§ 4. ЧИСЛО Е

48. Число e как предел последовательности. Мы используем здесь предельный переход для определения нового, до сих пор не встречавшегося нам числа, которое имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений.

Рассмотрим переменную

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

и попытаемся применить к ней теорему n° **44.**

Так как с возрастанием показателя n основание степени здесь убывает, то "монотонный" характер переменной непосредственно не усматривается. Для того чтобы убедиться в нем, прибегнем к разложению по формуле бинома:

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} + ...$$
$$... + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ...$$
$$... + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) + ...$$
$$... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n}). \qquad (1)$$

Если от x_n перейти теперь к x_{n+1}, т. е. увеличить n на единицу, то прежде всего добавится новый (n+2)-1 (положительный) член, каждый же из написанных n+1 членов *увеличится*, ибо любой множитель в скобках вида $1-\frac{s}{n}$ заменится *большим множителем* $1-\frac{s}{n+1}$. Отсюда и следует, что

$$x_{n+1} > x_n,$$

т. е. переменная x_n оказывается *возрастающей.*

Теперь покажем, что она к тому же *ограничена сверху.* Опустив в выражении (1) все множители в скобках, мы этим увеличим его, так что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = y_n$$

Заменив, далее, каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с третьей) числом 2, мы еще увеличим полученное выражение, так что, в свою очередь,

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но прогрессия (начинающаяся членом $1_{\overline{2),,}}$y$_n < 3$, а значит и подавно $x_n < 3$.

Отсюда уже следует, по теореме n° **44.**, что переменная x_n имеет конечный предел. По примеру *Эйлера* его обозначают всегда *буквой e.*

Это число

$$e = \lim(1+\frac{1}{n})^n$$

мы имели в виду. Вот первые 15 знаков его разложения в десятичную дробь:

$$e = 2,71828\,18284\,59045\,...$$

Хотя последовательность

$$x_1 = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2;\ x_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25;$$
$$x_3 = (1 + \frac{1}{3})^3 = 2,3703\,...;\ ...;\ x_{100} = (1 + \frac{1}{100})^{100} = 2,7048\,...;\ ...$$

и сходится к числу e, но *медленно*, и ею пользоваться для приближенного вычисления числа e - невыгодно. В следующем номере мы изложим удобный прием для этого вычисления, а также попутно докажем, что e есть число иррациональное.

49. Приближенное вычисление числа e Вернемся к равенству (1). Если *фиксировать k* и, считая n > k, отбросить все члены последней части, следующие за (k+1)-м, то получим неравенство

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + ...$$
$$... + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})\,...\,(1 - \frac{k-1}{n}).$$

Увеличивая здесь n до бесконечности, перейдем к пределу; так как все скобки имеют пределом единицу, то найдем:

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Это неравенство имеет место при любом натуральном k. Таким образом, имеем

$$x_n < y_n \leq e,$$

Откуда ясно [в силу теоремы 3) n° **38**], что и

$$\lim y_n = e.$$

Переменная y_n для приближенного вычисления числа e гораздо удобнее, чем x_n. Оценим степень близости y_n к e. С этой целью рассмотрим сначала разность между любым значением $y_{n+m} (m = 1, 2, 3,\ ...)$ слеющим за y_n, и самим y_n. Имеем

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... + \frac{1}{(n+m)!} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+2)(n+3)\,...\,(n+m)}).$$

Если в скобках (...) заменить все множители в знаменателях дробей через n+2, то получим *неравенство*

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ ...\ + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}),$$

которое лишь усилится, если заменить скобки суммой бесконечной прогрессии:

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Сохраняя здесь n неизменным, станем увеличивать m до бесконечности; переменная y_{n+m} (занумерованная значком m) принимает последовательность значений

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ \cdots, y_{n+m},\ \cdots,$$

очевидно сходящуюся к е. Поэтому получаем в пределе

$$e - y_n \geq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

или, наконец,

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!n} *).$$

Если через о обозначить отношение разности $e - y_n$ к числу $\frac{1}{n!n}$ (оно, очевидно, содержится между нулем и единицей), то можно написать также

$$e - y_n = \frac{o}{n!n}.$$

Заменяя здесь y_n его развернутым выражением, мы и придем к важной формуле:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{o}{n!n}, \tag{2}$$

которая послужит отправной точкой для вычисления е. Отбрасывая последний, "дополнительный", член и заменяя каждый из оставленных членов его десятичным приближением, мы и получим приближенное значение для е