Пример 2. Функция $F(x) = arcctg\,\frac{1}{x}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ как на промежутке всех положительных чисел, так и на полуоси отрицательных чисел, ибо при $x \neq 0$

$$F^{'}(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} = f(x).$$

Как обстоит дело с существованием первообразной и каково множество первообрахных данной функции?

В интегральном исчислении будет доказан фундаментальный факт о том, что любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.

Мы приводим этот факт для информации читателя, а в этом параграфе используется, по существу, лишь следующая, уже известная нам (см. гл. V, §3, п.1) характеристика множества первообразных данной функции на числовом промежутке, полученная из теоремы Лагранжа.

Утверждение 1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на одном и том же промежутке, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на этом промежутке.*

Условие, что сравнение F_1 и F_2 ведется на связном промежутке, как отмечалось при доказательстве этого утверждения, весьма существенно. Это можно заметить также из сопоставления примеров 1 и 2, в которых производные функций $F_1(x) = arctg\,x$ и $F_2(x) = arcctg\,\frac{1}{x}$ совпадают в области $\mathbb{R} \setminus 0$ их совместного определения. Однако

$$F_1(x) - F_2(x) = arctg\,x - arcctg\,\frac{1}{x} = arctg\,x - arctg\,x = 0,$$

если $x > 0$, в то время как $F_1(x) - F_2(x) \equiv -\pi$ при $x < 0$, ибо при $x < 0$ имеем $arcctg\,\frac{1}{x} = \pi + arctg\,x.$

Как и операция взятия дифференциала, имеющая свое название «дифференцирование» и свой математический символ $dF(x) = F^{'}(x)\,dx$, операция перехода к первообразной имеет свое название «неопределенное интегрирование» и свой математический символ

$$\int f(x)\,dx, \tag{1}$$

называемый *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на заданном промежутке.

Таким образом, символ (1) мы будем понимать как обозначение любой из первообразных функции f на рассматриваемом промежутке.

В символе (1) знак $\int$ называется знаком *неопределенного интеграла*, f— *подынтегральная функция* , а $f(x)\,dx$— *подынтегральное выражение.*

Из утверждения 1 следует, что если $F(x)$— какая-то конкретная первообразная функции $f(x)$ на промежутке, то на этом промежутке

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

т.е. любая другая первообразная может быть получена из конкретной $F(x)$ добавлением некоторой постоянной.

Если $F^{'}(x) = f(x)$, т.е. F— первообразная для f на некотором промежутке, то из (2) имеем

$$\boxed{d\int f(x)\,dx = dF(x) = F^{'}\,dx = f(x)\,dx.} \tag{3}$$

Кроме того, в соответствии с понятием неопределенного интеграла как любой из первообразных, из (2) следует так же, что

$$\boxed{\int dF(x) = \int F^{'}(x)\,dx = F(x) + C.} \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) устанавливают взаимность операций дифференцирования и неопределенного интегрирования. Эти операции взаимно обратны с точностью до появляющейся в формуле (4) неопределенной постоянной C.

До сих пор мы обсуждали лишь математическую природу постоянной C в формуле (2). Укажем теперь ее физический смысл на простейшем примере. Пусть точка движется по прямой так, что ее скорость $v(t)$ известна как функция времени (например, $v(t) \equiv v$). Если $x(t)$— координата точки в момент tб то функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = v(t)$, т.е. является первообразной для $v(t)$. Можно ли по скорости $v(t)$ в каком-то интервале времени восстановить положение точки на оси? Ясно, что нет. По скорости и промежутку времени можно определить величину пройденного за это время пути s, но не положение на оси. Однако это положение также будет полностью определено, если указать его хотя бы в какой-то момент, например при $t = 0$, т.е. задать начальное условие $x(0) = x_0$. До задания начального условия закон движения $x(t)$ мог быть любым среди законов вида $x(t) = \tilde{x}(t) + c$, где $\tilde{x}(t)$— любая конкретная первообразная функции $v(t)$, а c— произвольная постоянная. Но после задания начального условия $x(0) = x_0$ вся неопределенность исчезает, ибо мы должны иметь $x(0) = \tilde{x}(0) + c = x_0$, т.е. $c = x_0 - \tilde{x}(0)$, и $x(t) = x_0 + [\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0)]$. Последняя формула вполне физична, поскольку произвольная первообразная $\tilde{x}$ участвует в формуле только в виде разности, определяя пройденный путь или величину смещения от известной начальной метки $x(0) = x_0$.

2. Основные общие приемы отыскания первообразной. В соответствии с определением символа (1) неопределенного интеграла, он обозначает функцию, производная которой равна подынтегральной функции. Исходя из этого определения, с учетом соотношения (2) и законов дифференцирования можно утверждать, что справедливы следующие соотношения:

a. $$\int (\alpha u(x) + \beta v(x))\, dx = \alpha \int u(x)\, dx + \beta \int v(x)\, dx + c. \qquad (5)$$

b. $$\int (uv)^{'}(x)\, dx = \int u^{'}(x)v(x)\, dx + \int u(x)v^{'}(x)\, dx + c. \qquad (6)$$

c.*Если на некотором промежутке* I_x

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

а $\varphi : I_t \to I_x$— *гладкое (т.е. непрерывно дифференцируемое) отображение промежутка* $I_t I_x$,

$$\int (f \circ \varphi)(t)\varphi^{'}(t)\, dt = (F \circ \varphi)(t) + c. \qquad (7)$$

Равенства (5), (6), (7) проверяются прямым дифференцированием их левой и правой частей с использованием в (5) линейности дифференцирования, в (6) правила дифференцирования произведения и в (7) правила дифференцирования композиции функций.

Подобно правилам дифференцирования, позволяющим дифференцировать линейные комбинации, произведения и композиции уже известных функций, соотношения (5), (6), (7), как мы увидим, позволяют в ряде случаев сводить отыскание первообразной данной функции либо к построению первообразных более простых функций, либо вообще к уже известным первообразным. Набор таких известных первообразных может составить, например, следующая краткая таблица неопределенных интегралов, полученная переписыванием таблицы производных основных элементарных функций (см. §2, п.3):

$$\int x^a\, dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c \qquad (a \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + c,$$

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{ln\, a}a^x + c \qquad (0 < a \neq 1),$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c,$$

$$\int sin\, x\, dx = -cos\, x + c,$$

$$\int cos\, x\, dx = sin\, x + c,$$

$$\int \frac{1}{cos^2\, x}\, dx = tg\, x + c,$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\, dx = -ctg\, x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} arcsin\, x + c, \\ -arccos\, x + \tilde{c}, \end{cases}$$