Найти пределы:

2806. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

2808. а) $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Законно ли почленное дифференцирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{x}{n^2}?$$

2810. Законно ли почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

на сегменте [0, 1]?

2811. 1. Пусть $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ - бесконечно дифференцируемая функция и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)(n=1,2,...)$ сходится равномерно на каждом конечном интервале (a,b) к функции $\phi(x)$. Доказать, что $\phi(x)=Ce^x$, где C - постоянная величина. Рассмотреть пример $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $n=1,2,....$

2. Пусть функции $f_n(x)(n=1,2,...)$ определены и ограничены на $(-\infty,+\infty)$ и $f_n(x)\rightrightarrows\phi(x)$ на любом сегменте $[a,b]$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x f(x)=\sup_x\phi(x)?$$

§5. Степенные ряды

1. Интервал сходимости. Для каждого степенного ряда

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-\alpha) + .. + \alpha_n(x-\alpha)^n + ...$$

существует замкнутый *интервал* сходимости: $|x - \alpha| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится, а вне расходится. *Радиус сходимости* R определяется по *формуле Коши-Адамара*

$$\tfrac{1}{R} = \overline{\lim_{\mathrm{n}\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} |\tfrac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{a_{n+1}}}|,$$

если этот предел существует.

2. Теорема Абеля. Если степенной ряд $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (|x| < R)$ сходится в концевой точке $x = R$ интервала сходимости, то

$$S(R) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{R}-0} \mathrm{S(x)}$$

3. Ряд Тейлора. Аналитическая в точке a функция $f(x)$ в некоторой окресности этой точки разлагается на степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Остаточный член этого ряда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

может быть представлен в виде

$$R_n(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \ (0 < \theta < 1)$$

(*форма Лагранжа*) или в виде

$$R_n(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{(n)!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1} \ (0 < \theta_1 < 1)$$

(*форма Коши*).

Необходимо помнить следующие пять основных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...\ (-\infty < x < +\infty)$

II. $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...\ (-\infty < x < +\infty)$

III. $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...\ (-\infty < x < +\infty)$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ...$

$$+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...\ (-1 < x < +1)$$

V. $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...\ (-1 < x \leq +1)$

4. Действия со степенными рядами. Внутри общего интервала сходимости $|x-a| < R$ имеем:

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-a)^n\ ;$$

$$\text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\ ,$$

где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0$;

$$\text{в)}\ \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$$

$$\text{г)}\ \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}(x-a)^{n+1}.$$

5. Степенные ряды в комплексной области. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

где

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

Для каждого такого ряда имеется замкнутый *круг сходимости* $|x - a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится (и при том абсолютно), а вне расходится. *Радиус сходимости* R равен радиусу сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

в действительной области.