§ 4. ЧИСЛО e

48. Число e как предел последовательности. Мы используем здесь предельный переход для определения нового, до сих пор не встречавшегося нам числа, которое имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений.

Рассмотрим переменную

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и попытаемся применить к ней теорему n° **44**.

Так как с возрастанием показателя n основание степени здесь убывает, то «монотонный» характер переменной непосредственно

не усматривается. Для того чтобы убедиться в нем, прибегнем к разложению по формуле бинома:

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (1) \end{aligned}$$

Если от x_n перейти теперь к x_{n+1}, т. е. увеличить n на единицу, то прежде всего добавится новый $(n+2)$-й (положительный) член, каждый же из написанных $n+1$ членов увеличится, ибо любой множитель в скобках вида $1 - \frac{s}{n}$ заменится бо́льшим множителем $1 - \frac{s}{n+1}$. Отсюда и следует, что

$$x_{n+1} > x_n,$$

т. е. переменная x_n оказывается возрастающей.

Теперь покажем, что она к тому же ограничена сверху. Опустив в выражении (1) все множители в скобках, мы этим увеличим его, так что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Заменив, далее, каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с третьей) числом 2, мы еще увеличим полученное выражение, так что, в свою очередь,

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но прогрессия $\left(\text{начинающаяся членом } \frac{1}{2}\right)$ имеет сумму, меньшую единицы, поэтому $y_n < 3$, а значит и подавно $x_n < 3$.

Отсюда уже следует, по теореме n° **44**, что переменная x_n имеет конечный предел. По примеру Эйлера его обозначают всегда буквой e. Это число

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

мы и имели в виду. Вот первые 15 знаков его разложения в десятичную дробь:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ \ldots$$

Хотя последовательность

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2;\ x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25;$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}3703\ \ldots;\ \ldots;\ x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048\ \ldots;\ \ldots$$

и сходится к числу e, но медленно, и ею пользоваться для приближенного вычисления числа e — невыгодно. В следующем номере мы изложим удобный прием для этого вычисления, а также попутно докажем, что e есть число иррациональное.

49. Приближенное вычисление числа *e*. Вернемся к равенству (1). Если фиксировать k и, считая $n > k$, отбросить все члены последней части, следующие за $(k+1)$-м, то получим неравенство

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Увеличивая здесь n до бесконечности, перейдем к пределу; так как все скобки имеют пределом единицу, то найдем:

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Это неравенство имеет место при любом натуральном k. Таким образом, имеем

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

откуда ясно [в силу теоремы 3) n° **38**], что и

$$\lim y_n = e.$$

Переменная y_n для приближенного вычисления числа e гораздо удобнее, чем x_n. Оценим степень близости y_n к e. С этой целью рассмотрим сначала разность между любым значением y_{n+m} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, следующим за y_n, и самим y_n. Имеем

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right\}.$$

Если в скобках $\{\ldots\}$ заменить все множители в знаменателях дробей через $n+2$, то получим неравенство

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\},$$

которое лишь усилится, если заменить скобки суммой бесконечной прогрессии:

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Сохраняя здесь n неизменным, станем увеличивать m до бесконечности; переменная y_{n+m} (занумерованная значком m) принимает последовательность значений

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ \ldots,\ y_{n+m},\ \ldots,$$

очевидно сходящуюся к e. Поэтому получаем в пределе

$$e - y_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

или, наконец,

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!\,n}\ ^{*)}.$$

Если через θ обозначить отношение разности $e - y_n$ к числу $\frac{1}{n!\,n}$ (оно, очевидно, содержится между нулем и единицей), то можно написать также

$$e - y_n = \frac{\theta}{n!\,n}.$$

Заменяя здесь y_n его развернутым выражением, мы и придем к важной формуле:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n}, \qquad (2)$$

которая послужит отправной точкой для вычисления e. Отбрасывая последний, «дополнительный», член и заменяя каждый из оставленных членов его десятичным приближением, мы и получим приближенное значение для e.

Поставим себе задачей с помощью формулы (2) вы-

$$2{,}00000$$
$$\frac{1}{\ldots} = 0.50000$$