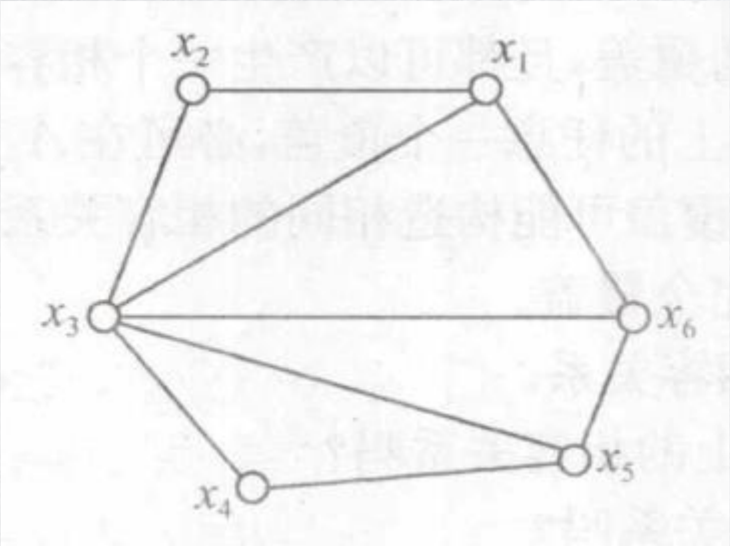
3-11习题（P139)

（2）



相容关系图

定理3-11.1　设r是有限集A上的相容关系。C是一个相容类，那么，必存在一个最大相容类C_r，使得$C \subseteq C_r$。

根据最大相容类的定义，它可以从相容关系r的简化关系图求得，具体方法是：

（1）r的简化关系图中，每一个最大完全多边形的顶点集合，是一个最大相容类。

最大完全多边形：其每个顶点都与其它顶点连接的多边形.

（2）r的简化关系图中，不在完全多边形中的边的两个顶点的集合，也是一个最大相容类。

（3）r的简化关系图中，每一个孤立结点的单点集合，是一个最大相容类。

定义3-11.4　在集合A上给定相容关系r，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_r(A)$。

X的完全覆盖：CR(x)={{x1,x2,x3 },{x1,x3,x6 },{x3,x4,x5 },{x3,x5,x6 }}

3-12习题（P146）

（7）图给出了集合{1,2,3,4}上的四个偏序关系图，画出他们的哈斯图，并说明哪个是全序关系，哪个是良序关系。

解： 根据所给的偏序关系图可知：

a) 图对应$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

$COV(A)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，哈斯图如图(a)所示。

b) 图对应$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

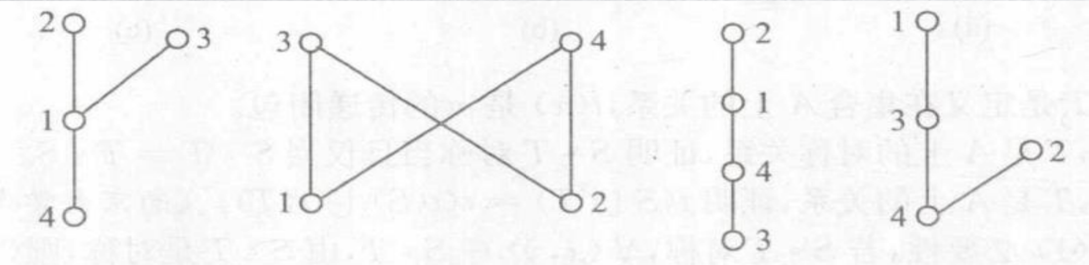
$COV(A)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$，哈斯图如图(b)所示。

c) 图对应$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

$COV(A)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$，哈斯图如图(c)所示，为全序关系也是良序关系。

d) 图对应$R_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

$COV(A)=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$，哈斯图如图(d)所示。



(a) (b) (c) (d)

定义3-12.2 在偏序集合<A，≤>中，如果x,y∈A，x≤y，x≠y，且没有其他元素z满足x≤z、z≤y，则称元素y盖住元素x。并且记COV={<x，y>|x，y∈A；y盖住x}

哈斯（Hasse）根据盖住的概念给出了偏序关系关系图的一种画法，这种画法画出的图称为哈斯图，作图规则如下：

（1）用小圆圈代表元素。

（2）如果x≤y，且x≠y，则将代表y的小圆圈画在代表x的小圆圈之上。

（3）如果<x,y>∈COV A,则在x与y之间用直线连接。

定义3-12.3 设<A，≤>是一个偏序集合，在A的一个子集B中,如果每两个元素都是有关系的，即

$\forall x\forall y(x,y\in B\rightarrow x\le y\vee y\le x)$

则称这个子集为链（*chain*），

定义3-12.4 在偏序集<A，≤>中，如果A是一个链，则称<A，≤>为全序集合或称线序集合，在这种情况下，二元关系≤称为全序关系或称线序关系。

定义3-12.9 任一偏序集合,假如它的每一个非空子集存在最小元素,这种偏序集称为良序的.

定理3-12.2 每一个良序集合，一定是全序集合。

定理3-12.3 每一个有限的全序集合，一定是良序集合。

小测2

2. 在一个有3个元素的集合上，可以有多少种不同的关系？【D】

A. 8　　　　B. 9

C. 64　　　　D. 512

定义3-5.1 任一序偶的集合确定一个二元关系R，R中的任一序偶<x,y>可记为<x,y>∈R，或xRy。不在R中序偶<x,y>记为<x,y>∉R，或$x\not R y$。

• 定义3-4.2 令A和B是任意两个集合，若序偶的第一个成员是A的元素，第二个成员是B的元素，所有这样的序偶集合，称为集合A和B的笛卡尔乘积或直积，记为A×B，A×B={<x,y>|x∈A∧y∈B}

在一个有n个元素的集合上，可以有多少种不同的关系？3-5习题 (2)（P109）

解：任一序偶的集合确定一个二元关系

$X \times X = X^2$中共有n^2个元素也即n^2 个序偶，共可组成2^{n^2}个子集

在X上的二元关系与$X \times X$上的子集相对应，

在n个元素的集合上，共有2^{n^2}个不同的关系

5. 下列选项中不是偏序集合的是 【B】

A. $<\rho(N),\subseteq>$

B. $<\rho(N),\subset>$

C. $<\rho(\{a\}),\subseteq>$

D. $<\rho(\emptyset),\subseteq>$

定义3-12.1 设A是一个集合,如果A上的一个关系R,满足自反性、反对称性和传递性，则称R是A上的一个偏序关系，并把它记做“≤”；如果集合A上有偏序关系≤，则称A为偏序集，用序偶<A，≤>表示之。

不满足自反，所以不是偏序关系

例2 全集合U的幂集上的“$\subseteq$”关系也是一个偏序关系。

证明 对于任意$S\subseteq U$，有$S\subseteq S$，所以“$\subseteq$”是自反的。

对任意$S_i,S_j\subseteq U$，若$S_i\subseteq S_j$且$S_j\subseteq S_i$，则$S_i=S_j$

所以“$\subseteq$”是反对称的。

对任意$S_i,S_j,S_k\subseteq U$，若$S_i\subseteq S_j$，$S_j\subseteq S_k$，则$S_i\subseteq S_k$

所以“$\subseteq$”是可传递的。

例3 设A={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}，定义A上的整除关系R如下：

$$R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A, a整除b\}$$

则R是A上的偏序关系。

例4 正整数集上的整除关系是偏序关系。

实数集R上的“<”关系不是偏序关系。

真包含关系“$\subset$”也不是偏序关系。

6. 集合A = {a, b, c, d}，$R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$，利用Warshall算法求$R$ 的传递闭包，要求写出所有中间过程。3-8习题 (2)(b)（P127）

$$A := M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

① i=1，第一列中的A[2,1]=1, 将第一行加到第二行得：

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

② i=2，第二列中的A[1,2]=A[2,2]=1, 将第二行加到第一行、第二行得：

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

③ i=3，第三列中的A[1,3]=A[2,3]=1, 将第三行加到第一行、第二行得：

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$t(R) = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<b,d>,<c,d>\}$

④ i=4，第四列中的 A [1,4]=A[2,4]= A[3,4]=1, 将第四行加到第一行、第二行、第三行得：$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

求传递闭包的另一种方法：

当有限集X的元素较多时，矩阵运算很繁琐，Warshall 在1962年提出了R⁺的一个有效算法如下：

（1）置新矩阵A:=M

（2）置i:=1

（3）对所有j如果A[j, i]=1，则对k=1,2,…,n A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]

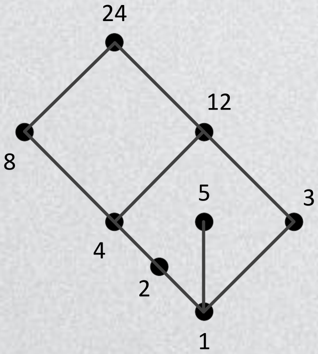
（4） i:= i+1

（5）如果 i≤ n,则转到步骤（3）,否则停止。

7. 画出集合{1，2，3，4，5，8，12，24}上整除关系的哈斯图，并指出它们的最大元、极大元、最小元、极小元。并写出子集{3，4}的上确界和下确界。

$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 12,12\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 1,12\rangle,\langle 24,24\rangle,\langle 12,24\rangle,\langle 8,24\rangle,\langle 3,24\rangle,\langle 2,24\rangle,\langle 4,24\rangle,\langle 1,24\rangle\}$

$$cov(A)=\{<1,2>,<2,4>,<1,3>,<1,5>,<4,8>,<4,12>,<3,12>,<12,24>,<8,24>\}$$



最大元：不存在，
极大元：5，24，
最小元：1，
极小元：1。
{3，4}的上确界：12，
下确界：1。

定义3-12.2 在偏序集合$\langle A,\leq\rangle$中，如果$x,y\in A$，$x\leq y$，$x\neq y$，且没有其他元素z满足$x\leq z$、$z\leq y$，则称元素y盖住元素x。并且记$COV=\{\langle x,y\rangle|x,y\in A;\ y盖住x\}$

哈斯(Hasse)根据盖住的概念给出了偏序关系关系图的一种画法，这种画法画出的图称为哈斯图，作图规则如下：

（1）用小圆圈代表元素。

（2）如果$x\leq y$，且$x\neq y$，则将代表y的小圆圈画在代表x的小圆圈之上。

（3）如果$\langle x,y\rangle\in COV\ A$，则在x与y之间用直线连接。

定义3-12.5、6 设$\langle A,\leq\rangle$是一个偏序集合，$B\subseteq A$。

（1）如果$b\in B$，并且没有$x\in B$，$x\neq b$，使得$b\leq x$，则称b为B的极大元（*maximal element*）。即

$b为B之极大元\Leftrightarrow b\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq b\wedge b\leq x)$

（2）如果$b\in B$，并且没有$x\in B$，$x\neq b$，使得$x\leq b$，则称b为B的极小元（*minimal element*）。即

$b为B之极小元\Leftrightarrow b\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq b\wedge x\leq b)$

（3）如果$b\in B$，并且对每一$x\in B$，$x\leq b$，则称b为B的最大元（*greatest element*）。即

$b为B之最大元\Leftrightarrow b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq b)$

（4）如果$b\in B$且对每一$x\in B$，$b\leq x$，则称b为B的最小元（*least element*）。即

$b为B之最小元\Leftrightarrow b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow b\leq x)$

定义3-12.7、8 设$\langle A,\leq\rangle$为一偏序集，对于$B\subseteq A$。

（1）如果$a\in A$，且对每一$x\in B$，$x\leq a$，则称a为B的上界（*upper bound*）。即

$a为B的上界\Leftrightarrow a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\leq a)$

（2）如果$a\in A$，且对每一$x\in B$，$a\leq x$，则称a为B的下界（*lower bound*），即

$a为B的下界\Leftrightarrow a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow a\leq x)$

（3）如果a是B的所有上界的集合中的最小元。则称a为B的最小上界或上确界LUB（*Least Upper Bound*）。

（4）如果a是B的所有下界的集合中的最大元。则称a为B的最大下界或下确界GLB(*Greatest Lower Bound*)。

8. 设S为集合X上的关系， ①证明若S是自反的和传递的，则$S \circ S = S$，
②其逆为真吗？若为真，请证明，否则请举出反例。

证明：① 对任意的$<x,z> \in S^\circ S$, 必存在某个$y \in X$, 使得$<x,y> \in S$
$\wedge <y,z> \in S$, 若S是传递的， 则$<x,z> \in S$，所以$S^\circ S \subseteq S$；

② 对任意的$<x,y> \in S$，若S是自反的，则$<x,x> \in S$, 根据复合关系定义，则有$<x,y> \in S^\circ S$，则$S \subseteq S^\circ S$；
因此， $S^\circ S = S$。

其逆不一定为真，例如 X={1,2}，S={<1,2>,<2,2>}，S◦S=S，但S不是自反的

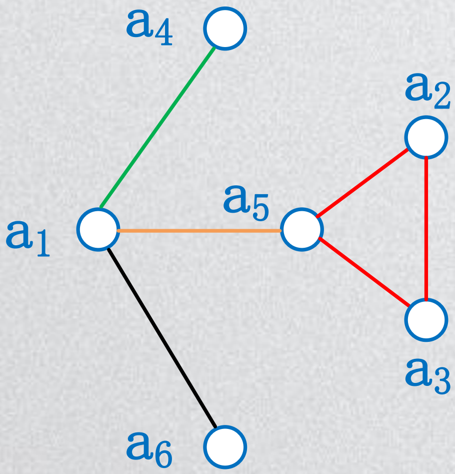
S={<1,1>,<2,1>}

> 1、复合关系的定义
> 定义3-7.1 设R为X到Y的二元关系，S为Y到Z的二元关系，则R°S称为R和S的复合关系（*compositions*）表示为
> R°S=｛<x,z>｜x∈X∧z∈Z∧∃y(y∈Y∧<x,y>∈R∧<y,z>∈R)｝

9. 集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$，$R$是$A$上的相容关系，其关系矩阵为：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

求R的所有最大相容类。



$\{a_2,a_3,a_5\}$，$\{a_1,a_4\}$，$\{a_1,a_5\}$，$\{a_1,a_6\}$