**103. Предел производной.** Полезный пример такого применения дает следующее замечание. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ и имеет конечную производную $f'(x)$ для $x>x_0$. Если существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=K,$$

то такова же будет и производная в точке $x_0$ справа. Действительно, при $0<\Delta x\leqslant H$ имеем равенство (3а). Так как аргумент $c$ производной содержится между $x_0$ и $x_0+\Delta x$, то при $\Delta x\to 0$ он стремится к $x_0$, так что правая часть равенства, а с нею и левая стремится к пределу $K$, что и требовалось доказать. Аналогичное утверждение устанавливается и для левосторонней окрестности точки $x_0$.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x)=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

в промежутке $[-1, 1]$. Если $-1<x<1$, то по обычным правилам дифференциального исчисления легко найти:

$$f'(x)=\arcsin x.$$

При $x\to 1-0$ $(x\to -1+0)$ эта производная, очевидно, стремится к пределу $\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; значит и при $x=\pm 1$ существуют (односторонние) производные: $f'(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{2}$.

Если вернуться к функциям $f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $f_2(x)=x^{\frac{2}{3}}$, которые мы рассматривали в п° **87**, то для них (при $x\gtrless 0$) имеем:

$$f_1'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},\qquad f_2'(x)=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

Так как первое из этих выражений при $x\to 0$ стремится к $+\infty$, а второе при $x\to\pm 0$ имеет, соответственно, пределы $\pm\infty$, то заключаем сразу, что $f_1(x)$ в точке $x=0$ имеет двустороннюю производную $+\infty$, в то время как для $f_2(x)$ в этой точке существуют лишь односторонние производные: $+\infty$ справа и $-\infty$ слева.

Из сказанного вытекает также, что, если конечная производная $f'(x)$ существует в некотором промежутке, то она представляет собой функцию, которая не может иметь обыкновенных разрывов или скачков: в каждой точке она либо непрерывна, либо имеет разрыв второго рода [ср. **88**, 2°].

**104. Обобщенная теорема о конечных приращениях.** Коши следующим образом обобщил доказанную в предыдущем номере теорему о конечных приращениях.

***Теорема Коши.*** *Пусть:* 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в замкнутом промежутке* $[a, b]$; 2) *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* $(a, b)$; 3) $g'(x)\neq 0$ *в промежутке* $(a, b)$.

*Тогда между* $a$ *и* $b$ *найдется такая точка* $c$, *что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

Эта формула носит название формулы Коши.

Доказательство. Установим сперва, что знаменатель левой части нашего равенства не равен нулю, так как в противном случае выражение это не имело бы смысла. Если бы было $g(b)=g(a)$, то, по теореме Ролля, производная $g'(x)$ в некоторой промежуточной точке была бы равна нулю, что противоречит условию 3); значит, $g(b)\neq g(a)$.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна в $[a, b]$, так как непрерывны $f(x)$ и $g(x)$; производная $F'(x)$ существует в $(a, b)$, именно, она равна

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

Наконец, прямой подстановкой убеждаемся, что $F(a)=F(b)=0$. Применяя названную теорему, заключаем о существовании между $a$ и $b$ такой точки $c$, что $F'(c)=0$. Иначе говоря,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0,$$

или

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

Разделив на $g'(c)$ (это возможно, так как $g'(c)\neq 0$), получаем требуемое равенство.

Ясно, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для получения формулы конечных приращений из формулы Коши следует положить $g(x)=x$.

В теоремах nn° **101, 102, 104** фигурирует, под знаком производной, некое *среднее значение* независимой переменной, которое — как указывалось — вообще нам неизвестно. Оно и производной доставляет, в некотором смысле, *среднее значение*. В связи с этим все эти теоремы называют «теоремами о средних значениях».

## § 2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

**105. Формула Тейлора для многочлена.** Если $p(x)$ есть целый многочлен степени $n$:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n, \tag{1}$$

то, последовательно дифференцируя его $n$ раз:

$$\begin{aligned}
p'(x)&=a_1+2\cdot a_2x+3\cdot a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1},\\
p''(x)&=1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+\ldots+(n-1)\,n\cdot a_nx^{n-2},\\
p'''(x)&=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)\,n\cdot a_nx^{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p^{(n)}(x)&=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot a_n
\end{aligned}$$

и полагая во всех этих формулах $x=0$, найдем выражения коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных при $x=0$:

$$a_0=p(0),\quad a_1=\frac{p'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{p''(0)}{2!},$$
$$a_3=\frac{p'''(0)}{3!},\quad \ldots,\quad a_n=\frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставим эти значения коэффициентов в (1):

$$p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (2)$$

Эта формула отличается от (1) записью коэффициентов.

Вместо того чтобы разлагать многочлен по степеням $x$, можно было бы взять его разложение по степеням $x-x_0$, где $x_0$ есть некоторое постоянное частное значение $x$:

$$p(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+$$
$$+\ldots+A_n(x-x_0)^n. \qquad (3)$$

Полагая $x-x_0=\xi$, $p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$, для коэффициентов многочлена

$$P(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\ldots+A_n\xi^n$$

имеем, по доказанному, выражения:

$$A_0=P(0),\quad A_1=\frac{P'(0)}{1!},\quad A_2=\frac{P''(0)}{2!},$$
$$A_3=\frac{P'''(0)}{3!},\quad \ldots,\quad A_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Но

$$P(\xi)=p(x_0+\xi),\quad P'(\xi)=p'(x_0+\xi),$$
$$P''(\xi)=p''(x_0+\xi),\ \ldots,$$

так что

$$P(0)=p(x_0),\quad P'(0)=p'(x_0),\quad P''(0)=p''(x_0),\ \ldots$$

и

$$\left.\begin{aligned}&A_0=p(x_0),\quad A_1=\frac{p'(x_0)}{1!},\quad A_2=\frac{p''(x_0)}{2!},\\&A_3=\frac{p'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\ A_n=\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!},\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

т. е. коэффициенты разложения (3) оказались выраженными через значения самого многочлена и его производных при $x=x_0$.