学院________ 专业、班________ 年级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　　封　　线

○A卷　⊙B卷

# 重庆大学《概率论与数理统计 I》课程试卷

**2017 — 2018 学年　第二学期**

开课学院：数统学院　课程号：MATH20041　考试日期：2018.____

考试方式：○开卷 ⊙闭卷 ○其他　　考试时间：120 分钟

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | | | | |

## 考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

**2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。**

分位数： $u_{0.95}=1.64$，$u_{0.975}=1.96$，$t_{0.95}(7)=1.895$，$t_{0.975}(7)=2.365$

$\chi^2_{0.025}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.975}(8)=17.53$

## 一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 已知 $P(A)=0.92, P(B)=0.93,$，$P(B|\overline{A})=0.85$，则 $P(A|\overline{B})=$ _29 /35_。

2. 掷三颗均匀的骰子，若掷出的点数都不一样，则其中有 1 点的概率为 _0.5_____。

3. 保险公司把车险投保人分为两类，一类是易出事故的，另一类是不易出事故的。以往资料表明，一个易出事故者在一年内出事故的概率是 0.4，对不易出事故者来说这个概率则减少到 0.2，若第一类投保人所占的比例为 30%，那么一新投保人在投保后一年内将出事故的概率为 _0.26____，若一新投保人在投保后一年内发生了事故，那他是易出事故者的概率为 _6/13____。

4. 设 $X$ 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{c}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$ 则 $E(2X^2+X)=$ _5___

5. 某人办公室的电话在时间间隔为 $t$ 小时内接到的电话次数 $X$ 服从参数为 $4t$ 的泊松分布，若他有事外出半个小时，则办公室未接电话不超过两个的概率是 _$5e^{-2}$\_\_\_\_；如果他希望外出时没有电话的概率为 50%，则他外出的时间不能超过 \_$\frac{1}{4}\ln 2$___ 小时。

6. 设随机变量 $X,Y$ 都是标准化随机变量，$\rho(X,Y)=\dfrac{1}{2}$，$U=2X-Y, V=-X$ 则 $DU=$ _3___，$\rho(U,V)=$ _$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$___。

6. 若随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $Y=1/X$ 的密度函数为 ______。$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{y^4}, & y>1\\ 0, & 其他\end{cases}$

7. $X_1,X_2,\cdots\cdots,X_{10}$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则 $a=$ _$\dfrac{1}{18}$_ 时，$a\sum_{i=1}^{9}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是参数 $\sigma^2$ 的无偏估计；$\overline{X}$ 为其样本均值，$\mathrm{cov}(\overline{X},X_6)=$ _$\dfrac{\sigma^2}{10}$____。

8. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{25}$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X},S^2$ 是样本均值和样本方差，则统计量 $\dfrac{5(\overline{X}-\mu)}{S}\sim$ _$t(24)$_。

命题人：李小娅　组题人：荣腾中　审题人：荣腾中　命题时间：2018.04.25　教务处制

9. 设总体 $X \sim N(\mu,9)$，$X_1,X_2,\ldots,X_{36}$ 来自总体 $X$，$\bar{x}=20$，则参数 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间是 [19.02, 20.98] ____.

二、（12 分）设 $A,B$ 为某试验的两个随机事件，$P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$，令 $X,Y$ 分别为在一次观察中 $A$ 和 $B$ 发生的次数，求：

（1）二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律；（2）$X,Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}$；（3）$Z=X+Y$ 的概率分布。

解：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{3},\quad P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{12}$

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{2},\quad P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{1}{6}$

(1) $(X,Y)$ 有四种可能取值：(0,0)，(0,1)，(1,0)，（1,1）

$P\{X=1,Y=1\}=P\{AB\}=\dfrac{1}{12}\quad P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{6}$

$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{12}$

$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\dfrac{2}{3}$

$(X,Y)$ 的联合分布律为：

| X \ Y | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2/3 | 1/12 | 3/4 |
| 1 | 1/6 | 1/12 | 1/4 |
| | 5/6 | 1/6 | |

(2) $EX=EX^2=1/4, EY=EY^2=1/6, DX=3/16, DY=5/36\quad EXY=1/12,$

$\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=1/24$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

（3）$Z=X+Y$ 的取值 0，1，2，有

$P\{Z=0\}=\dfrac{2}{3};P\{Z=1\}=\dfrac{1}{4};P\{Z=3\}=\dfrac{1}{12};$

三、（18 分）设随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1） 常数 $A$；

（2）随机变量 $X,Y$ 的边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$，并判断独立性 ；

（3）；求 $P\{X+Y<2\}$

（4）求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数。

解（1） 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{+\infty}Ae^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A(1-e^{-1})=1$，得 $A=\dfrac{1}{1-e^{-1}}$。

（2） $$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{+\infty}\dfrac{1}{1-e^{-1}}e^{-(x+y)}dy & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1\frac{1}{1-e^{-1}}e^{-(x+y)}dx=e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

(3) 由 $f(x,y)=f(x)f(y)$，所以 $X,Y$ 独立；

(4) $P\{X+Y<2\}=\iint\limits_{x+y\le 2}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^{2-x}\frac{e^{-(x+y)}}{1-e^{-1}}dxdy=1-\frac{e^{-2}}{1-e^{-1}}$

(5)由 $X,Y$ 独立，$Z=\max\{X,Y\}$ 则 $F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

又 $$F_X(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\begin{cases}0 & z<0\\ \int_0^z\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}dx & 0\le z<1\\ 1 & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1-e^{-z}}{1-e^{-1}} & 0\le z<1\\ 1 & z\ge 1\end{cases}$$

$$F_Y(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)dy=\begin{cases}\int_0^z e^{-y}dy & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{(1-e^{-z})^2}{1-e^{-1}} & 0\le z<1\\ 1-e^{-z} & z\ge 1\end{cases}$$

四、（12 分）设总体 $X$ 的密度函数为：$f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{1}{2\beta} & 0<x<\beta\\ \frac{1}{2(1-\beta)} & \beta\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，

（$\beta\in(0,1)$ 未知），$X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$ 为来自总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值 。求：

(1). 参数 $\beta$ 的矩估计量 $\hat{\beta}$； (2). 判断 $\hat{\beta}$ 是否为 $\beta$ 的无偏估计；(3)判断 $\hat{\beta}^2$ 是否为 $\beta^2$ 无偏估计量并说明理由。

解： 1） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^\beta x\frac{1}{2\beta}dx+\int_\beta^1 x\frac{1}{2(1-\beta)}dx=\frac{1+2\beta}{4}$

令 $EX=\overline{X}$ ，即 $\frac{1+2\beta}{4}=\overline{X}$ 解得：$\hat{\beta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$ ；

2） $\hat{\beta}$ 是 $\beta$ 的无偏估计。

3） $EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^\beta x^2\frac{1}{2\beta}dx+\int_\beta^1 x^2\frac{1}{2(1-\beta)}dx=\frac{1+\beta+2\beta^2}{6}$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{4\beta^2-4\beta+5}{48}$$ ，

$$E\overline{X}^2=(E\overline{X})^2+D\overline{X}=\frac{4\beta^2-4\beta+5}{48}+(\frac{1+2\beta}{4})^2$$

$$E\hat{\beta}^2=E\left(2\overline{X}-\frac{1}{2}\right)^2=4E(\overline{X}^2)-2E(\overline{X})+\frac{1}{4}=\frac{4}{3}\beta^2-\frac{4}{3}\beta+\frac{11}{12}\ne\beta^2$$

所以 $\hat{\beta}^2$ 不是 $\beta^2$ 的无偏估计量。

五、（10 分）电池在货架上的滞留时间 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。由于存放时间不能过长，现从超市的货架上随机选取 8 只进行检测，测得平均存放时间为 132 天，标准差为 21.08 天，问在显著水平 $\alpha$=0.05 下，能否认为这些电池的存放时间超过 125 天？

解：由题意知，总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $\overline{x}=132,S=21.08,\alpha=0.05$ $n=8$ 。

设立统计假设：$H_0:\mu\le 125$ $H_1:\mu>125$

$\sigma^2$ 未知，选择检验统计量：$T=\frac{\overline{X}-125}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域 $\chi_0 = \{t \mid t > t_{1-\alpha}(n-1)\} = \{t > t_{0.95}(7)\} = \{t > 1.8946\}$

做出判断，检验统计量的样本值 $t = \dfrac{132-125}{21.08/\sqrt{8}} = 0.939 \notin \chi_0$

所以可以认为这些电池的存放时间不超过 125 天。

六、（6 分）验收一箱货品，从一箱里任取 3 件检查，如果这 3 件中有次品就拒绝收货。已知一件次品被检查出的概率为 0.95，一件正品被误检为次品的概率为 0.01。如果箱中有 100 件货品，其中有 4 件次品，则这箱货品被收下的可能性有多大？。

解：设无放回取，$A_i$ =“抽出3件中的次品数” $i = 0,1,2,3$，$B$=“货被接收”

则 $P(A_i) = \dfrac{C_4^i \cdot C_{96}^{3-i}}{C_{100}^i} \quad i = 0,1,2,3$， $P(B \mid A_i) = 0.05^i \cdot 0.99^{3-i} \quad i = 0,1,2,3$

$$P(B) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i) P(B \mid A_i) = 0.8629$$