Найти пределы:

2806. $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$.

2808. а) $\lim\limits_{x \to +0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Законно ли почленное дифференцирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}?$$

2810. Законно ли почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right)$$

на сегменте $[0, 1]$?

2811. 1. Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на каждом конечном интервале (a, b) к функции $\varphi(x)$. Доказать, что $\varphi(x) = Ce^x$, где C — постоянная величина. Рассмотреть пример $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены и ограничены на $(-\infty, +\infty)$ и $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на любом сегменте $[a, b]$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_x f(x) = \sup_x \varphi(x)?$$

§ 5. Степенные ряды

1. Интервал сходимости. Для каждого степенного ряда

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

существует замкнутый *интервал сходимости*: $|x - a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится, а вне расходится. *Радиус сходимости* R определяется по *формуле Коши—Адамара*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

если этот предел существует.

2. Теорема Абеля. Если степенной ряд $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \left(|x| < R\right)$ сходится в концевой точке $x = R$ интервала сходимости, то

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3. Ряд Тейлора. Аналитическая в точке a функция $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Остаточный член этого ряда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

может быть представлен в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \ (0 < \theta < 1)$$

(*форма Лагранжа*) или в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1} \ (0 < \theta_1 < 1)$$

(*форма Коши*).

Необходимо помнить следующие пять основных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

II. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

III. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \ (-1 < x < 1).$

V. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots \ (-1 < x \leqslant 1).$

4. Действия со степенными рядами. Внутри общего интервала сходимости $|x - a| < R$ имеем:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$;

$$\text{в) } \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$$

$$\text{г) } \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)}(x-a)^{n+1}.$$

5. Степенные ряды в комплексной области. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

где

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

Для каждого такого ряда имеется замкнутый *круг сходимости* $|x - a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится (и притом абсолютно), а вне расходится. *Радиус сходимости* R равен радиусу сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

в действительной области.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

2812. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$.

2813. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$.

2814. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

2815. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n$ $(0 < \alpha < 1)$.

2816. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2817. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$ $(a > 1)$.

2818. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

2819. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.