线性代数习题解答[1]

张应应 胡佩

2013-3-1

目　录

[1] 教材：段正敏，颜军，阴文革:《线性代数》，高等教育出版社，2010。

第一章　行列式

1．填空题：

（1）3421 的逆序数为 ____5____；

解：该排列的逆序数为$t=0+0+2+3=5$.

（2）517924 的逆序数为____7____；

解：该排列的逆序数为$t=0+1+0+0+3+3=7$.

（3）设有行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\Delta(a_{ij}),$$

含因子$a_{12}a_{31}a_{45}$的项为____-1440，0____；

解：$(-1)^{t(23154)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}=(-1)^3\cdot 5\cdot 2\cdot 6\cdot 8\cdot 3=-1440$

$(-1)^{t(24153)}a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}=(-1)^4\cdot 5\cdot 0\cdot 6\cdot 8\cdot 1=0$

所以D含因子$a_{12}a_{31}a_{45}$的项为-1440 和 0.

（4）若n阶行列式$D_n=\Delta(a_{ij})=a,则D=\Delta(-a_{ij})=$____$(-1)^n a$____；

解：$\because$行列式D中每一行可提出一个公因子-1，

$\therefore D=\Delta(-a_{ij})=(-1)^n\Delta(a_{ij})=(-1)^n a$.

（5）设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix}$，则 $f(x)=0$的根为____1，2，-2____；

解：$f(x)$是一个 Vandermonde 行列式，

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(-2-1)(-2-2)(2-1)=0$的根为 1，2，-2.

（6）设x_1,x_2,x_3是方程$x^3+px+q=0$的三个根，则行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=$$ ____0____；

解：根据条件有$x^3+px+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+ax-x_1x_2x_3$

比较系数可得：$x_1+x_2+x_3=0$，$x_1x_2x_3=-q$

再根据条件得：$\begin{cases} x_1^3 = -px_1 - q \\ x_2^3 = -px_2 - q \\ x_3^3 = -px_3 - q \end{cases}$

原行列式$=x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = -p(x_1 + x_2 + x_3) - 3q - 3\cdot(-q) = 0$.

（7）设有行列式$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$=0，则 $x=$______1，2______；

解：$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 1, 2$.

（8）设 $f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & x & a_{24} \\ a_{31} & x & a_{33} & a_{34} \\ x & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$，则多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为______0______；

解：按第一列展开 $f(x) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + xA_{41}$，

$\because A_{11}, A_{21}, A_{31}$ 中最多只含有 x^2 项，$\therefore$含有 x^3 的项只可能是 xA_{41}

$$xA_{41} = x(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & x \\ a_{22} & x & a_{24} \\ x & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$= -x\left[x\left(a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{22}a_{33}\right) - \left(x^3 + a_{13}a_{22}a_{34} + a_{12}a_{24}a_{33}\right)\right]$$

$\because xA_{41}$ 不含 x^3 项，$\therefore$ $f(x)$ 中 x^3 的系数为 0.

（9）如果$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$=0，则 $x=$______2______；

解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (5-12)(6-3x) = 0$

$\therefore x = 2$.

（10）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$=______-abcd______；

解：将行列式按第一行展开：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -abcd\,.$$

（11）如果$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix}$=1，则$\begin{vmatrix} a-3 & b-3 & c-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=______1______；

解：$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{|A|=|A^T|} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+2r_3]{r_1-3r_3} \begin{vmatrix} a-3 & b-3 & c-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

（12）如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$=2，则$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{12}-2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{22}-2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{32}-2a_{33} \end{vmatrix}$=______-16______，

$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{21}-3a_{11} & a_{21}-a_{31} \\ 2a_{12} & a_{22}-3a_{12} & a_{22}-a_{32} \\ 2a_{13} & a_{23}-3a_{13} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix}$=______-4______，$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 3 \end{vmatrix}$=______-4______；

解：$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| = |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = |\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3| = 2$

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{12}-2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{22}-2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{32}-2a_{33} \end{vmatrix} = |2\alpha_1 \quad 2\alpha_2 \quad 2\alpha_2-2\alpha_3| = 2^3 |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2-\alpha_3|$$

$$= 8\left(|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2| + |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad -\alpha_3|\right) = 8\left(0-|A|\right) = -16$$

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{21}-3a_{11} & a_{21}-a_{31} \\ 2a_{12} & a_{22}-3a_{12} & a_{22}-a_{32} \\ 2a_{13} & a_{23}-3a_{13} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix} = \left|2\beta_1 \quad \beta_2-3\beta_1 \quad \beta_2-\beta_3\right| = 2\left|\beta_1 \quad \beta_2-3\beta_1 \quad \beta_2-\beta_3\right|$$

$$= 2\left(\left|\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_2-\beta_3\right| + \left|\beta_1 \quad -3\beta_1 \quad \beta_2-\beta_3\right|\right)$$

$$= 2\left|\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_2-\beta_3\right| = 2\left(\left|\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_2\right| - \left|\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\right|\right)$$

$$= -2\left|A^T\right| = -4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} 2\cdot(-1)^{1+4}\left|A^T\right| = -4.$$

（13）设n阶行列式$D=a\neq 0$，且D中的每列的元素之和为b，则行列式D中的第二行的代数余子式之和为= $\underline{\dfrac{a}{b}}$ ；

解：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{每行元素加到第二行}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} b\left(A_{21}+A_{22}+\cdots+A_{2n}\right) = a \neq 0$$

$\therefore b\neq 0,\text{且}A_{21}+A_{22}+\cdots+A_{2n}\neq 0$

$\therefore A_{21}+A_{22}+\cdots+A_{2n}=\dfrac{a}{b}$

实际上，由上述证明过程可知任意行代数余子式之和 $A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{in}=\dfrac{a}{b}, i=1,2,\ldots,n.$

（14）如果$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$=1，则$\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$=____-1____，

$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$= $\underline{\dfrac{1}{a_{11}}}$ ；

解：令$B=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{11} \neq 0, \text{且} |B| = \frac{1}{a_{11}} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{4+1} |B| = -a_{11} |B| = -1$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = |B^T| = |B| = \frac{1}{a_{11}}.$$

（15）设有行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$，则元素$-1$的余子式$M_{21}$= $\underline{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix}}$ ，元素 2 的代数余子式A_{12}= $\underline{(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$ ；

（16）设$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \Delta(a_{ij})$，$A_{ij}$表示元素$a_{ij}$的代数余子式，则

$A_{14} + 2A_{24} + 3A_{34} + 4A_{44} =$ ____0____；

解：方法一：$A_{14} + 2A_{24} + 3A_{34} + 4A_{44}$可看成$D$中第一列各元素与第四列对应元素代数余子式乘积之和，故其值为 0.

方法二：$A_{14} + 2A_{24} + 3A_{34} + 4A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{推论1}}{=\!=} 0.$

（17）设$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix} = \Delta(a_{ij})$，$A_{ij}$表示元素$a_{ij}$的代数余子式，则

$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} =$ ____0____；

解：$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ c & b & d & 1 \\ d & b & c & 1 \\ a & b & d & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{推论4}} 0$.

（18）设 $f(x)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & x & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$，则 x^5 的系数为____6____；

解：方法一：

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & x & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & x \\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 \\ 3 & 2 & x & 0 & 0 \\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=6\cdot(-1)^{\frac{5\times 4}{2}}\cdot(-1)^2\cdot x^5=6x^5$$

方法二：$\because$ $f(x)$ 只有一项非 0

$$\therefore f(x)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & x & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=\left(-1\right)^{t(543216)}a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}a_{66}$$

$$=(-1)^{10}\cdot(-1)^2\cdot x^5\cdot 6=6x^5$$

综上所述：x^5 的系数为 6.

（19）设 $D=\begin{vmatrix} & & & & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ & 0 & & & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{vmatrix}$， 且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}=a$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = b \text{，则 } D = \underline{\qquad (-1)^{mn} ab \qquad}；$$

解：方法一：令 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = a$，$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = b$

则 $D_1 = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| = ab, D_2 = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B| = (-1)^{mn} ab$

证明：根据行列式性质 2 和 5，将行列式 $|A|$ 变成下三角行列式，得到：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ a_{21}' & a_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1}' & a_{m2}' & \cdots & a_m \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_m = a$$

行列式 D_1、D_2 的变换和行列式 $|A|$ 的变换完全相同，得到：

$$D_1 = \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_1 & & & & & & & \\ a_{21}' & a_2 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ a_{m1}' & a_{m2}' & \cdots & a_m & & & & \\ \hdashline c_{11}' & c_{12}' & \cdots & c_{1m}' & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ c_{21}' & c_{22}' & \cdots & c_{2m}' & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1}' & c_{n2}' & \cdots & c_{nm}' & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right|$$

$$D_2=\left|\begin{array}{cccc:cccc} & & & & a_1 & & & \\ & & & & a_{21}' & a_2 & & \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & a_{m1}' & a_{m2}' & \cdots & a_m \\ \hdashline b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_{11}' & c_{12}' & \cdots & c_{1m}' \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_{21}' & c_{22}' & \cdots & c_{2m}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & c_{n1}' & c_{n2}' & \cdots & c_{nm}' \end{array}\right|$$

分别将 D_1 、D_2 第一次按第一行展开（a_2 变成第一行），第二次按第二行展开（a_3 变成第一行），……，总共进行 m 次第一行展开，得到：

$D_1=a_1a_2\cdots a_m|B|=|A|\cdot|B|=ab$；

$D_2=a_1(-1)^{1+n+1}\cdot a_2(-1)^{1+n+1}\cdots a_m(-1)^{1+n+1}\cdot|B|=(-1)^{mn}\cdot|A|\cdot|B|=(-1)^{mn}ab$

证毕.

方法二：设 $A=(a_{ij})_{m\times m}$， $B=(b_{pq})_{n\times n}$， $D=\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}=(d_{ij})_{(m+n)\times(m+n)}$

$$\text{其中：}d_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, & i=1:m,\ j=1:m\\ b_{pq}, & i=m+1:m+n,\ j=m+1:m+n,\ p=i-m,q=j-m\\ c_{pj}, & i=m+1:m+n,\ j=1:m,\ p=i-m\end{cases}\qquad(*)$$

$$\text{那么：}|D|=\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=\sum_{\{p_1,\cdots,p_{m+n}\}=\{1,\cdots,m+n\}}(-1)^{t(p_1\cdots p_m p_{m+1}\cdots p_{m+n})}d_{1p_1}\cdots d_{mp_m}d_{m+1,p_{m+1}}\cdots d_{m+n,p_{m+n}}$$

$$\overset{\text{由}(*)}{=\!=}\sum_{\substack{\{p_1,\cdots,p_m\}=\{1,\cdots,m\}\\ \{l_1,\cdots,l_m\}=\{1,\cdots,n\}}}(-1)^{t(p_1\cdots p_m(m+l_1)\cdots(m+l_n))}a_{1p_1}\cdots a_{mp_m}b_{1l_1}\cdots b_{nl_n}$$

$$=\sum_{\substack{\{p_1,\cdots,p_m\}=\{1,\cdots,m\}\\ \{l_1,\cdots,l_m\}=\{1,\cdots,n\}}}\left[(-1)^{t(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{mp_m}\cdot(-1)^{t(l_1\cdots l_n)}b_{1l_1}\cdots b_{nl_n}\right]$$

$$=\left(\sum_{\{p_1,\cdots,p_m\}=\{1,\cdots,m\}}(-1)^{t(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{mp_m}\right)\cdot\left(\sum_{\{l_1,\cdots,l_m\}=\{1,\cdots,n\}}(-1)^{t(l_1\cdots l_n)}b_{1l_1}\cdots b_{nl_n}\right)$$

$$=|A|\cdot|B|=ab$$

$$D_2=\left|\begin{array}{cccc|cccc} & & & & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ & & & & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \\ \hline b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{array}\right|$$

D_2 中 $a_{m\square}$ 依次与 $b_{1\square},b_{2\square},\cdots,b_{n\square}$ 对换，使得 $a_{m\square}$ 在 $b_{n\square}$ 下面；

$a_{(m-1)\square}$ 依次与 $b_{1\square},b_{2\square},\cdots,b_{n\square}$ 对换，使得 $a_{(m-1)\square}$ 在 $b_{n\square}$ 下面，在 $a_{m\square}$ 上面；……

$a_{1\square}$ 依次与 $b_{1\square},b_{2\square},\cdots,b_{n\square}$ 对换，使得 $a_{1\square}$ 在 $b_{n\square}$ 下面，在 $a_{2\square}$ 上面；

总共进行了 mn 次对换。得到：

$$D_2=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} B & C \\ O & A \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\cdot|B|\cdot|A|=(-1)^{mn}ab.$$

（20）$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=\underline{\quad 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5 \quad}$.

解：$$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3+c_4+c_5}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第一列展开}}{=\!=\!=\!=} D_4-a\cdot(-1)^{5+1}\cdot a^4=D_4-a^5$$

同理可得：$D_4=D_3+a^4$，$D_3=D_2-a^3$，$D_2=D_1+a^2$

则 $D_5=D_1+a^2-a^3+a^4-a^5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

2．选择题

（1）设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & x & x & 3 \\ 1 & 0 & 2 & x \\ x & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$，则多项式的次数为（ B ）

（ A ）2　　　　（ B ）3　　　　（ C ）4　　　　（ D ）5

解：方法一：

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & x & x & 3 \\ 1 & 0 & 2 & x \\ x & 1 & 3 & x \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\left|\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & 2 & x \\ x & x & x & 3 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ x & 1 & 3 & x \end{array}\right| \xlongequal[\substack{r_3-xr_1 \\ r_4-xr_1}]{r_2-xr_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & x & -x & 3-x^2 \\ 0 & 2 & 3-2x & 4-x^2 \\ 0 & 1 & 3-2x & x-x^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} -\begin{vmatrix} x & -x & 3-x^2 \\ 2 & 3-2x & 4-x^2 \\ 1 & 3-2x & x-x^2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} \left|\begin{array}{c:cc} 1 & 3-2x & x-x^2 \\ 2 & 3-2x & 4-x^2 \\ x & -x & 3-x^2 \end{array}\right| \xlongequal[r_3-xr_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3-2x & x-x^2 \\ 0 & 2x-3 & x^2-2x+4 \\ 0 & -x(4-2x) & x^3-2x^2+3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} \begin{vmatrix} 2x-3 & x^2-2x+4 \\ -x(4-2x) & x^3-2x^2+3 \end{vmatrix} = x^3-10x^2+22x-9$$

$\therefore$ 多项式次数为 3；

方法二：

$$f(x)=\left|\begin{array}{cccc} x & 2 & 3 & 4 \\ x & x & x & 3 \\ 1 & 0 & 2 & x \\ \hline x & 1 & 3 & x \end{array}\right| \xlongequal[c_4-xc_1]{c_3-2c_1} \begin{vmatrix} x & 2 & 3-2x & 4-x^2 \\ x & x & -x & 3-x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 3-2x & x-x^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第三行展开}} 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3-2x & 4-x^2 \\ x & -x & 3-x^2 \\ 1 & \underline{3-2x} & x-x^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 2 & 3-2x & 4-x^2 \\ x & -x & 3-x^2 \\ -1 & 0 & \underline{x-4} \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+(x-4)c_1} \begin{vmatrix} 2 & 3-2x & -x^2+2x-4 \\ x & -x & -4x+3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三行展开}} (-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3-2x & -x^2+2x-4 \\ -x & -4x+3 \end{vmatrix} = x^3-10x^2+22x-9$$

$\therefore$ 多项式次数为 3；

注意：实际上方法一与方法二思想类似：利用行列式展开定理对行列式降阶，最后求出行列式的值（多项式）．

方法三：$f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & x & x & 3 \\ 1 & 0 & 2 & x \\ x & 1 & 3 & x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二行展开}} xA_{21}+xA_{22}+xA_{23}+3A_{24}$

这四项的最高次项分别为：x^2，x^3，x^3，x

$$A_{21}=(-1)\begin{vmatrix}2&3&4\\0&2&x\\1&3&x\end{vmatrix}=O(x)$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}x&3&4\\1&2&x\\x&3&x\end{vmatrix}=2x^2+3x^2+12-\left(8x+3x+3x^2\right)=2x^2+O(x)$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}x&2&4\\1&0&x\\x&1&x\end{vmatrix}=-\left[0+2x^2+4-\left(0+2x+x^2\right)\right]=-x^2+O(x)$$

$$\therefore\ f(x)=xA_{22}+xA_{23}+O\left(x^2\right)=2x^3-x^3+O\left(x^2\right)=x^3+O\left(x^2\right)$$

$\therefore$ 多项式次数为 3.

（2）设 x,y 为实数且 $\begin{vmatrix}x&y&0\\-y&x&0\\0&x&1\end{vmatrix}$=0，则（ D ）

（ A ） $x=0,y=1$ （ B ） $x=-1,y=1$ （ C ） $x=1,y=-1$ （ D ） $x=0,y=0$

解：$\begin{vmatrix}x&y&0\\-y&x&0\\0&x&1\end{vmatrix}=x^2+y^2=0\ \Rightarrow\ x=y=0$.

（3）设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}a_{11}+x&a_{12}+x&a_{13}+x&a_{14}+x\\a_{21}+x&a_{22}+x&a_{23}+x&a_{24}+x\\a_{31}+x&a_{32}+x&a_{33}+x&a_{34}+x\\a_{41}+x&a_{42}+x&a_{43}+x&a_{44}+x\end{vmatrix}$，则多项式的次数最多为（ A ）

（ A ）1 （ B ）2 （ C ）3 （ D ）4

解：设 $\vec{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$， $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times4}=\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\right)$，则

$$f(x)=\left|\underline{\alpha_1+x\vec{1}}\quad\alpha_2+x\vec{1}\quad\alpha_3+x\vec{1}\quad\alpha_4+x\vec{1}\right|$$

$$\overset{\text{性质4}}{=\!=\!=}\left|\alpha_1\quad\alpha_2+x\vec{1}\quad\alpha_3+x\vec{1}\quad\alpha_4+x\vec{1}\right|+\left|x\vec{1}\quad\alpha_2+x\vec{1}\quad\alpha_3+x\vec{1}\quad\alpha_4+x\vec{1}\right|$$

$$=f_1(x)+f_2(x)$$

$$f_1(x)=\left|\alpha_1\quad\underline{\alpha_2+x\vec{1}}\quad\alpha_3+x\vec{1}\quad\alpha_4+x\vec{1}\right|$$

$$\xlongequal{\text{性质4}}\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3+x\vec{1}\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|+\left|\alpha_1\quad x\vec{1}\quad \alpha_3+x\vec{1}\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|$$

$$=f_3(x)+f_4(x)$$

$$f_2(x)\xlongequal{\text{性质3}}x\left|\vec{1}\quad \alpha_2+x\vec{1}\quad \alpha_3+x\vec{1}\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|\xlongequal{\text{性质5}}x\left|\vec{1}\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4\right|=O(x)$$

$$f_3(x)=\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \underline{\alpha_3+x\vec{1}}\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|\xlongequal{\text{性质4}}\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|+\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad x\vec{1}\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|$$

$$=f_5(x)+f_6(x)$$

$$f_4(x)\xlongequal{\text{性质3}}x\left|\alpha_1\quad \vec{1}\quad \alpha_3+x\vec{1}\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|\xlongequal{\text{性质5}}x\left|\alpha_1\quad \vec{1}\quad \alpha_3\quad \alpha_4\right|=O(x)$$

$$f_5(x)=\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \underline{\alpha_4+x\vec{1}}\right|\xlongequal{\text{性质4}}\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4\right|+\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad x\vec{1}\right|$$

$$\xlongequal{\text{性质3}}\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4\right|+x\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \vec{1}\right|=O(x)$$

$$f_6(x)\xlongequal{\text{性质3}}x\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \vec{1}\quad \alpha_4+x\vec{1}\right|\xlongequal{\text{性质5}}x\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \vec{1}\quad \alpha_4\right|=O(x)$$

$$\therefore f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\left(f_3(x)+f_4(x)\right)+f_2(x)=\left[\left(f_5(x)+f_6(x)\right)+f_4(x)\right]+f_2(x)$$
$$=O(x)$$

$\therefore f(x)$ 的次数最多为 1.

（4）$D_n=\begin{vmatrix}0 & & & -1\\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ -1 & & & 0\end{vmatrix}$，当 $n=$（ C ）时，$D_n<0$.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）7

解：$D_n=\begin{vmatrix} & & & -1\\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ -1 & & & \end{vmatrix}_{n\times n}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

n	3	4	5	7
$\frac{n(n+1)}{2}$	6	10	15	28

$\therefore$ 当 $n=5$ 时，$D_n=-1<0$，选 C.

（5）α_j 为四阶行列式 D 的第 j 列，（j=1，2，3，4，），且 $D=-5$，则下列行列式中，等于 -10 的是（D）.

（A）$|2\alpha_1,\quad 2\alpha_2,\quad 2\alpha_3,\quad 2\alpha_4|$

（B）$|\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_2+\alpha_3,\quad \alpha_3+\alpha_4,\quad \alpha_4+\alpha_1|$

（C）$|\alpha_1,\quad \alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4|$

（D）$|\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_2+\alpha_3,\quad \alpha_3+\alpha_4,\quad \alpha_4-\alpha_1|$

解：$D=|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4|=-5$

（A）$D_1=|2\alpha_1 \quad 2\alpha_2 \quad 2\alpha_3 \quad 2\alpha_4|=2^4|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4|=2^4D=-80$

（B）方法一：$D_2=|\alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4+\alpha_1|$

$$\overset{c_1-c_2+c_3-c_4}{=\!=\!=\!=}|0 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4+\alpha_1|=0$$

方法二：$D_2=|\underline{\alpha_1+\alpha_2} \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4+\alpha_1|$

$$\overset{\text{性质4}}{=\!=}|\alpha_1 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4+\alpha_1|+|\alpha_2 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4+\alpha_1|$$

$$=E_1+F_1$$

$$E_1 \overset{c_4-c_1}{\underset{\substack{c_3-c_4\\c_2-c_3}}{=\!=\!=}}|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4|=D$$

$$F_1 \overset{c_2-c_1}{\underset{\substack{c_3-c_2\\c_4-c_3}}{=\!=\!=}}|\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_1|=(-1)^3\cdot|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4|=-D$$

$\therefore D_2=E_1+F_1=D-D=0$

（C）$D_3=|\alpha_1 \quad \alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4|$

$$\overset{c_4-c_3}{=\!=}|\alpha_1 \quad \alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_4|\overset{c_3-c_2}{=\!=}|\alpha_1 \quad \alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4|$$

$$\overset{c_2-c_1}{=\!=}|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4|=D=-5$$

（D）$D_4=|\underline{\alpha_1+\alpha_2} \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4-\alpha_1|$

$$\xlongequal{\text{性质4}}\left|\alpha_1 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4-\alpha_1\right|+\left|\alpha_2 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4-\alpha_1\right|$$

$$=A_1+B_1$$

$$A_1 \xlongequal[\substack{c_3-c_4\\c_2-c_3}]{c_4+c_1}\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\right|=D$$

$$B_1 \xlongequal[\substack{c_3-c_2\\c_4-c_3}]{c_2-c_1}\left|\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad -\alpha_1\right|=(-1)^{3+1}\cdot\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\right|=D$$

$$\therefore D_4=A_1+B_1=D+D=2D=-10$$

3．计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}$，　　（2）$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&-1&-1&-7\end{vmatrix}$，

（3）$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$，　　（4）$\begin{vmatrix}2&6&1&1&3\\1&0&2&0&4\\2&1&3&5&0\\1&3&4&1&0\\3&0&3&6&9\end{vmatrix}$，

（5）$\begin{vmatrix}0&0&0&0&2&3\\0&0&0&0&5&6\\1&0&0&8&0&0\\2&3&0&0&0&0\\0&4&5&0&0&0\\0&0&6&7&0&0\end{vmatrix}$，　　（6）$\begin{vmatrix}1+a&b&c&d\\a&1+b&c&d\\a&b&1+c&d\\a&b&c&1+d\end{vmatrix}$，

（7）$\begin{vmatrix}ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$，　　（8）$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$.

解：（1）$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_2-r_1}]{r_4-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&5&9\\0&3&9&19\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_2]{r_4-3r_2}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&3&10\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-3r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$

（2）$D=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&-1&-1&-7\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-10r_2]{r_1-4r_2}\begin{vmatrix}0&-7&2&-4\\1&2&0&2\\0&-15&2&-20\\0&-1&-1&-7\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-7&2&-4\\-15&2&-20\\-1&-1&-7\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_1+2r_3]{r_2+2r_3}-\begin{vmatrix}-9&0&-18\\-17&0&-34\\-1&-1&-7\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第二列展开}}-(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-9&-18\\-17&-34\end{vmatrix}\xlongequal{\text{推论4}}0$$

（3）$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_i,\,i=2,3,4}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_i-r_1,\,i=2,3,4}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times2^3=48$

（4）$D=\begin{vmatrix}2&6&1&1&3\\\boxed{1}&0&2&0&4\\2&1&3&5&0\\1&3&4&1&0\\3&0&3&6&9\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_2\\r_4-r_2\\r_5-3r_2}]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&6&-3&1&-5\\1&0&2&0&4\\0&\boxed{1}&-1&5&-8\\0&3&2&1&-4\\0&0&-3&6&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_3]{r_1-6r_3}\begin{vmatrix}0&0&-7&-1&3\\1&0&2&0&4\\0&1&-1&5&-8\\0&0&5&-14&20\\0&0&-3&6&-3\end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{再按第二列展开}]{\text{按第一列展开}}\begin{vmatrix}-7&-1&3\\5&-14&20\\-3&6&-3\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2+2c_1}\begin{vmatrix}-7&-15&10\\5&-4&15\\-3&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第三行展开}}(-3)\cdot(-1)^{3+1}\cdot(-15\times15+4\times10)$

$=555$

（5）$D=\begin{vmatrix}0&0&0&0&2&3\\0&0&0&0&5&6\\1&0&0&8&0&0\\2&3&0&0&0&0\\0&4&5&0&0&0\\0&0&6&7&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O&A_{2\times2}\\B_{4\times4}&C_{4\times2}\end{vmatrix}=(-1)^{2\times4}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&8\\2&3&0&0\\0&4&5&0\\0&0&6&7\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{B\text{按第四列展开}}(2\times6-3\times5)\times\left[8\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}2&3&0\\0&4&5\\0&0&6\end{vmatrix}+7\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&4&5\end{vmatrix}\right]$$

$=-3\times(-8\times2\times4\times6+7\times1\times3\times5)=837$

（6）方法一：$D=\begin{vmatrix}1+a&b&c&d\\a&1+b&c&d\\a&b&1+c&d\\a&b&c&1+d\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\r_2-r_1}]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1+a&b&c&d\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}(1+a)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}b&c&d\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=1+a+b+c+d$$

方法二：$\begin{vmatrix}1+a&b&c&d\\a&1+b&c&d\\a&b&1+c&d\\a&b&c&1+d\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_i,i=2,3,4}\begin{vmatrix}1+a+b+c+d&b&c&d\\1+a+b+c+d&1+b&c&d\\1+a+b+c+d&b&1+c&d\\1+a+b+c+d&b&c&1+d\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_i-r_1,i=2,3,4}\begin{vmatrix}1+a+b+c+d&b&c&d\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{上三角行列式}}1+a+b+c+d$$

（7）$\begin{vmatrix}ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}\xlongequal[\text{性质3}]{\text{每一行提一个公因子}}adf\begin{vmatrix}b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{性质3}]{\text{每一列提一个公因子}}adfbce\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}abcdef\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=4abcdef$$

（8）方法一：考虑新的行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}$，则$A_{45}=(-1)^{4+5}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$，

即为x^3 的系数，因为将D按最后一列展开时，A_{45}即为x^3 的系数所在项，而由D为范德蒙行列式知：

$$D=(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\left[(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\right]$$

$$\therefore A_{45}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\cdot(-1)\cdot(a+b+c+d)$$

因此有：

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

方法二：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-ar_2]{r_4-a^2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$ r_2-ar_1

$$\xlongequal{按第一列展开} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{性质3} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-br_1]{r_3-b(b+a)r_2} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b)(c+b+a) & d(d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[性质3]{按第一列展开} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(c+b+a) & d(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

注：此方法的因式分解有点难！

4．计算下列n阶行列式

（1）$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

（2）$D_n = \Delta(|i-j|)$，　　　　（即$a_{ij} = |i-j|$）；

（3）$D_n = (a_{ij})$, 其中$a_{ij} = \begin{cases} i & i=j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$；

（4）$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$，其中未写出元素为零；

（5）$\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$，其中未写出元素为零.

解：（1）$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{性质3}]{c_1+c_i,2\le i\le n} \left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_i-r_1,2\le i\le n}\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$

（2）方法一：$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_i-r_{i-1},i=n:2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_i+c_1,i=2:n}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按最后一列展开}} (n-1)(-1)^{1+n}\,2^{n-2}$$

方法二：$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{性质3}]{c_1+c_n} (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_i-r_{i-1},i=n:2}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+r_2,i\ge 3} (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)(-1)(-2)^{n-2}=(n-1)(-1)^{n+1}2^{n-2}$$

（3）$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}\xlongequal{r_i-r_1,i=2:n}\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\1&0&0&\cdots&0\\1&0&1&&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}}(-1)\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2\\0&1&&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 2\cdot(n-2)!=(-2)(n-2)!$$

（4）$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a_1&&&&&b_1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a_n&b_n&&\\&&c_n&d_n&&\\&\iddots&&&\ddots&\\c_1&&&&&d_1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}a_1\begin{vmatrix}a_2&&&&&b_2&0\\&\ddots&&&\iddots&&\\&&a_n&b_n&&&\\&&c_n&d_n&&&\\&\iddots&&&\ddots&&\\c_2&&&&&d_2&\\0&&&&&&d_1\end{vmatrix}$$

$$-b_1\begin{vmatrix}0&a_2&&&&&b_2\\&&\ddots&&&\iddots&\\&&&a_n&b_n&&\\&&&c_n&d_n&&\\&&\iddots&&&\ddots&\\&c_2&&&&&d_2\\c_1&&&&&&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按最后一行展开}}a_1d_1\begin{vmatrix}a_2&&&&&b_2\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a_n&b_n&&\\&&c_n&d_n&&\\&\iddots&&&\ddots&\\c_2&&&&&d_2\end{vmatrix}$$

$$-b_1c_1\begin{vmatrix} a_2 & & & & & b_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_2 & & & & & d_2 \end{vmatrix}=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)D_{2n-2}$$

$$\therefore D_{2n}=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)D_{2n-2}=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)\left(a_2d_2-b_2c_2\right)D_{2n-4}=\cdots=\prod_{i=1}^{n}\left(a_id_i-b_ic_i\right)$$

（5）$D_n \xlongequal[\text{按第一列}]{\text{性质4}} \begin{vmatrix} a & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & ab & & & \\ 0 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$

其中：

$$\begin{vmatrix} a & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_n+c_{n-1}\cdot(-b)}]{\substack{c_2+c_1\cdot(-b) \\ c_3+c_2\cdot(-b)}} \begin{vmatrix} a & & & & \\ 1 & a & & & \\ & 1 & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a \end{vmatrix}=a^n$$

$$\therefore D_n=a^n+bD_{n-1}=a^n+b\left(a^{n-1}+bD_{n-2}\right)=\cdots=a^n+ba^{n-1}+b^2a^{n-2}+\cdots+b^n$$

5．证明

（1）若行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 中每一个数 a_{ij} 分别乘以 $b^{i-j}\,(b>0)$，则所得行列式与 D 相等；

（2）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$；

（3）$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}) \qquad \left(a_1a_2\cdots a_n\neq 0\right)$

证明（1）$\begin{vmatrix} a_{11}b^{1-1} & a_{12}b^{1-2} & \dots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b^{2-1} & a_{22}b^{2-2} & \dots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \dots & a_{nn}b^{n-n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{性质3}]{\text{每一行提一个公因子}} b^1b^2\cdots b^n \begin{vmatrix} a_{11}b^{-1} & a_{12}b^{-2} & \dots & a_{1n}b^{-n} \\ a_{21}b^{-1} & a_{22}b^{-2} & \dots & a_{2n}b^{-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{-1} & a_{n2}b^{-2} & \dots & a_{nn}b^{-n} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{性质3}]{\text{每一列提一个公因子}} b^1b^2\cdots b^n \cdot b^{-1}b^{-2}\cdots b^{-n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

（2）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3-c_2 \\ c_2-c_1}]{c_4-c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{推论4}} 0$

（3）$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-\frac{1}{a_{i-1}}c_i,2\le i\le n+1} \begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \qquad (a_1a_2\cdots a_n\ne 0)$$

6．证明第三节推论 4.

证明：设 D 的 i, j 两行元素对应成比例，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质3}} k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{推论1}} k\cdot 0=0.$$

7．证明第三节性质 4.

证明：$D=\sum\limits_{p_1\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=\sum\limits_{p_1\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}\cdots\left(b_{p_j j}+c_{p_j j}\right)\cdots a_{p_n n}$

$$=\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}\cdots b_{p_j j}\cdots a_{p_n n}+\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}\cdots c_{p_j j}\cdots a_{p_n n}=D_1+D_2$$

证毕.

8．证明上三角行列式等于对角线上元素的乘积.

证明：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，由行列式的定义知，第一列只有 a_{11} 为非零元，而第二列除第一行外，只有 a_{22} 为非零元，同理依次进行.则 $D=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，其中 t 为$1,2,\cdots,n$ 逆序数，为 0，$\therefore D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 证毕.

第二章　矩阵

1．填空题

（1）已知$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ 6 \\ -b \end{pmatrix}$，则 $a=$___0___；$b=$___-3___.

解：$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ 6 \\ b \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} 3a+a-3=0 \\ 9-3=6 \\ 2a+3=-b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a-b=3 \\ 2a+b=-3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}$.

（2）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,则 $A^{2010}-3A^2=$ $\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$.

解：$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$， $A^4=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=E$，

$$A^{2010}-3A^2=A^{2008+2}-3A^2=A^2-3A^2=-2A^2=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

（3）若 A,B 均为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，$B=-2E$，则 $|AB|=$ ___-16___.

解：$|AB|=|A|\cdot|B|=2\cdot|-2E_{3\times3}|=2\cdot(-2)^3\cdot|E|=-16$.

（4）A 为 3 阶方阵，且 $|A|=-2$，$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$，则 $\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\3A_2\\A_1\end{vmatrix}=$ ___6___.

其中 A_1,A_2,A_3 分别为 A 的 1、2、3 行.

解：$\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\3A_2\\A_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_3\\3A_2\\A_1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2A_1\\3A_2\\A_1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}A_3\\A_2\\A_1\end{vmatrix}-0=-3\begin{vmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{vmatrix}=-3|A|=6$.

（5）已知 $\alpha=$（1，1，1），则 $|\alpha^T\alpha|=$ ___0___.

解：$|\alpha^T\alpha|=\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$.

（6）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ 满足 $A^2B-A-B=E$，则 $|B|=$ ___$-\frac{1}{2}$___.

解：$A^2B-A-B=E\Rightarrow\left(A^2-E\right)B=A+E\Rightarrow(A+E)(A-E)B=A+E$

两边取行列式得：$|A+E|\cdot|A-E|\cdot|B|=|A+E|$，$|A+E|=6$，$|A-E|=-2\ \Rightarrow|B|=-\dfrac{1}{2}$.

（7）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^*=$ ___$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$___.

解：$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0$，$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$，$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=-2$，$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$，$A_{22}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}=0$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&0\\0&0\end{vmatrix}=0$，$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0$，$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

（8）设矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -10 \\ 2 & 5 & a & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -a \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $a=$____3____ .

解：由 B 的秩为 2，则 B 的所有 3 阶子式为 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 2 & 5 & a \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & a+12 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & a+12 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix}=-(a-3)=0\Rightarrow a=3.$$

（9）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $R(A)=3$，则 $k=$____-3____ .

解：由 $R(A)=3$ 知 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k+3 & k+3 & k+3 & k+3 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)(k-1)^3=0\Rightarrow k=1,-3$$

若 $k=1$，则 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，$R(A)=1$，与已知矛盾，故 $k\neq 1$；

若 $k=-3$，则 $|A|=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$，$R(A)=3$，因为有一个三阶子式

$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-16\neq 0$，与已知相符，故 $k=-3$.

（10）A 为 5 阶方阵，且 $R(A)=3$，则 $R(A^*)=$____0____ .

解：关于原矩阵与伴随矩阵秩的关系有如下结论：

$$R\left(A^*\right)=\begin{cases} n, & 当R(A)=n时 \\ 1, & 当R(A)=n-1时 \\ 0, & 当R(A)\le n-2时 \end{cases}$$

此题中 $n=5$，$R(A)=3$，故 $R\left(A^*\right)=0$.

证明：①若 $R(A)=n$，则$|A|\ne 0$，$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}\ne 0\Rightarrow R\left(A^*\right)=n$；

②若 $R(A)=n-1$，则$|A|=0$，A 有一个$(n-1)$阶子式不为 0，于是 A 有一个代数余子式不为 0，$R\left(A^*\right)\ge 1$. 因为 $AA^*=|A|E=0$，所以 $R\left(A^*\right)+R(A)\le n$【见书 P110：例 9】，$\Rightarrow R\left(A^*\right)\le 1$，故 $R\left(A^*\right)=1$；

③若 $R(A)\le n-2$，则 A 的所有$(n-1)$阶子式全为 0，于是 A 所有代数余子式全为 0，$A^*=O_{n\times n}$，$R\left(A^*\right)=0$.

（11）设 A 为非零方阵，当 $A^T=A^*$ 时，则 $R(A)$=____n______ .

解：方法一：$R\left(A^*\right)=R\left(A^T\right)=R(A)$，由上题结论可知 $R\left(A^*\right)=R(A)=n\ \ or\ \ 0$，由已知 A 为非零方阵，则 $R(A)\ge 1$，故 $R\left(A^*\right)=R(A)=n$；

方法二：$AA^*=AA^T=|A|E$

$$AA^T=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}a_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}a_{1j} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}^2 \end{pmatrix}$$

A 为非零方阵，故 AA^T 的对角线元素不全为 0，从而 AA^T 为非零方阵$\Rightarrow |A|\ne 0$，则 $R(A)=n$.

（12）矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$.

解：$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

（13）设 n 阶可逆方阵 A 满足 $2|A|=|kA|$，$k>0$，则 $k=$ ____$\sqrt[n]{2}$____ .

解：由 A 是可逆方阵知 A $|A|\neq 0$，$2|A|=|kA|=k^n|A|\Rightarrow k^n=2$，由 $k>0\Rightarrow k=\sqrt[n]{2}$.

（14）设 n 阶方阵 A 满足 $|A|=2$，则 $|A^TA|=$ ____4____，$|A^{-1}|=$ ____$\frac{1}{2}$____，

$|A^*|=$ ____2^{n-1}____，$|(A^*)^*|=$ ____$2^{(n-1)^2}$____，$|(A^*)^{-1}+A|=$ ____$2\left(\frac{3}{2}\right)^n$____，

$|A^{-1}(A^*+A^{-1})A|=$ ____$\frac{3^n}{2}$____ .

解：$|A^TA|=|A|^2=2^2=4$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}$，$|A^*|=|A|^{n-1}=2^{n-1}$，

$$\left|(A^*)^*\right|=\left||A|^{n-2}A\right|=\left(|A|^{n-2}\right)^n|A|=|A|^{(n-1)^2}=2^{(n-1)^2},$$

$$\left|(A^*)^{-1}+A\right|=\left|\frac{1}{|A|}A+A\right|=\left|\frac{1}{2}A+A\right|=\left|\frac{3}{2}A\right|=\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 2,$$

$$\left|A^{-1}(A^*+A^{-1})A\right|=\left|A^{-1}\left(|A|A^{-1}+A^{-1}\right)A\right|=\left|A^{-1}\cdot 3A^{-1}\cdot A\right|=\left|3A^{-1}\right|=\frac{3^n}{2}$$

（15）A 为 n 阶方阵，A^*为A的伴随阵，$|A|=\frac{1}{3}$，则 $\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-15A^*\right|=$ ____$(-1)^n3$____ .

解：$\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-15A^*\right|=\left|4A^{-1}-15\cdot|A|\cdot A^{-1}\right|=\left|4A^{-1}-15\cdot\frac{1}{3}A^{-1}\right|=\left|-A^{-1}\right|=(-1)^n\cdot 3$.

（16）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随阵，则 $\left(A^*\right)^{-1}=$ $\underline{\qquad\frac{1}{10}A\qquad}$.

解：$\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*=\dfrac{A}{|A|}=\dfrac{1}{10}A$.

（17）设 A^*,A^{-1}分别为n阶方阵A的伴随阵和逆阵，则 $\left|A^*A^{-1}\right|=$ $\underline{\qquad|A|^{n-2}\qquad}$.

解：$\left|A^*A^{-1}\right|=\left|A^*\right|\cdot\left|A^{-1}\right|=|A|^{n-1}\cdot|A|^{-1}=|A|^{n-2}$.

（18）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&a&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $a=$ $\underline{\qquad-1\qquad}$.

解：首先证明 $|A|=0$：

方法一：由 $AB=O$，若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆，两边左乘 A^{-1} 得 $B=A^{-1}O=O$，与 $B\neq O$ 矛盾，故 $|A|=0$；

方法二：$AB=O$，设 $B=\left(b_1\quad b_2\quad b_3\right)\neq O_{3\times 3}$，故 $\exists b_i\neq O_{3\times 1},i=1,2,3$，$Ab_i=O_{3\times 1}$，即 $Ax=0$ 有非零解，故由定理 4.2.1 知 $R(A)<n\Rightarrow|A|=0$.

综上有 $|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&a&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-2\\3&-1&1\\4&a&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&-7&7\\0&a-8&9\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\0&a-8&9\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\0&0&a+1\end{vmatrix}$$

$$=7(a+1)=0\Rightarrow a=-$$

（19）线性方程组 $\begin{cases}k_1x_1+k_1^2x_2+k_1^3x_3=k_1^4\\k_2x_1+k_2^2x_2+k_2^3x_3=k_2^4\\k_3x_1+k_3^2x_2+k_3^3x_3=k_3^4\end{cases}$，满足条件 $\underline{\quad k_1k_2k_3\neq 0,k_1,k_2,k_3\text{互不相等}\quad}$ 时有惟一解.

解：由克莱姆法则：$|A|\neq 0$ 时有唯一解.

$$|A|=\begin{vmatrix}k_1&k_1^2&k_1^3\\k_2&k_2^2&k_3^3\\k_3&k_3^2&k_3^3\end{vmatrix}=k_1k_2k_3\begin{vmatrix}1&k_1&k_1^2\\1&k_2&k_2^2\\1&k_3&k_3^2\end{vmatrix}=k_1k_2k_3\left(k_2-k_1\right)\left(k_3-k_1\right)\left(k_3-k_2\right)\neq 0$$

$k_1k_2k_3 \neq 0$, 且 k_1, k_2, k_3 互不相等.

（20）当 $\lambda =$ $\underline{\quad \dfrac{13 \pm \sqrt{641}}{2} \quad}$，线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

解：$Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 9 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda - 118 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{13 \pm \sqrt{641}}{2}.$$

2．选择题

（1）设 A、B 均为 n 阶方阵，则下面结论正确的是（B）

（A）若 A 或 B 可逆，则 AB 必可逆；

（B）若 A 或 B 不可逆，则 AB 必不可逆；

（C）若 A、B 均可逆，则 $A+B$ 必可逆；

（D）若 A、B 均不可逆，则 $A+B$ 必不可逆.

解：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$，$A$ 不可逆 $\Leftrightarrow |A| = 0$

（A）若 A 可逆，B 不可逆 $\Rightarrow |A| \neq 0, |B| = 0$，$|AB| = |A| \cdot |B| = 0$，故 AB 不可逆，故（A）错误；

（B）$|A| = 0$ 或 $|B| = 0 \Rightarrow |AB| = |A| \cdot |B| = 0$，故（$B$）正确；

（C）设 A 可逆，则 $B = -A$ 也可逆，但 $A + B = A - A = O$ 不可逆，故（C）错误;。

（D）$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 均不可逆，但 $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆，故（D）错误.

（2）设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $A(B - E) = O$，则（B）

（A）$A = O$ 或 $B = E$；　　　　（B）$|A| = 0$ 或 $|B - E| = 0$；

（C）$|A| = 0$ 或 $|B| = 1$；　　　　（D）$A = BA$.

解：$A(B - E) = O$，两边取行列式，则 $|A| \cdot |B - E| = 0$，故 $|A| = 0$ 或 $|B - E| = 0$，故（B）正确；

（A）反例：$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$；

（C）$|B - E| = 0$ ¿ $|B| = 1$，故（C）错；

（D）$A(B - E) = O \Leftrightarrow AB - A = O \Leftrightarrow AB = A$ ¿ $A = BA$，故（D）错.

（3）设 A 、B 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 A 和 B 的秩（ D ）

（ A ）必有一个为零；　　　　　　　（ B ）一个等于 n，一个小于 n；

（ C ）都等于 n；　　　　　　　　（ D ）都小于 n．

解：方法一：$AB=O$，由课本 P110 例 9 知：$R(A)+R(B)\le n$，又 A 、B 均为非零矩阵，

故 $R(A)\ge 1$，$R(B)\ge 1$，$R(A)\le n-R(B)\le n-1<n$，同理 $R(B)<n$，故（ D ）正确；

方法二：$AB=O$，A 、B 均为 n 阶非零矩阵，则 A 、B 均不可逆 $\Rightarrow R(A)<n$，$R(B)<n$

反证：若 A 可逆，则 $A^{-1}AB=B=A^{-1}O=O$，与 $B\ne O$ 矛盾；

若 B 可逆，则 $A=ABB^{-1}=OB^{-1}=O$，与 $A\ne O$ 矛盾.

（4）设 n 阶方阵 A 经过初等变换后得方阵 B，则（ D ）

（ A ）$|A|=|B|$；　　　　　　　　（ B ）$|A|\ne|B|$；

（ C ）$|A||B|>0$；　　　　　　　　（ D ）若 $|A|=0$,则 $|B|=0$.

解：由题意知 $A\cong B$，故 $\exists$ 可逆阵 P 、Q，使 $PAQ=B,|P|\ne 0,|Q|\ne 0$，

$$|PAQ|=|P|\cdot|A|\cdot|Q|=|B|\Rightarrow|A|=0\Leftrightarrow|B|=0$$

$$|A|\ne 0\Leftrightarrow|B|\ne 0$$

故（ D ）正确。（ A ）（ B ）（ C ）均不正确，由 $|P|\cdot|A|\cdot|Q|=|B|$，可构造 P 、Q，使（ A ）（ B ）（ C ）不成立.

（5）设 A 、B 均为 n 阶方阵，$E+AB$ 可逆，则 $E+BA$ 也可逆，且 $(E+BA)^{-1}=$ （ C ）.

（ A ）$E+A^{-1}B^{-1}$；　　　　　　（ B ）$E+B^{-1}A^{-1}$；

（ C ）$E-B(E+AB)^{-1}A$；　　　　（ D ）$B(E+AB^{-1})A$.

解：经验证知（ C ）正确，即

$$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A\Leftrightarrow(E+BA)\left[E-B(E+AB)^{-1}A\right]=E$$

$$E+BA-B(E+AB)^{-1}A-BAB(E+AB)^{-1}A=E+BA-B(E+AB)(E+AB)^{-1}A$$

$$=E+BA-BA=E.$$

（6）设 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=E$，则必有（ D ）

（ A ）$ACB=E$；　　　　　　（ B ）$BAC=E$；

（ C ）$CBA=E$；　　　　　　（ D ）$BCA=E$.

解：$AB=E$，则 A 、B 均可逆，且 $BA=E$，即 $AB=BA=E$

$E=ABC=\underline{A}\underline{BC}=\underline{B}\underline{CA}=\underline{C}\underline{AB}$，故（$D$）正确.

（7）设 n 阶方阵 A,B,C 均是可逆方阵，则 $\left(ACB^T\right)^{-1}=$（D）

（A）$\left(B^{-1}\right)^{-1}A^{-1}C^{-1}$；　　（$B$）$A^{-1}C^{-1}\left(B^T\right)^{-1}$；

（C）$B^{-1}C^{-1}A^{-1}$；　　（D）$\left(B^{-1}\right)^T C^{-1}A^{-1}$.

解：$\left(ACB^T\right)^{-1}=\left(B^T\right)^{-1}C^{-1}A^{-1}=\left(B^{-1}\right)^T C^{-1}A^{-1}$，故（$D$）正确.

（8）设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，若 A 可逆，则 $B^{-1}=$（C）

（A）$A^{-1}P_1P_2$；　　（B）$P_2A^{-1}P_1$；

（C）$P_1P_2A^{-1}$；　　（D）$P_1A^{-1}P_2$.

解：$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$，则 $B=\begin{pmatrix}\alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1\end{pmatrix}=AP_1P_2=AP_2P_1$，其中

$P_1=E(1,4)$，$P_2=E(2,3)$，

对初等方阵有：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j), E\left(i(k)\right)^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), E\left(j(k),i\right)^{-1}=E\left(j(-k),i\right)$$

故 $P_1^{-1}=P_1, P_2^{-1}=P_2$

$B^{-1}=\left(AP_2P_1\right)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}=P_1P_2A^{-1}$，故（$C$）正确.

$B^{-1}=\left(AP_1P_2\right)^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1}=P_2P_1A^{-1}$

（9）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则（A）

（A）$m>n$ 时必有 $|AB|$=0；　　（B）$m<n$ 时必有 $|AB|$=0；

（C）$m>n$ 时必有 $|AB|\neq 0$；　　（D）$m<n$ 时必有 $|AB|\neq 0$.

解：对（A）（C）有 $m>n$，$R(\overset{m\times m}{AB})\le R(A)\le n<m\Rightarrow |AB|=0$，故（$A$）正确；

对（B）（D）有 $m<n$，$R(\overset{m\times m}{AB})\le R(A)\le m<n$，$R(AB)\begin{cases}=m\Leftrightarrow |AB|\ne 0\\ <m\Leftrightarrow |AB|=0\end{cases}$ 均有可能，

故（B）（D）错误.

（10）设 $A=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$，$A$ 的伴随阵的秩为 1，则（B）.

（A）$a=b$或 $a+2b=0$　；　（B）$a\ne b$ 且 $a+2b=0$；

（C）$a=b$或 $a+2b\ne 0$；　（D）$a\ne b$ 且 $a+2b\ne 0$.

解：$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n\\ 1, & R(A)=n-1\\ 0, & R(A)\le n-2\end{cases}$，此题有 $R(A^*)=\begin{cases} 3, & R(A)=3\\ 1, & R(A)=2\\ 0, & R(A)\le 1\end{cases}$

由 $R(A^*)=1\Rightarrow R(A)=2\Rightarrow |A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{vmatrix}=a^3+2b^3-3ab^2=(a-b)^2(a+2b)=0\Rightarrow a=b\ or\ a+2b=0$$

若 $a=b$，$A=\begin{pmatrix} b & b & b\\ b & b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}$，$R(A)=1$ 与 $R(A)=2$ 矛盾；

若 $a+2b=0$，$a=-2b$，此时 $b\ne 0$，若 $b=0$，则 $a=-2b=0$，$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，与

$R(A)=2$ 矛盾，故 $b\ne 0$. $A=\begin{pmatrix} -2b & b & b\\ b & -2b & b\\ b & b & -2b\end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix} -2b & b\\ b & -2b\end{vmatrix}=3b^2\ne 0$，故 $R(A)=2$.

综上所述，$a\ne b$ 且 $a+2b=0$，（B）正确.

3．写出下列矩阵 $A=(a_{ij})$

（1）$a_{ij}=i-j$ 的 3×2 矩阵；

（2）$a_{ij}=ij$ 的的 4 阶方阵.

解：（1）$A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

（2）$A=\left(a_{ij}\right)_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\\ 4 & 8 & 12 & 16\end{pmatrix}$

4．设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix},$$

求 $3AB-2A^T$ 及 $(AB)^T$.

解：$AB=\begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\ 0 & -3 & 6\\ 3 & 9 & 3\end{pmatrix}$，$A^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\left(AB\right)^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 6 & -3 & 9\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix}$

$$3AB-2A^T=3\begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\ 0 & -3 & 6\\ 3 & 9 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 18 & 9\\ 0 & -9 & 18\\ 9 & 27 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 2 & 2 & -2\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 16 & 5\\ -2 & -11 & 20\\ 5 & 29 & 7\end{pmatrix}$$

5．计算下列矩阵的乘积

（1）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$；

（6）$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

解：（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 10 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=1\times3+2\times2-3\times1=4$

（4）$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

（5）$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x_1+3x_2+2x_3 \\ x_1+(-2)x_2+5x_3 \\ 3x_1+x_2 \end{pmatrix}$

（6）$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3 & a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3 & a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+\left(a_{12}+a_{21}\right)x_1x_2+\left(a_{13}+a_{31}\right)x_1x_3+\left(a_{23}+a_{32}\right)x_2x_3$$

6．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$，求 A^k（k 为正整数).

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$，$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix}$，猜测 $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$

用数学归纳法证明：

①当$k=1$时，$A=\begin{pmatrix}1&0\\ \lambda&1\end{pmatrix}$成立；

②设当$k=n,n\ge 1$时，$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\ n\lambda&1\end{pmatrix}$成立，

则当$k=n+1$时，$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1&0\\ n\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\ \lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\ (n+1)\lambda&1\end{pmatrix}$成立，

故由数学归纳法知$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\ k\lambda&1\end{pmatrix}$

7．设$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求$A^k$ (k为正整数).

解：$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\Lambda+B$，且

$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_{3\times 3}$，$B^k=O,k\ge 3$，

可得：$A^k=(\Lambda+B)^k=\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i\Lambda^{k-i}B^i=\Lambda^k+C_k^1\Lambda^{k-1}B+C_k^2\Lambda^{k-2}B^2+\cdots+B^k$

$$\therefore A^k=\Lambda^k+C_k^1\Lambda^{k-1}B+C_k^2\Lambda^{k-2}B^2=\lambda^{k-2}\begin{pmatrix}\lambda^2&k\lambda&\dfrac{k(k-1)}{2}\\0&\lambda^2&k\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$$

8．设$\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\1&0&2&0\\0&1&0&2\end{pmatrix}$，求$A^k$ (k为正整数).

解：方法一：$A=\begin{pmatrix}\Lambda&O\\E&\Lambda\end{pmatrix}$，其中$\Lambda=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}\Lambda&O\\E&\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda&O\\E&\Lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda^2&O\\2\Lambda&\Lambda^2\end{pmatrix}$，

$A^3=\begin{pmatrix}\Lambda^2&O\\2\Lambda&\Lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda&O\\E&\Lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda^3&O\\3\Lambda&\Lambda^3\end{pmatrix}$，假设$A^k=\begin{pmatrix}\Lambda^k&O\\k\Lambda&\Lambda^k\end{pmatrix}$，

$$A^{k+1}=\begin{pmatrix}\Lambda^k & O\\ k\Lambda & \Lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda & O\\ E & \Lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda^{k+1} & O\\ (k+1)\Lambda & \Lambda^{k+1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^k=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0 & 0\\ k2^{k-1} & 0 & 2^k & 0\\ 0 & k2^{k-1} & 0 & 2^k\end{pmatrix}$$

方法二：$A^2=\begin{pmatrix}2^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^2 & 0 & 0\\ 2\cdot 2 & 0 & 2^2 & 0\\ 0 & 2\cdot 2 & 0 & 2^2\end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix}2^3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^3 & 0 & 0\\ 2^3+2^2 & 0 & 2^3 & 0\\ 0 & 2^3+2^2 & 0 & 2^3\end{pmatrix}$

假设 $A^k=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0 & 0\\ a_k & 0 & 2^k & 0\\ 0 & a_k & 0 & 2^k\end{pmatrix}$，则

$$A^{k+1}=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0 & 0\\ a_k & 0 & 2^k & 0\\ 0 & a_k & 0 & 2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^{k+1} & 0 & 0\\ 2a_k+2^k & 0 & 2^{k+1} & 0\\ 0 & 2a_k+2^k & 0 & 2^{k+1}\end{pmatrix}$$

$a_{k+1}=2a_k+2^k\Rightarrow\dfrac{a_{k+1}}{2^{k+1}}=\dfrac{a_k}{2^k}+\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{a_k}{2^k}=\dfrac{k}{2}$

$\therefore a_k=k\cdot 2^{k-1}$

$$\therefore A^k=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0 & 0\\ k2^{k-1} & 0 & 2^k & 0\\ 0 & k2^{k-1} & 0 & 2^k\end{pmatrix}$$

9．求下列矩阵的秩

（1）$\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

解：（1）$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$\therefore R(A) = 2$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore R(A) = 3$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore R(A) = 2$

（4）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore R(A) = 3$

10．求下列矩阵的秩及行的最简形

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解：（1）$\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&0&0&6&-2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&6&-2\\0&0&0&-3&1\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&1&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{9}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&0&\frac{16}{9}\\0&1&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{9}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=3$

（2）$\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2\\0&2&2&1\\0&4&9&5\\0&1&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2\\0&1&1&\frac{1}{2}\\0&0&5&3\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2\\0&1&1&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-3&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=4$

11．求下列方阵的逆

（1）$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&4&-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；　　（6）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解：（1）$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3-7r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -15 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 13 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 13 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 \end{array}\right)$　　$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

（2）$|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$，$A_{11} = \cos\theta$，$A_{12} = -\sin\theta$，$A_{21} = \sin\theta$，$A_{22} = \cos\theta$

$\therefore A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

（3）$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & 1 \end{array}\right)$　　$\therefore A^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & \\ -12 & 12 & 0 & \\ -12 & -4 & 8 & \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

（4）$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}，\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

（5）$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_3\leftrightarrow r_1} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 4 & 2 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right) \qquad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

（6）$A=\left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&-\frac{3}{2}\\-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{7}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{7}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\4&-\frac{3}{2}&0&0&0\\-1&\frac{1}{2}&0&0&0\end{pmatrix}$$

12．求解下列矩阵方程

（1）$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\2&2&-2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$；

（3）$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，　$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{pmatrix}$，$AX=X+C$；

（4）设 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，且$AB=A+2B$，求 B.

解：（1）$AX=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\2&2&-2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\left(A\ \vdots\ b\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E\ \vdots\ A^{-1}b\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&1\\3&4&-2&0\\2&2&-2&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&1\\0&-2&1&-3\\0&-2&0&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&1\\0&-2&1&-3\\0&0&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&1\\0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-2\\0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$$

（2）$AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}，\ A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}，\ B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1&1&0&0\\0&1&-1&\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0&\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{9}&-\frac{8}{3}&\frac{7}{9}\\-\frac{7}{9}&\frac{7}{6}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}$$

（3）$AX=X+C\Rightarrow X=(A-E)^{-1}C$，其中 $A-E=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{pmatrix}$

$$\left(A-E\ \vdots\ C\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E\ \vdots\ (A-E)^{-1}C\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&0&1&2\\1&1&1&3&4\\0&1&1&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&0&1&2\\0&0&1&2&2\\0&1&1&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&0&1&2\\0&1&1&2&1\\0&0&1&2&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&0&1&2\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&2&2\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&3\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&2&2\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\\2&2\end{pmatrix}$$

（4）$AB=A+2B\Rightarrow B=\left(A-2E\right)^{-1}A$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$A-2E=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$

$$\left(A-2E\ \vdots\ A\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E\ \vdots\ \left(A-2E\right)^{-1}A\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&2&3&4&2&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&1&0\\0&4&3&2&0&3\\0&1&1&0&3&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\\0&0&-1&2&-12&-9\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&1&0\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&-8&-6\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{array}\right)\Rightarrow B=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$$

13．用克莱姆法则求解下列方程组

（1）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=5\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2\\2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2\\3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0\end{cases}$

（2）$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$

解：（1）$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=-142\neq0$，$\therefore A$可逆

$$\left(A\ \vdots\ B\right)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&5\\1&2&-1&4&-2\\2&-3&-1&-5&-2\\3&1&2&11&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&-5&-3&-7&-12\\0&-2&-1&8&-15\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&-13&8&-47\\0&0&-5&14&-29\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&-13&8&-47\\0&0&0&-142&142\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&6\\0&1&-2&0&-4\\0&0&-13&0&-39\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$\therefore x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=-1$

（2）$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq 0$，并且

$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81$，$D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108$，

$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27$，$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$，

$\therefore x_1=\dfrac{D_1}{|A|}=3,x_2=\dfrac{D_2}{|A|}=-4,x_3=\dfrac{D_3}{|A|}=-1,x_4=\dfrac{D_4}{|A|}=1$

14．已知线性方程组有非零解，求解下列方程中的参数λ

（1）$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\(2-\lambda)x_2-x_3=0\\4x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$

（2）$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$

解：齐次方程组$Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow|A|=0$；齐次方程组$Ax=0$有唯一解（零解）$\Leftrightarrow|A|\neq 0$

（1）$|A|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&-1\\4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-4-\left[4(2-\lambda)+2(3-\lambda)\right]$

$=(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+6(\lambda-3)=(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1)=0$

$\Rightarrow\lambda=3$，$\lambda=4$或$\lambda=-1$

（2）$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+1+1-[\lambda+\lambda+\lambda]=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$

$\Rightarrow \lambda=1$或$\lambda=-2$

15．下列等式是否正确，说明理由或举反例说明，其中 A,B 均为 n 阶方阵.

（1） $AB=BA$；

（2）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$；

（3）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

解：对于（2）式，$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2 \Leftrightarrow AB=BA$

对于（3）式，$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow AB=BA$

但对于一般的 n 阶方阵 A,B，没有 $AB=BA$（交换律），故（1）（2）（3）均错误。

反例：$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 8\end{pmatrix}$，

显然 $AB\neq BA$。

特殊情形下有 $AB=BA$：

① A 为数字阵：$A=\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix}=\lambda E$，$AB=\lambda EB=BA=B\lambda E=\lambda B$；

② $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}$均为对角阵，$AB=BA=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n\end{pmatrix}$。

16．下列等式或结论是否正确，说明理由或举反例说明，其中 A,B 均为 n 阶方阵.

（1）如果 $A^2=O$，则$A=O$；

（2）如果 $A^2=A$，则$A=O$或$A=E$；

（3）如果 $AX=AY$，则$X=Y$；

（4）方阵 A 和 B 的乘积 $AB=O$（其中 O 为零矩阵），且 $A\neq O$，则 $B=O$；

（5）设方阵 $A,B,$ 均可逆，则 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆.

解：（1）$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$A^2=O$，但 $A\neq O$；

（2）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A^2=A$，但 $A\neq O$ 或 $A\neq E$；

（3）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$AX=AY$，但 $X\neq Y$；

（4）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$；

（5）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$均可逆，但 $A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$不可逆.

17.（1）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，$m\neq n$，是否一定有｜AB｜=｜BA｜？

（2）设 A、B 都是 $m\times n$ 矩阵，是否一定有 $R(A)+R(B)=R(A+B)$，举例说明.

（3）若 3 阶方阵 A 的秩为 2，3 阶方阵 B 的秩为 3，则 $A\ B$ 的秩为 2 吗？为什么？

（4）设 A 是 n 阶方阵，已知 $Ax=0$ 有非零解，对任意的自然数 k，方程 $A^kx=0$ 是否也有非零解？为什么？

解：（1）不一定. 可以举出例子说明 $|AB|=|BA|$，现举例说明 $|AB|\neq|BA|$.

取 $A=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\end{pmatrix}_{1\times n}$，$B=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times 1}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=n，|AB|=n；BA=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\cdots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}，|BA|=0$$

显然 $|AB|\neq|BA|$.

（2）不一定.可以举例说明 $R(A)+R(B)=R(A+B)$，现举例说明 $R(A)+R(B)\neq R(A+B)$

设 $R(A)=n$，$B=-A$，则 $R(B)=R(A)=n$，

$$R(A)+R(B)=2n\neq R(A+B)=R(O)=0$$

（3）AB 的秩为 2. B 的秩为 3，则 B 为可逆阵，B 是一系列初等方阵的积，AB 就相当于给 A 实施一系列初等变换，而初等变换不改变矩阵的秩.

（4）方程 $A^kx=0$ 有非零解. 实际上 $Ax=0$ 的非零解即为 $A^kx=0$ 的非零解.

方法一：$A^kx=A^{k-1}\cdot Ax=A^{k-1}\cdot 0=0$

方法二：$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

$A^k x=0$的非零解$\Leftrightarrow \left|A^k\right|=\left|A\right|^k=0$，$k$为任意的自然数

18．设矩阵A是n阶对称阵，B是n阶方阵，则$B^T AB$，$B^T B$都是对称阵.

证明：已知A是n阶对称阵，则$A^T=A$，

$$\left(B^T AB\right)^T=B^T A^T\left(B^T\right)^T=B^T AB\text{；}\left(B^T B\right)^T=B^T\left(B^T\right)^T=B^T B$$

得证$B^T AB$，$B^T B$都是对称阵.

19．证明逆阵性质 2、3、5.

证明：由$A^{-1}B\Leftrightarrow AB=E$知：

性质 2：$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\Leftrightarrow A^{-1}A=E$

性质 3：$\left(\lambda A\right)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}\Leftrightarrow \lambda A\cdot\left(\lambda^{-1}A^{-1}\right)=E$

性质 5：$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T\Leftrightarrow A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E$

20．证明同阶正交阵相乘是正交阵.

证明：设A和B均为n阶对称阵，则$AA^T=E$，$BB^T=E$

$$\left(AB\right)\left(AB\right)^T=ABB^T A^T=AEA^T=AA^T=E$$

故AB为正交阵.

21．设$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，$f(x)=a_0+a_1x+......+a_nx^n(a_n\neq 0)$，$n$为正整数，证明:

$f(A)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}$.

证明：由$A^k=\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}$知

$$f\left(A\right)=a_0E+a_1A+\cdots+a_nA^n=\begin{pmatrix}a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_1{}^n & 0\\ 0 & a_0+a_1\lambda_2+\cdots+a_n\lambda_2{}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\left(\lambda_1\right) & 0\\ 0 & f\left(\lambda_2\right)\end{pmatrix}$$

22．设$P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\Lambda$,求$A^{10}$.

证明：$A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^{10}=P\Lambda P^{-1}\cdot P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{10}P^{-1}$

又$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$\Lambda^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{10}\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{10}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{11}-1 & 2^{11}-2\\ 1-2^{10} & 2-2^{10}\end{pmatrix}$$

23．设 A 为 n 阶方阵，A^*为A的伴随阵，证明 $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$.

证明：由方阵 A 和它的伴随方阵 A^* 的关系 $AA^*=A^*A=|A|E$，方阵的行列式运算性质 $|AB|=|A||B|$，$|\lambda A|=\lambda^n|A|$，则 $|A||A^*|=|A^*||A|=||A|E|=|A|^n|E|=|A|^n$，当 $|A|\neq 0$ 时，$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$；当 $|A|=0$ 时，$AA^*=A^*A=|A|E$ =0，如 $\left|A^*\right|\neq 0$，则 A^* 可逆，$(AA^*)\left(A^*\right)^{-1}=0E\left(A^*\right)^{-1}=0$，$A=0$，$A$ 的所有的代数余子式 $A_{ij}=0$，而$\left|A^*\right|\neq 0$，矛盾．故$\left|A^*\right|=0$，有$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$.

24．设 $A^k=0(k$为正整数$)$,证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明：$(E-A)\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)=E+A+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k=E-A^k$

$\because A^k=0$，$\therefore(E-A)\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)=E$

即$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

25．设 A、B 均为 n 阶方阵，满足 $AB=A+B$，证明：$A-E$ 可逆且 $AB=BA$.

证明：$AB=A+B\Rightarrow AB-B=A\Rightarrow(A-E)B=A\Rightarrow(A-E)B-(A-E)=E$

$\Rightarrow(A-E)(B-E)=E$，故 $A-E$ 可逆；

$(B-E)(A-E)=E\Rightarrow BA-B+A+E=E\Rightarrow BA=A+B=AB$

故 $AB=BA$ 得证.

26．设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，证明 A 及 $A+2E$ 可逆.

证明:方法一：由已知有 $A^2-A-2E=0$，$A^2-A=2E$，$A(A-E)=2E$，

$|A(A-E)|=|2E|\neq 0$，$|A|\neq 0$，A 可逆.

又由已知有 $A^2-A-2E=0$，$A^2=A+2E$，$\left|A^2\right|=|A+2E|$，由$|A|\neq 0$知$|A+2E|\neq 0$，$A+2E$ 可逆.

方法二：由已知有 $A^2-A-2E=0$，$A^2-A=2E$，$A(A-E)=2E$，$A\left[\frac{1}{2}(A-E)\right]=E$

$\therefore A$可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

又由已知有 $A^2-A-2E=0$，$(A+2E)(A-3E)=(A^2-A-2E)-4E=-4E$，

$(A+2E)\left[\frac{1}{4}(3E-A)\right]=E$，$\therefore A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

27．设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $B=B^2, A=B+E$，证明 A 可逆，并求其逆.

证明：$A+B=E \Rightarrow B=A-E$，由 $B=B^2$ 知，$(A-E)^2=A-E$，

$$A^2-2A+E=A-E \Rightarrow A^2-3A=-2E \Rightarrow A(A-3E)=-2E \Rightarrow A\left[-\frac{1}{2}(A-3E)\right]=E$$

$\therefore A$ 可逆，且 $A^{-1}=\frac{3}{2}E-\frac{1}{2}A$.

28．若对任意的 $n\times 1$ 矩阵 X，均有 $AX=O$，证明 A 必是零矩阵.

证明：$\because AX=0, \forall X\in R^{n\times 1}$ 成立，特别地，取 $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, X_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，则：

$AX_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}, AX_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}, \cdots, AX_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$，且 $AX_1=AX_2=\cdots=AX_n=0$，

$\therefore A$ 的任一列均为零向量，即 $A=O$.

29．设 A、B 为 n 阶方阵，证明 $A=O$ 的充要条件是 $A^TA=O$.

证明：必要性：显然；

充分性：记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $A^T=(a_{ji})_{n\times n}$，记 $C=A^TA$，则 $c_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}^2, \forall i=1,2,\cdots,n$

$\because C=0$，$\therefore c_{ii}=0,$ 即 $a_{ji}=0, \forall i=1,2,\cdots,n, \forall j=1,2,\cdots,n$

$\therefore A=O$.

30．证明 $A\sim B$ 的充要条件是存在可逆阵 P、Q，使 $PAQ=B$.

证明：$A\sim B \Leftrightarrow \exists$ 初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_r$，$Q_1,Q_2,\cdots,Q_s$ 使 $P_1P_2\cdots P_rAQ_1Q_2\cdots Q_s=B$

$\Leftrightarrow \exists$ 可逆阵 $P=P_1P_2\cdots P_r$，可逆阵 $Q=Q_1Q_2\cdots Q_s$，使 $PAQ=B$.

31．设 A、B 均为 n 阶方阵，满足 $AA^T=E, BB^T=E, |A|+|B|=0$，证明：$|A+B|=0$.

证明：$AA^T=E, BB^T=E$，则 $|A|=\pm 1, |B|=\pm 1$

已知$|A|+|B|=0$，则$\begin{cases}|A|=1\\|B|=-1\end{cases}$或$\begin{cases}|A|=-1\\|B|=1\end{cases}$，即$|A|\cdot|B|=-1$

$|A+B|=|AB^{-1}B+AA^{-1}B|=\left|A\left(B^{-1}+A^{-1}\right)B\right|=|A|\cdot\left|B^{-1}+A^{-1}\right|\cdot|B|=-\left|B^{T}+A^{T}\right|=-|A+B|$

$\therefore |A+B|=0$.

32．设A、B为n阶方阵，且$A,B,A+B$均可逆，证明：$A^{-1}+B^{-1}$可逆，并求其逆.

证明：$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}E+EB^{-1}=A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}\left(B+A\right)B^{-1}$，为可逆阵的乘积，

故$A^{-1}+B^{-1}$可逆，且$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\left(A+B\right)B^{-1}\right)^{-1}=B\left(A+B\right)^{-1}A$.

第三章　向量组的线性相关性

1．填空题

（1）设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-8\\k\end{pmatrix}$线性相关，则$k=$___2___.

解：方法一：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为 0 的数$k_1,k_2,k_3$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1+k_2-k_3=0\\k_1-4k_3=0\\2k_1-8k_3=0\\k_1+2k_2+kk_3=0\end{cases}$$

前三个方程解出$\begin{cases}k_1=4k_3\\k_2=-3k_3\\k_3=k_3\end{cases}$，$k_3\neq 0$（$\because k_1,k_2,k_3$不全为 0）

把k_1,k_2,k_3代入第四个方程得$(k-2)k_3=0$，$\because k_3\neq 0\therefore k=2$

方法二：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}<3$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-4\\2&0&-8\\1&2&k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&-3\\0&-2&-6\\0&1&k+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&k-2\end{pmatrix}$$

由$R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}<3\Rightarrow k-2=0$，即$k=2$

方法三：$R(A)=R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}<3$，则$A$的任意三阶子式为 0，取$A$的一个三阶子式

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&0&-8\\1&2&k\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=2$$

（2）设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\0\\c\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}b\\c\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$线性无关，则$a,b,c$必满足关系式__$abc\neq 0$__.

解：$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & c & a\\ c & 0 & b\end{pmatrix}$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\begin{vmatrix}a & b & 0\\ 0 & c & a\\ c & 0 & b\end{vmatrix}=2abc\neq 0$，即$abc\neq 0$.

（3）设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 1+\lambda\\ 1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1+\lambda\end{pmatrix}$的秩为 2，则$\lambda=$______-3______.

解：$R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=2<3\Rightarrow\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda=0,\lambda=-3$

当$\lambda=0$时，$R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=1\neq 2$，矛盾，故$\lambda\neq 0$；

当$\lambda=-3$时，$R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=2$，故$\lambda=-3$.

（4）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_2+4\alpha_3$是线性____无关____.

解：$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\triangleq A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$

$|A|=3\neq 0\Rightarrow A=P_1P_2\cdots P_s$为初等方阵的乘积，初等变换不改变矩阵秩，从而不改变向量组的秩，$\therefore R\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=3$（$\because\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关）

$\therefore\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

（5）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2，则$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$的秩为___2___.

解：$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\triangleq A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$

$|A|=2\neq 0\Rightarrow A=P_1P_2\cdots P_s$为初等方阵的乘积，初等变换不改变矩阵秩，从而不改变向量组的秩，$\therefore R\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=2$.

（6）设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，且满足 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$ <u>-1</u>.

解：$A\alpha$ 与 α 线性相关 $\Leftrightarrow$ $A\alpha$ 与 α 对应分量成比例

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}=k\alpha=k\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{a}{a}=\frac{2a+3}{1}=\frac{3a+4}{1}=k=1$$

$\therefore a=-1$

（7）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的基，则 k 满足关系式 <u>$k\neq1,k\neq-2$</u>.

解：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的基 $\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$$\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&1\\k&1&1\end{vmatrix}=3k-k^3-2=-(k-1)^2(k+2)\neq0\Rightarrow k\neq1,k\neq-2$$

（8）已知三维线性空间的一组基为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，则向量 $\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标是 <u>$(1,1,-1)^T$</u>.

解：$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\square Ax$，$\therefore x=A^{-1}\beta$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&2\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\square\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&2\\0&-1&1&-2\\0&1&1&0\end{array}\right)\square\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&2\\0&1&-1&2\\0&0&1&-1\end{array}\right)\square\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$\therefore x=\begin{pmatrix}1&1&-1\end{pmatrix}^T$.

2．选择题

（1）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 为一组 n 维向量，则下列说法正确的是(A)

（A）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 不线性相关，则一定线性无关；

（B）若存在 m 个全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使得：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关；

（C）若存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使得：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关；

（D）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关，则 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示.

解：（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 可以线性相关；

（C）对任意的 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使得：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关；

（D）P64 定理 3.2.1 指出：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$（$m\geq 2$）线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少存在一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示，但并没有指明是哪一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

（2）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关的充要条件是(C)

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中有一个零向量；

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中任意两个向量成比例；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中有一个向量是其余向量的线性组合；

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中任意一个向量都是其余向量的线性组合.

解：（C）正确： P64 定理 3.2.1；（A）（B）（D）是充分条件.

（3）n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(3\leq s\leq n)$ 线性无关的充要条件是(D)

（A）存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_s$，使 $\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\neq 0$；

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 存在一个向量不能由其余向量线性表示；

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一个向量不能由其余向量线性表示.

解：（A）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0\Leftrightarrow$ 任意一组不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_s\Rightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$；

（B）取 $s=3$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意两个向量都线

性无关，但是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

P64 定理 3.2.1 的逆否命题为：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$（$m\ge 2$）线性无关$\Leftrightarrow$不存在一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示$\Leftrightarrow$任何一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表示，故（C）错误，（D）正确.

（4）设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$；向量组(II)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$，则必有(A)

（A）(I)线性相关$\Rightarrow$(II)线性相关；　　（B）(I)线性相关$\Rightarrow$(II)线性无关；

（C）(II)线性相关$\Rightarrow$(I)线性相关；　　（D）(II)线性相关$\Rightarrow$(I)线性无关.

解：$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性相关$\Rightarrow$增加一个向量或者减少一维向量仍线性相关；

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关$\Rightarrow$减少一个向量或者增加一维向量仍线性无关.

（5）已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则向量组(C)

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性无关；

（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关；

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关；

（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

解：一般地，$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}^T=A\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}^T$，即$\beta=A\alpha$，

若$|A|\ne 0$，则A可逆，$A=P_1P_2\cdots P_s$为初等方阵的乘积，初等变换不改变矩阵的秩，从而不改变向量组的秩，从而$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关；

若$|A|=0$，下面用两种方法证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$一定线性相关：

方法一：$R(\beta)=R(A\alpha)\le R(A)<4$，$\therefore\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关；

方法二：$|A|=\left|A^T\right|=0$，则$A^Tx=0$一定有非零解，设此非零解为$x_0\ne 0$，即$A^Tx_0=0$，

则$x_0^TA=0$，$x_0^T\beta=x_0^TA\alpha=0\cdot\alpha=0=x_{01}\beta_1+x_{02}\beta_2+x_{03}\beta_3+x_{04}\beta_4$，$\therefore\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，故（C）正确；同理$|A_1| = |A_2| = |A_4| = 0$，故其余三项错误.

（6）设$\beta, \alpha_1, \alpha_2$线性相关，$\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则(　C　)

（A）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关；　　　　　　（B）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关；

（C）α_1能由$\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性表示；　　　（D）$\beta$能由$\alpha_1, \alpha_2$线性表示.

解：$\beta, \alpha_1, \alpha_2$线性相关$\Rightarrow \beta, \alpha_2$线性相关，又$\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性无关$\Rightarrow \alpha_1$能由$\beta, \alpha_2$线性表示

$\Rightarrow \alpha_1$能由$\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，故（C）正确.

（7）设向量β能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示但不能由向量组（I）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示，记向量组（II）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}, \beta$，则(　B　)

（A）α_m不能由（I）线性表示，也不能由（II）线性表示；

（B）α_m不能由（I）线性表示，但能由（II）线性表示；

（C）α_m能由（I）线性表示，也能由（II）线性表示；

（D）α_m能由（I）线性表示，但不能由（II）线性表示.

解：$\because \beta$能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示，

$\therefore \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in R$，使$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + \lambda_m\alpha_m$

又$\because \beta$不能由向量组（I）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示，于是$\lambda_m \neq 0$，

$\therefore \alpha_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\alpha_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}\alpha_2 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\alpha_{m-1} + \frac{1}{\lambda_m}\beta$，即$\alpha_m$能由（II）线性表示；

假设α_m能由（I）线性表示，则$\exists k_1, \cdots, k_{m-1} \in R$，使$\alpha_m = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1}$，代入$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + \lambda_m\alpha_m$得到$\beta$能由向量组（I）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$线性表示，矛盾，故$\alpha_m$不能由（I）线性表示. 故选（B）.

（8）设矩阵A为n阶方阵，且$R(A) = r < n$，则在A的n个行向量中(　B　)

（A）任意 r 个行向量线性无关；
（B）必有 r 个行向量线性无关；
（C）任意 r 个行向量构成极大无关组；
（D）任意一个行向量都可以由其中任意 r 个行向量线性表示.

解：$R(A)=r<n$，$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的行向量组，则 $R\left(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n\right)=r$，

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的最大无关组的个数为 r，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 必有 r 个行向量线性无关，故（B）正确.

例如：$A=\left(\begin{array}{c:c}E_{r\times r} & O\\ \hdashline O & O\end{array}\right)=\left(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_r \;\vdots\; \alpha_{r+1} \quad \cdots \quad \alpha_n\right)^T$，$R\left(A\right)=r$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

（9）设矩阵 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则矩阵 A 中(　C　)

（A）必有一列元素全为 0；
（B）必有 2 列元素对应成比例；
（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合；
（D）任意一列向量都是其余列向量的线性组合.

解：$A=\left(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n\right)$

$|A|=0 \Leftrightarrow R\left(A\right)<n \Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为零的数 $k_1,\cdots,k_n$，使得：

$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0 \Leftrightarrow \exists$ 一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示，故（C）正确.

（A）（B）是 $|A|=0$ 的充分条件.

（10）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意的常数 k，必有(　A　)

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关；　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；　　（D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关.

解：β_1 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 $\Rightarrow \beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

① $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 一定线性无关

若线性相关，$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore k\beta_1+\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，则

$\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3-k\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\right)=\left(\lambda_1-kk_1\right)\alpha_1+\left(\lambda_2-kk_2\right)\alpha_2+\left(\lambda_3-kk_3\right)\alpha_3$

矛盾，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关；

②当$k\neq 0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关；当$k=0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关。

当$k\neq 0$时，若线性相关，$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore \beta_1+k\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，则

$$k\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3-\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\right)$$

$\Rightarrow \beta_2=\dfrac{1}{k}\left(\lambda_1-k_1\right)\alpha_1+\dfrac{1}{k}\left(\lambda_2-k_2\right)\alpha_2+\dfrac{1}{k}\left(\lambda_3-k_3\right)\alpha_3$，矛盾，故线性相关；

当$k=0$时，$\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$线性相关.

3．设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}3\\2\\4\\-1\end{pmatrix}$，求$\alpha-\beta,\ 5\alpha+4\beta,\ (\alpha,\beta),\ \|\alpha\|,\ \|\beta\|$.

解：$\alpha-\beta=\begin{pmatrix}1-3\\0-2\\-1-4\\2-\left(-1\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-5\\3\end{pmatrix}$　　　　$5\alpha+4\beta=\begin{pmatrix}5\\0\\-5\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\8\\16\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\8\\11\\6\end{pmatrix}$

$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=3+0-4-2=-3$　　　　$\|\alpha\|=\sqrt{1+0+1+4}=\sqrt{6}$

$\|\beta\|=\sqrt{9+4+16+1}=\sqrt{30}$

4．设$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}10\\1\\5\\10\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，且$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$，求$\alpha$.

解：$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)\Rightarrow \alpha=\dfrac{1}{6}\left(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3\right)$

$$\alpha=\frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix}6\\15\\3\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20\\2\\10\\20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20\\5\\-5\\5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

5．讨论下列向量组的线性相关性：

（1）向量组 1：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$；

（2）向量组 2：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$；

（3）向量组 3：$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$；

（4）向量组 4：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$；

（5）向量组 5：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$.

解：（1）$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$\because R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=2$，$\therefore$ 向量组 1 线性无关.

（2）$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\2 & -1 & -3\\1 & -5 & -4\\3 & -6 & -7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\0 & -9 & -5\\0 & -9 & -5\\0 & -18 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\0 & -9 & -5\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\because R\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=2$，$\therefore$ 向量组 2 线性相关.

（3）$\because \alpha_1,\alpha_2$ 对应分量不成比例，$\therefore$ 向量组 3 线性无关.

（4）方法一：$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9 & -2\\2 & 100 & -4\\-1 & 10 & 2\\4 & 4 & -8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 9 & -2\\0 & 82 & 0\\0 & 19 & 0\\0 & -32 & 0\end{pmatrix}$

$\because R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=2$，$\therefore$ 向量组 4 线性相关.

方法二：α_1与α_3线性相关（$\alpha_3=-2\alpha_1$），$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

（5）由定理 3.2.5 知任意 4 个 3 维向量必定线性相关，$\therefore$向量组 5 线性相关.

6．分别求下列向量组的秩及其一个最大的线性无关组：

（1）向量组 1：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\11\\15\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\7\\8\\4\end{pmatrix}$；

（2）向量组 2：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\8\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\9\\-5\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\7\\5\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}7\\6\\10\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$.

解：（1）$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&11&7\\4&15&8\\0&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&1\\0&3&5\\0&-1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&-4\\0&0&17\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一个极大无关组.

（2）$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&4&7\\8&9&7&6\\0&-5&5&10\\-1&-3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&4&7\\0&25&-25&-50\\0&-5&5&10\\0&-5&5&10\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&4&7\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\alpha'$$

$\therefore R(\alpha)=2$，显然矩阵α'的前两个列向量线性无关，$\therefore \alpha$的前两个列向量线性无关

$\therefore \alpha_1,\alpha_2$为一个极大无关组.

7．设$\alpha_1=\begin{pmatrix}6\\a+1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a\\2\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$，则：

（1）a为何值时，向量组α_1,α_2线性相关？线性无关？

（2）a为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关？线性无关？

解：（1）向量组α_1,α_2线性相关的充要条件是对应分量成比例，即

$$\frac{6}{a}=\frac{a+1}{2}=\frac{3}{-2}\Rightarrow a=-4$$

当 $a\neq -4$ 时，对应分量不成比例，此时向量组线性无关.

综上所述：当 $a=-4$ 时，α_1,α_2 线性相关；当 $a\neq -4$ 时，α_1,α_2 线性无关.

（2）向量组线性无关 $\Leftrightarrow R\left(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\right)=3\Leftrightarrow |A|=\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\right|\neq 0$

$$|A|=\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\right|=\begin{vmatrix}6 & a & a\\ a+1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix}=(a+4)(2a-3)\neq 0\Rightarrow a\neq -4 \text{ 且 } a\neq \frac{3}{2}$$

向量组线性相关 $\Leftrightarrow R\left(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\right)<3\Leftrightarrow |A|=\left|\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\right|=0\Rightarrow a=-4$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$

综上所述：当 $a=-4$ 或 $a=3/2$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

当 $a\neq -4$ 且 $a\neq 3/2$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

8．设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，求 a,b 的值.

解：方法一：$A=\begin{pmatrix}a & 2 & 1 & 2\\ 3 & b & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$R(A)=2$

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 3 & b & 2 & 3\\ a & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & b-9 & -1 & 0\\ 0 & 2-3a & 1-a & 2-a\end{pmatrix}$$

要使 $R(A)=2$，则 $\left(b-9\quad -1\quad 0\right)$ 与 $\left(2-3a\quad 1-a\quad 2-a\right)$ 必线性相关：

$$\frac{b-9}{2-3a}=\frac{-1}{1-a}=\frac{0}{2-a}\Rightarrow a=2,b=5$$

方法二：$R(A)=2$，容易找到一个二阶子式不为 0，A 的所有三阶子式为 0，则

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ a & 1 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1-a & 2-a\end{vmatrix}=2-a=0\Rightarrow a=2$$

$$\begin{vmatrix}2&1&2\\b&2&3\\3&1&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&2-\frac{1}{2}b&3-b\\0&-\frac{1}{2}&-2\end{vmatrix}=2\left[-2\left(2-\frac{1}{2}b\right)+\frac{1}{2}(3-b)\right]=0\Rightarrow b=5$$

9．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，问$l,m$满足什么条件时，$l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$线性无关.

解：$\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l\alpha_2-\alpha_1&m\alpha_3-\alpha_2&\alpha_1-\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\l&-1&0\\0&m&-1\end{pmatrix}$

即$\beta=\alpha A$，$R(\beta)=R(\alpha A)\le R(A)\begin{cases}=3, & |A|\ne0\Leftrightarrow A\text{可逆}\\<3, & |A|=0\Leftrightarrow A\text{不可逆}\end{cases}$

故当$|A|=0$时，$R(\beta)<3$，β_1,β_2,β_3线性相关；

当$|A|\ne0$时，A可逆，此时α,β等价，从而$R(\beta)=R(\alpha)=3$，β_1,β_2,β_3线性无关；

总结：$|A|=0\Rightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关$\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关$\Rightarrow|A|\ne0$

$|A|\ne0\Rightarrow\beta_1,\beta_2,\beta$ 线性无关$\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关$\Rightarrow|A|=0$

从而$|A|=0\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关，$|A|\ne0\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&0&1\\l&-1&0\\0&m&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&-1&l\\0&m&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&l\\m&-1\end{vmatrix}=(ml-1)\ne0\Rightarrow lm\ne1$$

故当$lm\ne1$时，向量组$l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$线性无关.

10．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而向量$\beta_2$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，对任意的实数$k$，问

（1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$是否线性相关，为什么？

（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$是否线性相关，为什么？

解：β_1可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示$\Rightarrow\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$一定线性无关.

若线性相关，$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore k\beta_1+\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，则

$\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3-k\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\right)=\left(\lambda_1-kk_1\right)\alpha_1+\left(\lambda_2-kk_2\right)\alpha_2+\left(\lambda_3-kk_3\right)\alpha_3$

矛盾，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关；

（2）当$k\neq 0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关；当$k=0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关.

当$k\neq 0$时，若线性相关，$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore \beta_1+k\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，则

$$k\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3-\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\right)$$

$\Rightarrow \beta_2=\dfrac{1}{k}\left(\lambda_1-k_1\right)\alpha_1+\dfrac{1}{k}\left(\lambda_2-k_2\right)\alpha_2+\dfrac{1}{k}\left(\lambda_3-k_3\right)\alpha_3$，矛盾，故线性相关；

当$k=0$时，$\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$线性相关.

11．验证矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$和矩阵$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$是否为正交阵.

解：方法一：直接根据正较阵定义进行验证，即$AA^T=E$，过程略；

方法二：根据定理 3.4.2，A为正交阵$\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组是标准正交向量组

$\alpha=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\beta=\left(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

对于矩阵α，$\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\neq 0$，$\therefore \alpha$ 的列向量组不是标准正交向量组，$\therefore$矩阵α 不是正交阵；

对于矩阵β，$\|\beta_1\|=\|\beta_2\|=\|\beta_3\|=1$，$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$是单位列向量

又$\left(\beta_1,\beta_2\right)=-\dfrac{1}{9}\times\dfrac{8}{9}-\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}\times\dfrac{4}{9}=0$，$\left(\beta_1,\beta_3\right)=-\dfrac{1}{9}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}\times\dfrac{4}{9}-\dfrac{4}{9}\times\dfrac{7}{9}=0$，

$\left(\beta_2,\beta_3\right)=-\dfrac{8}{9}\times\left(-\dfrac{4}{9}\right)-\dfrac{1}{9}\times\dfrac{4}{9}-\dfrac{4}{9}\times\dfrac{7}{9}=0$，$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$是标准正交向量组，

$\therefore$矩阵 β 是正交阵.

12．分别将以下向量组正交化

（1）向量组 1：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$；

（2）向量组 2：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

解：（1）$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

（2）$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

13．设 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\cdots+\alpha_r$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

证明：设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0$，代入 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\cdots+\alpha_r$ 有：

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_r(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)=0$$

有： $$(k_1+k_2+\cdots+k_r)\alpha_1+(k_2+\cdots+k_r)\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，$\therefore k_1+k_2+\cdots+k_r=0,k_2+\cdots+k_r=0,\cdots,k_r=0$

$\therefore k_r=0,\cdots,k_2=0,k_1=0$，由定义知：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

14．设向量β能由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示，且表示式惟一，证明$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关.

证明：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，且$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$，两式相加有：

$$\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m+l_m)\alpha_m$$

$\because \beta$ 的表达式唯一，$\therefore k_1+l_1=l_1,\cdots,k_m+l_m=l_m$，即$k_1=0,\cdots,k_m=0$

$\therefore \alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关

15．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，证明：$\alpha_1$能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而$\alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

解：$\because \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\therefore \alpha_2,\alpha_3$线性无关，又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，存在不全为 0 的数$k_1,k_2,k_3$，$st.\ k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，必有$k_1\neq 0$，否则$k_2,k_3$不全为 0，且$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$与$\alpha_2,\alpha_3$线性无关矛盾，$\therefore \alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3$，即$\alpha_1$能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

反证：若α_4能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，由于$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，$\therefore \alpha_4$能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，与$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关矛盾，$\therefore \alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

16．设n维单位坐标向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$能由$n$维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

证明：由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可由$n$维单位坐标向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表示，因此由题目知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可相互线性表示，即二者等价，由于$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的秩为 n，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的秩也为 n，即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

17．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维向量组，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一$n$维向量都能

由它们线性表示.

证明：必要性：任取向量$\beta \in R^n$，$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性无关的$n$维向量组，

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$必线性相关，因此$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示；

充分性：若任意一个n维向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，则$n$维单位坐标向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，由 16 题知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

18. 设A为n阶矩阵，α为n为列向量，若存在正整数k，使得：$A^k\alpha=0$，但是$A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明向量组$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$线性无关.

证明：当$k=1$时，$A^1\alpha=0$，$A^0\alpha=\alpha\neq 0$，则α线性无关，结论正确；

当$k>1$时，设$\lambda_0\alpha+\lambda_1A\alpha+\lambda_2A^2\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$ （1）

（1）式两端左乘A^{k-1}，则$\lambda_0A^{k-1}\alpha+\lambda_1A^k\alpha+\lambda_2A^{k+1}\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{2k-2}\alpha=0$

$\because A^k\alpha=0 \therefore \lambda_0A^{k-1}\alpha=0$，又$A^{k-1}\alpha\neq 0$，$\therefore \lambda_0=0$，代入（1）得：

$$\lambda_1A\alpha+\lambda_2A^2\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0 \qquad (2)$$

（2）式两端左乘A^{k-2}，则$\lambda_1A^{k-1}\alpha+\lambda_2A^k\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{2k-3}\alpha=0\Rightarrow\lambda_1=0$，代入（2）得

$$\lambda_2A^2\alpha+\lambda_3A^3\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0 \qquad (3)$$

（3）式两端左乘A^{k-3}，则$\lambda_2A^{k-1}\alpha+\lambda_3A^k\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{2k-4}\alpha=0\Rightarrow\lambda_2=0$

以此类推，得到$\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_{k-1}=0$，从而$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$线性无关.

19. 设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r_1$，向量组(II)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，的秩为$r_2$，向量组(III)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$的秩为$r_3$，证明$\max\{r_1,r_2\}\leq r_3\leq r_1+r_2$.

证明：显然（I）可由（III）线性表示，即$r_1\leq r_3$，同理（II）可由（III）线性表示，即$r_2\leq r_3$，所以$\max\left\{r_1,r_2\right\}\leq r_3$；

同时记$\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_{r_1}$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组，$\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2,\cdots,\bar{\beta}_{r_2}$为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$的极大无关组，则（III）可由$\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_{r_1}$，$\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2,\cdots,\bar{\beta}_{r_2}$线性表示，$\therefore r_3\leq r_1+r_2$

综上所述：$\max\{r_1,r_2\}\leq r_3\leq r_1+r_2$.

20．设 A 是 $m\times s$ 矩阵，B 是 $m\times t$ 矩阵，证明：$R(A\vdots B)\le R(A)+R(B)$.

证明：将 A 和 B 列分块，记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_t\end{pmatrix}$，则

$R\left(A\right)=R\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix}$，$R\left(B\right)=R\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_t\end{pmatrix}$，且

$R\left(A\vdots B\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_s & \beta_1 & \cdots & \beta_t\end{pmatrix}$，由 19 题知：$R\left(A\vdots B\right)\le R\left(A\right)+R\left(B\right)$.

21．设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

证明：将 A 和 B 列分块，记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$，则：

$A+B=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \cdots & \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$，$\because \alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性表示，由 19 题知：$R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

22．设 A 是 $m\times s$ 矩阵，B 是 $s\times n$ 矩阵，证明：$R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$.

证明：设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}$，$B$ 行分块为 $B=\begin{pmatrix}\bar{\beta}_1\\ \bar{\beta}_2\\ \vdots\\ \bar{\beta}_s\end{pmatrix}$，$AB$ 行分块为 $AB=\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1\\ \bar{\alpha}_2\\ \vdots\\ \bar{\alpha}_m\end{pmatrix}$，

$$\therefore \begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1\\ \bar{\alpha}_2\\ \vdots\\ \bar{\alpha}_m\end{pmatrix}=AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\beta}_1\\ \bar{\beta}_2\\ \vdots\\ \bar{\beta}_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\bar{\beta}_1+\cdots+a_{1s}\bar{\beta}_s\\ a_{21}\bar{\beta}_1+\cdots+a_{2s}\bar{\beta}_s\\ \vdots\\ a_{m1}\bar{\beta}_1+\cdots+a_{ms}\bar{\beta}_s\end{pmatrix}$$

$\therefore AB$ 可由 $\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_s$ 线性表示，$\therefore R\left(AB\right)\le R\left(B\right)$，同理可证 $R\left(AB\right)\le R\left(A\right)$，

即 $R\left(AB\right)\le \min\left(R\left(A\right),R\left(B\right)\right)$，证毕.

23．设 x 是 n 维单位列向量，令 $H=E-2xx^T$，证明：H 是对称的正交阵.

证明：$\because H^T=\left(E-2xx^T\right)^T=E-2\left(x^T\right)^T x^T=E-2xx^T=H$，$\therefore H$ 是对称阵；

又 $\because HH^T=HH=\left(E-2xx^T\right)\left(E-2xx^T\right)=E-2xx^T-2xx^T+4xx^T\cdot xx^T$，注意到 x 是 n 维单位列向量，即 $x^Tx=1$，$\therefore HH^T=E-4xx^T+4x\left(x^Tx\right)x^T=E-4xx^T+4xx^T=E$，即 H 是正交阵；综上所述，H 是对称的正交阵.

24．设 A,B 都是 n 阶正交阵，证明 AB 也是正交阵.

证明：已知 A,B 均为正交阵，则 $AA^T=BB^T=E$，

$$(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = A\left(BB^T\right)A^T = AA^T = E$$

故 AB 也是正交阵.

25．设$V_1=\{x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}|\sum_{i=1}^n x_i=0,x_i\in R,i=1,\cdots,n\},V_2=\{x=\begin{pmatrix}1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}|x_i\in R,i=2,\cdots,n\}$，

验证V_1,V_2是否是向量空间.

解：$V_1=\left\{\vec{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\middle|\sum_{i=1}^n x_i=0,x_i\in R,i=1,\cdots,n\right\}$是向量空间.

易验证V_1对加法和数乘封闭：$\vec{x}\in V_1,\vec{y}\in V_1,k\in R$，则

$\vec{x}+\vec{y}=\left(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n\right)^T$，$\sum_{i=1}^n\left(x_i+y_i\right)=\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i=0$，故$\vec{x}+\vec{y}\in V_1$；

$k\vec{x}=\left(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n\right)^T$，$\sum_{i=1}^n kx_i=k\sum_{i=1}^n x_i=0$，故$k\vec{x}\in V_1$.

$V_2=\left\{\vec{x}=\left(1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\middle|x_i\in R,i=1,\cdots,n\right\}$不是向量空间.

$\vec{x}\in V_2$，$2\vec{x}=\left(2,2x_2,\cdots,2x_n\right)^T\notin V_2$，故$V_2$不是向量空间.

26．证明由向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$所生成的向量空间就是$R^3$.

证明：$|A|=|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2\neq0$，$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基，$\therefore L\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=R^3$.

27．证明$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$为$R^3$的一组基，并求向量$\alpha=\begin{pmatrix}3\\8\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}$在这组基下的坐标.

解：$|A|=|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{vmatrix}=1\neq0$，$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，是$R^3$的一组基.

设$\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} x = Ax, \beta = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} y = Ay$，则$x = A^{-1}\alpha, y = A^{-1}\beta$，

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 0 & 13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -1 \\ 0 & -28 & -15 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & 8 \\ 0 & -28 & -15 & 18 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -46 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -46 \end{array}\right)$$

$$\therefore x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -8 \\ 24 \\ -46 \end{pmatrix}.$$

第四章　线性方程组

1．填空题

（1）若齐次方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$只有零解，则参数$\lambda$应满足$\underline{\quad\lambda\neq 1且\lambda\neq -2\quad}$.

解：$A_n x=0$只有零解$\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow R(A)=n$；$A_n x=0$有非零解$\Leftrightarrow |A|=0\Leftrightarrow R(A)<n$；

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\neq 0\Rightarrow \lambda\neq 1\text{ 且 }\lambda\neq -2.$$

（2）若方程组$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ x_3+x_4=-a_3\\ x_1+x_4=a_4\end{cases}$有解，则常数$a_1,a_2,a_3,a_4$满足$\underline{\quad a_1+a_2+a_3+a_4=0\quad}$.

解：$A_{m\times n}x=b$有解$\Leftrightarrow R(A)=R(A\ \vdots\ b)=R(\bar{A})$；

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&-1&0&1&a_1+a_4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4\end{array}\right)$$

则$R(A)=R(\bar{A})\Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

（3）若方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+1\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则$a=\underline{\quad\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\quad}$.

解：$R(A)<R(\bar{A})$则$Ax=b$无解；

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+1&3\\1&a&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a-1&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a-1&1\\0&0&a^2-3a-1&a-3\end{array}\right)$$

$a^2-3a-1=0\Rightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$，则当$a=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$时，$R(A)=2<R(\bar{A})=3$，此时$Ax=b$无解.

（4）若方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多解，则$a=$____-2____.

解：$A_{n\times n}x=b$，则 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow Ax=b$ 有一解；

$$|A|=0 \Leftrightarrow Ax=b \text{有 0，}\infty\text{解}\begin{cases} R(A)=R(\bar{A})\text{，有}\infty\text{解} \\ R(A)<R(\bar{A})\text{，有0解} \end{cases}；$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2(a+2)=0 \Rightarrow a=1\text{或}-2$$

当$a=1$时，$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$，$R(A)=1<R(\bar{A})=2$，故无解；

当$a=-2$时，$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \scriptstyle r_3+2r_1 \\ \scriptstyle r_2-r_1 \\ \scriptstyle r_3+r_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

$R(A)=R(\bar{A})=2<3$，故有无穷解；

综上所述：$a=-2$.

（5）若方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$有惟一解，则$a,b$满足____$a\neq 2,\ \forall b\in R$____.

解：$|A|=-a+2\neq 0 \Rightarrow a-2$，对$b$无要求，即$a\neq 2,\ \forall b\in R$.

（6）若n阶矩阵A的每一行元素之和为零，且$R(A)=n-1$，则齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系为____$(1,1,\cdots,1)^T$____.

解：$A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$为$Ax=0$的非零解向量；记$S_A=\{x|Ax=0\}$为$Ax=0$的解空间，则$\dim S_A=n-R(A)=n-(n-1)=1$，则$S_A$的任何一个线性无关的解向量均是$S_A$的基础解系，从而$Ax=0$的基础解系是$(1,1,\cdots,1)^T$.

（7）设 α_1,α_2 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的两个不同解，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=n-1$，则 $Ax=\beta$ 的通解为 $\underline{x=\alpha_1+k(\alpha_1-\alpha_2)\text{或者 } x=\alpha_2+k(\alpha_1-\alpha_2),k\in R}$.

解：记 S_A 为 $Ax=0$ 的解空间，则 $\dim S_A=n-R\left(A\right)=n-\left(n-1\right)=1$，则 S_A 的任何一个线性无关的解向量均是 S_A 的基础解系，α_1,α_2 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的两个不同解，则 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的一个非零解，从而 $\alpha_1-\alpha_2$ 线性无关，那么 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 S_A 的基础解系，则 $Ax=\beta$ 的通解为：$x=\alpha_1+k(\alpha_1-\alpha_2)$ 或者 $x=\alpha_2+k(\alpha_1-\alpha_2),k\in R$.

（8）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有惟一解的充要条件是 $\underline{R(A)=R(A\vdots\beta)=n}$.

解：$A_{m\times n}x=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R\left(A\right)=R\left(\bar{A}\right)=R\left(A\ \vdots\ \beta\right)=n$；

$A_{m\times n}x=\beta$ 无解 $\Leftrightarrow R\left(A\right)<R\left(\bar{A}\right)=R\left(A\ \vdots\ \beta\right)$；

$A_{m\times n}x=\beta$ 有无穷解 $\Leftrightarrow R\left(A\right)=R\left(\bar{A}\right)=R\left(A\ \vdots\ \beta\right)<n$.

（9）设 A,B 为 n 阶方阵，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解都是齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解，则 $R(A)\ \underline{\quad\ge\quad}\ R(B)$.

解：记 $S_A=\left\{x\middle|Ax=0\right\}$ 为 $Ax=0$ 的解空间，$S_B=\left\{x\middle|Bx=0\right\}$ 为 $Bx=0$ 的解空间，由已知 $S_A\subset S_B$，则 $\dim S_A=n-R\left(A\right)\le\dim S_B=n-R\left(B\right)\Rightarrow R\left(A\right)\ge R\left(B\right)$.

（10）若 $A=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$，且三条不同直线 $a_ix+b_iy+c_i=0\ (i=1,2,3)$ 相交于一点，则矩阵 A,B 的秩满足 $\underline{\quad R(A)=R(B)=2\quad}$.

解：三条不同直线 $a_ix+b_iy+c_i=0\ (i=1,2,3)$ 相交于一点 $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\a_2x+b_2y=-c_2\\a_3x+b_3y=-c_3\end{cases}$ 有唯一解

$\Leftrightarrow R\left(A\right)=R\left(\bar{A}\right)=n=2$，$\bar{A}=\left(\begin{array}{cc:c}a_1&b_1&-c_1\\a_2&b_2&-c_2\\a_3&b_3&-c_3\end{array}\right)=\left(A\ \vdots\ \beta\right)$，令 $B=\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\right)$ 则

$\bar{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3\end{pmatrix}$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3$等价，从而$R(B)=R(\bar{A})$，则

$R(B)=R(A)=2$.

2．选择题

（1）齐次线性方程组$Ax=0$仅有零解的充要条件是(A)

（A）矩阵A的列向量组线性无关；

（B）矩阵A的列向量组线性相关；

（C）矩阵A的行向量组线性无关；

（D）矩阵A的行向量组线性相关.

解：$Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow R(A)=n \Leftrightarrow R(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=n \Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关，故选（A）.

（2）设A是$m\times n$矩阵，$Ax=0$是与非齐次线性方程组$Ax=\beta$相对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(D)

（A）若$Ax=0$仅有零解，则$Ax=\beta$有惟一解；

（B）若$Ax=0$有非零解，则$Ax=\beta$有无穷多解；

（C）若$Ax=\beta$有无穷多解，则$Ax=0$仅有零解；

（D）若$Ax=\beta$有无穷多解，则$Ax=0$有非零解.

解：$A_{m\times n}x=0$只有零解$\Leftrightarrow R(A)=n$；$A_{m\times n}x=0$有非零解$\Leftrightarrow R(A)<n$；

对$A_{m\times n}x=\beta$，若$R(A)=R(\bar{A})$，则$A_{m\times n}x=\beta$有解，且$R(A)=n \Leftrightarrow Ax=\beta$有唯一解，

$R(A)<n \Leftrightarrow Ax=\beta$有无穷解；

对$A_{m\times n}x=\beta$，有：$R(A)=n \Leftrightarrow Ax=\beta$有零解或唯一解（可能无解，当$R(A)\neq R(\bar{A})$），

$R(A)<n \Leftrightarrow Ax=\beta$有无穷解或零解（可能无解，当$R(A)\neq R(\bar{A})$）.

（A）$Ax=0$仅有零解$\Leftrightarrow R(A)=n \Leftrightarrow Ax=\beta$有零解或唯一解，故（A）错误；

（B）$Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow R(A)<n \Leftrightarrow Ax=\beta$有无穷解或零解，故（B）错误；

（D）$Ax=\beta$有无穷解$\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})=n \Rightarrow Ax=0$有非零解，故（D）正确.

(3) 设A是$m\times n$矩阵，且$R(A)=r$，则(A)

(A) $r=m$时，非齐次线性方程组$Ax=\beta$有解；

(B) $r=n$时，非齐次线性方程组$Ax=\beta$有惟一解；

(C) $m=n$ 时，非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解；

(D) $r<n$ 时，非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有无穷解.

解：（A） $R\left(\bar{A}\right)\geq R\left(A\right)=r=m$ 且 $R\left(\bar{A}\right)\leq m\Rightarrow R\left(\bar{A}\right)=R\left(A\right)=m\Rightarrow Ax=\beta$ 有解，故（A）正确；

（B） $R\left(A\right)=n\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有零解或唯一解；

（C）当 $R\left(A\right)\neq R\left(\bar{A}\right)$ 时， $Ax=\beta$ 无解；

（D） $R\left(A\right)<n\Leftrightarrow Ax=\beta$ 有无穷解或零解.

(4) 设 α_1,α_2 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的两个不同解，则(　B　)是 $Ax=\beta$ 的解.

(A) $\alpha_1+\alpha_2$； (B) $\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$； (C) $\alpha_1-\alpha_2$； (D) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ k_i\in R,\ i=1,2$.

解： $A\alpha_1=\beta$， $A\alpha_2=\beta$

（A） $A\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=\beta+\beta=2\beta$；

（B） $A\left(\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2\right)=\frac{2}{3}A\alpha_1+\frac{1}{3}A\alpha_2=\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{3}\beta=\beta$，故选（B）；

（C） $A\left(\alpha_1-\alpha_2\right)=\beta-\beta=0$；

（D） $A\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\right)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2=k_1\beta+k_2\beta=\left(k_1+k_2\right)\beta=\beta\Leftrightarrow k_1+k_2=1$.

(5) 当矩阵 A 等于(　A　)时， $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

(A) $(-2,1,1)$； (B) $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$.

解：显然 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 线性无关，记 $S_A=\left\{x\middle|Ax=0\right\}$ 为 $Ax=0$ 的解空间，则

$\dim S_A=n-R\left(A\right)\geq 2\Rightarrow R\left(A\right)\leq 1$，故（A）正确.

可简单验证：$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=0$，$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0$.

(6) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 $R(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，则下列结论正确的是(C)

(A) 矩阵 A 的任意 m 个列向量必线性无关；
(B) 矩阵 A 的任意 m 阶子式必不等于 0；
(C) 若矩阵 B 满足 $BA=0$，则必有 $B=0$；

(D) 矩阵 A 通过初等行变换，必可化成 $(E_m,0)$ 的形式.

解：$R\left(A_{m\times n}\right)=m<n$，$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$，则 $R\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=R\left(A\right)=m\Rightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_m$

线性无关，$R\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=R\left(A\right)<n\Rightarrow\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性相关.

（A）（B）$R\left(A\right)=m\Rightarrow$ 存在 m 阶子式不等于 0，设此子式对应矩阵为 A_1，

$A_1=\left(\beta_{i1},\cdots,\beta_{im}\right)$，则 $\left|A_1\right|\neq 0\Rightarrow\beta_{i1},\cdots,\beta_{im}$ 线性无关；

（D）$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}E_m & C\end{pmatrix}$ 行最简形 $\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E_m & O\end{pmatrix}$ 标准形；

（C）方法一：由 $R\left(A\right)=m<n$，不妨设 $A=\begin{pmatrix}\overset{m}{A_1} & \overset{n-m}{A_2}\end{pmatrix}$，且 A_1 可逆，

$B_{k\times m}A_{m\times n}=B\begin{pmatrix}A_1 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overset{m}{O} & \overset{n-m}{O}\end{pmatrix}=O_{k\times n}\Rightarrow BA_1=O_{k\times m}\Rightarrow B=OA_1^{-1}=O_{k\times m}$；

方法二：$B_{k\times m}A_{m\times n}=O_{k\times n}$，则 $\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{k1} & \cdots & b_{km}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O_{1\times n}\\ \vdots\\ O_{1\times n}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m}b_{1j}\alpha_j=0\\ \qquad\vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{m}b_{kj}\alpha_j=0\end{cases}$

$R\left(A\right)=m\Rightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Rightarrow b_{1j}=0,\cdots,b_{kj}=0,\ j=1,\cdots,m\Rightarrow B=O_{k\times m}$；

方法三：由书 16 题知 $R\left(A^TA\right)=R\left(A\right)=m$，记 $B=A^T$，则 $A=B^T$，

$R\left(A^TA\right)=R\left(B^TB\right)=R\left(B\right)=R\left(A^T\right)=R\left(A\right)\Rightarrow R\left(A\right)=R\left[\left(A^TA\right)_{n\times n}\right]=R\left[\left(AA^T\right)_{m\times m}\right]$

$=m<n\Rightarrow\left|A^TA\right|=0,\left|AA^T\right|\neq 0,$ 即 AA^T 可逆，$BA=O\Rightarrow BAA^T=OA^T=O$（两边右乘 A^T）$\Rightarrow B=O\left(AA^T\right)^{-1}=O$（两边右乘 $\left(AA^T\right)^{-1}$）.

综上：（C）正确.

(7) 设 A 为 n 阶方阵，且 $R(A)=n-1$，而 α_1,α_2 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的两个不同解，k 为任意实数，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为(　C　)

(A) $k\alpha_1$；　(B) $k\alpha_2$；　(C) $k(\alpha_1-\alpha_2)$；　(D) $k(\alpha_1+\alpha_2)$.

解：$\dim S_A=n-R\left(A\right)=n-\left(n-1\right)=1$，则 $Ax=0$ 的任何一个非零解向量均为 $Ax=0$ 的基础解系，由 α_1,α_2 是 $Ax=\beta$ 的两个不同解 $\Rightarrow \alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的非零解，则 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，$Ax=0$ 的通解为：$k\left(\alpha_1-\alpha_2\right),k\in R$，选（C）.

(8) 设 β_1,β_2 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的两个不同解，而 α_1,α_2 为对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意实数，则 $Ax=\beta$ 的通解为(　AB　)

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$；　　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$；

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；　　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

解：非齐次方程组通解=非齐次方程组特解+齐次方程组通解

非齐次方程组特解可选：$\beta_1,\beta_2,\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$（$A\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(A\beta_1+A\beta_2\right)=\beta$）

齐次方程组通解可选择：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,k_1\alpha_1+k_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right),k_1\alpha_1+k_2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)$

注意：$k_1\alpha_1+k_2\left(\beta_1-\beta_2\right)$ 不一定是 $Ax=0$ 的通解，因为 $\beta_1-\beta_2$ 可能与 α_1 相关

综上：选（A）（B）.

(9) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，对于齐次线性方程组 $(AB)x=0$，以下结论正确的是(　D　)

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解；

(B) 当 $n>m$ 时必有非零解；

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解；

(D) 当 $m>n$ 时必有非零解.

解：（A）（B）$R\left[\left(AB\right)_{m\times m}\right]\le R\left(A_{m\times n}\right)\le m<n$，则 $\left(AB\right)x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R\left(AB\right)<m$，$\left(AB\right)x=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow R\left(AB\right)=m$，故 $\left(AB\right)x=0$ 有非零解或者只有零解均有可能，故（A）（B）错误；

（C）（D）$R\left[\left(AB\right)_{m\times m}\right]\le R\left(A_{m\times n}\right)\le n<m\Rightarrow\left(AB\right)x=0$ 有非零解，故（D）正确.

3．求解以下方程组

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2 \\ 3x_1-x_2+2x_3=10 \\ 11x_1+3x_2=8 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x-y+4z=-5 \\ 3x+8y-2z=13 \\ 4x-y+9z=-6 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 3x+y-z+w=1 \\ 2x+2y-2z+w=2 \\ 2x+y-z-w=1 \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2 \end{cases}$

解：（1）$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$R(A)=R(\overline{A})=2<4$，∴方程组有无穷多解

同解方程组为$\begin{cases} x_1=2x_2-x_3 \\ x_2=x_2 \\ x_3=x_3 \\ x_4=1 \end{cases}$，即得通解 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$k_1,k_2\in R$；

（2）$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$R(A)=3\neq R(\overline{A})=4$，∴方程组无解；

（3）$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_2-r_3 \\ r_4-r_1 \\ \frac{1}{2}r_1 \\ r_3-r_1}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$R(A)=R(\bar{A})=3$，$\therefore$方程组有唯一解 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$；

（4）$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，同解方程组为$\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_4-2x_2+\frac{1}{2} \\ x_2=3x_4-5x_3+1 \\ x_3=\frac{5}{6}x_4+\frac{1}{6} \\ x_4=x_4 \end{cases}$

即得通解 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$， $k\in R$；

（5）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases} x_1=\frac{4}{3}x_4 \\ x_2=-3x_4 \\ x_3=\frac{4}{3}x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$，通解为 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},k\in R$；

（6）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases} x_1 = x_4 - 2x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$，通解为$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in R$；

（7）$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} & \frac{17}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$

$R(A) = 2 \neq R(\bar{A}) = 3$，$\therefore$方程组无解；

（8）$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -7 & 14 \\ 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & -14 & 28 \\ 0 & -13 & -7 & 14 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$R(A) = R(\bar{A}) = 3$，$\therefore$方程组有唯一解$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$；

（9）$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - \frac{2}{3} r_1]{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$，同解方程组为$\begin{cases} x = 0 \\ y = z + 1 \\ z = z \\ w = 0 \end{cases}$，通解为$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in R$；

（10）$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -14 & 10 & -18 & 10 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right)$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 4 & -3 & 5 & -2\\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}x_3+\frac{1}{7}x_4\\ x_2=-\frac{5}{7}+\frac{5}{7}x_3-\frac{9}{7}x_4\\ x_3=x_3\\ x_4=x_4\end{cases}$，

通解为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-5\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\5\\7\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-9\\0\\7\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$.

4．求参数λ,a,b取何值时，下列方程组有惟一解、无解或有无穷多个解. 当有无穷多个解时，求其一般解.

(1) $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\ x_1+bx_2+x_3=3\\ x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$

(2) $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda\end{cases}$

(4) $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b\end{cases}$

(6) $\begin{cases}(2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda-1\\ (\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda\\ (2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda\end{cases}$

解：（1）$|A|=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=-b(a-1)$

当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时，$|A| \neq 0$，由克莱姆法则知方程组有唯一解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-2b}{b(1-a)} \\ \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{4b-2ab-1}{b(1-a)} \end{pmatrix}$；

当 $b=0$ 时，$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$，$R(A) \neq R(\bar{A})$，无解；

当 $a=1$ 时，$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\dfrac{b}{b-1} \end{array}\right)$

若 $1+\dfrac{b}{b-1} \neq 0$，即 $b \neq \dfrac{1}{2}$ 时，$R(A) \neq R(\bar{A})$，无解；

若 $b=\dfrac{1}{2}$ 时，$R(A)=R(\bar{A})=2$，有无穷多解，此时 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$.

（2）$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \\ 0 & -3 & 3 & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 3 & -3 & 2\lambda^2-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 \end{array}\right)$

当 $\lambda^2+\lambda-2 \neq 0$，即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，无解.

当 $\lambda^2+\lambda-2=0$，即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时，有无穷多解，且：

$\lambda=1$ 时，$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$；

$\lambda=-2$ 时，$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&4\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$，通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$；

（3）$\left(\begin{array}{cccc:c}2&-1&1&1&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&\lambda\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}0&-5&3&-7&-3\\1&2&-1&4&2\\0&5&-3&7&\lambda-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&0&0&0&\lambda-5\end{array}\right)$

当 $\lambda\neq5$ 时，$R(A)\neq R(\bar{A})$，无解；

当 $\lambda=5$ 时，有无穷多解，同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-2x_2+x_3-4x_4+2\\x_2=\dfrac{7x_4-3x_3}{-5}+\dfrac{3}{5}\end{cases}$，

通解为：$x=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\3\\5\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-6\\-7\\0\\5\end{pmatrix}$，$k_1,k_2\in R$；

（4）$\left(\begin{array}{ccc:c}2-\lambda&2&-2&1\\2&5-\lambda&-4&2\\-2&-4&5-\lambda&-\lambda-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-\frac{2-\lambda}{2}r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}0&\dfrac{-\lambda^2+7\lambda-6}{2}&2(1-\lambda)&\lambda-1\\2&5-\lambda&-4&2\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\end{array}\right)$

$\sim\left(\begin{array}{ccc:c}2&5-\lambda&-4&2\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\0&(1-\lambda)(\lambda-6)&4(1-\lambda)&2(\lambda-1)\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}2&5-\lambda&-4&2\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\0&0&(\lambda-10)(\lambda-1)&(\lambda-4)(\lambda-1)\end{array}\right)$

当 $\lambda=10$ 时，$R(A)\neq R(\bar{A})$，无解；

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解，此时 $\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&-4&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$，

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$；

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，有唯一解，此时：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}2&5-\lambda&-4&2\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\0&0&(\lambda-10)(\lambda-1)&(\lambda-4)(\lambda-1)\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}2&5-\lambda&-4&2\\0&1&1&1\\0&0&\lambda-10&\lambda-4\end{array}\right)$$

方程组解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\lambda - 10}\begin{pmatrix} -3\lambda \\ -6 \\ \lambda - 4 \end{pmatrix}$；

（5）$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{array}\right)$

$\begin{array}{c} r_2 + r_3 \\ r_4 + r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$

当$a \neq 0$或$b \neq 2$时，$R(A) \neq R(\bar{A})$，无解；

当$a = 0$且$b = 2$时，有无穷多解，$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

通解为：$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_1, k_2, k_3 \in R$；

（6）$|A| = \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & -\lambda \\ \lambda-2 & \lambda-1 & 0 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right)$

当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq \pm 1$时，有唯一解；

当$\lambda = 0$时，$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$R(A) \neq R(\bar{A})$，无解；

当$\lambda = 1$时，$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$，$R(A) \neq R(\bar{A})$，无解；

当$\lambda=-1$时，$\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 0 & -2\\ -3 & -2 & -3 & -1\\ -3 & -2 & -3 & -1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -5 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & \frac{3}{5} & 1\\ 0 & 5 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

有无穷多解，通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5}\\ 1\end{pmatrix},k\in R$.

5．对于向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ \lambda+1\\ 1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \lambda+1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}$；试讨论参数$\lambda$满足什么条件时，

(1) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表示方式惟一；

(2) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，但表示方式不惟一；

(3) β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

解：$|A|\neq 0 \Leftrightarrow Ax=\beta$有唯一解$\Leftrightarrow \beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表达式唯一；

$|A|=0 \Leftrightarrow Ax=\beta$有无穷解或无解；

$Ax=\beta$有无穷解$\Leftrightarrow \beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表达式不唯一；

$Ax=\beta$无解$\Leftrightarrow \beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0 \text{ 且 } \lambda\neq -3$$

（1）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表达式唯一$\Leftrightarrow \lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$；

（2）当$\lambda=0$时，$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，$R(A)=R(\bar{A})=1<3$，此时

$Ax=\beta$有无穷解，$\therefore \beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表达式不唯一；

（3）当$\lambda=-3$时，

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&-3\\1&1&-2&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&9\\0&-3&3&-12\\0&3&-3&18\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&9\\0&-3&3&-12\\0&0&0&6\end{array}\right)$$

$R(A)=2<R(\overline{A})=3$，此时$Ax=\beta$无解，$\therefore\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

6．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩是 2，并已知该方程组的三个解向量是

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\4\\5\end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解：$\dim S_A=n-R(A)=4-2=2$，则$Ax=0$的任何两个线性无关的解向量均是它的一组基础解系；由η_1,η_2,η_3为非齐次方程组$Ax=\beta$的三个解向量知：

$\xi_1=\eta_3-\eta_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\eta_2-\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$为$Ax=0$的两个线性无关的解向量，故为$Ax=0$的一组基础解系；

故$Ax=\beta$的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$.

7．设三元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 1，且已知它的三个解η_1,η_2,η_3满足：

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\eta_1+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解：$\dim S_A=n-R(A)=3-1=2$，故$Ax=0$的任何两个线性无关的解向量均是它的一组基础解系；$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\alpha_1$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha_2$，$\eta_1+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha_3$，

则 $\eta_1+\eta_2+\eta_3=\dfrac{1}{2}\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)$，又 $\eta_1+\eta_3=\alpha_3$，$\therefore \eta_2=\dfrac{1}{2}\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix}$ 为非齐次方程组特解；

$\xi_1=\alpha_1-\alpha_2=\eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\alpha_1-\alpha_3=\eta_2-\eta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的两个线性无关的解向量，故为 $Ax=0$ 的一组基础解系；

故 $x=\eta_2+k_1\xi_1+k_2\xi_2,k_1,k_2\in R$ 为 $Ax=\beta$ 的通解.

注意：此题中非齐次方程组的特解、齐次方程组的基础解系找法不唯一.

8．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，求 t 的值.

解：$\because AB=0$，由 P110 例 9 知：$R\left(A\right)+R\left(B\right)\le 3$，又 B 是非零矩阵，$\therefore R\left(B\right)\ge 1$，

$\therefore R\left(A\right)\le 2$，则 $\left|A\right|=0$；

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=7t+21=0$$

$\therefore t=-3$.

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且满足 $AB=0$，求 $a,\ b$ 及 $R(B)$.

解：$\because AB=0$，由 P110 例 9 知：$R\left(A\right)+R\left(B\right)\le 3$，又 B 是非零矩阵，$\therefore R\left(B\right)\ge 1$，

$\therefore R\left(A\right)\le 2$，即 A 不满秩，则 $\left|A\right|=0$；

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\0&2b&0\end{vmatrix}=2b\left(1-a\right)=0$$

$\therefore a=1$或$b=0$；

当 $a=1$时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&b-1&0\\0&3b-1&0\end{pmatrix}$，$\because b-1$与$3b-1$不能同时为 0，

$\therefore R\left(A\right)=2$，此时$1\le R\left(B\right)\le 1$，$\therefore R\left(B\right)=1$；

当$b=0$时，$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - ar_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=2$，此时$1\le R(B)\le 1$，$\therefore R(B)=1$.

10．设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的$s$个解，$k_1,\cdots,k_s$为实数，满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，证明$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$也是方程组$Ax=b$的解.

证明：由已知：　$A\eta_i=b, i=1,2,\cdots,s,$

$$Ax=A(k_1\eta_1+\cdots+k_s\xi_s)=k_1A\eta_1+\cdots+k_sA\eta_s=k_1b+\cdots+k_sb=(k_1+\cdots+k_s)b=1\cdot b=b$$

故$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$也是方程组$Ax=b$的解.

11．试证方程组$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$有解的充要条件是$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$，并在有解的情况下，求出它的全部解.

证明：

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & & & & 1 & a_5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_5+r_1+r_2+r_3+r_4} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & & & & 0 & a_1+\cdots+a_5 \end{array}\right)=\overline{A}_1$$

$Ax=b$有解$\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=R(\overline{A}_1)\Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$；

当$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$时，$\overline{A}_1 \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_1+r_2}]{r_3+r_4} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & & & & -1 & a_1+a_2+a_3+a_4 \\ & 1 & & & -1 & a_2+a_3+a_4 \\ & & 1 & & -1 & a_3+a_4 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right)$

同解方程组为$\begin{cases} x_1=x_5+a_1+a_2+a_3+a_4 \\ x_2=x_5+a_2+a_3+a_4 \\ x_3=x_5+a_3+a_4 \\ x_4=x_5+a_4 \\ x_5=x_5 \end{cases}$，通解为$x=\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 \\ a_2+a_3+a_4 \\ a_3+a_4 \\ a_4 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k\in R$.

12．设η^*为n元非齐次线性方程组$Ax=\beta$的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：

(1) 向量组η^*，ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_{n-r}线性无关；

(2) 向量组η^*，$\eta^*+\xi_1$，$\eta^*+\xi_2,\cdots$，$\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

证明：（1）设$k_0\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，则$A\left(k_0\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}\right)=0$，

$\therefore k_0A\eta^*+k_1A\xi_1+\cdots+k_{n-r}A\xi_{n-r}=0$，

$\because \xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为$Ax=0$的基础解系，有$A\xi_i=0,i=1,\cdots,n-r$，$\therefore k_0A\eta^*=k_0\beta=0$，

$\because Ax=\beta$是非齐次方程组，即$\beta\neq 0$，$\therefore k_0=0$，代入有$k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，

$\because \xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，$\therefore k_1=\cdots=k_{n-r}=0$，即$k_0=k_1=\cdots=k_{n-r}=0$，

$\therefore \eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关；

（2）设$k_0\eta^*+k_1\left(\eta^*+\xi_1\right)+\cdots+k_{n-r}\left(\eta^*+\xi_{n-r}\right)=0$，

则$\left(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}\right)\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，由（1）知：$\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，

$\therefore k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=k_1=\cdots=k_{n-r}=0$，$\therefore k_0=0$，$\therefore \eta^*$，$\eta^*+\xi_1$，$\eta^*+\xi_2,\cdots$，$\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

13．设n元非齐次线性方程组$Ax=\beta$的系数矩阵的秩为r，且$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r},\eta_{n-r+1}$是它的$n+1$个解，证明：

(1) $\eta_1-\eta_{n-r+1}$，$\eta_2-\eta_{n-r+1},\cdots$，$\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}$是齐次方程组$Ax=0$的一个基础解系；

(2) $Ax=\beta$的通解为$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$，其中$\sum_{i=1}^{n-r+1}k_i=1$.

证明：（1）首先我们证明$\eta_1-\eta_{n-r+1}$，$\eta_2-\eta_{n-r+1},\cdots$，$\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}$是$Ax=0$的解.

$\because A\eta_1=A\eta_2=\cdots=A\eta_{n-r+1}=\beta$，

$\therefore A\left(\eta_1-\eta_{n-r+1}\right)=A\left(\eta_2-\eta_{n-r+1}\right)=\cdots=A\left(\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}\right)=\beta-\beta=0$，

$\therefore \eta_1-\eta_{n-r+1},\eta_2-\eta_{n-r+1},\cdots,\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}$为解；

其次我们证明$\eta_1-\eta_{n-r+1},\eta_2-\eta_{n-r+1},\cdots,\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}$线性无关.

设$k_1(\eta_1-\eta_{n-r+1})+k_2(\eta_2-\eta_{n-r+1})+\cdots+k_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1})=0$，

则$k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}-(k_1+\cdots+k_{n-r})\eta_{n-r+1}=0$，

$\because \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$线性无关，$\therefore k_1=\cdots=k_{n-r}=k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，

$\therefore \eta_1-\eta_{n-r+1},\eta_2-\eta_{n-r+1},\cdots,\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}$线性无关，

$\therefore \eta_1-\eta_{n-r+1},\eta_2-\eta_{n-r+1},\cdots,\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}$为$Ax=0$的一个基础解系；

（2）由（1）知：$Ax=\beta$的解为：

$x=k_1(\eta_1-\eta_{n-r+1})+k_2(\eta_2-\eta_{n-r+1})+\cdots+k_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1})+\eta_{n-r+1}$

$\therefore x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+(1-k_1-\cdots-k_{n-r})\eta_{n-r+1}$，

取$k_{n-r+1}=1-k_1-\cdots-k_{n-r}$，则$\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}k_i=1$．证毕.

14．设A为n阶矩阵($n\geq 2$)，证明$R(A^*)=\begin{cases}n, & 当R(A)=n\\ 1, & 当R(A)=n-1\\ 0, & 当R(A)<n-1\end{cases}$.

证明：①若$R(A)=n$，则$|A|\neq 0$，$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，$\therefore R(A^*)=n$；

②若$R(A)=n-1$，A不可逆，则$|A|=0$，A有一个$(n-1)$阶子式不为0，于是A有一个代数余子式不为0，$R(A^*)\geq 1$．因为$AA^*=|A|E=0$，所以$R(A^*)+R(A)\leq n$【见书P110：例9】，$\therefore R(A^*)\leq 1$，故$R(A^*)=1$；

③若$R(A)\leq n-2$，则A的所有$(n-1)$阶子式全为 0，于是A所有代数余子式全为 0，$A^*=O_{n\times n}$，$R(A^*)=0$．证毕.

15．设A为n阶矩阵，且$A^2=E$，证明$R(A+E)+R(A-E)=n$.

证明：$A^2=E\Rightarrow(A+E)(A-E)=0\Rightarrow R(A+E)+R(A-E)\leq n$，

$|A|^2=|A^2|=|E|=1\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow A$可逆$\Rightarrow R(A)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=n$，

设$E=(e_1,\cdots,e_n)$，则$A+E=(\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n)$，$A-E=(\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n)$，

设 $R\left(A+E\right)=r$，$R\left(A-E\right)=s$，

易知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n,\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n$ 线性表示，

故 $n=R\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)\le R\left(\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n,\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n\right)$

$\le R\left(\alpha_1+e_1,\cdots,\alpha_n+e_n\right)+R\left(\alpha_1-e_1,\cdots,\alpha_n-e_n\right)=R\left(A+E\right)+R\left(A-E\right)$，

综上：$R\left(A+E\right)+R\left(A-E\right)=n$.

16．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明 $R(A^TA)=R(A)$.

证明：由方程解与秩的关系知：只须证明 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解即可.

事实上，$\forall x\in R$，若 $Ax=0$，则 $A^TAx=0$，$\therefore Ax=0$ 的解必为 $A^TAx=0$ 的解；

反之，$\forall x\in R$，若 $A^TAx=0$，则 $x^TA^TAx=0$，即 $\left(Ax\right)^TAx=0$，$\because Ax\in R^m$ 为列向量，

$\therefore Ax=0$，$\therefore A^TAx=0$ 的解必为 $Ax=0$ 的解；

$\therefore Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解，$\therefore R\left(A\right)=R\left(A^TA\right)$，证毕.

17．设 x 为 n 维列向量，证明齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有公共非零解的充要条件是：$R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n$.

证明：$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有公共非零解 $\Leftrightarrow\exists x_0\ne0$，使 $\begin{cases}Ax_0=0\\Bx_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\exists x_0\ne0$，使

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x_0=\begin{pmatrix}Ax_0\\Bx_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$，即 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n$.

18．若 n 阶方阵 $A=BC$，其中 B 为 $n\times k$ 矩阵，C 为 $k\times n$ 矩阵，且 $|A|\ne0$，证明齐次线性方程组 $B^Tx=0$ 只有零解.

证明：$B^Tx=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow R\left(B^T\right)=R\left(B\right)=n$.

$A_{n\times n}=B_{n\times k}C_{k\times n}$，$\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)=\left(\beta_1,\cdots,\beta_k\right)\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\c_{k1}&\cdots&c_{kn}\end{pmatrix}=\left(\sum_{j=1}^{k}c_{j1}\beta_j,\cdots,\sum_{j=1}^{k}c_{jn}\beta_j\right)$

故$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$能由$\beta_1,\cdots,\beta_k$线性表示，则$R(A)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\le R(\beta_1,\cdots,\beta_k)=R(B)$，

$|A|\ne 0$得$R(A)=n$，$\therefore R(B)\ge n$，又$R(B)\le n$，$\therefore R(B)=n$. 证毕.

第五章 矩阵的相似对角化

1．填空题

（1）设 A 为 n 阶奇异矩阵，则 A 一定有特征值<u>　　0　　</u>.

解：方法一：$|A|=|A-0E|=0\Rightarrow 0$ 是 A 的特征值；

方法二：$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0\Rightarrow\exists\lambda_i=0$，即 0 是 A 的特征值.

（2）n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的特征值为<u>　　n-1 个 0 和 n　　</u>.

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$

方法一：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&\cdots&1\\1&1-\lambda&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+\cdots+r_n}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}n-\lambda&n-\lambda&\cdots&n-\lambda\\1&1-\lambda&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(n-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1-\lambda&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1-\lambda\end{vmatrix}=(n-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&-\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-\lambda\end{vmatrix}=(n-\lambda)(-\lambda)^{n-1}=0$

$\Rightarrow\lambda=0$（$n-1$重）或$\lambda=n$，即 A 的特征值为$n-1$个 0 和 n；

方法二：$|A|=|A-0E|=0\Rightarrow 0$ 是 A 的特征值，易知$R(A)=1$，$\dim S_A=n-R(A-0E)$ $=n-1\Rightarrow 0$ 是 A 的$n-1$重特征根，设 A 的另一特征值为 x，由 P122 性质 1（2）有 $tr(A)=n=0+0+\cdots+x\Rightarrow x=n$，$\therefore$ A 的特征值为$n-1$个 0 和 n.

（3）已知 3 阶矩阵 A 满足 $A^2=A,R(A)=2,$ 则 A 的相特征值为<u>　　0，1，1　　</u>.

解：设 $Ax=\lambda x$，即 λ 是 A 的特征值，x 是 A 的对应于 λ 的特征向量，$A^2=A\Rightarrow A^2x=Ax$，

$\lambda^2x=\lambda x\Rightarrow(\lambda^2-\lambda)x=0\Rightarrow\lambda(\lambda-1)x=0$，$\because x\neq0$，$\therefore\lambda(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda=0,\lambda=1$

$A^2=A\Rightarrow A(A-E)=0$，由 P110 例 9 有：$R(A)+R(A-E)\le n=3$，$R(A)=2\Rightarrow$

$R(A-E)\le3-2=1$，$\lambda=0$ 的特征向量为 $Ax=0$ 的非零解，$\dim S_A=3-R(A)=1$，

$\lambda=1$ 的特征向量为 $(A-E)x=0$ 的非零解，$\dim S_{A-E}=3-R(A-E)\ge3-1=2$，

$\Rightarrow \lambda = 0,1,1$.

（4）$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & x & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，已知 A 的特征值为 2，3，3，则 x 为________.

解：由 P122 性质 1 有 $|A| = 3x+12 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2\times3\times3 = 18 \Rightarrow x = 2$，

$tr(A) = 7+x+1 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 8 \Rightarrow x = 0$，故此题有问题.

（5）已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $(2A^*)^{-1}$ 的特征值为 $\underline{\quad \frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{4} \quad}$.

解：A 的特征值为 1，2，3，则行列式 $|A| = 1\times2\times3 = 6$；$\left(2A^*\right)^{-1} = (2)^{-1}\cdot\left(A^*\right)^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{|A|}$

$= \frac{1}{12}A = \varphi(A)$，由 P123 性质 2 的推广知：$\varphi(\lambda) = \frac{1}{12}\lambda$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值，即 $(2A^*)^{-1}$ 的特征值为 $\frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{4}$.

（6）已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，-2，则 $|A+E|$ 值为____-6____.

解：设 $\varphi(A) = A+E$，则矩阵 $\varphi(A)$ 对应的特征值为 $\varphi(\lambda) = \lambda+1 = 2,3,-1$，则行列式 $|A| = 2\times3\times(-1) = -6$.

（7）已知矩阵 $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ x & y \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 相似，则 x 为 $\underline{\quad -\frac{3}{5} \quad}$，$y$ 为____1____.

解：$A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ x & y \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 相似，则 A 与 B 特征值相同，得 $|A| = |B|$ 且 $tr(A) = tr(B)$，

即 $|A| = 7y-5x = |B| = 10$，$tr(A) = 7+y = tr(B) = 4+4 = 8$，得 $x = -\frac{3}{5}$，$y = 1$.

（8）A,B 为 n 阶矩阵，AB 有特征值 2，则 $BA+3E$ 一定有特征值____5____.

解：AB 有特征值 2，则 $\exists\xi\neq0$ 使 $AB\xi = 2\xi$，$B\xi\neq0$（否则 $A\cdot0 = 0 = 2\xi\neq0$，矛盾），两边左乘 B 得：$BAB\xi = 2B\xi$，2 是 BA 的特征值，$B\xi$ 是 BA 的 2 对应的特征向量，由 $\varphi(\lambda)$

是$\varphi\left(A\right)$的特征值知：2+3=5 是$BA+3E$的特征值.

（9）已知A相似于B，且$A^m=A(m\in N)$，则$B^m=$ ___B___ .

解：A相似于B，则存在可逆阵P使$B=P^{-1}AP$，$B^m=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdots P^{-1}AP$
$=P^{-1}A^mP=P^{-1}AP=B$.

（10）$A=\begin{pmatrix}0&a&1\\0&2&0\\4&2b&0\end{pmatrix}$可相似对角化，则$a$与$b$的关系为 ___$a=-b$___ .

解：$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&a&1\\0&2-\lambda&0\\4&2b&-\lambda\end{vmatrix}=\left(2-\lambda\right)^2\left(-2-\lambda\right)=0\Rightarrow\lambda=2,2,-2$

因为A相似于对角阵，所以必有 3 个线性无关的特征向量，其中$\lambda=-2$对应于一个特征向量，对应于$\lambda=2$必有 2 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$的特征向量是$\left(A-2E\right)x=0$的非零解，$\dim S_{A-2E}=3-R\left(A-2E\right)=2\Rightarrow R\left(A-2E\right)=1$，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-2&a&1\\0&0&0\\4&2b&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&a&1\\0&0&0\\0&2\left(a+b\right)&0\end{pmatrix}$$

只有当$a+b=0$时，$R\left(A-2E\right)=1$，故a与b之间的关系是$a+b=0$.

2．选择题

（1）与可逆阵A必有相同特征值的矩阵是（ C ）.

（A）A^{-1} （B）A^2 （C）A^T （D）A^*

解：λ是A的特征值$\Rightarrow\varphi\left(\lambda\right)$是$\varphi\left(A\right)$的特征值，故（A）（B）（D）均错误；

（C）：$\left|A-\lambda E\right|=\left|\left(A-\lambda E\right)^T\right|=\left|A^T-\lambda E\right|$，故$A$与$A^T$有相同特征值，正确.

（2） 设A为 2 阶实矩阵，$\left|A\right|<0$，则矩阵A （ A ）.

（A）可对角化 （B）不可对角化 （C）与反对称阵相似 （D）以上都不对

解：方法一：$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\left(a+d\right)\lambda+ad-bc$，

$\left|A\right|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc<0$，$\Delta=\left(a+d\right)^2-4\left(ad-bc\right)>0\Rightarrow A$有两个不同的特征值，由 P128 推论 2 知$A$与对角阵相似，故（A）正确；

方法二：$|A|=\lambda_1\lambda_2<0\Rightarrow\lambda_1<0<\lambda_2$ 或 $\lambda_2<0<\lambda_1\Rightarrow A$ 有两个不同的特征值.

（3）已知 A 是 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的互不相等的特征值，对应特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则向量组 $\beta,A\beta,A^2\beta$（ B ）

（A）线性相关　（B）线性无关　（C）可能线性相关，可能线性无关　（D）以上都不对

解：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,i=1,2,3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix},$$

$$A^2\beta=A^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A^2\alpha_1+A^2\alpha_2+A^2\alpha_3=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^2\\\lambda_2^2\\\lambda_3^2\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}\beta & A\beta & A^2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\triangleq A\Lambda$，由 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同 $\Rightarrow$ 特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Rightarrow|A|\neq0$，$|\Lambda|=\prod\limits_{3\geq i>j\geq1}(\lambda_i-\lambda_j)\neq0\Rightarrow|B|=|A|\cdot|\Lambda|\neq0\Rightarrow$ 向量组 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关，故（B）正确.

（4）设 λ_1,λ_2 是 A 的特征值，α_1,α_2 分别是 λ_1,λ_2 的特征向量，则（ C ）

（A）$\lambda_1=\lambda_2$ 时，α_1,α_2 一定成比例

（B）$\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，若 $\lambda_1+\lambda_2=\lambda_3$ 是特征值，则对应的特征向量是 $\alpha_1+\alpha_2$

（C）$\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\alpha_1+\alpha_2$ 不可能是特征向量

（D）$\lambda_1=0$, 有 $\alpha_1=0$

解：（A）：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 时，λ 是 A 的二重根，A 对应于 λ 的特征向量可能是二维的，即 A 对应于 λ 可能有两个线性无关的特征向量，故（A）错误；

（C）：$\lambda_1\neq\lambda_2$，设 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 对应于 λ 的特征向量，即 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)$，$A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\Rightarrow(\lambda_1-\lambda)\alpha_1+(\lambda_2-\lambda)\alpha_2=0$，$\because\lambda_1\neq\lambda_2$，$\therefore\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，

$\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0$，则$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$与已知矛盾，故$\alpha_1+\alpha_2$不是$A$的特征向量，（C）正确.

（5）设A,B为n阶方阵，且A与B相似，则（ D ）

（A）$\lambda E-A=\lambda E-B$　　　　　　　　（B）A与B有相同的特征值与特征向量

（C）A与B都相似于同一对角阵　　　　　（D）对任意常数t，有$tE-A$与$tE-B$相似

解：A与B相似，则存在可逆阵P使$B=P^{-1}AP$：

（A）：$\left|\lambda E-A\right|=\left|\lambda E-B\right|$，但一般$\lambda E-A\neq\lambda E-B$，故（A）错误；

（B）：A与B有相同特征值，但一般特征向量不同，A的特征向量是$\left(A-\lambda E\right)x=0$的非零解，$B$的特征向量是$\left(B-\lambda E\right)x=0$的非零解，故（B）错误；

（C）：A与B相似，但它们可能都不能相似于对角矩阵，故（C）错误；

（D）：$B=P^{-1}AP$，$P^{-1}\left(tE-A\right)P=tP^{-1}P-P^{-1}AP=tE-B$，故$tE-A$相似于$tE-B$，故（D）正确.

（6）设A为n阶实对称矩阵，P是n阶可逆阵，已知n维列向量α是A的属于特征值λ的特征向量。则$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量是（　B　）

（A）$P^{-1}\alpha$　　（B）$P^T\alpha$　（C）$P\alpha$　　（D）$\left(P^{-1}\right)^T\alpha$

解：$A\alpha=\lambda\alpha$，$\left(P^{-1}AP\right)^T\beta=\lambda\beta$，设$\beta$是$\left(P^{-1}AP\right)^T$的属于$\lambda$的特征向量，当$\beta=P^T\alpha$时，$\left(P^{-1}AP\right)^T\beta=P^TA^T\left(P^{-1}\right)^TP^T\alpha=P^TA\left(PP^{-1}\right)^T\alpha=P^TA\alpha=P^T\lambda\alpha=\lambda P^T\alpha=\lambda\beta$，故（B）正确.

（7）n阶方阵A具有n个不同的特征值是A与对角阵相似的（ B ）

（A）充分必要条件　　　　　　　　（B）充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件　　　　　　（D）既非充分又非必要条件

解：A有n个不同的特征值$\Rightarrow A$有n个线性无关的特征向量$\Leftrightarrow A$相似于对角阵，故（B）正确.

（8）设矩阵$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$A$与$B$相似，则$R(A+E)$与$R(A-E)$的和为（ B ）

（A）2　（B）3 （C）4 （D）5

解：$\left|B-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda+1\right)^2\left(\lambda-1\right)^2=0\Rightarrow\lambda=-1$，1，1，

由 B 是实对称矩阵，则一定存在正交阵 P_1 使 $P_1^{-1}BP_1=\Lambda_1=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，

$A\cong B\cong\Lambda_1\Rightarrow A\cong\Lambda_1$，则存在可逆阵阵 P_2 使 $P_2^{-1}AP_2=\Lambda_1=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，

$P_2^{-1}(A+E)P_2=P_2^{-1}AP_2+P_2^{-1}P_2=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$，

同理 $P_2^{-1}(A-E)P_2=P_2^{-1}AP_2-P_2^{-1}P_2=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，

$R(A+E)=R\left(P_2^{-1}(A+E)P_2\right)=2$，$R(A-E)=R\left(P_2^{-1}(A-E)P_2\right)=1$，

$R(A+E)+R(A-E)=2+1=3$，故（B）正确.

（9）设 A 为 2 阶方阵，α_1,α_2 是二维线性无关列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为 （ B ）

（A）-1 （B）1 （C）-2（D）2

解：$A\alpha_1=0=0\cdot\alpha_1$，故 0 是 A 的特征值，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2\neq0$（否则 α_1,α_2 线性相关，矛盾），$A(A\alpha_2)=A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=0+A\alpha_2=1\cdot A\alpha_2$，则 1 是 A 的特征值，$A\alpha_2$ 为 A 的属于 1 的特征向量，故（B）正确.

（10）如果 3 阶实对称阵 A 满足 $A^k=0(k\in N)$，则 $R(A)$ 为（ C ）

（A）2 （B）1 （C）0（D）3

解：设 λ 是 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值，$k\in N$，则 $\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$，即 A 只有特征值 0，A 是实对称矩阵，则存在正交阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda=O\Rightarrow A=O\Rightarrow R(A)=0$，故（B）正确.

3．求下列矩阵的特征值及相对应的特征向量：

（1）$\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}$.

解：（1）A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=2$；$\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=2$ 时，$A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+4r_3]{r_1+3r_3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，故对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $(k_2\neq 0)$.

（2）A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2(\lambda+1)$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=-1$；$\lambda_2=\lambda_3=2$

当 $\lambda_1=-1$ 时，$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-4r_1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，故对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，$A-2E=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_1}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，故对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$（$k_2,k_3$不全为 0）.

（3）A的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & -6 & -6\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 3 & -6 & -4-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & -6\\ -1 & 2-\lambda & 2\\ 3 & \lambda-2 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & -6\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-2c_2]{c_1+c_2}(2-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & -6\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2(\lambda-1)$$

故A的特征值为：$\lambda_1=1$；$\lambda_2=\lambda_3=2$

当$\lambda_1=1$时，$A-E=\begin{pmatrix}4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1+4r_2}\begin{pmatrix}0 & 6 & 2\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$，故对应于$\lambda_1=1$的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$；

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，$A-2E=\begin{pmatrix}3 & -6 & -6\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}3 & -6 & -6\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}r_1]{r_2+\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，故对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$（$k_2,k_3$不全为 0）.

（4）A的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 3-\lambda & 2\\ 3 & 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 3 & \lambda-1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-2c_2]{c_1-2c_2}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(7-\lambda)$$

故A的特征值为：$\lambda_1=7$；$\lambda_2=\lambda_3=1$

当$\lambda_1=7$时，$A-7E=\begin{pmatrix}-5&1&1\\2&-4&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1+r_2}\begin{pmatrix}-5&1&1\\2&-4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，故对应于$\lambda_1=7$的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$；

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，$A-E=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，故对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$（$k_2,k_3$不全为 0）.

4．证明：如果方阵A满足$A^2=A$，则A的特征值等于 0 或 1.

证明：方法一：$A^2=A\Rightarrow A^2-A=0\Rightarrow A\left(A-E\right)=0$，两边取行列式得：

$\left|A\left(A-E\right)\right|=|A||A-E|=0\Rightarrow|A-0E|=0$或$|A-E|=0$，即$\lambda=0$或$\lambda=1$是$A$的特征值；

方法二：设$Ax=\lambda x$，则$A^2=A\Rightarrow A^2x=Ax\Rightarrow\lambda^2x=\lambda x\Rightarrow\left(\lambda^2-\lambda\right)x=0$， $\because x\neq 0$，

$\therefore\lambda^2-\lambda=\lambda\left(\lambda-1\right)=0$，$\therefore\lambda=0,\lambda=1$.

5．证明：如果λ是可逆阵A的特征值，则$\dfrac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值.

证明：$A^*=|A|\cdot A^{-1}$，由已知λ是可逆矩阵A的特征值，则$\lambda\neq 0$，$Ax=\lambda x$，$x\neq 0$，两边左乘$|A|\cdot A^{-1}$得：$|A|\cdot A^{-1}\cdot Ax=\lambda\cdot A^*x$，$\therefore\dfrac{|A|}{\lambda}x=A^*x$，$\therefore\dfrac{|A|}{\lambda}$是$A^*$的特征值.

6．在第 3 题的 4 个矩阵中，哪些可以相似对角化？哪些则不能相似对角化？
解：A能否相似对角化关键是A的二重根是否对应两个线性无关的特征向量，由第 3 题解答知：除第一个矩阵外，其余三个矩阵均能相似对角化.

7．证明：矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$与二阶单位矩阵$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$有相同的特征值，但不相似.

证明：A的特征多项式为：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\0&1-\lambda\end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)^2=0$

故 A 与 E 有相同特征值，均为 $\lambda=1$（2 重），E 是对角阵，A 要相似于 $E \Leftrightarrow A$ 有两个线性无关的特征向量.

方法一：$A-E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，故对应于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$，即 A 只有一个线性无关的特征向量，故 A 不能相似对角化.

方法二：$\dim S_{A-E}=2-R\left(A-E\right)=2-1=1$，故对应于 $\lambda=1$ 的特征向量只有一维，故 A 不能相似于对角阵.

8．设 A，B 都是 n 阶方阵，且 $|A|\neq 0$，证明 AB 与 BA 相似.

证明：$\because |A|\neq 0$，$\therefore A^{-1}$ 存在，又 $BA=A^{-1}\left(AB\right)A$，$\therefore BA$ 与 AB 相似.

9．设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ 相似，求 x，y.

解：方法一：A 的特征多项式为：

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\-2&x-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1-r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}5-\lambda&0&\lambda-5\\-2&x-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=\left(5-\lambda\right)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&x-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3+c_1}{=\!=\!=}\left(5-\lambda\right)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&x-\lambda&-4\\-4&-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=\left(5-\lambda\right)\left[\lambda^2+\left(3-x\right)\lambda-3x-8\right] \qquad (1)$$

由题知：$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$，$\lambda_3=y$；代入（1）式得：

$$\begin{cases}9\left[16-4\left(3-x\right)-3x-8\right]=0\\\left(5-y\right)\left[y^2+\left(3-x\right)y-3x-8\right]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}.$$

方法二：$\because A$ 与 Λ 相似，$\therefore A$ 与 Λ 特征值相同，$\because \Lambda$ 的特征值为 5，y，-4，

$$\therefore \left|5E-A\right|=\begin{vmatrix}4&2&4\\2&5-x&2\\4&2&4\end{vmatrix}=0,$$

$$\left|-4E-A\right|=\begin{vmatrix}-5&2&4\\2&-4-x&2\\4&2&-5\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{\underset{r_2+2r_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}-5&2&4\\0&4-x&0\\-1&4&-1\end{vmatrix}=9\left(4-x\right)=0$$

$\therefore x=4$；又 $tr\left(A\right)=1+4+1=5+y-4$，$\therefore y=5$.

10．设 $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$，求 A^{101}.

解： A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}-\lambda & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，全不相等，故可相似对角化；

当 $\lambda_1=0$ 时，$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_3}\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$；

当$\lambda_3=-1$时，$A+E=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

故对应于$\lambda_3=-1$的特征向量为$\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$；

$$\therefore A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}$$，其中$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$，

$$A^{101}=P\Lambda P^{-1}\cdot P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{101}P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

11. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$，其行列式$|A|=-1$，又$A$的伴随矩阵$A^*$有一个特征值$\lambda$，属于$\lambda$的特征向量为$\alpha=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$，求$a,b,c$和$\lambda$的值.

解：$A^*=|A|\cdot A^{-1}$，$|A^*|=|A|^{n-1}=(-1)^{n-1}\neq 0$，故$A^*$可逆，则$\lambda\neq 0$，$A^*\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow$

$AA^*\alpha=\lambda A\alpha\Rightarrow|A|E\alpha=\lambda A\alpha\Rightarrow-\alpha=\lambda A\alpha\Rightarrow A\alpha=-\frac{1}{\lambda}\alpha$，则

$$\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{\lambda}\\ -\frac{1}{\lambda}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+c=\frac{1}{\lambda}-1\\ -b=\frac{1}{\lambda}+2\\ c-a=-\frac{1}{\lambda}+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c\\ b=-3\\ c=c\\ \lambda=1\end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & -1 & c \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-c & 0 & -c \end{vmatrix} \overset{r_2-3r_1}{=\!=} \begin{vmatrix} c & -1 & c \\ -3c+5 & 0 & -3c+3 \\ 1-c & 0 & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3c+5 & -3c+3 \\ 1-c & -c \end{vmatrix}$$

$$= c-3=-1 \Rightarrow c=2$$

$\therefore \lambda=1, a=2, b=-3, c=2$.

12．试用一个正交相似变换矩阵，将下列实对称矩阵化为对角阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$；　（5）$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解：（1）A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-1-\lambda)(9-\lambda)=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$；

当 $\lambda_1=-1$ 时，$A+E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=0$ 时，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_2=0$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=9$ 时，$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&\frac{3}{2}\\-8&2&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&\frac{3}{2}\\0&-30&15\\0&5&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-4&\frac{3}{2}\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故对应于 $\lambda_3=9$ 的特征向量为 $\xi_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

故正交阵 $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

（2）A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&3&0\\3&-2-\lambda&-1\\0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-4-\lambda)(3-\lambda)=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=-4$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$；

当 $\lambda_1=-4$ 时，$A+4E=\begin{pmatrix}5&3&0\\3&2&-1\\0&-1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&3&0\\0&\frac{1}{5}&-1\\0&-1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&3&0\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=-4$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&-3&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\xi_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=3$ 时，$A-3E=\begin{pmatrix}-2&3&0\\3&-5&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-4&\frac{3}{2}\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故对应于 $\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$；

故正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{-3}{\sqrt{35}}&\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{-3}{\sqrt{14}}\\\frac{5}{\sqrt{35}}&0&\frac{-2}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{35}}&\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$.

（3） A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)^2(5-\lambda)=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$；

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，$A+E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，正交化为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，

$$\eta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

标准化可得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=5$ 时，$A-5E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，标准化为 $p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

故正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

（4）A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$；

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，正交化为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，

$$\eta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},$$

标准化可得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=10$ 时，$A-10E=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-9&-9\\2&-5&-4\\0&-9&-9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_3=10$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$，标准化为 $p_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$；

故正交阵 $P=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

（5）A 的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(1-\lambda)(\lambda-4)=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$；

当 $\lambda_1=-2$ 时，$A+2E=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&4&-4\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-3&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$；

当$\lambda_2 = 1$时，$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于$\lambda_2 = 1$的特征向量为$\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，标准化为$\eta_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

当$\lambda_3 = 4$时，$A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于$\lambda_3 = 4$的特征向量为$\xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，标准化为$\eta_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

故正交阵$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

13．设 3 阶方阵A的特征值为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量依次为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求A.

解：记$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$，$\Lambda = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$，则$P^{-1}AP = \Lambda$，所以

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\because \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

14．设 3 阶实对称阵 A 的特征值为 1，1，-1，且对应于特征值 1 的特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},$$

求 A.

解：方法一：$P^{-1}AP=\Lambda$， $p_3=p_1\times p_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&1\\2&2&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，

$$P=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}，\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&2\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&2\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

方法二：$T^{-1}AT=\Lambda$，T 为正交阵

$$\eta_1=p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}，\ t_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\eta_2=p_2-\frac{(p_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}，\ t_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\eta_3=\eta_1\times(3\eta_2)=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&1\\2&2&1\end{vmatrix}=3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}，\ t_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & t_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$

$$A=T\Lambda T^{-1}=T\Lambda T'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

15．设 3 阶实对称阵 A 的特征值为 6，3，3，且对应于特征值 6 的特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

求 A.

解：由定理知 p_2,p_3 与 p_1 正交，设 $p_2,p_3\subset p=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^T$，则 $x+y+z=0$，

解得基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以可取 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

16．已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x,Ax,A^2x 线性无关，且满足 $A^3x=3Ax-2A^2x$

（1）记 $P=\left(x,Ax,A^2x\right)$，求 3 阶矩阵 B，使 $A=PBP^{-1}$；

（2）计算行列式 $\left|A+E\right|$.

解：（1）x,Ax,A^2x 线性无关，则 $P=\left(x,Ax,A^2x\right)$ 可逆，$AP=PB$

$$AP=A\begin{pmatrix}x & Ax & A^2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax & A^2x & A^3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax & A^2x & 3Ax-2A^2x\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x & Ax & A^2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=PB,\ \therefore B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

（2）$A=PBP^{-1}$，则 A 与 B 相似，B 的特征多项式为

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+3)(\lambda-1)=0$$

故 A 与 B 有相同特征值为 $\lambda=0,-3,1$，则 $A+E$ 的特征值为 $\lambda=1,-2,2$，

$\therefore |A+E|=-4$.

17. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 3，向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的解.

（1）求 A 的特征值与特征向量；

（2）求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

解：（1）A 的各行元素之和为 3，则 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\alpha_1=0\cdot\alpha_1$，$A\alpha_2=0\cdot\alpha_2$，故 A 的全部特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$，

对应于 $\lambda_1=3$ 的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ (k_1\neq 0)$，

对应于 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ (k_2,k_3\text{不全为}0)$；

（2）对 α_1,α_2 正交化：$\eta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}-\dfrac{-3}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

再单位化得：$q_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$q_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$q_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$$\therefore Q=\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}，\ Q^T AQ=\Lambda=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

18．某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将$1/6$熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐。新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$2/5$成为熟练工。设第 n 年一月份统计的熟练工与非熟练工所占百分比分别为x_n和y_n，记成向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

（1）求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ；

（2）验证$\eta_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是$A$的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（3）当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$时，求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

解：（1）由题设得$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(y_n+\frac{1}{6}x_n\right)=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1}=\frac{2}{3}\left(y_n+\frac{1}{6}x_n\right)=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n \end{cases}$，即$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$；

（2）A的特征多项式为：

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} \frac{9}{10}-\lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5}-\lambda \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(2\lambda-1)(\lambda-1)=0$$

故A的特征值为：$\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=1$；

当$\lambda_1=\frac{1}{2}$时，$A-\frac{1}{2}E=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于$\lambda_1=\frac{1}{2}$的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\eta_2$；

当 $\lambda_2=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\eta_1$；

$\therefore \eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，对应的特征值为 $1,\frac{1}{2}$；

（3）$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

记 $P=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}$，则

$$A^n=P\Lambda P^{-1}\cdot P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^nP^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.$$

第六章　二次型

1．填空题

（1）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1{}^2$，则 $a=$___2___.

解：$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，$A\sim\Lambda$，故存在正交阵 P，使 $P^TAP=\Lambda$，A 的特征值为 6，0，0.

方法一：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & a-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & a-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+3a\lambda^2+\left(12-3a^2\right)\lambda+a^3-12a+16$

$=\left(6-\lambda\right)\lambda^2=-\lambda^3+6\lambda^2$，由对应系数相等得：$\begin{cases} 3a=6 \\ 12-3a^2=0 \\ a^3-12a+16=0 \end{cases}\Rightarrow a=2$；

方法二：$tr\left(\Lambda\right)=tr\left(P^TAP\right)=tr\left(A\right)=3a=6\Rightarrow a=2$.

（2）实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 的秩为___2___.

解：$f=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_1+x_3\right)^2=2\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$，

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\therefore R\left(A\right)=2$，即二次型 f 的秩为 2.

注意：令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_1+x_3 \end{cases}$，$y=Cx=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}x$，由于 $\left|C\right|=0$，即 C 不可逆，则 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

（3）实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2-x_3{}^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 的矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

解：二次型的平方项系数→对角线，交叉项系数→除以 2 再放入相应位置.

（4）$5{x_1}^2+5{x_2}^2+3{x_3}^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3=1$ 表示的图形为<u>　　　圆柱面　　　</u>.

解：按二次型的标准形，可如下分类（设变量为 x,y,z）：

旋转椭球面：$x^2+y^2+z^2=1$　　　　　　旋转单叶双曲面：$x^2+y^2-z^2=1$

旋转双叶双曲面：$x^2-y^2-z^2=1$　　　　　圆柱面：缺少 x 或 y 或 z，比如 $x^2\pm y^2=1$

设 $f=5{x_1}^2+5{x_2}^2+3{x_3}^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，则 f 对应的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$$

则存在正交阵 P，使 $P^TAP=\Lambda=diag\ (0,4,9)$，$f=x^TAx=y^T\Lambda y=4y_2^2+9y_3^2=1$，$f$ 的标准形缺少变量 y_1，故表示的图形为圆柱面.

（5）设 A 是实对称阵，若 $A+tE$ 为正定阵，则 t 的取值范围为<u>　大于 A 的最大特征值　</u>.

解：A 是实对称阵，则存在正交阵 P，使 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，不妨设 $\lambda_{\min}=\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n=\lambda_{\max}$，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，

$$A+tE=P\Lambda P^{-1}+PtEP^{-1}=P(\Lambda+tE)P^{-1}=P\cdot diag(\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t)\cdot P^{-1}$$

则 $A+tE$ 的特征值为 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$，$A+tE$ 正定 $\Leftrightarrow\lambda_1+t>0,\cdots,\lambda_n+t>0$

$\Leftrightarrow t>-\lambda_1,t>-\lambda_2,\cdots,t>-\lambda_n\Leftrightarrow t>\max(-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n)=-\min(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=-\lambda_{\min}$

，即 $t>-\lambda_{\min}$.

2．选择题

（1）设 A,B 为同阶可逆方阵，则（　D　）.

（A）$AB=BA$　　　　　　　　　　（B）存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

（C）存在可逆阵 C，使 $C^TAC=B$　　　（D）存在可逆阵 P,Q，使 $PAQ=B$

解：（A）$AB=BA$，即 A,B 乘积可交换，一般不对；

（B）$A\cong B$（相似），则 A,B 特征值相同，取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，特征值不同；

（C）$A \simeq B$（合同），则 A,B 的惯性指数相同，取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$A,B$ 惯性指数不同；

（D）$A \simeq B$（等价），$A \simeq E \simeq B \Rightarrow A \simeq B$，故（D）正确.

（2） 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B （ A ）.

（A）合同且相似 （B）合同但不相似 （C）不合同但相似 （D）不合同且不相似

解：$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-\lambda)^3=0\Rightarrow\lambda=0,0,0,4$

又 A 是实对称阵，则存在正交阵 P，使 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=diag(4,0,0,0)=B$，即 A 合同且相似于 B，选（A）.

（3）设 n 阶方阵 A 能正交相似对角化，则矩阵 A（ C ）.

（A）一定有 n 个不同特征值 （B）A 为正交阵 （C）A 为对称阵 （D）A 为正定阵

解：n 阶方阵 A 能正交相似对角化，则存在正交阵 P，使 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$，$A=P\Lambda P^T$，

$A^T=\left(P\Lambda P^T\right)^T=P\Lambda P^T=A$，即 A 为对称阵，选（C）.

（A）反例：$P^{-1}AP=diag(1,1,1)$，则 A 的特征值为 $1,1,1$；

（B）A 为正交阵，则 $|A|=\pm1$，取 $P^{-1}AP=\Lambda=diag(1,0,0)$，则 $|A|=|\Lambda|=0$；

（D）A 为正定阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全为正，$P^{-1}AP=diag(1,0,0)$，则 A 的特征值为 $1,0,0$.

（4） 已知 A 是 3 阶实对称矩阵，如果 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 表示的图形为旋转双叶双曲面，则 A 的正的特征值个数为 (B).

（A）0 （B）1 （C）2（D）3

解：$(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 表示的图形为旋转双叶双曲面，则 $f=x_1^2-y_1^2-z_1^2=1$，故

$A \simeq \Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \simeq \Lambda_1=diag(1,-1,-1)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 A 的特征值，由 Λ,Λ_1 的惯性指数相同，则 A 的正特征值个数为 1，选（B）.

（5） $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B （ B ）.

（A）合同且相似（B）合同但不相似 （C）不合同但相似（D）不合同且不相似

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(3-\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda=0,3,3$

则存在正交阵 P，使 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=diag(3,3,0)$，即 $A\sim\Lambda$；

取 $C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，则 $C^T\Lambda C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}=B$，即 $\Lambda\simeq B \Rightarrow A\sim\Lambda\simeq B \Rightarrow A\simeq B$，即 A 与 B 合同，A 的特征值为 3，3，0，B 的特征值为 1，1，0，故 A 与 B 不可能相似；

综上：A 与 B 合同但不相似，选（B）.

3．用矩阵记号表示下列二次型：

（1） $f=2x^2+4xy+2y^2-2yz-3z^2-4xz;$

（2） $f=x_1x_2-x_2^2-x_1x_4+3x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2.$

解：（1） $f=(x,y,z)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$；

（2） $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

4．求一个正交变换化下列二次型成标准形：

（1） $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3;$

（2） $f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$

解：（1） $f=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

A 的特征多项式为：

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=\left(2-\lambda\right)^2\left(4-\lambda\right)=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$；

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，已正交，标准化为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

$p_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=4$ 时，$A-4E=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_3=4$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，标准化 $p_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$；

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}，\ x=py，使 f=2{y_1}^2+2{y_2}^2+4{y_3}^2.$$

（2） $f=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

A 的特征多项式为：

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)^3\left(-3-\lambda\right)=0$$

故 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$\lambda_4=-3$；

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} □ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

正交化为 $\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\xi_2-\frac{\left(\xi_2,\eta_1\right)}{\left(\eta_1,\eta_1\right)}\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$$\eta_3=\xi_3-\frac{\left(\xi_3,\eta_1\right)}{\left(\eta_1,\eta_1\right)}\eta_1-\frac{\left(\xi_3,\eta_2\right)}{\left(\eta_2,\eta_2\right)}\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

标准化可得 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$， $p_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ $p_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_4 = -3$ 时， $A+3E = \begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_4 = -3$ 的特征向量为 $\xi_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，标准化 $p_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

$$x = Py = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{12}}{12} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{12}}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{12}}{12} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{12}}{12} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} y \text{，使 } f = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 - 3{y_4}^2 .$$

5．用 Lagrange 配方法化不列二次型为标准形：

（1） $f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz$；

（2） $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

解：（1） $f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz = \left(x - y - 2z\right)^2 - 11z^2 - 8yz$

$$= \left(x - y - 2z\right)^2 - 11\left(z + \frac{4}{11}y\right)^2 + \frac{16}{11}y^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x - y - 2z \\ y_2 = y \\ y_3 = z + \frac{4}{11}y \end{cases}$，得 $f = 2{y_1}^2 + \frac{16}{11}{y_2}^2 - 11{y_3}^2$，其中线性变换 $C = \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{11} & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{4}{11} & 1\end{pmatrix}$.

（2）令$\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2 \\ x_2 = u_1 - u_2 \\ x_3 = u_3 \\ x_4 = u_4 \end{cases}$，

得 $f = u_1^2 - u_2^2 + 2u_1u_3 + 2u_1u_4 + u_3u_4 = \left(u_1 + u_3 + u_4\right)^2 - u_2^2 - \left(u_3 - \dfrac{1}{2}u_4\right)^2 - \dfrac{3}{4}u_4^2$

令$\begin{cases} y_1 = u_1 + u_3 + u_4 \\ y_2 = u_2 \\ y_3 = u_3 - \dfrac{1}{2}u_4 \\ y_4 = u_4 \end{cases}$，

得 $f = {y_1}^2 - {y_2}^2 - {y_3}^2 - \dfrac{3}{4}{y_4}^2$，

其中线性变换$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -\dfrac{3}{2} \\ 1 & -1 & -1 & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6．用初等变换法化二次型为标准形：

（1） $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$；

（2） $f = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 3xz + 9z^2$.

解：（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{c_2 - c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{c_3-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\\0&1&-1&1\\1&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{c_4-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&0\\1&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{c_4-c_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&-1&1\\0&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix},\ f=y_1{}^2+y_2{}^2-y_3{}^2+y_4{}^2;$$

（2）$$\begin{pmatrix}2&-1&-\frac{3}{2}\\-1&3&0\\-\frac{3}{2}&0&9\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_1]{c_2+\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}2&0&-\frac{3}{2}\\0&\frac{5}{2}&0\\-\frac{3}{2}&-\frac{3}{4}&9\\1&\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+\frac{3}{4}r_1]{c_3+\frac{3}{4}c_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{5}{2}&-\frac{3}{4}\\0&-\frac{3}{4}&\frac{63}{8}\\1&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+\frac{3}{10}r_2]{c_3+\frac{3}{10}c_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{5}{2}&0\\0&0&\frac{153}{20}\\1&\frac{1}{2}&\frac{9}{10}\\0&1&\frac{3}{10}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{9}{10}\\0&1&\frac{3}{10}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\ f=2y_1{}^2+\frac{5}{2}y_2{}^2+\frac{153}{20}y_3{}^2.$$

7．证明：二次型 $f=x^TAx$ 在 $\|x\|=1$ 时的最大值为方阵 A 的最大特征值.

证明：A 是实对称矩阵，则存在正交阵 P，使得 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\triangleq\Lambda$，其中

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，不妨设 λ_1 最大，由 P 为正交阵，则 $P^{-1}=P^T$，且 $|P|=1$，所以

$A=P^{-1}\Lambda P=P^T\Lambda P$，则 $f=x^TAx=x^TP^T\Lambda Px=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，这里

$y = Px$.

当$\|y\| = \|Px\| = |P|\|x\| = \|x\| = 1$，即$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$时，

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \le \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2 = \lambda_1 \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \right) = \lambda_1$$

故得证：$\max\limits_{\|x\|=1} f = \max\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right\}$.

8．如果A是正定矩阵，则A^{-1}也是正定矩阵.

证明：A正定$\Leftrightarrow$ A的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$全为正；

$\dfrac{1}{\lambda_1} > 0, \dfrac{1}{\lambda_2} > 0, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n} > 0$为$A^{-1}$的全部特征值$\Leftrightarrow$ A^{-1}正定.

9．如果A, B都是正定矩阵，则$A+B$也是正定矩阵.

证明：A、B是正定阵$\Leftrightarrow \forall$非零向量a，$a^T Aa > 0$，$a^T Ba > 0$；

$\because \forall$非零向量a，$a^T \left(A+B\right) a = a^T Aa + a^T Ba > 0$，$\therefore A+B$也是正定矩阵.

10．t 取什么值时，下列二次型是正定的？

（1）$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$；

（2）$f = 2x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$.

解：（1）二次型f对应的实对称矩阵：$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，则$A$的各阶顺序主子式：

$a_{11} = 1 > 0$；$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2 > 0$；$|A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4\left(1-t^2\right) - \left(2+t\right)^2 > 0$；

综上解得：$-\dfrac{4}{5} < t < 0$.

（2）二次型f对应的实对称矩阵：$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$A$的各阶顺序主子式：

$a_{11}=2>0$；$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 8 \end{vmatrix}=16-t^2>0$；$|A|=\begin{vmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=8-t^2>0$；

综上解得：$-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}$.

11．证明：A 为正定矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 P，使 $A=P^TP$。

证明：必要性：$\because A$ 为正定阵，$\therefore A$ 正交相似于对角阵，即存在正交阵 T 和对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$st.\ T^TAT=\Lambda$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值且全为正，则

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

即有 $A=T\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}T^T$，

取 $U^T=T\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$，即有 $A=U^TU$；

充分性：$\because A=U^TU$，U 可逆，$\therefore \forall$ 非零向量 x，$Ux\neq\vec{0}$（反证：若 $Ux=\vec{0}$，则左乘 U^{-1} 得 $x=\vec{0}$，矛盾），$x^TAx=x^TU^TUx=(Ux)^T(Ux)=|Ux|^2>0$，$\therefore A$ 为正定阵.

12．已知二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$，可以经过正交变换 $(x,y,z)^T=P(\xi,\eta,\zeta)^T$ 化为圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$，求 a,b 的值和正交矩阵 P。

解：设二次型 $f=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$，对应的实对称矩阵：$A=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

由于 f 经正交变换后转为 $f=\eta^2+4\zeta^2$，

①方法一：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$ 为 A 的特征值，即

$$|A-E|=\begin{vmatrix}0 & b & 1\\ b & a-1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2b-a+1=0，且|A-4E|=\begin{vmatrix}-3 & b & 1\\ b & a-4 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=2b-a+1=0，$$

解得：$a=3,b=1$；

方法二：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$ 为 A 的特征值，故 $tr(A)=1+a+1=0+1+4=5$，且

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-(1-b)^2=0，解得：a=3,b=1；$$

②易知 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$ 为 A 的特征值，

当 $\lambda_1=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=4$ 时，$A-4E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_3=4$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$；

故 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

13．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1{}^2+(1-a)x_2{}^2+2x_3{}^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换 $x=Py$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（3）求方程 $f(x_1,x_2,x_3)$=0 的解。

解：（1）易知二次型 f 对应的实对称矩阵：$A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，由于 $R(A)=2$，故

$\frac{1-a}{1+a}=\frac{1+a}{1-a}\Rightarrow(1-a)^2=(1+a)^2\Rightarrow a=0$；

（2）由 $a=0$ 得：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2=0$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$；

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时， $A-2E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\square\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=0$ 时， $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\square\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$；

故$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；

（3）$f(x_1,x_2,x_3)=0$，则 $f\left(y_1,y_2,y_3\right)=2y_1^2+2y_2^2=0$，即 $y_1=y_2=0$，又因 $y=P^{-1}x$，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=Py=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}，即\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (k\in R).$$

14．设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1{}^2+2x_2{}^2-2x_3{}^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为 1，特征值之积为$-12$.

（1）求a,b的值；

（2）求正交变换$x=Py$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形。

解：（1）二次型 f 对应的实对称矩阵：$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，故$A$的特征多项式为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & b \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ b & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[(\lambda-a)(\lambda+2)-b^2\right]$$

易知A的特征值为：$\lambda_1=2,\lambda_2,\lambda_3$；

由题意：$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=-12 \\ \lambda_1=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lambda_2=-3 \\ \lambda_3=2 \end{cases}$；

方法一：$\begin{cases} (-3-a)(-3+2)-b^2=0 \\ (2-a)(2+2)-b^2=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$；

方法二：$tr\left(A\right)=a+2-2=1\Rightarrow a=1$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=-4-b^2=-12\Rightarrow b=2\left(b>0\right);$$

（2）当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时， $A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\2&0&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-3$ 时， $A+3E=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对应于 $\lambda_3=-3$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$，标准化为 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$；

故正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{5}}&0&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$， $x=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{5}}&0&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}y$.

附录：习题参考答案

习题 1

1.（1）5　（2）7　（3）1440，0　（4）$\left(-1\right)^{n}a$,

（5）$f(x)=0$的根为 1，2，-2　（6）0　（7）1 或 2　（8）0

（9）2　（10）-$abcd$　（11）1　（12）-16，-4，-4　（13）$\dfrac{a}{b}$

（14）-1，$\dfrac{1}{a_{11}}$　（15）$\begin{vmatrix}2 & 3\\ x & 1\end{vmatrix}$，$\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$　（16）0

（17）0　（18）6（19）$\left(-1\right)^{mn}ab$（20）$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$

2.（1）（B）　（2）（D）　（3）（A）　（4）（C）　（5）（D）

3.（1）1　（2）0　（3）48　（4）555　（5）837　（6）（1+$a+b+c+d$）

（7）4$adfbce$　（8）$\left(a+b+c+d\right)\left(d-a\right)\left(d-b\right)\left(d-c\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)\left(b-a\right)$

4.（1）$(x-a)^{n-1}(x+(n-1)a)$　（2）（$n-1$）（-1）$^{n+1}2^{n-2}$

（3）$\left(-2\right)\left(n-2\right)!$　（4）$\prod_{i=1}^{n}\left(a_id_i-b_ic_i\right)$

（5）$a^n+ba^{n-1}+b^2a^{n-2}\cdots+b^n$

习题 2

1.（1）$a=0,b=-3$　（2）$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$　（3）$\left|AB\right|=$-16　（4）6

（5）0　（6）$-\dfrac{1}{2}$　（7）$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$（8）3　（9）-3

（10）0　（11）n　（12）$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$　（13）$\sqrt[n]{2}$

（14）4，$\frac{1}{2}$，2^{n-1}，$2^{(n-1)^2}$，$2\left(\frac{3}{2}\right)^n$，$\frac{3^n}{2}$　（15）$(-1)^n 3$

（16）$\frac{1}{10}A$　（17）$|A|^{n-2}$（18）-1　（19）$k_1k_2k_3 \neq 0, k_1, k_2, k_3$ 互不相等

（20）$\lambda = 11$ 或 $\lambda = 2$

2．（1）（B）　（2）（B）　（3）（D）　（4）（D）　（5）（C）

（6）（D）　（7）（D）　（8）（C）　（9）（A）　（10）（B）

3．（1）$A = (a_{ij})_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　（2）$A = (a_{ij})_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$

4．$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$，$3AB - 2A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 16 & 5 \\ -2 & -11 & 20 \\ 5 & 29 & 7 \end{pmatrix}$

5．（1）$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 10 & -7 & 1 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$（3）4　（4）$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

（5）$\begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + (-2)x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

（6）$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3$

6．$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda k & 0 \end{pmatrix}$

7．$\lambda^{k-2}\begin{pmatrix} \lambda^2 & k\lambda & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & \lambda^2 & k\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

8．$\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 0 & 2^k & 0 \\ 0 & k2^{k-1} & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

9．（1）2　（2）3　（3）2　（4）3

10.（1）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{16}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　R（A）=3

（2）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　R（A）=3

11.（1）$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

（3）$\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$　（4）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

（5）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$　（6）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12.（1）$\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{7}{6} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ （4）$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

13.（1）$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = -1$

（2）$x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 1$

14.（1）-1 或 3 或 4 （2）-2 或 1

15．要使（1）$AB = BA$ ，（2）$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$，

（3）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 应有 $AB = BA$

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

16.（1）$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = 0$, 则$A \neq 0$

（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = A$, 则$A \neq 0$ 或$A \neq E$

（3）$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$AX = AY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$， $X \neq Y$

（4）$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（5）$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

17.（1）可以举出例子说明∣AB∣=∣BA∣，也可以举出例子说明

∣AB∣ ≠ ∣BA∣

（2）可以举出例子说明 $R(A)+R(B)=R(A+B)$，也可以举出例子说明 $R(A)+R(B)\neq R(A+B)$

（3）A B 的秩为 2，B 的秩为 3，B 是一系列初等方阵的积，A B 就相当于给 A 实施一系列初等变换，而初等变换不改变矩阵的秩。

（4）$A^k\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解，$A\vec{x}=\vec{0}$ 的非零解就是 $A^k\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解。

23．证明：由方阵 A 和 它的伴随方阵 A^* 的关系 $AA^*=A^*A=|A|E$，方阵的行列式运算性质 $|AB|=|A||B|$，$|\lambda A|=\lambda^n|A|$，则 $|A||A^*|=|A^*||A|=||A|E|=|A|^n|E|=|A|^n$，当 $|A|\neq 0$ 时，$|A^*|=|A|^{n-1}$；当 $|A|=0$ 时，$AA^*=A^*A=|A|E=0$，如 $|A^*|\neq 0$，则 A^* 可逆，$(AA^*)(A^*)^{-1}=0E(A^*)^{-1}=0$，$A=0$，$A$ 的所有的代数余子式 $A_{ij}=0$，而 $|A^*|\neq 0$，矛盾。故 $|A^*|=0$，有 $|A^*|=|A|^{n-1}$。

24．提示 $E=E^k=E^k-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\ldots+A^{k-1})$

26．证明：由已知有 $A^2-A-2E=0$，$A^2-A=2E$，

$A(A-E)=2E$，$|A(A-E)|=|2E|\neq 0$，

$|A|\neq 0$，A 可逆。又由已知有 $A^2-A-2E=0$，$A^2=A+2E$，

$|A^2|=|A+2E|$，$|A+2E|\neq 0$，A+2E 可逆

习题 3

1．(1) 2；(2) $abc\neq 0$；(3) -3；(4) 无关；(5) 2；(6) -1；(7) $k\neq 1, k\neq -2$；(8) $(1,1,-1)^T$.

2．(1) A；(2) C；(3) D；(4) A；(5) C;(6) C；(7) B；(8) B；(9) C；(10)A.

3．$\alpha-\beta=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-5\\3\end{pmatrix}, 5\alpha+4\beta=\begin{pmatrix}17\\8\\11\\6\end{pmatrix}, (\alpha,\beta)=-3, \ \|\alpha\|=\sqrt{6}, \ \|\beta\|=\sqrt{30}$.

4．$\alpha=(1,2,3,4)^T$.

5．(1) 向量组 1 线性无关；(2) 向量组 2 线性相关；(3) 向量组 3 线性无关；
(4) 向量组 4 线性相关；(5) 向量组 5 线性相关.

6．(1) 向量组 1 的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一个极大无关组；

(2) 向量组 2 的秩为 2，α_1,α_2为一个极大无关组.

7．(1) 当$a=-4$时，α_1,α_2线性相关；当$a\neq-4$时，α_1,α_2线性无关；

(2) 当$a=-4$或$a=3/2$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

当$a\neq-4$且$a\neq3/2$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

8．$a=2,b=5$.

9．当$lm\neq1$时，向量组$l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$线性无关.

10．① 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$一定线性无关；

② 当$k\neq0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关；

当$k=0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关.

11．$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$不是正交阵，$\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}$是正交阵.

12．(1) 向量组 1 正交化的结果：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$；

(2) 向量组 2 正交化的结果：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$.

13-27 题证略.

习题 4

1．(1) $\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$；(2) $a_1+a_2+a_3+a_4=0$；(3) $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$；(4) -2；

(5) $a\neq2,\ \forall b\in R$；(6) $(1,1,\cdots,1)^T$；(7) $x=\alpha_1+k(\alpha_1-\alpha_2)$ 或者

$x=\alpha_2+k(\alpha_1-\alpha_2),k\in R$；(8) $R(A)=R(A\vdots\beta)=n$；(9) $\geq$；(10) $R(A)=R(B)=2$.

2．(1) A；(2) D；(3) A；(4) B；(5) A；(6) C；(7) C；(8) B；(9) D

3．(1) $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $k_1,k_2\in R$；(2) 无解

(3) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$；(4) $x=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\-7\\5\\6\end{pmatrix}$, $k\in R$；(5) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\-9\\4\\3\end{pmatrix},k\in R$

(6) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$；(7) 无解

(8) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$；(9) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},k\in R$

(10) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-5\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\5\\7\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-9\\0\\7\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$.

4．(1) 当$a\neq1$且$b\neq0$时，有唯一解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-2b}{b(1-a)}\\1/b\\\dfrac{4b-2ab-1}{b(1-a)}\end{pmatrix}$；

当$a=1$且$b\neq1/2$时，无解；

当$b=0$时，无解；

当$a=1$且$b=1/2$时，有无穷多解，通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},k\in R$.

(2) 当$\lambda=1$时，有无穷多解，通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$；

当$\lambda=-2$时，有无穷多解，通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$；

当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，无解.

(3) 当$\lambda=5$时，有无穷多解，一般解为：$x=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\3\\5\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-6\\-7\\0\\5\end{pmatrix}$，$k_1,k_2\in R$

(4) 当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq10$时，有唯一解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda-10}\begin{pmatrix}-3\lambda\\-6\\\lambda-4\end{pmatrix}$；

当$\lambda=10$时，无解；

当$\lambda=1$时，有无穷多解，通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$.

(5) 当$a=0,b=2$时有无穷多解，一般解为：

$$x=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\in R.$$

(6) 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq\pm1$时，有唯一解；

当$\lambda=0$或者$\lambda=1$时，无解；

当$\lambda=-1$时，有无穷多解，通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3/5\\-3/5\\1\end{pmatrix},k\in R$.

5．(1) 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq-3$时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出,且表示方式唯一；

(2) 当$\lambda=0$时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出,但表示方式不唯一；

(3) 当$\lambda=-3$时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

6．$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$

7．$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2,k_1,k_2\in R,$

其中$\xi_1=\eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\xi_2=\eta_2-\eta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},\eta^*=\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix}$.

8．$t=-3$.

9．$a=1$或$b=0,R(B)=1$.

10-18 题证略.

习题 5

1.（1）0;（2）n-1 个 0 和n;（3）0，1，1;（4）0;（5）$\frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{4}$;（6）-6;

（7）$-\frac{3}{5}$，1;（8）5;（9）B;（10）$a=-b$.

2.（1）C;（2）A;（3）B;（4）C;（5）D;（6）B;（7）B;（8）B;（9）B;（10）C.

3.（1）$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$

对应于 2 的全部特征向量为$k_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ (k_1\neq 0)$，对应于 1 的全部特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\ (k_2\neq 0)$

（2）$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$

对应于-1 的全部特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ (k_1\neq 0)$，对应于 2 的全部特征向量为

$$k_2\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\ (k_2,k_3\text{不全为}0)$$

（3）$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$

对应于 1 的全部特征向量为$k_1\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\ (k_1\neq 0)$，对应于 2 的全部特征向量为

$$k_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\ (k_2,k_3\text{不全为}0)$$

（4）$\lambda_1=7,\lambda_2=\lambda_3=1$

对应于 7 的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$，对应于 1 的全部特征向量为

$$k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ (k_2,k_3\text{不全为}0)$$

6．除第一个矩阵外，其余三个矩阵均能相似对角化

9． $x=4,y=5$

10． $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$

11． $\lambda=1,a=2,b=-3,c=2$

12．（1）正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ （2）正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{-3}{\sqrt{14}}&\frac{-3}{\sqrt{35}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{14}}&\frac{5}{\sqrt{35}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{35}}\end{pmatrix}$

（3）正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ （4）正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{-2}{3}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$

（5）正交阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

13． $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$

14．$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

15．$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$

16.（1）$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$；（2）-4

17.（1）$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$

对应于 3 的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ (k_1\neq 0)$，对应于 0 的全部特征向量为

$k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\ (k_2,k_3\text{不全为}0)$

（2）$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

18.（1）$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n\\y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases}$ ，$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$

（3）$\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$

习题 6

1．（1）2；（2）2；（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$；（4）圆柱面；（5）大于 A 的最大特征值.

2．（1）D；（2）A；（3）C；（4）B；（5）B.

3．（1）$f=(x,y,z)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

（2）$f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1/2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

4．（1）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $f=2{y_1}^2+2{y_2}^2+4{y_3}^2$

（2）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$， $f={y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2-3{y_4}^2$

5．（1）$f=2{y_1}^2+\frac{16}{11}{y_2}^2-11{y_3}^2$ (2) $f={y_1}^2-{y_2}^2-{y_3}^2-\frac{3}{4}{y_4}^2$

6．(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$,$f={y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2+{y_4}^2$

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $f=2{y_1}^2+\frac{5}{2}{y_2}^2+\frac{153}{20}{y_3}^2$

10．(1) $-\frac{4}{5}<t<0$ (2) $-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}$

12. $a=3,b=1,P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

13. (1) $a=0$ (2) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k \in R)$

14. (1) $a=1,b=2$ (2) $x=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}y$