$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arcctg} x + \tilde{c}, \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c,$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

Каждая из этих формул рассматривается на тех промежутках вещественной оси $\mathbb{R}$, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то постоянная c в правой части может меняться от промежутка к промежутку.

Рассмотрим теперь некоторые примеры, показывающие соотношения (5), (6) и (7) в работе.

Сделаем предварительно следующее общее замечание.

Поскольку, найдя одну какую-нибудь первообразную заданной на промежутке функции, остальные можно получить добавлением постоянных, то условимся для сокращения записи всюду в дальнейшем произвольную постоянную добавлять только к окончательному результату, представляющему из себя конкретную первообразную данной функции.

а. Линейность неопределенного интеграла. Этот заголовок должен означать, что в силу соотношения (5) первообразную от линейной комбинации функций можно искать как линейную комбинацию первообразных этих функций.

Пример 3.

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,dx = a_0 \int 1\,dx + a_1 \int x\,dx + \ldots + a_n \int x^n\,dx =$$
$$= c + a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}.$$

Пример 4.

$$\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\,dx =$$
$$= \int x^2\,dx + 2\int x^{1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^{3/2} + \ln|x| + c.$$

Пример 5.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c.$$

b. Интегрирование по частям. Формулу (6) можно переписать в виде

$$u(x)v(x) = \int u(x)\,dv(x) + \int v(x)\,du(x) + c$$

или, что то же самое, в виде

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x) + c. \tag{6'}$$

Это означает, что при отыскании первообразной функции $u(x)v'(x)$ дело можно свести к отысканию первообразной функции $v(x)u'(x)$, перебросив дифференцирование на другой сомножитель и частично проинтегрировав функцию, как показано в (6′), выделив при этом член $u(x)v(x)$. Формулу (6′) называют формулой *интегрирования по частям*.

Пример 6.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c.$$

Пример 7.

$$\int x^2e^x\,dx = \int x^2\,de^x = x^2e^x - \int e^x\,dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx =$$
$$= x^2e^x - 2\int x\,de^x = x^2e^x - 2\Big(xe^x - \int e^x\,dx\Big) =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2-2x+2)e^x + c.$$

c. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула (7) показывает, что при отыскании первообразной функции $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$ можно поступать следующим образом:

$$\int (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx = F(x)+c = F(\varphi(t))+c,$$

т. е. сначала произвести замену $\varphi(t)=x$ под знаком интеграла и перейти к новой переменной x, а затем, найдя первообразную как функцию от x, вернуться к старой переменной t заменой $x=\varphi(t)$.

Пример 8.

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + c = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)+c.$$

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{du}{\operatorname{tg} u \cos^2 u} =$$
$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} u)}{\operatorname{tg} u} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c = \ln|\operatorname{tg} u| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

Мы рассмотрели несколько примеров, в которых использовались порознь свойства a, b, c неопределенного интеграла. На самом деле в большинстве случаев эти свойства используются совместно.

Пример 10.

$$\int \sin 2x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x - \sin x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\int \sin 5x\, d(5x) + \cos x\right) = \frac{1}{10}\int \sin u\, du + \frac{1}{2}\cos x =$$
$$= -\frac{1}{10}\cos u + \frac{1}{2}\cos x + c = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + c.$$

Пример 11.

$$\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int x\, d\arcsin x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du =$$
$$= x\arcsin x + u^{1/2} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Пример 12.

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, d\cos bx =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\, de^{ax} =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\, d\sin bx =$$
$$= \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2}e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\, dx.$$

Из полученного равенства заключаем, что

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c.$$

К этому результату можно было бы прийти, воспользовавшись формулой Эйлера и тем обстоятельством, что первообразной функции $e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$ является функция

$$\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + i\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$