Предположим, что утверждение доказано для порядков $n = k - 1 \geq 1$. Покажем, что тогда оно справедливо также для порядка $n = k \geq 2$.

Заметим предварительно, что поскольку

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \left(\varphi^{(k-1)}\right)'(x_0) = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{\varphi^{(k-1)}(x) - \varphi^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0},$$

то существование $\varphi^{(k)}(x_0)$ предполагает, что функция $\varphi^{(k-1)}(x)$ определена на E хотя бы вблизи точки x_0. Уменьшая, если нужно, отрезок E, можно заранее считать, что функции $\varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(k-1)}(x)$, где $k \geq 2$, определены на всем отрезке E с концом x_0. Поскольку $k \geq 2$, то функция $\varphi(x)$ имеет на E производную $\varphi'(x)$ и по условию

$$(\varphi')'(x_0) = ... = (\varphi')^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, по предположению индукции

$$\varphi'(x) = o\Big((x - x_0)^{k-1}\Big) \quad \text{при} \quad x \to x_0, x \in E.$$

Тогда, используя теорему Лагранжа, получаем

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^{k-1}(x - x_0),$$

где ξ — точка, лежащая между x_0 и x, т.е. $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, а $\alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to E, \xi \in E$. Значит, при $x \to x_0, x \in E$ одновременно будем иметь $\xi \to E, \xi \in E$ и $\alpha(\xi) \to 0$, и поскольку

$$|\varphi(x)| \leq |\alpha(\xi)||x - x_0|^{k-1}|x - x_0|,$$

то проверено, что

$$\varphi(x) = o\Big((x - x_0)^{k}\Big) \quad \text{при} \quad x \to x_0, x \in E.$$

Таким образом, утверждение леммы 2 проверено принципом математической индукции. ▶

Соотношение (33) называется *локальной формулой Тейлора*, поскольку указанный в нем вид остаточного члена (так называемая *форма Пеано*)

$$r_n(x_0; x) = o((x - x_0)^n) \tag{34}$$

позволяет делать заключения только об асимптотическом характере связи полиному Тейлора и функции при $x \to x_0, x \in E$.

Формула (33) удобна, таким образом, при вычислении пределов и описании асимптотики функции при $x \to x_0, x \in E$, но она не может служить для приближенного вычисления значений функции до тех пор, пока нет фактической оценки величины $r_n(x_0; x) = o((x - x_0)^n)$.

Подведем итоги. Мы опредилили полином Тейлора

$$P_n(x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

написали формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x)$$

и получили следующие ее важнейшие конкретизации:

Если f имеет производную порядка n + 1 в интервале с концами x_0, x, *то*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (35)$$

где ξ *— точка, лежащая между* x_0 *и* x.

Если f *имеет в точке* x_0 *все производные до порядка* $n \geq 1$ *включительно, то*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (36)$$

Соотношение (35), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагрнажа*, очевидно, является обобщением теоремы Лагранжа, в которую оно превращается при $n = 0$.

Соотношение (36), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, очевидно, является обобщением определения дифференцируемости функции в точке, в которое оно переходит при $n = 1$.

Заметим, что формула (35) практически всегда более содержательна, ибо, с одной стороны, как мы видели, она позволяет оценивать обсолютную величину остаточного члена, а с другой, например, при ограниченности $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности x_0 из нее вытекает также асимптотическая формула

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+O\big((x-x_0)^{n+1}\big). \quad (37)$$

Так что для бесконечно дифференцируемых функций, с которыми в подавляющем большинстве случаев имеет дело классический анализ, формула (35) содержит в себе локальную формулу (36).

В частности, на основании формулы (37) и разнообразных выше примеров $3-10$ можно теперь выписать слудующую таблицу асимптотических формул при $x\to 0$:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+O(x^{n+1}),$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+O(x^{2n+2}),$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+...+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+O(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+...+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+O(x^{2n+3}),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+O(x^{n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O(x^{n+1}).$$

Рассмотрим теперь еще некоторые примеры использования формулы Тейлора.

Пример 11. Напишем полином, позволяющий вычислять значение функции $\sin x$ на отрезке $-1\le x\le 1$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 10^{-3}.

В качестве такого многочлена можно взять тейлоровский многочлен подходящей степени, получаемый разложением функции $\sin x$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Поскольку

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 \cdot x^{2n+2} + r_2 n + 2(0; x),$$

где по формуле Лагранжа

$$r_2 n + 2(0; x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+3)\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

то при $|x| \leq 1$

$$|r_2 n + 2(0; x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Но $\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3}$ при $n \geq 2$. Таким образом, с нужной точностью на отрезке $|x| \leq 1$ имеем $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$.

Пример 12. Покажем, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Имеем

$$\operatorname{tg}' x = \cos^{-2} x,$$

$$\operatorname{tg}'' x = 2\cos^{-3} x \sin x,$$

$$\operatorname{tg}''' x = 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}' 0 = 1$, $\operatorname{tg}'' 0 = 0$, $\operatorname{tg}''' 0 = 2$ и написанное соотношение следует из локальной формулы Тейлора.

Пример 13. Пусть $\alpha > 0$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{n^\alpha}$. При $\alpha > 0 \frac{1}{n^\alpha} \to 0$, когда $n \to \infty$. Оценим порядок члена ряда

$$\ln\cos\frac{1}{n^\alpha} = \ln\left(1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Таким образом, мы имеем знакопостоянный ряд, члены которого эквивалентны членам ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n^{2\alpha}}$. Поскольку последний ряд сходится только при $\alpha > \frac{1}{2}$, то в указанной области $\alpha > 0$ исходный ряд сходится лишь при $\alpha > \frac{1}{2}$ (см. задачу 16b).