2. Простейший вариант теоремы о неявной функции. В этом параграфе теорема о неявной функции будет получена очень наглядным, но не очень эффективным методом, приспособленным только к случаю вещественнозначных функций вещественных переменных. С другим, во многих отношениях более предпочтительным способом получения этой теоремы, как и с более детальным анализом ее структуры, читатель сможет познакомится в главе X (часть II), а также в задаче 4, помещенной в конце параграфа..

Следующее утверждение является простейшим вариантом теоремы о неявной функции.

Утверждение 1. *Если функция* $F \to U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, *определенная в окрестности* $U(x_0, y_0)$ *точки* $(x_0, y_0) \in R^2$, *такова, что*

1° $F \in C^(p)(U; \mathbb{R})$, *где* $p >= 1$,

2° $F(x_0, y_0) = 0$,

3° $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

то существуют двумерный промежуток $I = I_x \times I_y$, *где*

$$I_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < a\}, \qquad I_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\}$$

являющийся содержащейся в $U(x_0, y_0)$ *окрестностью точки* (x_0, y_0), *и такая функция* $f \in C^(p)(I_x; I_y)$, *что для любой точки* $(x, y) \in I_x \times I_y$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x), \tag{4}$$

причем производная функции $y = f(x)$ *в точках* $x \in I_x$ *может быть вычислена по формуле*

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^1 [F'_x(x, f(x))]. \tag{5}$$

Прежде чем приступить к доказательству, дадим несколько возможных переформулировок заключительного соотношения (4), которые должны заодно прояснить смысл самого этого соотношения.

Утверждение 1 говорит о том, что при условиях $1°, 2°, 3°$ порция множества, определяемого соотношением $F(x, y) = 0$, попавшая в окрестность $I = I_x \times I_y$ точки (x_0, y_0), является графиком некоторой функции $f : Ix \to Iy$ класса $C^(p)(I_x; I_y)$.

Иначе можно сказать, что в пределах окрестности I точки (x_0, y_0) уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y, а функция $y = f(x)$ является этим решением, т. е. $F(x, f(x)) \equiv 0$ на I_x.

Отсюда в свою очередь следует, что если $y = \hat{f}(x)$ — функция, определенная на I_x, про которую известно, что она удовлетворяет соотношению $F(x, \hat{f}(x)) \equiv 0$ на I_x и что $\hat{f}(x_0) = y_0$, то при условии непрерывности этой функции в точке $x_0 \in I_x$ можно утверждать, что найдется окрестность $\Delta \subset I_x$ точки x_0 такая, что $\hat{f}(\Delta) \subset I_y$ и тогда $\hat{f}(x) \equiv f(x)$ при $x \in \Delta$.

Без предположения непрерывности функции $\hat{f}$ в точке x_0 и условия $\hat{f}(x_0) = y_0$ последнее заключение могло бы оказаться неправильным, что видно на уже разобранном выше примере с окружностью. Теперь докажем утверждение 1.

◄ $\mathrm{F}_y(x_0, y_0) > 0$. Поскольку $F \in C^{(1)}(U; \mathbb{R}), F_y(x, y) > 0$ также в некоторой окрестности точки (x0, y0). Чтобы невводить новых обозначений, без ограничения общности можно считать,что $F_y(x, y) > 0$ в любой точке исходной окрестности $U(x_0, y_0)$.

Более того, уменьшая, если нужно, окрестность $U(x_0, y_0)$, можно считать ее кругом некоторого радиуса $r = 2\beta > 0$ с центром в точке $(x0, y0)$.

Поскольку $F_y(x, y) > 0$ в U, то функция $F(x_0, y)$ от y определена имонотонно возрастает на отрезке $y_0 - \beta \le y \le y_0 + \beta$, следовательно,

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \beta)$$

В силу непрерывности функции F в U, найдется положительное число $\alpha < \beta$ такое, что при $|xx_0| \le \alpha$ будут выполнены соотношения

$$F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta)$$

Покажем теперь, что прямоугольник $I = I_x I_y$, где

$$I_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha\}, \quad I_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\}$$

является искомым двумерным промежутком, в котором выполняется соотношение (4).

При каждом $x \in I_x$ фиксируем вертикальный отрезок с концами $(x, y_0\beta), (x, y_0 + \beta)$. Рассматривая на нем $F(x, y)$ как функцию от y, мы получаем строго возрастающую непрерывную функцию, принимающую значения разных знаков на концах отрезка. Следовательно, при $x \in I_x$ найдется единственная точка $y(x) \in I_y$ такая, что $F(x, y(x)) = 0$. Полагая $y(x) = f(x)$, мы приходим к соотношению (4).

Теперь установим, что $f \in C^{(p)}(I_x; I_y)$.

Покажем сначала, что функция f непрерывна в точке x_0 и что $f(x_0) = y_0$. Последнее равенство, очевидно, вытекает из того, что при $x = x_0$ имеется единственная точка $y(x_0) \in I_y$ такая, что $F(x_0, y(x_0)) = 0$. Вместе с тем по условию $F(x_0, y_0) = 0$, поэтому $f(x_0) = y_0$.

Фиксировав число $\epsilon, 0 < \epsilon < \beta$, мы можем повторить доказательство существования функции $f(x)$ и найти число $\delta, 0 < \delta < \alpha$, так, что в двумерном промежутке $\hat{I} = \hat{I}_x \times \hat{I}_y$, где

$$\hat{I}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} \quad \hat{I}_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \epsilon\}$$

будет выполнено соотношение

$$(F(x, y) = 0 \text{ в } \hat{I}) \Leftrightarrow (y = \hat{f}(x), x \in \hat{I}_x) \tag{6}$$

с некоторой вновь найденной функцией $\hat{f} : \hat{I}_x \to \hat{I}_y$.

Но $\hat{I}_x \subset I_x, \hat{I}_y \subset I_y$ и $\hat{I} \subset I$, поэтому из (4) и (6) следует, что $\hat{f}(x) \equiv f(x)$ при $x \in \hat{I}_x \subset I_x$. Тем самым проверено, что $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \epsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.

Мы установили непрерывность функции f в точке x_0. Но любая точка $(x, y) \in I$, в которой $F(x, y) = 0$, также может быть принята в качестве исходной точки построения, ибо в ней выполнены условия $2°, 3°$. Выполнив это построение в пределах промежутка I, мы бы в силу (4) вновь пришли к соответствующей части функции f, рассматриваемой в окрестности точки x. Значит, функция f непрерывна в точке x. Таким образом, установлено, что $f \in C(I_x; I_y)$.

Покажем теперь, что $f \in C^{(1)}(I_x; I_y)$, и установим формулу (5).

Пусть число Δx таково, что $x + \Delta x \in I_x$. Пусть $y = f(x)$ и $y + \Delta y = f(x+\Delta x)$. Применяя в пределах промежутка I к функции $F(x, y)$ теорему о среднем, находим, что

$$0 = F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(x, f(x)) =$$

$$= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) =$$

$$= F'_x(x + \omega\Delta x, y + \omega\Delta y)\Delta x + F'_y(x + \omega\Delta x, y + \omega\Delta y)\Delta y \qquad (0 < \omega < 1)$$

откуда, учитывая, что $F_y(x, y) \neq 0$ в I, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \omega\Delta x, y + \omega\Delta y}{F'_y(x + \omega\Delta x, y + \omega\Delta y)}$$

$$. \tag{7}$$