3.下列集合关系正确的是

【B】

A. {半群}⊂{独异点}⊂{群}⊂{广群}

B. {循环群}⊂{独异点}⊂{半群}⊂{广群}

C. {独异点}⊂{循环群}⊂{群}⊂{广群}

D. {独异点}⊂{子群}⊂{半群}⊂{群}

- *广群（封闭）→ 半群（可结合）→ 独异点（含幺元）→ 群（逆元）→ 阿贝尔群（可交换）/循环群（生成元）*

3. 下列代数系统中，构成群的系统是

【C】

A. <Z+,+>　　B. <N,×>

C. <R, +>　　D. <R, ×>

<Z+,+>没有幺元

<N,×>存在零元0

<R, ×>存在零元0

定理5-4.1 群中不可能有零元。

5. 假设集合S = Q×Q，其中Q为有理数集，在S上定义二元运算*满足：<a，b>*<x，y> = <ax，ay + b>。
(1)运算*是否满足交换律和结合律
(2)关于运算*是否有幺元和零元？如果有，请指出，并求S中所有可逆元素的逆元。

解：(1) 因为<0, 0> * <1, 1> ＝ <0, 0>，<1, 1> * <0, 0> ＝ <0, 1>，则有<0, 0> * <1, 1> ≠ <1, 1> * <0, 0>，所以运算*不满足交换律。

又因为(<a, b> * <x, y>) * <u, w> ＝ <ax, ay ＋ b> * <u, w> ＝ <axu, axw ＋ ay ＋ b>, <a, b> * (<x, y> * <u, w>) ＝ <a, b> * <xu, xw＋y> ＝ <axu, axw ＋ ay ＋ b>，所运算*满足结合律。

(2) 因为<a, b> * <1, 0> ＝ <a, b>，<1, 0> * <a, b> ＝ <a, b>，所以关于运算*存在幺元<1, 0>。不存在零元。

对于任意的$<a, b> \in S$，若$a \neq 0$，则其逆元为$<\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}>$，这是因为$<a, b> * <\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}> = <1, 0> = <\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}> * <a, b>$。

6.设集合A = {a, b, c, d, e, f}，<A, *>为群，运算表如下：

*	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	d	b	c	f	a
f	f	c	d	b	a	e

设H = {a, d}，试证明：
<H, *> 是 <A, *> 的子群，并求 <A, *> 中H的左陪集。

证明：① H 是一个有限子集，运算∗在H上封闭；

② 子集H中的任意元素 a 和 b 满足 $\mathrm{a} * \mathrm{b}^{-1} \in H$；

③ 根据子群的定义，即证明子集H上的代数系统 $\langle H, * \rangle$ 是一个群。

左陪集：

$\{a\}H = a * \{a, d\} = \{a * a, a * d\} = \{a, d\}$

$\{d\}H = d * \{a, d\} = \{d * a, d * d\} = \{d, a\}$

$\{b\}H = b * \{a, d\} = \{b * a, b * d\} = \{b, f\}$

$\{e\}H = e * \{a, d\} = \{e * a, e * d\} = \{e, c\}$

$\{c\}H = c * \{a, d\} = \{c * a, c * d\} = \{c, e\}$

$\{f\}H = f * \{a, d\} = \{f * a, f * d\} = \{f, b\}$

7. 设<Z6, +6>是一个群，这里+6是模6加法，Z6={[0], [1], [2], [3], [4], [5]}，试写出<Z6, +6>中所有的生成元和所有的子群。

$+_6$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

解：生成元有：**[1], [5]**。

子群有：

~~{[0]},~~

~~{[0], [3]},~~

~~{[0], [2], [4]}~~

~~Z6~~

<{[0]}, +6>，

<{[0], [3]}, +6>，

<{[0], [2], [4]}, +6>

<Z6, +6>

定义5-1.2[代数系统]

一个非空集合A连同若干个定义在该集合上的运算$f_1, f_2, \ldots, f_k$所组成的系统就称为一个代数系统，记作$<A, f_1, f_2, \ldots, f_k>$。

8. 设< R， + ， · >是一个环，证明：对于a,b ∈ R，有$(a+b)^2 = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2$，其中$a^2 = a\cdot a$, $b^2 = b\cdot b$。

证明:

因为⟨R， + ， ·⟩是环，所以运算·对于运算+是可分配的。

⟨R， +⟩是阿贝尔群，运算+是可交换、可结合的。故：

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) = ((a+b)\cdot a) + ((a+b)\cdot b) \\
&= ((a\cdot a) + (b\cdot a)) + ((a\cdot b) + (b\cdot b)) \\
&= a^2 + b\cdot a + a\cdot b + b^2 \\
&= a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2
\end{aligned}
$$