связывающее среднее гармоническое, среднее геометрическое,сред- нее арифметическое и среднее квадратическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

47. Доказать, что если $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \le \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

48. Пусть положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последова- тельными членами арифметической прогрессии. Доказать, что

$$\sqrt{a_1a_n} \le \sqrt[n]{a_1, a_2, \ldots, a_n} \le \frac{a_1+a_n}{2}.$$

49. Доказать, что если A - наименьшее из положительных чисел$a_1, a_2, \ldots, a_n$, B - наибольшее, то справедливо неравенство:

1) A $\le \sqrt[n]{a_1, a_{2n}} \le B$; 2) $A \le \sqrt{\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n}} \le B$;

3) $A \le \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le B$;

50. Доказать, что для любых действитвельных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$,$b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство:

1) $(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2)^{\frac{1}{2}}$;

2) $|(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}} - (\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2)^{\frac{1}{2}}| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-b_k|$;

3) $((\sum\limits_{k=1}^{n}a_k)^2 + (\sum\limits_{k=1}^{n}b_k)^2)^{\frac{1}{2}} \le \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^{\frac{1}{2}}$.

51. Доказать, что если $a_1 \ge 0, a_2 \ge 0, \ldots, a_n \le 0$ и $p \in N$, то

$$(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)^p \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^p.$$

ОТВЕТЫ

1) $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$; 2) $3-\frac{2n+3}{2^n}$;

3) $\frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(x-1)^2}$ при $x \ne 1$; $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ при $x=1$;

4) $\frac{x^{n+2}-(n+1)x^2+nx}{(x-1)^2}$ при $x \ne 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$ при $x=1$.

9. 1) n; 2) $\frac{n^2(n+1)}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{n(n^2-1)}{3}$.

13. 1) $\frac{n}{3n+1}$; 2) $\frac{n}{4n+1}$; 3) $\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$;

4) $\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; 5) $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

15. 2) $S|n(3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

18. 1) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 2) $\frac{\sin 2nx 2\sin x}{}$; 3) $\frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2\sin x}$;

4) $\frac{n}{2} + \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2\sin x}$;

5) $\frac{3\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin\frac{3(n+1)}{2}x\sin\frac{3nx}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}}$;

6) $\frac{\cos\frac{3(n+1)x}{2}\sin\frac{3}{2}nx}{4\sin\frac{3x}{2}} + \frac{3\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}$.

19. 1) $x_n = \frac{3^n+(-1)^{n-1}}{4}x_1 + \frac{3}{4}(3^{n-1}+(-1)^n)x_0$;

2) $x_n = (2^n-1)x_1 - 2(2^(n-1)-1)x_0$;

3) $x_n = \frac{(a-1)^n-1}{a-2}x_1 - \frac{a-1}{a-2}((a-1)^(n-1)-1)x_0$ при $a \neq 2$; $x_n = nx_1 - (n-1)x_0$ при $a = 2$.

20. 1) $(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$;

2) $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$;

3) $(x+y)^7 = x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+21x^2y^5+7xy^6+y^7$;

4) $(a-b)^8 = a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$.

21. $C_{16}^6x^3$.

22. 1) -7; 2) -40, -74; 3) $36C_9^3+C_9^4=378$; 4) 245; 5) C_{16}^4.

23. $1)(n+2)2^(n-1); 2)(n-2)2^(n-1)+1; 3)2^(2n-1); 4)2^(2n-1)$;

5) $(-1)^mC_{n-1}^m$; 6) $(-1)^mC_{2m}^m$ при n = 2m; 0 при n = 2m + 1.

26. 1) $\frac{27}{64}$; 2) $C_{10}^3\frac{2^7}{3^10}$. **27.** $C_{30}^{12}2^9$.

§ 5. Комплексные числа

1.Определение комплексного числа.

1) Комплексные числа - выражения вида $a+b_i$ (a, b - действительные числа, i - некоторый символ).Равенство $z = a+b_i$ означает, что комплексное число $a+b_i$ обозначено буквой z, а запись комплексного числа z в виде $a+b_i$ называют *алгебраической формой комплексного числа.*

2) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называют *равными* и пишут $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

3) *Сложение* и *умножение* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ производится согласно формулам

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i,$$
$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

4) Комплексное число вида $a + 0 * i$ отождествляют с действительным числом $a(a+0*i = a)$, число вида $0+bi(b \neq 0)$ называют *чисто мнимым* и обозначают $b_i; i$ называют *мнимой единицей.* Действительное число a называют *действительной частью*, а действительное число b - *мнимой частью* косплексного числа $a + bi$.

5) Справедливо равенство

$$i^2 = -1, \tag{3}$$

а формулы (1) и (2) получаются по правилам сложения и умножения двучленов $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ с учетом равенства (3).

6) Операции вычитания и деления определяются как обратные для сложения и умножения, а для разности $z_1 - z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ имеют место формулы

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_! a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

7)Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 z_2 = z_2 z_1;$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),\ (z_1 z_2 z_3 = z_1(z_2 z_3);$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

2.Модуль комплексного числа. Комплексно сопряженные числа.

1) Модулем комплексного числа $z = a + bi$ (обозначается $|z|$) называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, т.е.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) Для любых комплексных чисел z$_1, z_2$

$$|z_1 z_2| = |z_1| * |z_2|;$$
$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } |\tfrac{z_1}{z_2}| = |\tfrac{z_1}{z_2}|$$

3) Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\vec{z}$, т.е.

$$\vec{z} = a \vec{+} bi = a - bi.$$

Справедливы равенства

$$z * \vec{z} = |z^2|,\ \vec{\vec{z}}.$$

4) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 верны равенства:

$$z_1 \vec{\pm}\, z_2 = \vec{z_1} \pm z_2,\ z_1\vec{z}_2 = z_1 \vec{*}\, z_2;$$
$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \frac{\vec{z_1}}{z_2} = \frac{\vec{z_1}}{\vec{z_2}}.$$

5) Частное от деления комплексных чисел можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\vec{z_2}z_2\vec{z_2}}{=}\frac{z_1\vec{z_2}|z_2|^2}{},\ z_2 \neq 0.$$