**线 性 代 数**

**第一章 行列式**

**例1：**若都是四维列向量，且四阶行列式，，四阶行列式等于多少？

**例2：**设是****阶方阵，且，则中( )

() 必有一列元素全为零；

(****) 必有两列元素成比例；

(****) 必有一列向量是其余列向量的线性组合；

(****) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

**例3：**设****，为的代数余子式，且****，并且，求.

**例4：**设四阶方阵****，****，其中****是阶单位矩阵，求：（1）****的系数；（2）的系数；（3）常数项.

**例5：**设为****阶方阵，****是阶单位矩阵，**，**，计算.

**例6：**设，****为****阶正交矩阵，若，证明****是降秩矩阵.

**例7：**设求（1）**（2）**

**第二章 矩 阵**

**例1：**设**，**证明当时，恒有**.**

**例2：**设**，，**计算**.**

**例3：**设为三维列向量，且**则**

**（答案：3）**

**例4：**设三阶方阵，****满足关系，且，求

**例5：**设是三阶方阵，，求

**例6：**证明：若实对称矩阵满足条件，则

**例7：**设，其中****是阶单位矩阵，****是维非零列向量，证明：

（1）的充要条件是；

（2）当时，是不可逆矩阵.

**例8：**已知阶方阵满足，求

**例9：**设，且，求.

**例10：**设，，求.

**例11：**设是阶方阵，且满足，证明：

**例12：**设是阶方阵，是否存在，使得，若存在，指出求的办法，若不存在，说明理由.

**例13：**设，

，

其中可逆，则（ ）

()；(****)；(****)；(****).

**例14：**设是阶方阵，将的第一列与第二列交换得，再把的第二列加到第三列得，则满足的可逆矩阵为

（） （） （） （）

**例15：**设是阶方阵，已知可逆，且满足，证明和都是可逆矩阵，并求它们的逆.

**例16：**设分别是阶和阶非奇异方阵，是矩阵，证明：（1）为可逆矩阵；（2）

**例17：**求****阶行列式中所有元素的代数余子式的和.

**例18：**设是阶方阵，且存在正整数，使，求

**例19：**设是阶非零矩阵，且证明是可逆矩阵.

**例20：**设是阶方阵，且存在正整数，使，又是阶可逆矩阵，证明矩阵方程只有零解.

**例21：（1）**设是阶方阵，且，证明：

（2）设是阶方阵，且，证明：

**例22：**已知，为三阶非零矩阵，且，则（ ）

()时，的秩必为1；(****)时，的秩必为2；

(****)时，的秩必为1；(****)时，的秩必为2.

**例23：**设是矩阵，是矩阵，其中，若，证明的列向量线性无关.

**例24：**求阶方阵的秩，其中



**例25：**求设是和阶方阵， ，且，又行列式，求证：.

**例26：**设是阶方阵，且，证明存在常数，使得

**例27：**设为维单位列向量，，证明：

**例28：**设是矩阵，是矩阵，并且，证明：



**例29：**设维列向量组线性无关，向量组可用线性表示，表示矩阵为，证明：

（1）

（2）当时，有

线性无关是可逆矩阵.

**例30：**设为三维列向量,矩阵 , 其中分别是的转置.证明:  秩

(2) 若线性相关,则秩

（2008年数学一）

**例31：**设分别为可逆方阵，分别为的伴随矩阵，求

（1）； （2）

（答案：（1）；（2））

**例32：**设均为2阶方阵，分别为的伴随矩阵,若,则分块矩阵的伴随矩阵为

() . (****).

(****). (****).

(答案: B) （2009年数学一、二、三）

**例33：**设为3阶方阵，,为的伴随矩阵. 若交换的第一行与第二行得矩阵, 则

( 答案: . 2012年数学二、三)

**例34：**设均为阶矩阵, 若, 且可逆, 则

(A) 矩阵的行向量组与矩阵的行向量组等价;

(B) 矩阵的列向量组与矩阵的列向量组等价;

(C) 矩阵的行向量组与矩阵的行向量组等价;

(D) 矩阵的列向量组与矩阵的列向量组等价.

(答案(B ). 2013年数学二、三)

**第三章 向 量**

**例1：**设向量组线性无关，证明向量组，，也线性无关.

**例2：**设向量组线性无关，讨论向量组，，线性相关性.

**例3：**设向量组线性无关，讨论向量组，，的线性相关性.

**例4：**设向量组线性无关，向量组线性相关，则向量可由向量组线性表示.

**例5：**设与 均为3维线性无关的向量组，证明存在非零向量，使得可同时由与线性表示.

**例6：**设向量，为阶矩阵，如，，则线性无关.

**例7：**设为阶矩阵，证明

**例8：**设向量组线性相关，向量组线性无关，问（1）能否由线性表示？（2）能否由线性表示？

**例9：**设向量组线性无关，向量可由它线性表示，向量不能由它线性表示，证明个向量线性无关.

**例10：**设向量组与向量组的秩相同，且向量组可由向量组线性表示，证明与等价.

**例11：**设为阶矩阵，是一组维向量，满足，，并且，证明向量组线性无关.

**例12：**设是线性无关的5维向量组，也是5维向量组，满足。证明线性相关.

**例13：**如果与是两个线性无关的维向量组，并且每个与都正交，证明向量组线性无关.

**例14：**设有向量组，

，求该向量组的秩及极大线性无关组，并用极大无关组来表示组中诸向量.

**例15：**设讨论当为何值时，

（I）不能由线性表示；

（II）可由惟一地线性表示，并求出表示式；

（III）可由线性表示，但表示式不惟一，并求出表示式.

（2004年数学三）

**例16：**设均为三维向量，则对任意常数，向量组线性无关是向量组线性无关的

必要非充分条件. 充分非必要条件.

充分必要条件. 既非充分也非必要条件.

（答案：） （2014年数学一、二、三）

**例17：**设为的一个基，

（I）证明向量组为的一个基；

（II）当为何值时，存在非零向量在基与基下的坐标相同.

（答案：） （2015年数学一）

**第四章 线性方程组**

**例1：**已知三阶矩阵，且的每一个列向量都是以下方程组的解



（1）求的值；（2）证明

**例2：**设向量组是齐次方程组的一个基础解系，向量不是方程组的解，即。试证明向量组，，，线性无关.

**例3：**设阶矩阵的行列式，且有一个代数余子式，证明：线性方程组的所有解为，为任意常数.

**例4：**设是齐次方程组的一个基础解系，，，，其中为实常数。试问满足什么关系时，也是方程组的一个基础解系.

**例5：**设，且

，，

又已知齐次方程组的基础解系就是，求齐次线性方程组



的基础解系，并说明理由.

**例6：**设

证明：如果

的解全是方程



的解，则向量可由向量组线性表出.

**例7：**已知四元两个方程的线性方程组的基础解系为，求原方程组.

**例：8**设为个维线性无关的向量组，为非零向量且与向量组正交. （1）证明成比例；（2）令，证明：

**例9：**已知线性方程组



讨论参数取何值时，方程组有解、无解；当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

**例10：**已知为方程组

的三个解，求其通解.

**例11：**已知及

（1）取何值时，不能表示成的线性组合？

（2）取何值时，有的惟一的线性表示式？并写出该表示式.

**例12：**已知下列非齐次线性方程组

（Ⅰ） （Ⅱ）

1. 求解方程组（Ⅰ）；用其导出组的基础解系表示通解.
2. 当方程组（Ⅱ）中的参数为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

**例13：**已知四阶矩阵，均为4维列向量，其中线性无关，，如果，求线性方程组的通解.

**例14：**若线性方程组对任何维列向量均有解，则对于任何维列向量，方程组必有唯一解，其中是的伴随矩阵.

**例15：**若设有向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）。试问：当取何值时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价？当取何值时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）不等价？

**例16：**已知三阶矩阵的第一行是，不全为零，矩阵（为常数），且，求线性方程组的通解.（2005年数学一）

**例17：**确定常数，使向量组，，可由向量组，，线性表示，但向量组，，不能由向量组，，线性表示.（2005年数学二）

**例18：**设为阶矩阵，证明：若可逆，则也可逆.

**例19：**已知齐次线性方程组

 和 （Ⅱ）

有公共的非零解，求常数的，并求所有非零公共解.

（答案：或者，）

**例20：**已知齐次线性方程组

 和 （Ⅱ）

同解，求的值. （2005年数学三）

**例21：**设, 

求满足的所有向量;

（Ⅱ）对中的任意向量,证明,线性无关.

（2009年数学一、二、三）

**例22：**设, 

已知线性方程组存在两个不同的解，

求

（Ⅱ）求线性方程组的通解.

（答案：，2010年数学一、二、三）

**例23：设**是四阶矩阵, 为的伴随矩阵, 若是方程组的一个基础解系, 则 的基础解系可为

(A) ; (B) ; (C) ; (D) 

(答案: (D), 2011年数学一、二)

**例24：**设 

计算行列式

（Ⅱ）当实数为何值时,方程组有无穷多解, 并求其通解.

(答案: . （2012年数学一、二、三)

**例25：**设 问为何值时，存在矩阵C使得，并求所有矩阵C.

（答案: ）. （2013年数学一、二、三）

**例22：**设 ，为三阶单位矩阵.

求方程组的一个基础解系；

（Ⅱ）求满足的所有矩阵.

（答案：；（Ⅱ））

（2014年数学一、二、三）

**例26：设矩阵**

当为何值时，方程无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

(答案：时无解，时有唯一解，时有无穷多解.) （2016年数学一）

**第五章 矩阵的特征值与特征向量**

**例1：**假定阶矩阵的任意一行的个元素之和都是，试证是的特征值，且是的属于的特征向量。当时，又问此时的行和为多少？

**例2：**设矩阵，又，又有一个特征值，属于的一个特征向量为，求的值.

**例3：**设，，求e

（答案：）

**例4：**设向量，都是非零向量，且满足条件，，求

（1）；（2）矩阵的特征值与特征向量；（3）问相似与对角矩阵吗？

**例5：**设是三阶矩阵，特征值为，对应的特征向量为，又，求

（答案：）

**例6：（1）设**为的两个单重特征值，其对应的线性无关的特征向量为，证明：不可能是的特征值；（2）**设**为的两个重的特征值，其对应的线性无关的特征向量分别为与证明：线性无关.

**例7：**设为阶矩阵.（1）证明：与有相同的特征值；（2）问与是否相似？

（答案：（2）与不一定相似. 如）

**例8：**的特征向量是否一定是的特征向量？

（答案：不一定. 如）

**例9：**设矩阵与矩阵相似，其中

，

1. 求的值；
2. 求可逆矩阵，使得

**例10：**设有3个线性无关的特征向量，求应满足的条件.

**例11：**已知是的一个特征向量，

1. 试确定参数及特征向量所对应的特征值；
2. 相似与对角矩阵吗？说明理由.

**例12：设**为三阶矩阵，已知为三维线性无关的向量，且

求矩阵的特征值.

(答案：)

**例13：设**为二阶矩阵，为二维非零向量，且不是的特征向量，又 （1）证明：线性无关；（2）求的特征值.

(答案：)

**例14：设**为正交的三维单位向量，且. (1)证明：与都为的特征向量；（2）证明： 矩阵可对角化.

**例15：设**证明： 矩阵可对角化.

**例16：设**为阶非零矩阵，且存在正整数使得证明： 矩阵不可以对角化.

**例17：**已知是实对称矩阵的三个特征值，且对应于的特征向量为求对应于的特征向量及矩阵.

**例18：**若任一维非零列向量都是阶矩阵的特征向量，证明是一个数量矩阵.

**例19：**如果阶矩阵满足



其中，证明可以对角化.

**例20：**设三阶实对称矩阵的秩为2，已知是的二重特征值，若 都是的属于特征值的特征向量.

（1）求的另一个特征值和对应的特征向量；（2）求矩阵.

**例21：**设矩阵

，，，求的特征值与特征向量，其中为的伴随矩阵.

**例22：**设 ，求

（答案：）

**例23：**设是矩阵的两个不同的特征值，对应的特征向量为，则线性无关的充分必要条件是

**（） （） （） （）**

（2005年数学三）

**例24：**设矩阵的特征方程有一个二重根，求的值，并讨论是否可以相似对角化. （2004年数学一）

**例25：**设3阶实对称矩阵的特征值，且是的属于的一个特征向量.记,其中为三阶单位矩阵.

（Ⅰ）验证是矩阵的特征向量，并求的全部特征值与特征向量.

（Ⅱ）求矩阵. （2007年数学一、二、三、四）

**例26：**设为3阶矩阵, 为的分别属于特征值特征向量,向量满足.

（Ⅰ）证明线性无关.

（Ⅱ）令,求. （2008年数学二、三）

**例27：**设为3阶实对称矩阵，的秩为2，且



（I）求的所有特征值与特征向量；

（II）求矩阵 （2011年数学一、二、三）

**例28：**设为3阶矩阵, 为3阶可逆矩阵,且  若, , 则 

(A )  (B)  (C)  (D)

(答案: (B), 2012年数学一、二、三)

**例29：**证明阶矩阵 与相似.

(2014年数学一、二、三)

**例30：已知矩阵**

（I）求

（II）设三阶矩阵满足记将分别表示为的线性组合.

（答案：）

(2016年数学一、二、三)

**第六章 二次型**

**例1：**设二次型



经正交变换化成



其中为三维列向量，是正交矩阵.试求常数.

**例2：**设为实矩阵，，试证当时，矩阵为正定矩阵.

**例3：**设为实矩阵，，试证明

1. 矩阵非奇异；
2. 矩阵为对称正定矩阵.

**例4：**设实对称矩阵为正定矩阵，证明存在可逆矩阵，使.

**例5：**如果为阶正定矩阵，为阶实对称矩阵，证明：

1. 存在可逆矩阵，使得和都是对角矩阵；
2. 当充分小时，仍是正定矩阵.

**例6：求椭圆**围成的面积.

（答案：）

**例7：**已知二次型的秩为2。

（I）求的值；

（II）求正交变换，把化成标准形；

（III）求方程的解.

（2005年数学一）

**例8：**设为正定矩阵，其中分别为阶，阶对称句矩阵，为矩阵.

（I）计算，其中

（II）利用（I）的结果判断矩阵是否为正定矩阵，并证明你的结论.

**例9：**设矩阵，则下列矩阵中与合同但不相似的是 （ ）

（A）

（答案：（A））

**例10：**设二次型



（I）求二次型的矩阵的所有特征值;

（II）二次型的规范形为,求的值.

**例11：**设二次型 在正交变换的标准形为 ，且Q的第三列为

（I）求矩阵；

（II）证明为正定矩阵

（答案：），（2010年数学一）

**例12：**设矩阵，正交矩阵Q使得为对角矩阵. 若Q的第一列为, 求

(答案:) , （2010年数学二, 三)

**例13：**二次型 的负惯性指数为1，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(答案：) （2014年数学一、二、三）

**例14：**设二次型在正交变换下的标准形为 ，其中. 若，则在正交变换下的标准形为

. .

. .

(答案：) （2015年数学一、二、三）

**例15：**设二次型，其中是参数.

（I）求的解；

（II）求的规范形.

（答案：（I）为任意常数；（II）时规范形为时规范形为） （2018年数学一、二、三）