Если первообразная некоторой функции f является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл вычисляется.

18.4. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

В этом и следующем пунктах будут рассмотрены два свойства неопределенного интеграла, часто оказывающиеся полезными при вычислении первообразных элементарных функций.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Если функция f имеет на Δ_x первообразную $F(x)$ и, следовательно,*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{18.10}$$

а функция φ дифференцируема на Δ_t, то функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет на Δ_t первообразную $F(\varphi(t))$ и

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}. \tag{18.11}$$

Доказательство. Функции f и F определены на промежутке Δ_x, и так как, по условию теоремы, справедливо включение $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, то имеют смысл сложные функции $f(\varphi(t))$ и $F(\varphi(t))$. При этом так как

$$F'(x) = f(x),\ x \in \Delta_x, \tag{18.12}$$

то по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF}{dx}\Big|_{x=\varphi_{(t)}}\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in \Delta_t.$$

Это и означает, что функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F(\varphi(t))$. Отсюда, согласно определению интеграла, следует, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{18.13}$$

Подставив же в формулу (18.10) $x = \varphi(t)$, получим

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \tag{18.14}$$

В формулах (18.13) и (18.14) равны правые части, значит, равны и левые, т. е. имеет место равенство (18.11). □

Формула (18.11) называется формулой интегрирования подстановкой, а именно подстановкой $\varphi(t) = x$. Это название объясняется тем, что если формулу (18.11) записать в виде

$$\int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = \int f(x)\, dx\Big|_{x = \varphi(t)}, \tag{18.15}$$

то будет видно, что, для того чтобы вычислить интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int f(\varphi(t))\, d\varphi(t)$, можно сделать подстановку $x = \varphi(t)$, вычислить интеграл $\int f(x)\, dx$ и затем вернуться к переменной t, положив $x = \varphi(t)$.

Примеры. 1. Для вычисления интеграла $\int \cos ax\, dx$ естественно сделать подстановку $u = ax$, тогда

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\int \cos u\, du = \frac{1}{a}\sin u + C = \frac{1}{a}\sin ax + C,\ a \neq 0.$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{x dx}{x^2 + a^2}$ удобно применить подстановку $u = x^3 + a^2$:

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C.$$

3. При вычислении интегралов вида $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$, $\varphi(x) \neq 0$, полезна подстановка $u = \varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Иногда, прежде чем применить метод интегрирования подстановкой, приходится проделать более сложные преобразования подынтегральной функции:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Отметим, что формулу (18.11) бывает целесообразно использовать и в обратном порядке, т. е. справа налево. Именно, иногда удобно вычисление интеграла $\int f(x)\, dx$ с помощью