103. Предел производной. Полезный пример такого применения дает следующее замечание. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ и имеет конечную производную $f'(x)$ для $x>x_0$. Если существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=K,$$

то такова же будет и производная в точке x_0 справа. Действительно, при $0<\Delta x\leqslant H$ имеем равенство (3а). Так как аргумент c производной содержится между x_0 и $x_0+\Delta x$, то при $\Delta x\to 0$ он стремится к x_0, так что правая часть равенства, а с нею и левая стремится к пределу K, что и требовалось доказать. Аналогичное утверждение устанавливается и для левосторонней окрестности точки x_0.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x)=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

в промежутке $[-1,1]$. Если $-1<x<1$, то по обычным правилам дифференциального исчисления легко найти:

$$f'(x)=\arcsin x.$$

При $x\to 1-0 (x\to -1+0)$ эта производная, очевидно, стремится к пределу $\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; значит и при $x=\pm1$ существуют (односторонние) производные: $f'(\pm1)=\pm\frac{\pi}{2}$.

Если вернуться к функциям $f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}, f_2(x)=x^{\frac{2}{3}}$, которые мы рассматривали в n° 87, то для них (при $x\gtrless 0$) имеем:

$$f_1'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},\quad f_2'(x)=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

Так как первое из этих выражений при $x\to 0$ стремится к $+\infty$, а второе при $x\to\pm0$ имеет, соответственно, пределы $\pm\infty$, то заключаем сразу, что $f_1(x)$ в точке $x=0$ имеет двустороннюю производную $+\infty$, в то время как для $f_2(x)$ в этой точке существуют лишь односторонние- производные: $+\infty$ справа и $-\infty$ слева.

Из сказанного вытекает также, что, если конечная производная $f'(x)$ существует в некотором промежутке, то она представляет собой функцию, которая не может иметь обыкновенных разрывов или скачков: в каждой точке она либо непрерывна, либо имеет разрыв второго рода [*ср.* 88, 2°].

104. Обобщенная теорема о конечных приращениях. Коши следующим образом обобщил доказанную в предыдущем номере теорему о конечных приращениях.

Теорема Коши. *Пусть: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в замкнутом промежутке $[a,b]$; 2) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, по крайней мере, в открытом прожежутке (a,b); 3) $g'(x)\neq 0$ в промежутже (a,b).*

Тогда между a и b найдется такая точка c, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

Эта формула носит название формулы Коши.

Доказательство. Установим сперва, что знаменатель левой части нашего равенства не равен нулю, так как в противном случае выражение это не имело бы смысла. Если бы было $g(b) = g(a)$, то, по теореме Ролля, производная $g'(x)$ в некоторой промежуточной точке была бы равна нулю, что противоречит условию 3); значит, $g(b) \neq g(a)$.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна в $[a,\ b]$, так как непрерывны $f(x)$ и $g(x)$; производная $F'(x)$ существует в $(a,\ b)$, именно, она равна

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Наконец, прямой подстановкой убеждаемся, что $F(a) = F(b) = 0$. Применяя названную теорему, заключаем о существовании между a и b такой точки c, что $F'(c) = 0$. Иначе говоря,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0,$$

или

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Разделив на $g'(c)$ (это возможно, так как $g'(c) \neq 0$), получаем требуемое равенство.

Ясно, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для получения формулы конечных приращений из формулы Коши следует положить $g(x) = x$.

В теоремах nn° **101, 102, 104** фигурирует, под знаком производной, некое среднее значение независимой переменной, которое — как указывалось — вообще нам неизвестно. Оно и производной доставляет, в некотором смысле, среднее значение. В связи с этим все эти теоремы называют «теоремами о средних значениях».

§ 2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

105. Формула Тейлора для многочлена. Если $p(x)$ есть целый многочлен степени n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n, \qquad (\mathbf{1})$$

то, последовательно дифференцируя его n раз:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1},\\
p''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \ldots + (n-1)n \cdot a_n x^{n-2},\\
p'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \ldots + (n-2) \cdot (n-1)n \cdot a_n x^{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot a_n
\end{aligned}$$

и полагая во всех этих формулах $x = 0$, найдем выражения коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных при $x = 0$;

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!},$$
$$a_3 = \frac{p'''(0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставим эти значения коэффициентов в (1):

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

Эта формула отличается от (1) записью коэффициентов.

Вместо того чтобы разлагать многочлен по степеням x, можно было бы взять его разложение по степеням $x - x_0$, где x_0 есть некоторое постоянное частное значение x:

$$\begin{aligned} p(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + A_3 (x - x_0)^3 + \\ + \ldots + A_n (x - x_0)^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Полагая $x - x_0 = \xi, \quad p(x) = p(x_0 + \xi) = P(\xi)$, для коэффициентов многочлена

$$P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \ldots + A_n\xi^n$$

имеем, по доказанному, выражения:

$$A_0 = P(0), \quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!},$$
$$A_3 = \frac{P'''(0)}{3!}, \quad \ldots, \quad A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Но

$$P(\xi) = p(x_0 + \xi), \quad P'(\xi) = p'(x_0 + \xi),$$
$$P''(\xi) = p''(x_0 + \xi), \ldots,$$

так что

$$P(0) = p(x_0), \quad P'(0) = p'(x_0), \quad P''(0) = p''(x_0), \ldots$$

и

$$\left.\begin{aligned} A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \tfrac{p'(x_0)}{1!}, \quad A_2 = \tfrac{p''(x_0)}{2!}, \\ A_3 = \tfrac{p'''(x_0)}{3!}, \ldots, A_n = \tfrac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

т. е. коэффициенты разложения (3) оказались выраженными через значения самого многочлена и его производных при $x = x_0$.