## § 5. Комплексные числа

**1.Определение комплексного числа.**

*1) Комплексные числа* - выражения вида $a + b_i$ ($a, b$ - действительные числа, $i$ - некоторый символ).Равенство $z = a + b_i$ означает, что комплексное число $a + b_i$ обозначено буквой z, а запись комплексного числа $z$ в виде $a + b_i$ называют *алгебраической формой комплексного числа.*

2) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называют *равными* и пишут $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

3) *Сложение* и *умножение* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ производится согласно формулам

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i,$$
$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

4) Комплексное число вида $a + 0 * i$ отождествляют с действительным числом $a(a+0*i = a)$, число вида $0+bi(b \neq 0)$ называют *чисто мнимым* и обозначают $b_i; i$ называют *мнимой единицей*. Действительное число $a$ называют *действительной частью*, а действительное число $b$ - *мнимой частью* косплексного числа $a + bi$.

5) Справедливо равенство

$$i^2 = -1, \tag{3}$$

а формулы (1) и (2) получаются по правилам сложения и умножения двучленов $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ с учетом равенства (3).

6) Операции вычитания и деления определяются как обратные для сложения и умножения, а для разности $z_1 - z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ имеют место формулы

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_! a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

7)Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 z_2 = z_2 z_1;$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),\ (z_1 z_2 z_3 = z_1(z_2 z_3);$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

**2.Модуль комплексного числа. Комплексно сопряженные числа.**

*1) Модулем комплексного числа $z = a + bi$* (обозначается $|z|$) называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, т.е.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) Для любых комплексных чисел $\mathrm{z}_1, z_2$

$$|z_1 z_2| = |z_1| * |z_2|;$$
если $z_2 \neq 0$, то $|\frac{z_1}{z_2}| = |\frac{z_1}{z_2}|$

3) Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\vec{z}$, т.е.

$$\vec{z} = a \vec{+} bi = a - bi.$$

Справедливы равенства

$$z * \vec{z} = |z^2|,\ \vec{\vec{z}}.$$

4) Для любых комплексных чисел $z_1$, $z_2$ верны равенства:

$$z_1 \vec{\pm}\, z_2 = \vec{z_1} \pm z_2,\ z_1\vec{z}_2 = z_1 \vec{*}\, z_2;$$
$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \frac{\vec{\vec{z_1}}}{z_2} = \frac{\vec{z_1}}{\vec{z_2}}.$$

5) Частное от деления комплексных чисел можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\vec{z_2}z_2\vec{z_2}}{=}\frac{z_1\vec{z_2}|z_2|^2}{},\ z_2 \neq 0.$$