**重 庆 大 学**

**学 生 实 验 报 告**

**实验课程名称 数学实验**

**开 课 实验室 第一实验室DS1407**

**学 院 计算机学院 年级 2019 专业班 计卓02**

**学 生 姓 名 李燕琴 学号 20195633**

**开 课 时 间 2020 至 2021 学年第 二 学期**

|  |  |
| --- | --- |
| **总 成 绩** |  |
| **教师签名** |  |

**数 学 与 统 计 学 院 制**

**开课学院、实验室：数统学院DS1407 实验时间：2021年04月05日**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **课程**  **名称** | **数学实验** | **实验项目**  **名 称** | **微分方程实验** | **实验项目类型** | | | | | |
| **验证** | **演示** | **综合** | **设计** | **其他** | |
| **指导**  **教师** | **龚劬** | **成 绩** |  |  |  |  |  |  | |
| 实验目的  学习使用适当的函数（如解微分方程的函数）解决问题。  基础实验1数值积分  问题重述  积分的值是多少呢？用trapz 或 quad解决这个问题。计算积分值，并显示你的结果和的差距。  实验过程  x = linspace(0,5,100);  y = x.\*exp(-x/3);  fun = @(x)x.\*exp(-x/3);  % 标准值  -24\*exp(-5/3)+9  % 梯度积分法  trapz(x,y)  % 自适应Simpson积分法  quad(fun,0,5)  实验结果及分析  三种方法实验结果如下表，与原值相比，quad计算的误差比trapz的小。  表格 1 实验结果   |  |  |  | | --- | --- | --- | | 标准值 | 梯度积分法（trapz） | 自适应Simpson积分法(quad) | | 4.4670 | 4.4667 | 4.4670 |   基础实验2**微分方程解析解**  问题重述  下列微分方程是否有解析解，若有，则求其解析解(dsolve), 并画出它们的图形，否则，求出数值解(ode23)，并画出图形。      实验过程  % 第一个方程  syms x y(x)  y = dsolve(diff(y,x)==y+2\*x,y(0)==1)  vx = linspace(0,1,100);  vy = double(subs(y,x,vx));  plot(vx,vy);  % 第二个方程  syms x y(x)  dy = diff(y,x);  y = dsolve(diff(y,x,2)+y\*cos(x)==0,[y(0)==1,dy(0)==0])  % dsolve没有数值解  [t,y]=ode23(@myvdp,[0,5],[1;0]);  plot(t,y(:,1),t,y(:,2))  xlabel('T');  ylabel('Y');  legend('y\_t',"y'\_t")  function df = myvdp(x,y)  % van der Pol 方程为二阶 ODE  % y(1)=y; y(2)=y'  % df(1)=y'; df(2)=y''  df = [y(2);-y(1).\*cos(x)];  end    实验结果及分析  1、单独求解微分方程得到y(x)的方程解为      图表 1 y-x图像  2、使用dsolve求解二阶微分方程，方程无解。  通过ode23求得数值解作图如下：    图表 2 y(x) 和 y’(x)图像  基础实验3 **Apollo卫星的运动轨迹**  问题重述  (x(t),y(t))满足下列微分方程组，请绘制该运动轨迹。    实验过程  使用dsolve求解微分方程组，但是无解  syms t x(t) y(t)  u = 1/82.45;  u1 = 1-u;  r1 = sqrt((x+u)^2+y^2);  r2 = sqrt((x-u1)^2+y^2);  dx = diff(x,t);  dy = diff(y,t);  [xt,yt] = dsolve(...  [diff(x,t,2) == 2\*dy+x-u1\*(x+u)/r1.^3-u\*(x-u1)/r2^3; ...  diff(y,t,2)==-2\*dx+y-u1\*y/r1^3-u\*y/r2^3], ...  [x(0)==1.2,dx(0)==0,y(0)==0,dy(0)==-1.04935751]);  于是使用ode23进行求解。  % ======使用ode23，并设置odeset误差上限reltol======  options=odeset('reltol',1e-8);  tspan = [0,20];  f0 = [1.2;0;0;-1.04935751];  [t1,f1] = ode23(@xy2t,tspan,f0,options);  plot(f1(:,1),f1(:,3))  % title('Appollo卫星运动轨迹')  xlabel('X')  ylabel('Y')  实验结果及分析  根据实验，使用ode23求得x-t,y-t的数值解，并作Appollo卫星运动轨迹图（y-x）如下:    图表 3 Appollo卫星运动轨迹  基础实验4 **Hodgkin-Huxley的神经元模型**  问题重述  编写一个ODE文件来描述神经元脉冲。该模型的主要思想是，神经元膜中的离子通道具有电压敏感的门，该门随着膜电压的变化而打开或关闭。 一旦门打开，带电的离子便会流过它们，从而影响膜电压。 这些方程是非线性的并且是耦合的，因此必须数值求解。其中HH.zip文件中给定了相关参数的求解函数，根据如下微分方程组，求解，并探讨该微分方程组的特性：全或无动作电位。已知只有当神经元的膜电压超过一定的电压阈值时，神经元才会“激发”产生脉冲。为了求出该阈值，对微分方程组进行10次求解，每次使用ySS作为初始条件（**ode45**将此作为输入参数），同时将V的初始值从其稳态值分别以1、2、…10 mV的增量增加。每次求解后，检查峰值电压是否超过0毫伏，如果超过，用红线画出电压曲线，如果没有超过，用黑线画出电压曲线。在同一坐标系下绘制出所有膜电压轨迹，如果超过电压阈值，神经元就会“激发”一个动作电位；否则它只会返回到稳态值。通过放大图形可以看到这个阈值（红线与黑线的分界点电压值）。    实验过程  y0 = [0.5; 0.5; 0.5; -60];  tspan = [0,20];  [t,V] = ode45(@odefun,tspan,y0);  % 初始模拟  figure(1)  plot(t,V(:,4),'r')  title('Approaching Steady State')  xlabel('Time(ms)')  ylabel('Transmembrane Voltage(mV)')  % 测试模拟  yss = V(end,:); % 稳态值  figure(2)  hold on  for i=1:10  y0 = yss;  y0(4) = y0(4)+i;  [t,V] = ode45(@odefun,tspan,y0);  if max(V(:,4))<=0  plot(t,V(:,4),'k')  else  plot(t,V(:,4),'r')  end  yss = V(end,:);  end  title('Threshold Behavior')  xlabel('Time(ms)')  ylabel('Transmembrane Voltage(mV)')  hold off  实验结果及分析  根据题目给定初始值，可以模拟得到一个可激活神经元，激活过程中电压变化情况如下图：    按照题意，以神经元电压末尾数据作为稳态数据，输入新的ode45，进行数值求解，并测试神经元电压阈值，得到下图，可以看到，当V0>=-53时，即红黑曲线区别之处，神经元容易被激活，即可以把-53作为其电压阈值。  图表 4 初始模拟    图表 5神经元刺激电压阈值测试模拟  综合实验5**卫星的运动轨迹**  一、问题重述  由万有引力定律，质量为m2的物体对质量为m1的物体产生的力 ，其中r是两个物体之间的距离。在单体问题中，为简便，忽略了小物体对大物体的作用力，如在小行星围绕大行星运动时，这种简化使我们可以忽略卫星对于行星的力，因而行星可认为是固定的。  如果考虑这个引力，得到的两个物体的运动称为二体问题。  三个天体在重力的作用下交互运动，被称为三体问题，该问题在科学史上具有重要地位。即使所有运动都限制在平面（受限三体问题），从本质上讲可能难以预测长期的轨迹。非预测性主要是因为对初值条件的敏感性，即初始位置和速度的微小变动会导致在随后的时间里可能产生大的偏差,即微分方程组的解相对于输入的初始条件是病态的。  （1）设大物体的质量m2=3，g=1,卫星的初始位置x(0)=0,y(0)=2，卫星的初始速度为，画出卫星的运动轨迹。  （2）求解二体问题。设质量为m1=0.3,m2=0.03，画出如下初始条件下两天体的运动轨迹。    （3）求解三体问题。设质量为m1=0.3,m2=m3=0.03.  (a)画出如下初始条件时的轨迹。    (b)将初始条件改为0.20001，比较结果中的轨迹。  （4）一个惊人的三体八字形轨道由C.Moor在1993年发现。在这种情况下，三个质量相同的物体在一个八字形的环上互相追逐。  (a)设置质量m1=m2=m3=1,重力为g=1.画出如下初始条件下的轨迹。    (b)轨迹对于初始条件的微小变化敏感吗？探索以10-k改变，其中.对每个k,确定八字形的模式是否可以保持，或者是最终发生了突变。  二、问题分析  根据题目要求，需要基于万有引力定律对多卫星运动进行建模，得到卫星的运动轨迹，并分析部分参数改变后，对卫星运动轨迹的影响。  三、数学模型的建立与求解  1、模型的建立  设卫星质量为m1，所受外界万有引力为F, 加速度为a,则根据牛顿第二定律和万有引力定律（其中m1,m2为两个物体的质量，r是二者之间的距离），可对卫星的受力情况进行分析：  （1）单对象分析  设此时卫星的坐标为，卫星的坐标为，且之间存在万有引力，则两卫星之间的距离为    对于，其受到的万有引力单位方向向量为：    万有引力各方向分力为：  ，  由牛顿第二定律，就有  ，  即：  ，  （2）多对象分析  如果位于的卫星，同时受到位于的卫星、位于的卫星……位于的卫星的万有引力，则  万有引力各方向分力为：    根据牛顿第二定律，构建微分方程为：    通过求解上述微分方程，得到的关系式，进而得到卫星运动轨迹。  2、模型应用和求解  （1）单体模型：在此模型中，忽略了小物体对大物体的作用力，即系统各物体运动分析时，小行星围绕大行星运动，大行星可认为是固定的，只需考虑小行星的运动情况。以大物体为坐标原点，卫星的坐标为(x,y), 则两物体之间的距离为    构建微分方程如下：  ，  （2）二体模型  与单对象分析中的模型一致，可构建如下微分方程：    （3）三体模型  可构建如下微分方程：    四、实验结果及分析  （1）单体模型，给定初始条件下，卫星运动轨迹如下    图表 6 单体卫星运动轨迹  （2）二体模型，给定初始条件下，卫星运动轨迹如下    图表 7 二体卫星运动轨迹  （3）三体模型，给定初始条件下，卫星运动轨迹以及将改为0.2001后的卫星运动轨迹如下：    图表 8 三体卫星运动轨迹  可以看到，当参数变化不大时，二者的轨迹差别并不大。  （4）三体八字行轨道，给定初始条件下，卫星运动轨迹如下    图表 9 三体卫星运动轨道  检验三体卫星运动轨道时，设计实验如下，当的值在上下波动时，轨迹图如下，可以发现当时，八字轨道开始突变，    图表 10 三体卫星运动轨道的稳定性检验  五、附录（程序等）  单体问题：  clear,clc;  tspan =[0,20];  y0 = [0;1;2;0];  [t,y]=ode23(@signleObject,tspan,y0);  plot(y(:,1),y(:,3),[0],[0],'\*')  title("单体卫星运动轨迹")  legend("运动轨迹","大物体")  xlabel("X")  ylabel("Y")  function dy = signleObject(t,y)  g = 1;  m2 = 3;  r = sqrt(y(1).^2+y(3).^2);  dy=[y(2);  -g\*m2\*y(1)/r^3;  y(4);  -g\*m2\*y(3)/r^3;];  end  二体问题  clear,clc;  tspan =[0,100];  f0 = [2;0.2;2;-0.2;0;-0.01;0;0.01];  [t,f]=ode23(@doubleObject,tspan,f0);  plot(f(:,1),f(:,3),'b-\*',f(:,5),f(:,7),'r-o');  title("二体卫星运动轨迹")  legend("大物体","小物体")  xlabel("X")  ylabel("Y")  function df = doubleObject(t,f)  x1 = f(1); dx1 = f(2); y1 = f(3); dy1 = f(4);  x2 = f(5); dx2 = f(6); y2 = f(7); dy2 = f(8);  g = 1;  m1 = 0.3; m2 = 0.03;  r = sqrt((x1-x2).^2+(y1-y2).^2);  df=[dx1;  -g\*m2\*(x1-x2)/r^3;  dy1;  -g\*m2\*(y1-y2)/r^3;  dx2;  -g\*m1\*(x2-x1)/r^3;  dy2;  -g\*m1\*(y2-y1)/r^3];  end  三体问题  function df = TriObject(t,f,g,m)  x1 = f(1); dx1 = f(2); y1 = f(3); dy1 = f(4);  x2 = f(5); dx2 = f(6); y2 = f(7); dy2 = f(8);  x3 = f(9); dx3 = f(10); y3 = f(11); dy3 = f(12);  r12 = sqrt((x1-x2).^2+(y1-y2).^2);  r13 = sqrt((x1-x3).^2+(y1-y3).^2);  r23 = sqrt((x2-x3).^2+(y2-y3).^2);  df=[dx1;  -g\*m(2)\*(x1-x2)/r12^3-g\*m(3)\*(x1-x3)/r13^3;  dy1;  -g\*m(2)\*(y1-y2)/r12^3-g\*m(3)\*(y1-y3)/r13^3;  dx2;  -g\*m(1)\*(x2-x1)/r12^3-g\*m(3)\*(x2-x3)/r23^3;  dy2;  -g\*m(1)\*(y2-y1)/r12^3-g\*m(3)\*(y2-y3)/r23^3;  dx3;  -g\*m(1)\*(x3-x1)/r13^3-g\*m(2)\*(x3-x2)/r23^3;  dy3;  -g\*m(1)\*(y3-y1)/r13^3-g\*m(2)\*(y3-y2)/r23^3];  end  clear,clc;  tspan =[0,100];  g = 1;  m = [0.3,0.03,0.03];  f0 = [2;0.2;2;-0.2;0;0;0;0;-2;-0.2;-2;0.2];  [t,f]=ode23(@(t,y)TriObject(t,y,g,m),tspan,f0);  subplot(2,1,1)  plot(f(:,1),f(:,3),'b',f(:,5),f(:,7),'r',f(:,9),f(:,11),'k');  title("三体卫星运动轨迹-更改参数前")  legend("大物体","小物体1","小物体2")  xlabel("X")  ylabel("Y")  % 第二问修改参数并对比  subplot(2,1,2)  f0 = [2;0.20001;2;-0.2;0;0;0;0;-2;-0.2;-2;0.2];  [t,f]=ode23(@(t,y)TriObject(t,y,g,m),tspan,f0);  plot(f(:,1),f(:,3),'b',f(:,5),f(:,7),'r',f(:,9),f(:,11),'k');  title("三体卫星运动轨迹-更改参数后")  legend("大物体","小物体1","小物体2")  xlabel("X")  ylabel("Y")  ylabe三体八字行轨道探讨问题  clear,clc;  tspan =[0,100];  x0 = -0.970; dx0 = -0.466;  y0 = 0.243; dy0 = -0.433;  f0 = [x0;dx0;y0;dy0;-x0;dx0;-y0;dy0;0;-2\*dx0;0;-2\*dy0];  g = 1;  m = [1,1,1];  [t,f]=ode23(@(t,y)TriObject(t,y,g,m),tspan,f0);  plot(f(:,1),f(:,3),'b',f(:,5),f(:,7),'r',f(:,9),f(:,11),'k');  title("三体八字行轨道")  legend("卫星1","卫星2","卫星3")  xlabel("X")  ylabel("Y")  temp = f0(10);  for k=1:5  f0(10)=temp-10^(-k);  subplot(3,2,k)  [t,f]=ode23(@(t,y)TriObject(t,y,g,m),tspan,f0);  plot(f(:,1),f(:,3),'b',f(:,5),f(:,7),'r',f(:,9),f(:,11),'k');  title("k="+k)  % legend("卫星1","卫星2","卫星3")  end  基础实验6 迟滞微分方程  问题重述  在区间[0,1]上，求解如下迟滞微分方程    具有历史条件: 当t≤0时, y1(t)=exp(t+1), y2(t)=exp(t+0.5), y3(t)=sin(t+1), y4(t)=y1(t), y5(t)=y1(t)  请务必建立一个函数文件exer1h.m来计算历史，并提供句柄，作为dde23的历史输入。注意ddefun和历史函数都必须返回列向量。  实验过程  **exer1h.m 历史解代码**  function s = exer1h(t)  % Constant history function for DDEX1.  s = [exp(t+1);  exp(t+0.5);  sin(t+1);  exp(t+1);  exp(t+1);];  end  **ddefun.m 方程代码**  function dydt = ddefun(t,y,Z)  % Differential equations function for DDEX1.  ylag1 = Z(:,1);  ylag2 = Z(:,2);  dydt = [ylag1(5) + ylag1(3);  ylag1(1) + ylag2(2);  ylag1(3) + ylag2(1);  ylag1(5) \* ylag1(4);  ylag1(1);];  end  **main.m 主程序**  lags = [1,0.5];  tspan = [0,1];  sol = dde23(@ddefun,lags,@exer1h,tspan);  figure;  plot(sol.x,sol.y,'-o')  title('迟滞微分方程示例');  xlabel('Time t');  ylabel('Solution y');  legend('y\_1','y\_2','y\_3','y\_4','y\_5','Location','NorthWest');  实验结果及分析  实验结果如下图：    图表 11 时滞微分方程示例  总结与体会  1、🖍函数调用学习：本次实验中，遇到的很多新的函数调用，自我感觉理解起来并不容易，所以每次看到新函数都要花很长的时间来摸通函数的用法；  2、🖍odefun的构建的原理，一定要注意每一个左边的返回值，对应是右边表达式的一阶导数，这一点很重要；且求解精度上，ode45比ode23高很多，且求解速度也比ode23快；  3、🎯注意：ode\*\*类函数的tspan=[t0 tf]和y0，其中y0是和t0一一对应的，即有y0 = y0(t0)，故tspan的初始值不能随便乱写！  4、🖍初始值的选取也很重要，会直接影响函数的结果。  教师签名  2021年 4 月 7 日 | | | | | | | | |