线性代数思维导图

- ## 第一章 行列式
  - 定义
    - 排列和逆序数
    - 按行/列展开，$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj}$
      - 剩下的行列式：余子式M_{ij}
      - 代数余子式$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} * M_{ij}$
      - Σ一行元*另一行代数余子式=0
  - 特殊行列式
    - 对角行列式逆序数$t = 0$，反对角行列式$t = n(n-1)/2$
      - 行列式的快速计算
    - 上、下三角形行列式
    - 分块对角，分块反对角
    - 范德蒙行列式
  - 性质
    - $D = D^T$
    - 反对称性/有向性
      - 交换两列行列式反号
    - 多线性
      - 当矩阵的某一列所有元素都扩大c倍时，相应行列式也扩大c倍。”多“：对n个列都呈现线性性质
    - 互加不变性
      - 把行列式的某一行（列）的各元素乘k后加上另一行（列）对应元上，行列式不变
    - 可拆性
      - 若$c_i = a_i + b_i$，则|c1 c2...ci...cn| = |c1 c2...(ai+bi)...cn|
    - 分块性
- ## 第二章 矩阵
  - 矩阵的定义
  - 特殊矩阵
    - 单位矩阵E
    - 对角矩阵，反对角矩阵、数量矩阵、单位矩阵
    - 对称矩阵，反对称矩阵

    - 伴随矩阵
    - 分块矩阵
        - 简化运算
    - 正交矩阵
        - AT即为A的逆矩阵
        - |A|=±1
- 基本运算
    - 加法
        - 同型才能相加
    - 乘数
        - 矩阵的k，普及每个元；行列式的k，普及某一行
    - 乘法
        - 行列的约束
        - 顺序的约束
            - 左乘：行变换；右乘：列变换
            - 数量矩阵Λ可与任意方阵交换
        - $(AB)^k \neq A^kB^k, (A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$，除非AB可交换
    - 转置
        - 特殊矩阵
            - 对称矩阵$A^T = A$
            - 反对称矩阵$A^T = -A$
    - 方阵的行列式
        - 方阵：方形的数表，可转为二次型
        - 方阵的数表按照一定规则所确定的一个数，为其一种属性
        - |AB|=|BA|=|A|·|B|
    - 分块
- 矩阵的秩
    - 最高阶非零子式的阶级
    - 一些等价概念
        - 非奇异矩阵
        - 满秩矩阵
        - |A|≠0
        - R(A)=n
        - A的标准形为E，即通过一系列初等(行/列)变换可以得到E
        - 有限个初等方阵的乘积

      - A可逆
      - A的特征值全部为0，$|A|=\prod\lambda\neq 0$
  - 初等变换和初等方阵
    - 初等变换
      - 对调：旋转
      - 数乘：伸缩
      - 与另一行（列）的线性运算：剪切
    - 计算矩阵的秩
    - 理解逆矩阵
  - 📕逆矩阵
    - 基本的性质
    - 📕和伴随矩阵的关系
      - $AA^*=A^*A=|A|E$，注意伴随矩阵定义的顺序
      - $A^{-1}=A/|A|$
      - A^*的秩
        - n，R(A)=n
        - 1，R(A)=n-1
        - 0，R(A)<n-1
  - 克拉默法则
    - $Ax=b$，方程组的矩阵形式
    - $|A|\neq 0$，唯一解
      - n个方程，n个x
    - $|A|=0$，无数解
      - <n个方程，n个x
- **第三章 向量组的线性相关性及线性空间**
  - 向量
    - 定义：有序数组，特殊的矩阵
      - a和aT是同一向量的不同表示
    - 基本运算
      - 线性运算
        - 加法
        - 数乘
      - 内积
        - 距离概念的需要，向量集合→实数集合
        - 向量的模长

- Cauchy-Schwarz不等式$(\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

- 向量组
  - 三个基本概念
    - 线性组合/线性表示
    - 线性无关
    - 线性相关
  - 三个定理
    - “有一个”
      - 至少存在一个向量可以由剩下的向量线性表示
    - “哪一个”
      - 向量组a1,a2,...,am线性无关，向量组a1,a2,...,am,β线性相关，则β可由a1,a2,...am线性表示
    - “其他”
      - 部分有关→整体有关
      - 整体无关→部分无关
      - 低维无关→高维无关
    - m>n时，m个n维向量构成的向量组一定线性相关
    - 如果向量组A能由向量组B线性表示，则R(a1,a2...am)<=R(b1,b2,...bn)
  - 三秩
    - 向量组：最大线性无关组，所含有的向量的个数
    - 矩阵：最高阶非零子式的阶级
    - 向量空间：向量空间的秩/维数
  - 三计算
    - 求向量无关组的秩、最大无关组、用最大无关组表示剩下的向量
- 正交向量组
  - 标准正交向量组（正交+单位）→正交矩阵
  - 施密特标准正交化方法
    - 正交化→标准化
- 向量空间
  - 线性空间的一个特例
  - n维向量所构成的非空集合
  - 加法和数乘的封闭性→判定向量空间的方法
  - 基→V中的一个最大无关组，其秩r为V的维数
    - 向量空间可由一个基生成
  - 基变换和坐标变换

      - 基：$B=AP$
      - 坐标：$\vec{a}=P\vec{b},\vec{b}=P^{-1}\vec{a}$
        - 推导源头：$A\vec{a}=B\vec{b}$
      - 基定坐标定
  - 线性空间和线性变换
    - 基本元素由向量变成了元素（数/函数/矩阵），具体的线性运算（加法和数乘）不一样
    - 广义的向量空间
      - 加法和数乘的封闭性
      - 子空间
      - 线性相关和线性无关
      - 欧式空间→存在内积的定义，进而满足模的概念、柯西-施瓦茨公式
    - 映射→线性映射（加法和数乘）→线性变换（映射后的空间不变）
    - 线性空间同构→代数结构相同
- # 第四章 线性方程组
  - 基本结构$A_{mn}x=\beta$
    - A_{mn}系数矩阵
    - $[A_{mn}|\beta]$ 增广矩阵
    - β 为0→齐次线性方程组；不为0→非齐次线性方程组
  - 齐次线性方程组
    - 无穷个非零解r(A)<n
      - 解的结构：n-r(A)个解向量构成基础解系
    - 唯一零解r(A)=n
  - 非齐次线性方程组
    - 有解：r(A)=r([A|β])
      - 即β可以由A的最大线性无关组线性表示
      - 有唯一解：r(A)=n
      - 有无穷多个解：r(A)<n
        - 解的结构：特解+基础解系的线性表示
- # 第五章 特征值理论和相似对角化
  - 特征值和特征向量
    - 公式定义：$Ax=\lambda x$
    - 几何定义：在A的线性变换中，只发生伸缩变换（无旋转变换）的向量，称之为特征向量；其中伸缩变换的值成为特征值。
    - 一个特征值有无穷多个特征向量，一个特征向量只有一个特征值

    - 性质
      - $\prod \lambda = |A|$
      - $\sum \lambda$=主对角线的和
        - 方正的迹 tr(A)
      - $\lambda \to A, \lambda^k \to A^k$
      - $\lambda \to A, 1/\lambda \to A^{-1}$
      - 不相等的特征值对应的特征向量组线性无关
  - 相似矩阵
    - 几何意义：**同一个线性变换在不同的基下的表达形式**
    - A和B相似，则A和B的特征值相同，特征向量不一定相同
  - 相似对角化
    - 目的：求特征值方便，$P^{-1}AP = \Lambda \to A = P\Lambda P^{-1}$
    - 充要条件
      - n阶方阵A有n个线性无关的特征向量
      - 每个r重根特征值对应由r个线性无关的特征向量
    - 充分条件：n阶方阵A有n个互不相等的特征值
    - 相似对角矩阵不唯一（一般地，都是特征值变换顺序后的另一种表示）
  - 实对称矩阵的相似对角化
    - 实对称矩阵的特征值为实数
    - 其不等的特征值对应的特征向量彼此正交
    - λ是A的特征方程的r重根→$R(A-\lambda E) = (n-r)$→λ恰有r个线性无关的特征向量
    - 存在**正交矩阵P**，使得$P^{-1}AP = \Lambda$
  - 应用
    - PCA(常用)
- ## 第六章 二次型
  - 定义
    - 含有n个变量的二次齐次函数，可记为$f(x) = x^TAx$，A为二次型f的矩阵，为对称矩阵
  - 合同关系
    - $B = C^TAC$
  - 二次型的标准形
    - 仅含有平方项，二次型矩阵为对角矩阵，此时$C^TAC = \Lambda$,即$A \simeq \Lambda$
    - 计算方法
      - 特征值法：根据实对称矩阵的相似对角化，计算其二次型对角矩阵需要的正交变换矩阵
      - 拉格朗日(Lagrange)配方法

    - 初等变换法
        - 初等行变换，同时进行对应的初等列变换：矩阵→行阶梯形
  - 惯性定理
    - 二次型的标准形中，正项系数个数p（正惯性指数）和负项系数个数q（负惯性指数）固定不变，且和为二次型的秩
- 正定二次型（f([x1…xn])恒大于0）
  - 标准形的正惯性指数为n
  - A的特征值全为正
  - A与单位矩阵E合同
  - A的各阶顺序主子式均为正
- 负定<0
  - 偶数阶为正，奇数阶为负
  - 标准形的负惯性指数为n
- 半正定>=0（半负定<=0）
  - 标准形的正（负）惯性指数为r(A)
- 不定（f([x1…xn])有正有负）
  - 正、负惯性指数均大于0