Предположим, что утверждение доказано для порядков $n = k - 1 \geqslant 1$. Покажем, что тогда оно справедливо также для порядка $n = k \geqslant 2$.

Заметим предварительно, что поскольку

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \left(\varphi^{(k-1)}\right)'(x_0) = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{\varphi^{(k-1)}(x) - \varphi^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0},$$

то существование $\varphi^{(k)}(x_0)$ предполагает, что функция $\varphi^{(k-1)}(x)$ определена на E хотя бы вблизи точки x_0. Уменьшая, если нужно, отрезок E, можно заранее считать, что функции $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x)$, где $k \geqslant 2$, определены на всем отрезке E с концом x_0. Поскольку $k \geqslant 2$, то функция $\varphi(x)$ имеет на E производную $\varphi'(x)$ и по условию

$$(\varphi')'(x_0) = \ldots = (\varphi')^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, по предположению индукции

$$\varphi'(x) = o\left((x - x_0)^{k-1}\right) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E.$$

Тогда, используя теорему Лагранжа, получаем

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^{k-1}(x - x_0),$$

где ξ — точка, лежащая между x_0 и x, т. е. $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, а $\alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to E$, $\xi \in E$. Значит, при $x \to x_0$, $x \in E$ одновременно будем иметь $\xi \to E$, $\xi \in E$ и $\alpha(\xi) \to 0$, и поскольку

$$|\varphi(x)| \leqslant |\alpha(\xi)||x - x_0|^{k-1}|x - x_0|,$$

то проверено, что

$$\varphi(x) = o\left((x - x_0)^k\right) \quad \text{при} \quad x \to x_0,\ x \in E.$$

Таким образом, утверждение леммы 2 проверено принципом математической индукции. ►

Соотношение (33) называется *локальной формулой Тейлора*, поскольку указанный в нем вид остаточного члена (так называемая форма *Пеано*)

$$r_n(x_0; x) = o((x - x_0)^n) \tag{34}$$

позволяет делать заключения только об асимптотическом характере связи полинома Тейлора и функции при $x \to x_0$, $x \in E$.

Формула (33) удобна, таким образом, при вычислении пределов и описании асимптотики функции при $x \to x_0$, $x \in E$, но она не может служить для приближенного вычисления значений функции до тех пор, пока нет фактической оценки величины $r_n(x_0; x) = o((x - x_0)^n)$.

Подведем итоги. Мы определили полином Тейлора

$$P_n(x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

написали формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x)$$

и получили следующие ее важнейшие конкретизации:

Если f имеет производную порядка $n + 1$ в интервале с концами x_0, x, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (35)$$

где ξ — точка, лежащая между x_0 и x.

Если f имеет в точке x_0 все производные до порядка $n \geqslant 1$ включительно, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (36)$$

Соотношение (35), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*, очевидно, является обобщением теоремы Лагранжа, в которую оно превращается при $n = 0$.

Соотношение (36), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, очевидно, является обобщением определения дифференцируемости функции в точке, в которое оно переходит при $n = 1$.

Заметим, что формула (35) практически всегда более содержатель-
на, ибо, с одной стороны, как мы видели, она позволяет оценивать абсо-
лютную величину остаточного члена, а с другой, например, при огра-
ниченности $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности x_0 из нее вытекает также асимпто-
тическая формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + O\left((x - x_0)^{n+1}\right). \quad (37)$$

Так что для бесконечно дифференцируемых функций, с которыми в
подавляющем большинстве случаев имеет дело классический анализ,
формула (35) содержит в себе локальную формулу (36).

В частности, на основании формулы (37) и разобранных выше при-
меров 3–10 можно теперь выписать следующую таблицу асимптотиче-
ских формул при $x \to 0$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O\left(x^{2n+2}\right),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O\left(x^{2n+2}\right),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O\left(x^{n+1}\right),$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \\ + O\left(x^{n+1}\right).$$

Рассмотрим теперь еще некоторые примеры использования форму-
лы Тейлора.

Пример 11. Напишем полином, позволяющий вычислять значе-
ния функции $\sin x$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с абсолютной погрешностью,
не превышающей 10^{-3}.

В качестве такого многочлена можно взять тейлоровский многочлен подходящей степени, получаемый разложением функции $\sin x$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Поскольку

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 \cdot x^{2n+2} + r_{2n+2}(0; x),$$

где по формуле Лагранжа

$$r_{2n+2}(0; x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+3)\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

то при $|x| \leqslant 1$

$$|r_{2n+2}(0; x)| \leqslant \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Но $\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3}$ при $n \geqslant 2$. Таким образом, с нужной точностью на отрезке $|x| \leqslant 1$ имеем $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$.

Пример 12. Покажем, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}' x &= \cos^{-2} x, \\ \operatorname{tg}'' x &= 2\cos^{-3} x \sin x, \\ \operatorname{tg}''' x &= 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x. \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}' 0 = 1$, $\operatorname{tg}'' 0 = 0$, $\operatorname{tg}''' 0 = 2$ и написанное соотношение следует из локальной формулы Тейлора.

Пример 13. Пусть $\alpha > 0$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{n^\alpha}$.

При $\alpha > 0$ $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$, когда $n \to \infty$. Оценим порядок члена ряда

$$\ln\cos\frac{1}{n^\alpha} = \ln\left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Таким образом, мы имеем знакопостоянный ряд, члены которого эквивалентны членам ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n^{2\alpha}}$. Поскольку последний ряд сходится только при $\alpha > \frac{1}{2}$, то в указанной области $\alpha > 0$ исходный ряд сходится лишь при $\alpha > \frac{1}{2}$ (см. задачу 16b)).