第二类曲线与曲面积分

大纲要求

了解第二类曲线积分的性质，散度与旋度的概念.
会用斯托克斯公式计算曲线积分，计算散度与旋度，第二曲线积分及曲面积分求物理量 引力、功及流量等.
理解 第二类曲线、曲面积分的概念.
掌握 计算第二类曲线积分、曲面积分的方法，用高斯公式计算第二类曲面积分的方法，格林公式并会运用平面曲线积分与路径元关的条件，
内容精要
基本概念

1.第二类曲线积分

定义 6.5 若矢量函数 $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 与曲线 Γ_{AB} 上点(x,y,z)处切线的单位矢量 $\vec{T}^{0}=\{\cos a,\cos b,\cos g\}$ (且 $\vec{T}^{0}$ 的方向 Γ_{AB} 指定的方向一致)的点乘积在 Γ_{AB} 上的第一类曲线积分 $\int_{\Gamma_{AB}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds.$ 存在 该积分值称为 $\vec{A}(x,y,z)$ 沿曲线 Γ 从 A 到 B 的第二类曲线积分。

$\oint_{\Gamma}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds$ 的物理意义是：当流体流速为 $\vec{A}$ 沿闭合曲线 Γ 指定的方向通过的环流量。

注：由定义知第二类曲线积分是特殊的第一类曲线积分。若把 $\vec{A}.\vec{T}^{0}$ 看成数量函数，这个积分也具有第一类曲线积分的性质。

由定义容易得到下面两个性质

性质 1 $\int_{\Gamma_{AB}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds=-\int_{\Gamma_{BA}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds$

注：等式左右两边的 $\vec{T}^{0}$ 正好相差一个符号。

性质 2 若有向曲线 Γ_{AB} 是由有向曲线 Γ_{AC} ， Γ_{CB} 首尾相接而成，则 $\int_{\Gamma_{AB}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds=\int_{\Gamma_{AC}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds+\int_{\Gamma_{CB}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds.$

记 $d\vec{s}=\vec{T}^{0}ds=\{\cos a,\cos b,\cos g\}ds=\{dx,dy,dz\}.$

注： $\cos a ds=\Delta x=dx$ 是 ds 在 x 轴上的有向投影，当 a 为锐角， $dx>0$ ，当 a 为钝角， $dx<0$ ， $a=\frac{p}{2},dx=0$ ，而 dy,dz 是 ds 分别在 y 轴，z 轴上的有向投影，从而第二类曲线积分五种形式之一出现：

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_{AB}}\left(\vec{A}\cdot\vec{T}^{0}\right)ds=\int_{\Gamma_{AB}}\left(P\cos a+Q\cos b+R\cos g\right)ds\\
&=\int_{\Gamma_{AB}}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\\
&=\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+\int_{\Gamma_{AB}}Q(x,y,z)dy+\int_{\Gamma_{AB}}R(x,y,z)dz.
\end{aligned}
$$

而常常以形式$\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$出现的较多，如果是直接计算，不论是给哪一种形式出现，都需化成$\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$的形式（最后一种形式和上面形式实际上是相同的）

若曲线$\Gamma_{AB}:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，为光滑曲线且起点 A 对应的参数为t_A，终点 B 对应的参数为t_B，

则

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\\
&=\int_{t_A}^{t_B}\left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt.
\end{aligned}
$$

必须注意，公式中的t_A，t_B一定要与曲线的起点 A 终点 B 相对应。即化成 t 函数的定积分时，积分的下限必须是起点 A 对应的参数，积分的上限必须是终点 B 对应的参数，至于上下限谁大谁小不受限制，这一点与第一类曲线积分化为一元函数定积分时，下限一定小于上限的限制是不同的。

而平面上的第二类曲线积分，是空间第二类曲线积分的特殊情况.

定义 6.6　没有洞的平面区域，称为平面单连通区域，有洞的平面区域称为复连通区域。

定义 6.7 若空间区域 V 中任意的封闭曲线 L，都可以找以 L 为边界的曲面$S\subset V$，则 V 为线单连通区域。

2.第二类曲面积分

定义 6.8　若矢量函数$\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$与曲面 S 在曲面上点(x,y,z)处单位法向量$\vec{n}^{0}=\{\cos a,\cos b,\cos g\}$（$\vec{n}^{0}$的方向与曲面 S 指定的方向相同）的点乘积在 S 上的第一类曲面积分$\iint\limits_{S}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^{0}\right)dS$存在，该积分值称为$\vec{A}(x,y,z)$沿定侧曲面 S 上的第二类曲面积分。

$\oiint\limits_{S}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^{0}\right)dS$的物理意义是当流速为$\vec{A}$的不可压缩流体，通过封闭曲面 S 沿指定侧的 S 流量。

由定义知第二类曲面积分是特殊的第一类曲面积分，若把$\vec{A}\cdot\vec{n}^{0}$看成一个数量函数，这

时为第一类曲面积分，也具有第一类曲面积分的性质。

由定义知第二类曲面积分具有下面两条性质

性质 1 $\iint\limits_{S^+}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS=-\iint\limits_{S^-}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS$ 。

性质 2 $\iint\limits_{S}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS=\iint\limits_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS+\iint\limits_{S_2}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS.$

其中 S_1，S_2 的侧与曲面 S 的侧相同且 $S=S_1+S_2$，S_1，S_2 只有公共边界。

3.场论

定义 6.9 设 $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，且 P,Q,R 偏导数存在，称函数 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为向量函数 $\vec{A}$ 在点 M（x，y，z）的散度，记作 $div\vec{A}(x,y,z)$. 即

$$div\vec{A}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

散度具有线性运算法则，即 $div\left(a\vec{A}+b\vec{B}\right)=adiv\vec{A}+bdiv\vec{B}.$ 其中 a , b 为常数，$\vec{A},\vec{B}$ 为向量函数，利用散度的概念，高斯公式可写成下列简洁形式 $\oiint\limits_{S}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\iiint\limits_{V}div\vec{A}dv.$

定义 6.10 若 $\forall M(x,y,z)\in v$, 有 $div\vec{A}=0$，称 $\vec{A}$ 为无源场，并有下面两个推论。

定义 6.11 设 $\vec{A}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，且 P,Q,R 具有一阶偏导，称矢量函数 $\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}$ 为矢量函数 $\vec{A}$ 在点 M（x, y, z）处的旋度，记作 $rot\vec{A}$，即

$$rot\vec{A}=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$ 或者形式可写成 $$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

以便记忆.旋度也具有线性运算法则，即 $rot\left(a\vec{A}+b\vec{B}\right)=arot\vec{A}+brot\vec{B}.$ 此时斯托克斯公式可写成

$$\oint_L\vec{A}\cdot d\vec{s}=\iint\limits_{S}rot\vec{A}\cdot d\vec{S}.$$

（二）重要定理与公式

定理 6.2 （格林（Green）公式 ） 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有连续的一阶偏导数，则 $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$，这里 Γ 为区域 D 的边界曲线，并取

正向。

格林公式也可借助行列式来记忆$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy=\iint_{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}dxdy$.

注意：这里$\frac{\partial}{\partial x}$与 Q 乘积指的是$\frac{\partial}{\partial x}Q=\frac{\partial Q}{\partial x}.$

定理 6.3　设在单连通区域 D 内，P，Q 具有连续的一阶偏导数且$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,则环绕同一些洞（如图 10-1）的任何两条闭曲线（取同方向）上的曲线积分相等。

平面曲线积分与路径无关性定理

设$D\subset R^2$是平面单连通区域，若函数$P(x,y),Q(x,y)$在区域 D 内具有连续的一阶偏导数，则以下四个条件等价：

（1）沿 D 中任一按段光滑的闭曲线 L，有$\oint_{L} Pdx+Qdy=0$；

（2）对 D 中任一按段光滑曲线Γ，曲线积分$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy$与路径无关，只与Γ的起点和终点有关；

（3）$Pdx+Qdy$是 D 内某一些函数$u(x,y)$的全微分，即在 D 内存在一个二元函数$u(x,y)$，使$du=Pdx+Qdy$，即$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q$；

（4）在 D 内每一点处，有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$

定理 6.4（斯托克斯（Stokes）公式 ）　设光滑曲面 S 的边界曲线 L 是按段光滑的连续曲线，若$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在 S（连同 L）上具有连续的一阶偏导数，则

$$\oint_{L} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

其中 S 的侧面与 L 的方向按右手法则确定由定理的证明过程可知，只要以 L 为边界且符合定理条件的曲面 S，结论都成立，从而我们在利用 Stokes 公式时，寻找以 L 为边界的较简单曲面 S，比如平面上的圆面，椭圆面，三角形平面或球面等等，以利于解决问题。

定理 6.5（空间曲线积分与路径无关性）

设$\Omega\subset R^3$为空间线单连通区域，若函数 P、Q、R 在Ω上具有连续的一阶偏导数，则以下四个条件是等价的：

（1）对于Ω内任一按段光滑的封闭曲线 L，有$\oint_{L} Pdx+Qdy+Rdz=0$；

（2）对于Ω内任一按段光滑的曲线Γ，曲线积分$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$与路径无关，仅与起点、终点有关；

（3）$Pdx + Qdy + Rdz$是Ω内某一函数的全微分，即存在Ω内的三元函数$u(x, y, z)$，使$du = Pdx + Qdy + Rdz$，即$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$；

（4）$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$在$\Omega$内处处成立。

即$rot\vec{A} \equiv 0, (x, y, z) \in \Omega$，其中$\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$.

设$d\vec{S} = \vec{n}^0 dS = \{\cos a, \cos b, \cos g\} dS = \{dydz, dzdx, dxdy\}$，其中$dxdy = \cos r dS$，称为 dS 在 $0xy$ 平面上的有向投影，当 r 为锐角时，$dxdy > 0$，当 r 为钝角时，$dxdy < 0$，当$r = \frac{p}{2}$时，$dxdy = 0$。

我们可以证明$\cos r = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right)|\cos r|$。事实上，当 r 为锐角时，$\cos r > 0, \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right) = 1,$ 知 $\cos r = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right)|\cos r|$，当 r 为钝角时，$\cos r < 0, \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right) = -1,$ 知 $\cos r = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right)|\cos r|$，当 r 为 $\frac{p}{2}$ 时，$\cos r = 0, \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right) = 0,$ 知$\cos r = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right)|\cos r|$。

从而 $dxdy = \cos r dS = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right)|\cos r| dS = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - r\right)ds$. 同理可知 $\cos a = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - a\right)|\cos a|$，$\cos b = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - b\right)|\cos b|$，且$dydz = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - a\right)ds$，$dzdx = \mathrm{sgn}\left(\frac{p}{2} - b\right)ds$. 其中$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

第二类曲面积分常常以下面五种形式之一出现：

$$\iint_S \left(\vec{A}\cdot\vec{n}^0\right)dS=\iint_S \left(P\cos a+Q\cos b+R\cos r\right)dS$$
$$=\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$
$$=\iint_S P(x,y,z)dydz+\iint_S Q(x,y,z)dzdx+\iint_S R(x,y,z)dxdy.$$

如果是直接计算，无论是以哪一种形式给出，一定要化下面形式

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+\iint_S Q(x,y,z)dzdx+\iint_S R(x,y,z)dxdy$$

来计算，而且每一项要分别计算再相加，我们以计算$\iint_S R(x,y,z)dxdy$为例。

要求光滑曲面 S 一定要表示成$z=z(x,y):(x,y)\in sxy$（其中$s\,xy$是曲面 S 在 $0xy$ 平面上的投影区域)，且要求曲面 S 上每一点（x，y，z）处的法向量与 $0z$ 轴的夹角或者全是锐角或者全是钝角（曲面上个别曲线的法向量可以为$\frac{p}{2}$）或者全是$\frac{p}{2}$。如果做不到上述要求，需把 S 分成几块，使得每一块能做到上述要求，然后根据第二类曲面积分性质，把 S 上的第二类曲面积分化为小块曲面上的第二类曲面积分，计算之再相加之即可。

现假设 S 符合上述要求，即$S:z=z(x,y),(x,y)\in sxy$，且 r 全是锐角或全是钝角或全是$\frac{p}{2}$，此时$\operatorname{sgn}\left(\frac{p}{2}-r\right)$为一常数，则

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\iint_S R(x,y,z)\cos r dS=\iint_S R(x,y,z)\operatorname{sgn}\left(\frac{p}{2}-r\right)|\cos r|dS$$
$$=\iint_{6xy} R(x,y,z(x,y))\operatorname{sgn}\left(\frac{p}{2}-r\right)ds\ =\operatorname{sgn}\left(\frac{p}{2}-r\right)\iint_{sxy} R(x,y,z(x,y))ds\ .$$

即 r 全为锐角时　$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\iint_{sxy} R(x,y,z(x,y))ds$.

即 r 全为钝角时　$\iint_S R(x,y,z)dxdy=-\iint_{sxy} R(x,y,z(x,y))ds$.

即 r 全为$\frac{p}{2}$时　$\iint_S R(x,y,z)dxdy=0.$

注：$r=\frac{p}{2}$时，$dxdy=\cos\frac{p}{2}dS=0.$换句话说如果 S 在 $0xy$ 平面上的投影面积为零时，有$r=\frac{p}{2}$，此时$\iint_S R(x,y,z)dxdy=0.$

同理可知　计算$\iint_S R(x,y,z)dydz$时，要求$S:x=x(y,z),(y,z)\in syz$（S 在 $0yz$ 平面上的投影区域）a 全是锐角或全是钝角或全是$\frac{p}{2}$，此时，

$$\iint_S P(x,y,z)dxdz = \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{2}-a\right)\iint_{syz} P(x(y,z),y,z)ds .$$

计算 $\iint_S Q(x,y,z)dzdx$ 时，要求 $S: y=y(z,x),(z,x)\in szx$（S 在 0zx 平面上的投影区域）b 全是锐角或全是钝角或全是 $\frac{p}{2}$，此时，

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{2}-b\right)\iint_{szx} Q(x,y(z,x),z)ds .$$

计算 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

（1）若 $\Sigma: z=z(x,y) \quad (x,y)\leftarrow s\ xy$ 且 g 为锐角

设 $F(x,y,z)=z-z(x,y)=0$， $\vec{n}=\pm\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}$

$$\vec{n}^0=\pm\left\{-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}},-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}},-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}}\right\}$$

由 g 为锐角，知 $\cos g>0$，故前面取“+”号，有 $\cos g=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}}$，

$\cos a=-\frac{\partial z}{\partial x}\cos g$， $\cos b=-\frac{\partial z}{\partial x}\cos g$

原式= $\iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)\cos a+Q(x,y,z)\cos b+R(x,y,z)\cos g\right]ds$

$$=\iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial x})\cos g+Q(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial y})\cos g+R(x,y,z)\cos g\right]ds$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial x})+Q(x,y,z)(-\frac{\partial z}{\partial y})+R(x,y,z)\right]dxdy$$

$$=\iint_{s\,xy}\left[P(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial x})+Q(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial y})+R(x,y,z(x,y))\right]ds$$

若 g 为钝角，同理可知二重积分前面取“—”号.

（2）若 $\Sigma: x=x(y,z) \quad (y,z)\leftarrow s\ yz$ 且 a 为锐角，则

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint\limits_{s\,yz}\left[P(x,y,x(y,z))+Q(x,y,x(y,z))(-\frac{\partial x}{\partial y})+R(x,y,x(y,z)(-\frac{\partial x}{\partial z})\right]ds$$

若a 为钝角，同理可知二重积分前面取“—”号.

（3）若$\sum: y=y(x,z) \quad (x,z)\leftarrow s\ xz$且$b$ 为锐角，则

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint\limits_{s\,xz}\left[P(x,y,y(x,z))(-\frac{\partial y}{\partial x})+Q(x,y,y(x,z))+R(x,y,y(x,z)(-\frac{\partial y}{\partial z})\right]ds$$

若b 为钝角，同理可知二重积分前面取“—”号.

定理 6.6（高斯（Gauss）公式） 设空间区域 V 由分片光滑的闭曲面 S 围成，若函数 P,Q,R 在 V 上具有连续的一阶偏导数，则 $\oiint\limits_{S} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$，其中 S 取外侧。

注:以上关于不论是第二类曲线积分或第二类曲面积分的定理都要求 P,Q,R 具有连续的一阶偏导数，这一条件要引起大家的重视。

推论 6.6.1 若在封闭曲面 S 所包围的区域 V 中处处有 $div\vec{A}=0$，则 $\oiint\limits_{S}\vec{A}\cdot d\vec{S}=0.$

推论 6.6.2 如果仅在区域 V 中某些点（或子区域上）$div\vec{A}\neq 0$或$div\vec{A}$不存在，其它点都有 $div\vec{A}=0$，则通过包围这些点或子区域（称为洞）的 V 内任一封闭曲面积分（物理意义为流量）都是相等的，即 $\oiint\limits_{S_1}\vec{A}\cdot\vec{n}^0ds=\oiint\limits_{S_2}\vec{A}\cdot\vec{n}^0ds$。其中 S_1，S_2是包围之同的任何两个封闭曲面，且法方向沿同侧。

类型 1.1 平面第二类曲线积分计算

解题策略 1. $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 其中 L 是平面上简单封闭曲线。

（1）若能找到一个单连通区域 D，使 $L\subset D$，而 P，Q 在 D 上具有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$，由平面曲线积分与路径无关性知 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$

（2）若 L 包围的区域为s ,P,Q 在s 上具有连续的一阶偏导，但$\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$此时可用格

林公式，有$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\pm\iint_s\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)ds$.当 L 沿正向，取“+”号，沿负向取“一”号。

（3）若 L 包围的区域s 有洞，在这些洞上，P,Q或者偏导数不连续或者$\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$，但在其余点，$P,Q$具有连续的偏导数且$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，此时可找一简单封闭曲线 L_1 与 L 环绕同一些洞且方向一致则由前面给出的复连通区域上的定理知$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{L_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.而 L_1 容易化成参数方程且转化成一元函数定积分后，容易计算。

（4）若 L 容易化成参数方程且转化成一元函数定积分后，容易计算，也可直接化成一元函数积分。

2．$\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.其中$\Gamma_{AB}$是非封闭的平面曲线，起点$A(x_0,y_0)$，终点$B(x_1,y_1)$。

（1）若能找到一个单连通区域 D，使$\Gamma_{AB}\subset D$，P,Q在 D 上具有连续的一阶偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，该曲线积分与路径无关，则$\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)dy.$

（2）若P,Q偏导数连续，但$\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in\Gamma_{AB}$，且$\Gamma_{AB}$化成参数比较方程困难或者化成参数方程转化一元函数定积分很难计算，且加一个简单曲线（比如直线段）构成封闭曲线，则可加一个简单曲线 L，减一个简单曲线 L，即原式

$$\oint_{\Gamma_{AB}+L} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy=\pm\iint_s\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_L Pdx+Qdy$$

而二重积分与在 L 上的第二曲线积分都容易计算。(二重积分前的“±”号，由曲线$\Gamma_{AB}+L$方向确定)

（3）若Γ_{AB}容易化成参数方程，且第二类曲线积分转化为一元函数定积分以后容易计算，也可直接转化。

3．第二类曲线积分有时也可转化为第一类曲线积分，利用第一类曲线积分来计算。

4．第二类曲线积分的牛顿一莱布尼兹公式

若$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)} du(x,y)=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0).$$

以上方法请大家灵活使用。

类型 1.2 求原函数

解题策略 1．在一元函数里，若 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 必有原函数，在二元函数里，即使 $P(x,y),Q(x,y)$ 连续，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 也不一定存在 $u(x,y)$，使 $du=Pdx+Qdy.$ 若 P,Q 在单连通区域 D 上具有连续的一阶偏导，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$，则 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C$，使 $du=Pdx+Qdy.$ 即 $\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q$，其中 $(x_0,y_0)\in D$（定点）

2．同理　若 P，Q，R 在空间某线单连通区域 V 上具有连续的一阶偏导数，且 $rot\vec{A}\equiv 0,(x,y,z)\in V$，则 $u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz+c$，使 $du=Pdx+Qdy+Rdz$，即 $\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q,\frac{\partial u}{\partial z}=R.$ 其中 $(x_0,y_0,z_0)\in V.$

类型 1.3 求平面区域的面积

解题策略　利用平面封闭曲线上的第二类曲线积分计算平面图形的面积：在格林公式中，令 $P=-y,Q=x,$ 有 $\oint_{\Gamma}-ydx+xdy=\iint_{D}[1-(-1)]dxdy=2S$，因此 $S=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}-ydx+xdy.$ 其中 Γ 是有界闭区域 D 的边界，沿正向.

类型 1.4 求 P,Q 中含有待求的字母常数

解题策略　若曲线积分 $\int_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，P,Q 中含有待求的字母常数，且 P,Q 具有连续的偏导数，由曲线积分与路径无关的四个等价条件知 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，从中求出待求字母常数。

类型 1.5 求第二类曲面积分

解题策略 1．$\oiint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

（1）若 P，Q，R 在 Σ 包围的立体区域 V 具有连续的一阶偏导数，则 $\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$，曲面沿外侧取“+”号，曲面沿

内侧取“-”号。要求右边三重积分容易计算。

（2）若曲面$\sum$包围的立体 V 内有洞，而在洞外面，P，Q，R 具有连续偏导数，且$div\vec{A}\equiv 0$，$\left(\vec{A}=\{P,Q,R\}\right)$，利用推论 2 转化为与$\sum$包含同一些洞的曲面$\sum_1$上的第二类曲面积分，而且沿同一侧方向，即$\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint\limits_{\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，

要求$\sum_1$是简单的曲面，且右边或者直接计算或者化成第一类曲面积分计算。

（3）若曲面$\sum$本身也比较简单，也可直接计算或者化成第一类曲面积分计算。

2. $\iint\limits_{S} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，其中 S 是非封闭的光滑曲面。

（1）若直接计算比较困难，而加一个简单曲面 S_1 构成封闭曲面，且符合高斯定理条件，则

$$\iint\limits_{S} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint\limits_{S+S_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy-\iint\limits_{S_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\pm\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv-\iint\limits_{S_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

“±”由曲面法线方向的侧确定，要求右边的三重积分容易计算，后面一项第二类曲面积分直接容易计算。

（2）也可直接计算或转化为第一类曲面积分来计算

类型 1.6 求空间第二类曲线积分

解题策略 1. $\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$，其中 L 为空间简单封闭曲线。

（1）若找到一个线单连通区域 V，使$L\subset V, P,Q,R$在 V 上具有连续的一阶偏导数，且$rot\vec{A}=0,(x,y,z)\in V\left(\vec{A}=\{P,Q,R\}\right)$ 则 由 曲 线 积 分 与 路 径 无 关 性 知 $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0.$

（2）若 P，Q，R 偏导数连续，但$rot\vec{A}\neq 0,(x,y,z)\in L.$可找一个以 L 为边界曲线的简单曲面 $\sum$ ， 由 斯 托 克 斯 公 式 知 $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial z}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$ 要 求 第二类曲面积分容易计算。

（3）若 L 容易化成参数方程，且第二类曲线积分化成一元函数定积分后容易计算，也可直接计算。

2． $\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ ， 其 中 Γ_{AB} 为 空 间 曲 线， 起 点

$A(x_0,y_0,z_0)$，终点 $B(x_1,y_1,z_1)$.

（1）若找到一个线单连通区域 V，使 $\Gamma_{AB}\subset V, P,Q,R$ 在 V 具有连续的一阶偏导数，且 $rot\vec{A}\equiv 0,(x,y,z)\in V$ ，则该积分与路径无关，则

$$\int_{\Gamma_{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z_1}(x_1,y_1,z)dz.$$

（2）若该积分与路径有关，但 Γ_{AB} 容易化成参数方程，且转化为一元函数定积分后容易计算，可直接计算。

3．第二类曲线积分的牛顿一莱布尼兹公式

若 $du(x,y,z)=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz,$ 则

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x_1,y_1,z_1)}du(x,y,z)=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0).$$

以上方法请大家灵活使用。