Если первообразная некоторой функции f является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл вычисляется.

18.4. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

В этом и следующем пунктах будут рассмотрены два свойства неопределённого интеграла, часто оказывающиеся полезными при вычислении первообразных элементарных функций.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $\phi(t)$ определены соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t,причем $\phi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Если функция f имеет на Δ_x первообразную $F(x)$ и, следовательно,*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{18.10}$$

а функция ϕ дифференцируема на Δ_t, то функция $f(\phi(t))\phi^{'}(t)$ имеет на Δ_t первообразную $F(\phi(t))$ и

$$\int f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\phi(t)} \tag{18.11}$$

Доказательство. Функции f и F определены на промежутке Δ_x, и так как, по условию теоремы, справедливо включение $\phi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, то имеют смысл сложные функции $f(\phi(t))$ и $F(\phi(t))$. При этом так как

$$F^{'}(x) = f(x), x \in \Delta_x, \tag{18.12}$$

то по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = \frac{dF}{dx}|_{x=\phi(t)}\ \frac{d\phi(t)}{dt} = f(\phi(t))\phi^{'}(t), t \in \Delta_t.$$

Это и означает, что функция $f(\phi(t))\phi^{'}(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F(\phi(t))$. Отсюда, согласно определению интеграла, следует, что

$$\int f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt = F(\phi(t)) + C. \tag{18.13}$$

Подставив же в формулу (18.10) $x = \phi(t)$, получим

$$\int f(x)dx|_{x=\phi(t)} = F(\phi(t)) + C. \tag{18.14}$$

————

В формулах (18.13) и (18.14) равны правые части, значит, равны и левые, т.е. имеет место равенство (18.11). □

Формула (18.11) называется формулой интегрирования подстановкой, а именно подстановкой $\phi(t) = x$. Это название объясняется тем, что если формулу (18.11) записать в виде

$$\int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(x)dx|_{x=\phi(t)}, \tag{18.15}$$

то будет видно, что, для того чтобы вычислить интеграл $\int f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt = \int f(\phi(t))d\phi(t)$, можно сделать подстановку $x = \phi(t)$, вычислить интеграл $\int f(x)dx$ и затем вернуться к переменной t, положив $x = \phi(t)$.

Примеры. 1. Для вычисления интеграла $\int \cos ax\ dx$ естественно сделать подстановку $u = ax$, тогда

$$\int \cos ax\ dx = \frac{1}{a}\int \cos u\ du = \frac{1}{a}\sin u + C = \frac{1}{a}\sin ax + C, a \neq 0$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$ удобно применить подстановку $u = x^3 + a^2$:

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

3. При вычислении интегралов вида $\int \frac{\phi^{'}(x)dx}{\phi(x)}, \phi(x) \neq 0$, полезна подстановка $u = \phi(x)$:

$$\int \frac{\phi^{'}(x)}{\phi(x)}dx = \int \frac{d\phi(x)}{\phi(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|\phi(x)| + C.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg} x\ dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln(|\cos x)| + C.$$

Иногда, прежде чем применить метод интегрирования подстановкой, приходится проделать более сложные преобразования подынтегральной функции:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Отметим, что формулу (18.11) бывает целесообразно использовать и в обратном порядке, т.е. справа налево. Именно, иногда удобно вычисление интеграла $\int f(x)\ dx$ с помощью

————————