$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arctg} x + \tilde{c}, \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c,$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

Каждая из этих формул рассматривается на текущих промежутках вещественной оси $\mathbb{R}$,на которых определена соответсвующая подынтегральная функция.Если таких промежутков несколько,то постоянная c в правой части может меняться от промежутка к промежутку.

Рассмотрим теперь некоторые примеры,показывающие соотношения (5),(6) и (7) в работе.

Сделаем предварительно следующее общее замечание.

Поскольку, найдя одну какую-нибудь первообразную заданной на промежутке функции, остальные можно получить добавлением постоянных, то условимся для сокращения записи всюду в дальнейшем произвольную постоянную добавлять только к окнчательному результату, представляющему из себя конкретную первообразную данной функции.

a. Линейность неопределенного интеграла. Этот заголовок должен означать, что в силу соотношения (5) первообразную от линейной комбинаций функций можно искать как линейную комбинацию первообразных этих функций.

Пример 3.

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,dx = a_0 \int 1\,dx + a_1 \int x\,dx + \ldots + a_n \int x^n\,dx =$$

$$= c + a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}$$

Пример 4.

$$\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int x^2\, dx + 2\int x^{1/2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^{3/2} + \ln|x| + c.$$

Пример 5.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c.$$

b. Интегрирование по частям. Формулу (6) можно переписать в виде

$$u(x)v(x) = \int u(x)\, dv(x) + \int v(x)\, du(x) + c.$$

или, что то же самое, в виде

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x) + c. \tag{6$'$}$$

Это означает, что при отыскании первообразной функции $u(x)v'(x)$ дело можно свести к отысканию первообразной функции $v(x)u'(x)$, перебросив дифференцирование на другой сомножитель и частично проинтегрировав функцию,как показано в $(6')$, выделив при этом член $u(x)v(x)$. Формулу $(6')$ называют формулой итегрирования по частям.

Пример 6.

$$\int \ln x\, dx = xlnx - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - \int 1\, dx =$$

$$= x\ln x - x + c.$$

Пример 7.

$$\int x^2 e^x\, dx = \int x^2\, de^x = x^2e^x - \int e^x\, dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x\, dx =$$

$$= x^2e^x - 2\int x\, de^x = x^2e^x - 2\Big(xe^x - 2\int e^x\, dx\Big) =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

c. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула (7) показывает, что при отыскании первообразной функции $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$ можно поступать следующим образом

$$\int(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt=\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)=\int f(x)\,dx=F(x)+c=F(\varphi(t))+c,$$

т.е. сначала произвести замену $\varphi(t)=x$ под знаком интеграла и перейти к новой переменной x, а затем, найдя первообразную как функцию от x, вернуться к старой переменной t заменой $x=\varphi(t)$.

Пример 8.

$$\int\frac{t\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln|x|+c=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+c.$$

Пример 9.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d(\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{du}{\operatorname{tg}u)\cos^2 u}=$$

$$=\int\frac{d(\operatorname{tg}u)}{\operatorname{tg}u}=\int\frac{dv}{v}=\ln|v|+c=\ln|\operatorname{tg}u|+c=\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+c.$$

Мы рассмотрели несколько примеров, в которых использовались порозень свойства a, b, c неопределенного интеграла. На самом деле в большинстве случаев эти свойства используются совместно.

Пример 10.

$$\int\sin 2x\cos 3\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)\,dx=\frac{1}{2}\Big(\int\sin 5x\,dx-\int\sin x\,dx\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}\int\sin 5x\,d(5x)+\cos x\Big)=\frac{1}{10}\int\sin u\,du+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{10}\cos u+\frac{1}{2}\cos x+c=$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x+c.$$

Пример 11.

$$\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int x\,d\arcsin x=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du=$$

$$=x\arcsin x+u^{1/2}+c=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c.$$

Пример 12.

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\,de^{ax} = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,d\cos bx =$$

$$= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\,de^{ax} =$$

$$= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\,d\sin bx =$$

$$= \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2}e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Из полученного равенства заключаем, что

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c.$$

К этому результату можно было бы прийти, воспользовавшись формулой Эйлера и тем обстоятельством, что первообразная функции $e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$ является функция

$$\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + i\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$$