第二章 非线性方程求根

数值计算 第二讲作业 20195633 李燕琴

<数值计算 HW1

解：(1) $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

压缩映像原理

$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3}$，其中 $|\varphi'(1)| = |-2| = 2 > 1$. 但 $|\varphi'(1.5)| = |-0.5926| < 1$

迭代方法局部收敛.

∴该迭代公式不一定收敛

(2) $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$.

$|\varphi'(x)| = \left|\frac{2x}{3\cdot(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}\right| < \frac{2}{3} < 1$.

其中 $(1+x^2)^{\frac{2}{3}} > x^{2\cdot\frac{2}{3}} > x$. 即 $\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}} < 1$，$x \in [1,2]$. 故收敛. 且 $|\varphi'(1.5)| = 0.4558$

迭代方法局部收敛.

(3) $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$

$\varphi^2(x) = \frac{1}{x-1}$

得 $|\varphi'(x)| = \left|\frac{-\varphi(x)}{2(x-1)\varphi(x)}\right|$ 其中 $|\varphi'(1.5)| = \sqrt{2} > 1$. 故不一定收敛. / 发散

(4) $\varphi(x) = \sqrt{x^3-1}$

$\varphi^2(x) = x^3 - 1$

$|\varphi'(x)| = \frac{3x^2}{2\varphi(x)} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$，其中 $|\varphi'(1.5)| \approx |2.19| = 2.19 > 1$. 故不一定收敛. 发散.

计算结果

	n=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x(1)	1.5	1.4444	1.4793	1.4570	1.461	……													1.4656	1.4656
x(2)	1.5	1.4812	1.4727	1.4688	1.4670					1.4656	1.4656									
x(3)	1.5	1.4142	1.5537	1.3437	1.7034	1.1905	2.2907	0.8802												
x(4)	1.5	1.541104								365.0169										

根据程序验证，在 10^{-4} 精度内，(1)迭代20次收敛于1.46558，(2)迭代9次收敛于1.46558. (3)(4)不收敛.

2. 解证明：

$\varphi(x) = x - \lambda f(x)$

$\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ 其中 $0 < m \le f'(x) \le M$.

且 $0 < \lambda < \frac{2}{M}$. 则 $0 < \lambda f'(x) < 2$.

$-1 < 1 - \lambda f'(x) < 1$. 即 $|\varphi'(x)| < 1$. 故 $\varphi(x)$ 收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = m$.

则 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n - \lambda f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lambda \lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$.

且 $\lim_{n\to\infty} x_n = m$. 则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(m) = 0$. 即 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 收敛于 $f(x)$ 的根.

3. 解：由题意，$x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 不收敛.

令 $x_k = \varphi(x_{k+1})$ 即 $x_{k+1} = \varphi^{-1}(x_k)$

易知 $|\varphi^{-1}(x)' \cdot \varphi'(x)| = 1$. 其中 $|\varphi'(x)| \ge k > 1$. 则 $|\varphi^{-1}(x)'| \le \frac{1}{k} < 1$. 满足 Lipschitz 条件

故可将 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 化为 $x_{k+1} = \varphi^{-1}(x_k)$.

<数算HW2>

4\. 解：建立方程 $f(x)=a-\frac{1}{x}$. 且 $f'(x)=\frac{1}{x^2}$

则根据 Newton 迭代公式有 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-(ax_k^2-x_k)=x_k(2-ax_k)$

$\varphi(x)=x(2-ax)$. 不含除法运算

$\varphi'(x)=2-2ax$. 其中 $|\varphi'(\frac{1}{a})|=0$, $\varphi''(x)=-2a$, $|\varphi''(\frac{1}{a})|=2a\neq 0$. 即 $x=\varphi(x)$ 为二阶收敛

题目中的公式收敛性不是指这个（哭哭）

另外有 $1-ax_{k+1}=(ax_k-1)^2$.

则 $1-ax_k=(ax_0-1)^{2^k}$

直接写出 $\{1-ax_k\}$ 的递推公式

$x_k=\frac{1}{a}[1-(ax_0-1)^{2^k}]$

当 $|1-ax_0|<1$ 时，x_k 收敛于 $\frac{1}{a}$.

或 $\lim_{k\to\infty} x_k=\frac{1}{a}\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}(1-ax_0)^{2^k}=0\Leftrightarrow -1<1-ax_0<1\Leftrightarrow 0<x_0<\frac{2}{a}$.

则当 $0<x_0<\frac{2}{a}$ 时，方法收敛于 $\frac{1}{a}$.