021年全国大学生英语竞赛（NECCS）C类特等奖