第四章 矢量代数与空间解析几何

大纲要求

了解 两个向量垂直、平行的条件，曲面方程和空间曲线方程的概念，常用二次曲面的方程及其图形，空间曲线的参数方程和一般方程.空间曲线在坐标平面上的投影.

会 求平面与平面、平面与直线、 直线与直线之间的夹角，利用平面、直线的相互紊（平行、垂直、相交等）解决有关问题，点到直线以及点到平面的距离，求简单的柱面和旋转曲面的方程，求空间曲线在坐标平面上的投影方程.

理解 空间直角坐标系，向量的概念及其表示，单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，

掌握 向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），用坐标表达式进行向量运算的方法，平面方程和直线方程及其求法.

第一节 矢量代数

内容精要

（一） 基本概念

1.矢量的概念

定义 4.1 一个既有大小又有方向的量称为矢量，长度为 0 的矢量称为零矢量，用 0 表示，方向可任意确定。长度为 1 的矢量称为单位矢量。

定义 4.2 两个矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，若它们的方向一致，大小相等，则称这两个矢量相等，记作 $\vec{a}=\vec{b}$.换句话说一个矢量可按照我们的意愿把它平移到任何一个地方（因为既没有改变大小，也没有改

变方向），这种矢称为自由矢量，这样在解问题时将更加灵活与方便。

$\vec{a}=(a_1\vec{i}+a_{21}\vec{j}+a_3\vec{k}$ 称为按照 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的坐标分解式，$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 称为坐标式。

$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$.若 $\vec{a}\neq 0$, 记 $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。知 $\vec{a}^0$ 是单位矢量且与 $\vec{a}$ 的方向一致，且

$\vec{a}=|\vec{a}|\overline{a}^0$。因此，告诉我们求矢量 $\vec{a}$ 的一种方法，即只要求出 $\vec{a}$ 的大小 $|\vec{a}|$ 和与 $\vec{a}$ 方向一致的单位矢量 $\vec{a}^0$，则 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$.若 $\vec{a}=\{a_1,a_2a_3\}$，知

$$\vec{a}^0=\{\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}},\frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}},\frac{a_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}}\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

其中 $\alpha.\beta.\gamma$ 是 $\vec{a}$ 分别与 0x 轴，0y 轴，0z 轴正向的夹角，而

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^3}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}},\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}},$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

2.矢量间的运算

设$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\},\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}.$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,(0\le\theta\le\pi),\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{a}|\ne 0,|\vec{b}|\ne 0).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\qquad \cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}.$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$,知$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

$\vec{a}\times\vec{b}$ 的确定（1）$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，（2）$\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 所确定的平面($\vec{a}\ne\vec{b}$,若$\vec{a}\parallel\vec{b}$,知$|\vec{a}\times\vec{b}|=0$,即$\vec{a}\times\vec{b}=0$，方向可任意确定）垂直，且$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$构成右手系若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 用坐标式给出，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

由行列式的性质可知$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

$|\vec{a}\times\vec{b}|$的几何意义：$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积，即$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}|h=s.$

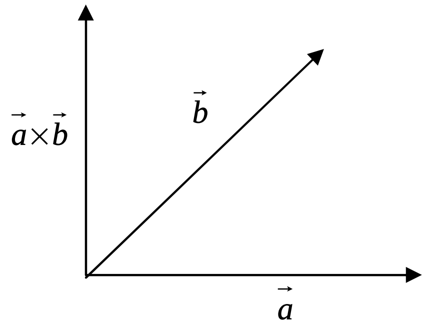


图 4-1

容易知道以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的三角形面积为

$$s=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

容易验证　　$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

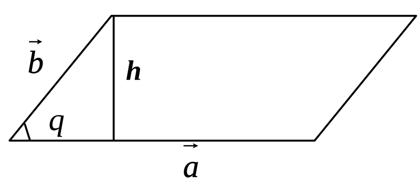


图 4-2

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$的性质可用行列式的性质来记，其余没有提到的性质与以前代数运算性质完全相同。

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$的几何意义　　$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为邻边的平行六面体的体积，即

$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=\big||\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta\big|$

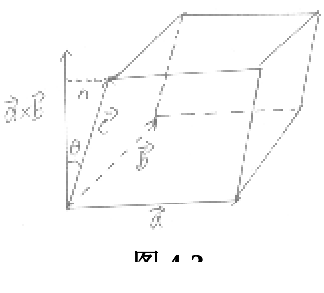


图 4-3

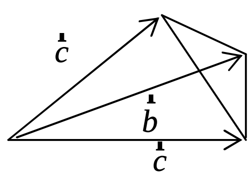


图 4-4

$=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot\left||\vec{c}|\cos\theta\right|=|\vec{a}\times\vec{b}|h=sh=v.$

容易知道以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为邻边的四面

体的体积为$V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|.$

$\vec{a}\times\vec{b}$的应用特别重要，既若直线 L 既垂直矢量$\vec{a}$，也垂直矢量$\vec{b}$且$\vec{a},\vec{b}$不平行，则 L 与$\vec{a},\vec{b}$确定的平面垂直，又$\vec{a}\times\vec{b}$也与$\vec{a},\vec{b}$确定的平面垂直，由两直线与同一平面垂面，则两直线平行.知 L 与$\vec{a}\times\vec{b}$平行，换句话说$\vec{a}\times\vec{b}$是直线 L 的方向向量，是$\vec{a},\vec{b}$确定平面的法矢量，这对于求直线方程与平面方程显得非常重要。

3.矢量间的关系

1.$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_2+a_2b_2+a_3b_3=0$.

2.$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$的分量对应成比例$\Leftrightarrow$若$\vec{b}\neq 0$，总存在唯一的常数 λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

以上是我们在实际中判断两矢量垂直与平行的常用方法，请记住.

3.$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow$若$\vec{b},\vec{c}$不共线总存在唯一的两个实数 m,n，使$\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$.

4.设三个矢量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，则对空间任一矢量$\vec{a}$，总存在唯一的三个常$l,m,n$,使

$$\vec{a}=l\vec{e}_1+m\vec{e}_2+n\vec{e}_3.$$

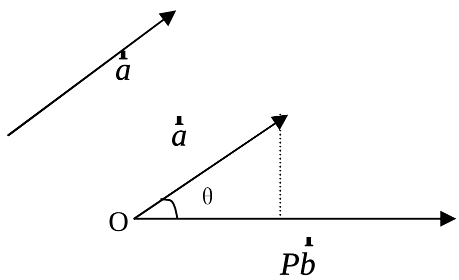


图 4-5

5.设$\vec{b}\neq 0$，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影指的是把$\vec{a}$的起点平移到$\vec{b}$的起点 O，过$\vec{a}$的终点作$\vec{b}$的垂线交$\vec{b}$上一点 P，OP 称为$\vec{a}$在$\vec{b}$的投影，记作$Prj_{\vec{b}}\vec{a}.$

$$Prj_{\vec{b}}\vec{a}=OP=|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}^0|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}^0=\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

即$Prj_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}^0=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$,而$\overrightarrow{OP}=(\vec{a}\cdot\vec{b}^0)\vec{b}^0.$

这个公式对我们在后面求点到直线上距离，点到平面距离，两异面直线公垂线的长都有帮助。

第二节 直线与平面

内容精要

（一） 定理与公式

- **直线与平面**
  - **直线方程**
    - **点向式（对称式）：** $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$
    - **参数式：** $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$
    - **两点式：** $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$
    - **一般式：** $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
  - **平面方程**
    - 点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
    - 一般式 $Ax+By+Cz+D=0$
    - 三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
    - 截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$（$a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$）
    - 平面束 $l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$
  - **两直线 L₁、L₂ 位置关系**
    - $\cos q=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},0\le q\le\dfrac{p}{2}$
    - 垂直 $\Leftrightarrow l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0$
    - 平行 $\Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$
  - **两平面 π₁、π₂ 位置关系**
    - $\cos q=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},0\le q\le\dfrac{p}{2}$
    - 垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
    - 平行 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
  - **直线 L 与平面 π 的位置关系**
    - $\sin q=\dfrac{|lA+mB+nC|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},0\le q\le\dfrac{p}{2}$
    - 垂直 $\Leftrightarrow \dfrac{l}{A}=\dfrac{m}{B}=\dfrac{n}{C}$
    - 平行 $\Leftrightarrow lA+mB+nC=0$

其中 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n},L_1=\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1},L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$

$p: Ax+By+Cz+D=0, p_1: A_1x+B_1y+c_1z+D_1=0, p_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

1．设　直线 L 方程为 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，其中 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线 L 上一点，$\vec{v}=\{l,m,n\}\neq 0$ 是 L 的方向向量，P_1（x_1,y_1,z_1）是直线 L 外一点，则 P_1 到 L 的距离为

$$d=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{v}|}.$$

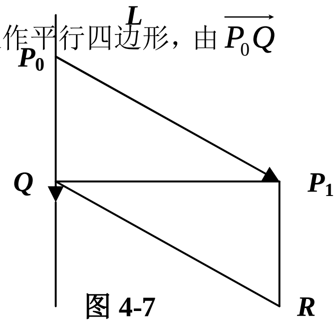


图 4-7

证　连接 P_0P_1，过 P_1 作 L 的垂线，垂足为 Q，以 $\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0Q}$ 分邻边作平行四边形，由 $\overrightarrow{P_0Q}$ 在直线 L 上，知 $\overrightarrow{P_0Q}\parallel\vec{v}$ 且 $\vec{v}\neq 0$，知 $\overrightarrow{P_0Q}=l\vec{v}$，于是

$$d=|P_1Q|=\frac{SP_1P_0QR}{|P_0Q|}=\frac{|l\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|l\vec{v}|}$$

$$=\frac{|l||\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|l||\vec{v}|}=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{v}|}$$

注：在证明过程中假设 P_0 不是 P_1 的垂足，若 P_0 是垂足，则 $d=|P_0P_1|$，实际上 $P_0=Q$ 时，上式依然成立。

2。设平面 π 的方程为 Ax+By+Cz+D=0，$\vec{n}=\{A,B,C\}\neq 0$ 是平面的法矢量，P_1（x_1,y_1,z_1）是平面 π 外一点，则 P_1 到平面 π 的距离为 $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

证　过 P_1 作平面的垂线，垂足为 Q，在平面 π 内选一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\neq Q$，连接 P_1P_0，得矢量 $\overrightarrow{P_1P_0}$，由 $P_1Q\perp p$，知 $\overrightarrow{P_1Q}\parallel\vec{n},\overrightarrow{P_1Q^0}=\pm\overrightarrow{n^0}$，于是

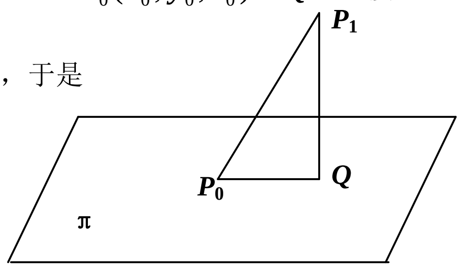


图 4-8

$$d=|P_1Q|=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{P_1Q^0}|=|\pm(\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n^0})|=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n^0}|$$

而 $\overrightarrow{P_1P_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$, 从而

$$d=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

又 P_0 点在平面 π 上，有 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\Leftrightarrow Ax_0+By_0+cz_0=-D$，故

$$d=\frac{|-D-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2=C^2}}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3．设有两异面直线 $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}, v_1 = l_1 i + m_1 j + n_1 k;$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}, v_2 = l_2 i + m_2 j + n_2 k;$$

则两直线之间的距离 $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})\right|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}$

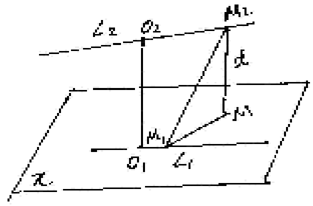


图 7-9

． 证 端点分别在两异面直线上的公垂线的长度称为两异面直线之间的距离（图 7-9）．过直线 L_1 作平面 π 平行于直线 L_2，在 L_2 上取一点 M_2，在 L_1 上取一点 M_1，从 M_2 引平面 π 的垂线 M_2M（M 为垂足），于是 $d = |\overrightarrow{M_2M}|$ 即为 L_1 与 L_2 的距离．设平面 π 的法矢量为 n，则 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 n 上的投影的绝对值即为所求的距离．即

$$d = |(\overrightarrow{M_2M})_n| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

而 $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$，所以 $d = \dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$.

4．设 L_1 与公垂线 O_1O_2 确定的平面为 π_1，由 π_1 经过点 M_1（x_1, y_1, z_1）设 π_1 的法矢量为 $\overrightarrow{n_1}$，由 O_1O_2 的方向向量为 $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$，而 $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{v_1}$, 知 $\overrightarrow{n_1} = (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \times \overrightarrow{v}_2$, 从而可用点法式写出平面
π_1 的方程。

设 L_2 与公垂线 O_1O_2 确定的平面为 π_2，由 π_2 经过点 M_2（x_1, y_1, z_1）设 π_2 的法矢量为 $\overrightarrow{n_2}$，同理可得 $\overrightarrow{n_2} = (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \times \overrightarrow{v_2}$，从而可用点法式写出平面 π_2 的方程，因此

公垂线 O_1O_2 的方程：$\begin{cases} \pi_1 \text{方程}, \\ \pi_2 \text{方程}. \end{cases}$

O_1O_2 与 L_1 的垂足 O_1：$\begin{cases} L_1 \text{方程}, \\ \pi_2 \text{方程}. \end{cases}$

O_1O_2 与 L_2 的垂足 O_2：$\begin{cases} L_2 \text{方程}, \\ \pi_1 \text{方程} \end{cases}$

5．直线方程的点向式与一般式的相互转化．

点向式 $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ 转化为一般式为 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m}, \\ \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$

一般式$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$转化为点向式有两种方法

（1） 消元法：例如 消去 x，得 y,z 的一次方程，解出$z=\frac{y-y_0}{m}$.消去 y，得 x，z 的一次方程。解得$z=\dfrac{x-x_0}{l}$，于是直线的点向式为$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-0}{1}$.

（2）由直线是两个平面的交线，知三元一次方程组有无数组解。

例如 令 z=0，解得 $x=x_0,y=y_0$,且直线既在 π_1内又在 π_2内，知直线既垂直于$\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$，又垂直于$\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$，所以直线的方向向量为$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$，从而直线可用点向式表示

若从直线的一般式求直线的方向向量$\vec{v}$，则$\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$.

6．判断两直线的位置关系

设$L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1},L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$.

（i）若$\overrightarrow{v_1}=\{l_1,m_1,n_1\}\parallel\overrightarrow{v_2}=\{l_2,m_2,n_2\}$,则$L_1,L_2$在同一平面内且平行

（ii）若$\overrightarrow{v_1}\nparallel\overrightarrow{v_2}$且$(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\l_2 & m_2 & n_2\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}=0$,则$L_1,L_2$共线.

（iii）若$(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\neq0$,则$L_1,L_2$为异面直线。

7．灵活地利用所给条件，用平面的一般式求平面方程

（i）若平面经过原点，则平面方程为 Ax+By+Cz=0，再给两个条件，即可求出平面方程

（ii）若平面平行 z 轴，则平面方程为 Ax+By+D=0，再给两个条件，即可求出平面方程

（iii）若平面经过 z 轴，则平面方程为 Ax+By=0，再给一个条件，即可求出平面方程

其它情况类似。

第三节　曲线与曲面

内容精要

（一）　定理与公式

曲线与曲面

- **曲面方程**
  - **一般式：** $F(x\cdot y\cdot z)=0$
  - **参数式：** $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$
- **曲线方程**
  - **参数式：** $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$
  - **一般式：** $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
- **特殊的曲面**
  - **柱面：** $F(x,y)=0,$ **准线为** $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$ **母线平行 z 轴**
  - **锥面：过空间一定点 Q 的动直线，沿曲线 P（不过原点 Q）移动所生成曲面**
  - **旋转曲面：** $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ **绕 z 轴旋转所得曲面** $F(\pm\sqrt{y^2+x^2},z)=0$
- **二次曲面**
  - **椭球面：** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **（图 1）**
  - **椭圆抛物面：** $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}$ **（图 2）**
  - **单叶双曲面：** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ **（图 3）**
  - **双叶双曲面：** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ **（图 4）**
  - **二次锥面：** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ **（图 5）**

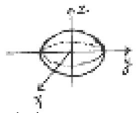


图 1

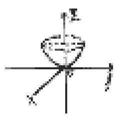


图 2

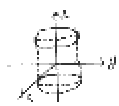


图 3

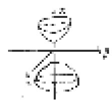
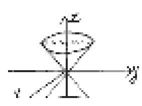
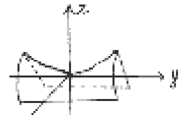


图 4





1．用定义求曲面Σ方程的方法

（1）设 M（x,y,z）是曲面Σ上任意一点，根据题意，列出点 M 所满足的条件，得到含有 x,y,z 的等式，化简得 F（x,y,z）=0，

（2）说明坐标满足方程 F(x,y,z)=0 的点一定在曲面Σ上，则曲面Σ的方程为 F(x,y,z) =0．一般来说，都是可逆的，故一般情况下，只需（1）就可以了，

2．曲线Γ：$\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转所成旋转曲面Σ的方程是 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$

证　设 M（x,y,z）是曲面Σ上任意一点，面 M 是曲线Γ上某点 M，（x_1,y_1,z_1,）绕 Oz 轴旋转过程中所取到，因此有 $\begin{cases}F(y_1,z_1)=0\\x_1=0\end{cases}$

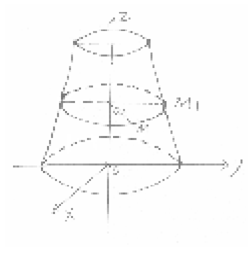


图 4-10

$z=z_1$，$x^2+y^2={x_1}^2+{y_1}^2={y_1}^2(|o_1M_1|=|o_1M|)$

$\Rightarrow\qquad y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2},z_1=z,$　故旋转曲面方程为

$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

这个结果可作为一个规律记住，即坐标平面上的曲线绕该坐标平面上某个坐标轴旋转所生成的曲面方程是：把平面曲线方程中绕相应轴的变量不变，另外一个变量化成正负根号下方程中另外一个变量与该平面垂直轴对应的变量的平方和即为所求的旋转曲面方程。

3．一般参数方程 $\Gamma:\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转所成旋转曲面Σ的方程是

$$x^2+y^2=\{f[h^{-1}(z)]\}^2+\{g[h^{-1}(z)]\}^2.$$

证　设 $M(x,y,z)$ 是曲面 上任意一点，而 M 是由曲线Γ上某点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$（对应的参数为 t_1）绕 Oz 轴旋转所得到。因此有 $x_1=f(t_1),y_1=g(t_1),z_1=$

$z=z_1,\ x^2+y^2={x_1}^2+{y_1}^2,\Rightarrow\ z=h(t_1)\Rightarrow t_1=h^{-1}(z),$

$x_1=f[h^{-1}(z)],y_1=g[h^{-1}(z)]$，故所求旋转曲面方程为

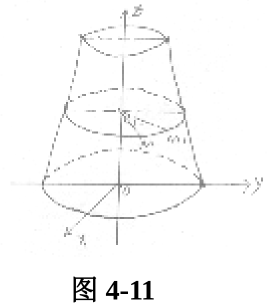


图 4-11

$x^2+y^2=\{f[h^{-1}(z)]\}^2+\{g[h^{-1}(z)]\}^2$.

特别地，若Γ绕 0z 轴旋转时，且Γ参数方程表示为$\begin{cases}x=f(z),\\y=g(z).\end{cases}$则

$x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z)$.

事实上，由前面的证明过程可知$x_1=f(z_1), y_1=g(z_1), z=z_1$， $x^2+y^2={x_1}^2+{y_1}^2$

$\Rightarrow x_1=f(z), y_1=g(z)$,   故$x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z)$.

这个结果可作为一个规律记住，一个用参数方程表示的曲线Γ绕某个坐标轴旋转所生成曲面的方程是：若把该曲线表示成该坐标轴对应的变量作为参数的参数方程，则旋转曲面的方程是由参数方程两个等式两边平方再相加得到等式。

4．求曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$在坐标平面 0xy 上的投影曲线方法

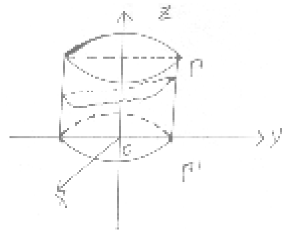


图 4-12

由方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$消去 z 得到不含 z 的一个方程$H(x,y)=0$.

而$H(x,y)$=0 是一个母线平行于 z 轴的柱面，且曲线Γ也在该柱面上.Γ在 0xy 平面上的投影曲线Γ'与柱面$H(x,y)=0$与 z=0 的交线是同一条曲线，故曲线Γ在 0xy 平面上的投影Γ'的方程为$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$，在其它坐标平面上投影曲线的求法完全类似