Частные производные и дифференциал ФНП

Рассмотрим $f(x)$, определённую на множестве $D \subset \R^n$. Для внутренней точки $x_0=(x_{01},\ldots,x_{0n}) \in D$ и $\forall \Delta x=(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n): x_0+\Delta x \in D$ получим соответствующее приращение функции

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

$f(x)$ *дифференцируема* в рассматриваемой точке x_0, если

$$\label{differenc} \begin{array}{l} \exists \ p_k \in \R, \ k = \ overline{1,n}:\ \Delta f(x_0)= p_1 \Delta x_1 + p_2 \Delta x_2 + \ldots + p_n \Delta x_n + \alpha,\ \alpha = o(|\Delta x|) = \\ =o(\sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}),\ \Delta x \to 0 \ \left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{|\Delta x|} = 0\right). \end{array}$$

Первым необходимым условием дифференцируемости является непрерывность, так как из $\eqref{differenc} \implies \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (p_1 \Delta x_1 + \ldots + p_n \Delta x_n + \alpha) = 0 \implies [\Delta f(x_0) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)] \implies f\left(x_0 + \Delta x\right) \underset{\Delta x \to 0}{\to} f(x_0)$, что соответствует непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

Для получения второго необходимого условия рассмотрим для фиксированного $k, 1 \le k \le n$, частные приращения, то есть $\Delta x_1=\ldots=\Delta x_{k-1}=\Delta x_{k+1}=\ldots=\Delta x_n=0$, а $\Delta x_k \neq 0$. В результате получим соответствующие частные приращения по каждой координате:

$$\Delta_k f(x_0)=f(x_{01},\ldots,x_{0k-1},x_{0k}+\Delta x_k,x_{0k+1},\ldots,x_{0n}).$$

Из $\eqref{differenc} \implies \Delta_k f(x_0) = p_k \Delta x_k + o(|\Delta x_k|),\ k = \ overline{1, n} \implies \frac{\Delta_k f(x_0)}{\Delta x_k} = p_k + \frac{o(|\Delta x_k|)}{\Delta x_k} = p_k + \alpha_k.$

Учитывая, что $\alpha_k = \frac{o(|\Delta x_k|)}{\Delta x_k} = \frac{o(|\Delta x_k|)}{|\Delta x_k|} \cdot \frac{|\Delta x_k|}{\Delta x_k} \appr{\Delta x_k \to 0}0$, получим, переходя к пределу: $\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_k f(x_0)}{\Delta x_k}=p_k$.

Далее полученные пределы будем называть *частными производными первого порядка* рассматриваемой ФНП в точке x_0 по k-ой координате и обозначать

$$\label{partial} \pderiv{f(x)}{x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(x_0)}{\Delta x_k} \in \R, \ k = \overline{1, n}.$$

Вторым необходимым условием дифференцируемости ФНП является существование всех частных производных первого порядка $\eqref{partial}$ в точке x_0. В связи с этим определение дифференцируемости можно записать так:

$$\label{defn_of_diff} \Delta f(x_0) = \sum_{k = 1}^{n} \pderiv{f(x_0)}{x_k} \Delta x_k + o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}\right)$$

Применяя $\eqref{defn_of_diff}$ для $f_k(x) = f_k(x_1, \ldots x_n) = x_k, \mathrm{fix}\ 1 \le k \le n$, получаем

$$\label{deriv} \pderiv{f_k(x)}{x_j} = \begin{cases} 1,& \text{если } j = k \\ 0,& \text{если } j \ne k \\ \end{cases}$$

Величина

$$\label{differential} df(x_0) = \sum_{k = 1}^{n} \pderiv{f_k(x)}{x_k} \Delta x_k,$$

являющаяся линейной функцией от $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ называется $\emph{дифференциалом первого порядка}$ рассматриваемой ФНП в точке x_0. Используя $\eqref{deriv}$ в $\eqref{differential}$ получим:

$$d x_k = \Delta x_k \forall \mathrm{fix}\ 1 \le k \le n.$$

В связи с этим, для независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ под их дифференциалом $d x_k$ понимается произвольное допустимое приращение $\Delta x_k, k = \overline{1, n}$.

В результате $\eqref{differential}$ перепишется как

$$\label{other_different} df(x_0) = \sum_{k = 1}^{n} \pderiv{f(x_0)}{x_k}dx_k.$$

В дальнейшем будем обозначать $\displaystyle\pderiv{f(x_0)}{x_k} = f_{x_k}'(x_0)$. Поэтому

$$\eqref{other_different} \iff df(x_0) = \sum_{k = 1}^{n} f_{x_k}'(x_0) dx_k.$$