связывающее среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратическое чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

47. Доказать, что если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \, \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n}.$$

48. Пусть положительные числа $a_1, a_2, ..., a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Доказать, что

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

49. Доказать, что если A — наименьшее из положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, B — наибольшее, то справедливо неравенство:

1) $A \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leqslant B$; 2) $A \leqslant \sqrt{\dfrac{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m}{n}} \leqslant B$;

3) $A \leqslant \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}} \leqslant B$.

50. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ справедливо неравенство:

1) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$;

2) $\left|\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$;

3) $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$.

51. Доказать, что если $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, ..., $a_n \geqslant 0$ и $p \in N$, то

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

ОТВЕТЫ

7. 1) $\dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$; 2) $3 - \dfrac{2n+3}{2^n}$;

3) $\dfrac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$ при $x \neq 1$; $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ при $x = 1$;

4) $\dfrac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(x-1)^2}$ при $x \neq 1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $x = 1$.

9. 1) n; 2) $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$; 3) 0; 4) $\dfrac{n(n^2-1)}{3}$.

13. 1) $\dfrac{n}{3n+1}$; 2) $\dfrac{n}{4n+1}$; 3) $\dfrac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$;

4) $\dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; 5) $\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

15. 2) $S_n(3) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

18. 1) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 2) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$; 3) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$;

4) $\dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$;

5) $\dfrac{3\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}} - \dfrac{\sin\dfrac{3(n+1)}{2}x\sin\dfrac{3nx}{2}}{4\sin\dfrac{3x}{2}}$;

6) $\dfrac{\cos\dfrac{3(n+1)x}{2}\sin\dfrac{3}{2}nx}{4\sin\dfrac{3x}{2}} + \dfrac{3\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}}$.

19. 1) $x_n = \dfrac{3^n + (-1)^{n-1}}{4}x_1 + \dfrac{3}{4}(3^{n-1} + (-1)^n)x_0$;

2) $x_n = (2^n - 1)x_1 - 2(2^{n-1} - 1)x_0$;

3) $x_n = \dfrac{(\alpha-1)^n - 1}{\alpha - 2}x_1 - \dfrac{\alpha - 1}{\alpha - 2}((\alpha-1)^{n-1} - 1)x_0$ при $\alpha \neq 2$; $x_n = nx_1 - (n-1)x_0$ при $\alpha = 2$.

20. 1) $(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$;

2) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$;

3) $(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$;

4) $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

21. $C_{16}^6 x^3$.

22. 1) -7; 2) -40, -74; 3) $36C_9^3 + C_9^4 = 378$; 4) 245; 5) C_{16}^4.

23. 1) $(n+2)2^{n-1}$; 2) $(n-2)2^{n-1} + 1$; 3) 2^{2n-1}; 4) 2^{2n-1};
5) $(-1)^m C_{n-1}^m$; 6) $(-1)^m C_{2m}^m$ при $n = 2m$; 0 при $n = 2m+1$.

25. 1) 60; 2) 625, 7000, 7000, 1120, 16.

26. 1) $\dfrac{27}{64}$; 2) $C_{10}^3\dfrac{2^7}{3^{10}}$. **27.** $C_{30}^{12}2^9$.

§ 5. Комплексные числа

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение комплексного числа.

1) *Комплексные числа* — выражения вида $a + bi$ (a, b — действительные числа, i — некоторый символ). Равенство $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z, а запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называют *алгебраической формой комплексного числа*.

2) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называют ***равными*** и пишут $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

3) *Сложение* и *умножение* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ производится согласно формулам

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{2}$$

4) Комплексное число вида $a + 0 \cdot i$ отождествляют с действительным числом a $(a + 0 \cdot i = a)$, число вида $0 + bi$ $(b \neq 0)$ называют *чисто мнимым* и обозначают bi; i называют *мнимой единицей*. Действительное число a называют *действительной частью*, а действительное число b — *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$.

5) Справедливо равенство

$$i^2 = -1, \tag{3}$$

а формулы (1) и (2) получаются по правилам сложения и умножения двучленов $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ с учетом равенства (3).

6) Операции вычитания и деления определяются как обратные для сложения и умножения, а для разности $z_1 - z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ имеют место формулы

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

7) Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

2. Модуль комплексного числа. Комплексно сопряженные числа.

1) *Модулем комплексного числа* $z = a + bi$ (обозначается $|z|$) называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, т. е.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы равенства

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3) Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Справедливы равенства

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

4) Для любых комплексных чисел z_1, z_2 верны равенства:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z}_2;$$

$$\text{если } z_2 \neq 0, \text{ то } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

5) Частное от деления комплексных чисел можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \tag{4}$$