Пример 2. Функция $F(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ как на промежутке всех положительных чисел, так и на полуоси отрицательных чисел, ибо при $x\neq 0$

$$F'(x)=-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}=f(x).$$

Как обстоит дело с существованием первообразной и каково множество первообразных данной функции?

В интегральном исчислении будет доказан фундаментальный факт о том, что любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.

Мы приводим этот факт для информации читателя, а в этом параграфе используется, по существу, лишь следующая, уже известная нам (см. гл. V, § 3, п. 1) характеристика множества первообразных данной функции на числовом промежутке, полученная из теоремы Лагранжа.

Утверждение 1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на одном и том же промежутке, то их разность $F_1(x)-F_2(x)$ постоянна на этом промежутке.*

Условие, что сравнение F_1 и F_2 ведется на связном промежутке, как отмечалось при доказательстве этого утверждения, весьма существенно. Это можно заметить также из сопоставления примеров 1 и 2, в которых производные функций $F_1(x)=\operatorname{arctg}x$ и $F_2(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ совпадают в области $\mathbb{R}\setminus 0$ их совместного определения. Однако

$$F_1(x)-F_2(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}x=0,$$

если $x>0$, в то время как $F_1(x)-F_2(x)\equiv-\pi$ при $x<0$, ибо при $x<0$ имеем $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\pi+\operatorname{arctg}x$.

Как и операция взятия дифференциала, имеющая свое название «дифференцирование» и свой математический символ $dF(x)=F'(x)\,dx$, операция перехода к первообразной имеет свое название «неопределенное интегрирование» и свой математический символ

$$\int f(x)\,dx, \tag{1}$$

называемый *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на заданном промежутке.

Таким образом, символ (1) мы будем понимать как обозначение любой из первообразных функции f на рассматриваемом промежутке.

В символе (1) знак $\int$ называется знаком *неопределенного интеграла*, f — *подынтегральная функция*, а $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*.

Из утверждения 1 следует, что если $F(x)$ — какая-то конкретная первообразная функции $f(x)$ на промежутке, то на этом промежутке

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

т. е. любая другая первообразная может быть получена из конкретной $F(x)$ добавлением некоторой постоянной.

Если $F'(x) = f(x)$, т. е. F — первообразная для f на некотором промежутке, то из (2) имеем

$$\boxed{d\int f(x)\,dx = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.} \tag{3}$$

Кроме того, в соответствии с понятием неопределенного интеграла как любой из первообразных, из (2) следует также, что

$$\boxed{\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.} \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) устанавливают взаимность операций дифференцирования и неопределенного интегрирования. Эти операции взаимно обратны с точностью до появляющейся в формуле (4) неопределенной постоянной C.

До сих пор мы обсуждали лишь математическую природу постоянной C в формуле (2). Укажем теперь ее физический смысл на простейшем примере. Пусть точка движется по прямой так, что ее скорость $v(t)$ известна как функция времени (например, $v(t) \equiv v$). Если $x(t)$ — координата точки в момент t, то функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = v(t)$, т. е. является первообразной для $v(t)$. Можно ли по скорости $v(t)$ в каком-то интервале времени восстановить положение точки на оси? Ясно, что нет. По скорости и промежутку времени можно определить величину пройденного за это время пути s, но не положение на оси. Однако это положение также будет полностью определено, если указать его хотя бы в какой-то момент, например при $t = 0$, т. е. задать начальное условие $x(0) = x_0$. До задания начального условия закон движения $x(t)$ мог быть любым среди законов вида $x(t) = \tilde{x}(t) + c$, где $\tilde{x}(t)$ — любая конкретная первообразная функции $v(t)$, а c — произвольная постоянная. Но после задания начального условия $x(0) = x_0$ вся неопределенность исчезает, ибо мы должны иметь $x(0) = \tilde{x}(0) + c = x_0$, т. е. $c = x_0 - \tilde{x}(0)$, и $x(t) = x_0 + [\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0)]$. Последняя формула вполне физична, поскольку произвольная первообразная $\tilde{x}$ участвует в формуле только в виде разности, определяя пройденный путь или величину смещения от известной начальной метки $x(0) = x_0$.

2. Основные общие приемы отыскания первообразной. В соответствии с определением символа (1) неопределенного интеграла, он обозначает функцию, производная которой равна подынтегральной функции. Исходя из этого определения, с учетом соотношения (2) и законов дифференцирования можно утверждать, что справедливы следующие соотношения:

a. $$\int (\alpha u(x) + \beta v(x))\,dx = \alpha \int u(x)\,dx + \beta \int v(x)\,dx + c. \tag{5}$$

b. $$\int (uv)'(x)\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx + c. \tag{6}$$

c. *Если на некотором промежутке* I_x

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

а $\varphi : I_t \to I_x$ *— гладкое (т. е. непрерывно дифференцируемое) отображение промежутка* I_t *в* I_x, *то*

$$\int (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi)(t) + c. \tag{7}$$

Равенства (5), (6), (7) проверяются прямым дифференцированием их левой и правой частей с использованием в (5) линейности дифференцирования, в (6) правила дифференцирования произведения и в (7) правила дифференцирования композиции функций.

Подобно правилам дифференцирования, позволяющим дифференцировать линейные комбинации, произведения и композиции уже известных функций, соотношения (5), (6), (7), как мы увидим, позволяют в ряде случаев сводить отыскание первообразной данной функции либо к построению первообразных более простых функций, либо вообще к уже известным первообразным. Набор таких известных первообразных может составить, например, следующая краткая таблица неопределенных интегралов, полученная переписыванием таблицы производных основных элементарных функций (см. § 2, п. 3):

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c \qquad (0 < a \neq 1),$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + \tilde{c}, \end{cases}$$