LABA LaTex

Popov Vladimir

January 7, 2024

Глава 5

Функциональные уравнения (ФУ). Системы функциональных уравнений (СФУ)

5.1 Неявные ФНП

Рассмотрим функцию $F(x, u)$ от $(n+1)$ переменной, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}$. В соответствии с этой функцией уравнение

$$F(x, u) = 0 \tag{5.1}$$

относительно $u \in \mathbb{R}$ задаёт некоторую неявную ФНП $u = u(x_1, x_2 \ldots, x_n)$. Далее (5.1) будем называть *функциональным уравнением (ФУ)*. Для таких уравнений в первую очередь важны условия их разрешимости относительно $u \in \mathbb{R}$ при $x \in \mathbb{R}^n$, а также свойства непрерывности и дифференцируемости $u = u(x)$ в соответствующих окрестностях заданных точек $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n,\ u_0 \in I \subset \mathbb{R}$, для которых выполняется

$$F(x_0, u_0) = 0, \tag{5.2}$$

что задаёт для (5.1) соответствующее начальное условие на $u = u(x)$ так, чтобы $u(x_0) = u_0$. В дальнейшем под решением ФУ (5.1) с начальным условием (5.2) будем подразумевать некоторую функцию $u(x)$, для которой верно:

1. $u(x_0) = u_0$;
2. в соответствующих окрестностях $V(x_0) \subset D$, $U(u_0) \subset I$ справедливо тождество

$$F(x, u(x)) \equiv 0. \tag{5.3}$$

Пример. Пусть $F(x, u) = x^2 - u^2$.

Рассмотрим уравнение $F(x, u) = x^2 - u^2 = 0$ в окрестности $x_0 = 0, u_0 = 0$. В данном случае нет единственного решения, так как указанным выше условиям удовлетворяют, например, $u = |x|$, $u = -|x|$, $u = x$ и т. д.

Теорема 5.1 (об однозначной разрешимости ФУ)**.** *Пусть задана функция от $(n+1)$ переменной $F(x, u)$, непрерывная относительно $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ в соответствующих окрестностях $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u_0 \in I \subset \mathbb{R}$, причём $F(x_0, u_0) = 0$. Если $F(x, u)$ непрерывно дифференцируема по u, а также*

$$F'_u(x_0, u_0) \neq 0, \tag{5.4}$$

то тогда ФУ (5.1) *с начальным условием* (5.2) *имеет единственное решение* $u = u(x)$ *в некоторой окрестности* $V(x_0) \subset D$*, удовлетворяющее*

$$u(x_0) = u_0. \tag{5.5}$$

Доказательство. Из условия (5.4) в силу непрерывности F'_u в соответствующих окрестностях x_0, u_0 следует, что F'_u сохраняет один и тот же знак в рассматриваемых окрестностях (по теореме о стабилизации знака непрерывных ФНП). Без ограничения общности будем считать, что $\exists \delta > 0: \ \forall u \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \subset I \implies F'_u(x_0, u) > 0$. В этом случае Ф1П строго возрастает на $[u_0 - \delta, u_0 + \delta]$. Из этого, в силу (5.2), $F(x_0, u_0 - \delta) < 0$ и $F(x_0, u_0 + \delta) > 0$.

Отсюда, в силу непрерывности $F(x, u)$ по переменной x, по теореме о стабилизации знака непрерывных ФНП, уменьшив при необходимости $\delta > 0$, т. е. сузив I, получаем, что $\exists V(x_0) \subset D$, что $\forall x \in V(x_0) \implies F(x, u_0 - \delta) < 0, \ F(x, u_0 + \delta) > 0$. Отсюда по теореме о промежуточных значениях ФНП следует, что $\forall \operatorname{fix} x \in V(x_0) \quad \exists! \, u \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$ такое, что $u = u(x)$ удовлетворяет (5.3). При этом в силу строгой монотонности $F(x, u)$ по u будет также выполняться (5.5) в силу начального условия (5.2). □

Замечания. 1) Можно показать, что при выполнении всех условий доказанной выше теоремы получаем единственное решение u, которое будет непрерывно в соответствующих окрестностях точек x_0, u_0.

2) Аналогичным образом, с использованием формулы Лагранжа конечных приращений, доказывается *теорема о дифференцировании неявных ФНП*:

Теорема 5.2 (о дифференцировании неявных ФНП)**.** *Пусть наряду со всеми условиями предыдущей теоремы дополнительно функция* $F(x, u)$ *непрерывно дифференцируема по* x*. Тогда ФУ* (5.1) *с начальным условием* (5.2) *также разрешимо, и его единственное решение в соответствующих окрестностях рассматриваемых точек* $x_0 \in D, u_0 \in I$ *будет удовлетворять начальному условию* $u(x_0) = u_0$*, а также будет дифференцируемо в этой точке по* x*, а частные производные полученной ФНП* $u = u(x)$ *в соответствующих окрестностях* x_0, u_0 *находятся по формуле*

$$u'_{x_k} = -\frac{F'_{x_k}(x, u)}{F'_u(x, u)}. \tag{5.6}$$

Пример. Зная производные и дифференциал 1-го порядка находятся последовательно производные и дифференциалы высших порядков.

Рассмотрим функцию

$$\begin{cases} x + y + z = e^z \\ z = z\,(x, y) \end{cases}$$

Имеем:

$$d\,(x + y + z) = d(e^z)$$

$$dx + dy + dz = e^z dz \implies \begin{cases} dz = \frac{dx}{e^z - 1} + \frac{dy}{e^z - 1} = z'_x dx + z'_y dy \\ z'_x = \frac{1}{e^z - 1} \\ z'_y = \frac{1}{e^z - 1} \end{cases}$$

$$z''_x = (z'_x)'_x = \left(\frac{1}{e^z - 1}\right)'_x = -\frac{(e^z)'_x}{(e^z-1)^2} = -\frac{e^z z'_x}{(e^z-1)^2} = \left[z'_x = \frac{1}{e^z-1}\right] = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

В силу симметрии

$$z''_{y^2} = \dots = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{1}{e^z - 1}\right)'_y = \dots = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

Отсюда

$$d^2 z = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = -\frac{dx^2 + 2dxdy + dy^2}{(e^z-1)^3}e^z = -\frac{(dx+dy)^2}{(e^z-1)^3}e^z$$

и так далее.

5.2 Системы функциональных уравнений (СФУ)

Пусть имеется m функций от $(n+m)$ переменных:

$$\begin{cases} F_k(x,u), \ k = \overline{1,m} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \\ u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in G \subset \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Под *СФУ* будем подразумевать систему вида

$$\begin{cases} F_k(x,u) = 0, \\ k = \overline{1,m} \end{cases} \tag{5.7}$$

Предполагается, что в (5.7) x — независимая переменная, а $u = u(x)$ — искомая функция.

Наряду с (5.7) будем рассматривать начальные условия

$$\begin{cases} F_k(x_0,u_0) = 0, \\ k = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{5.8}$$

в соответствии с которыми под решением системы (5.7), (5.8) подразумевается $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющее условию $u(x_0) = u_0$, при этом в соответствующих окрестностях точек x_0, u_0 решение системы (5.7) с начальными условиями (5.8) удовлетворяют тождеству

$$F(x, u(x)) \equiv 0$$

Пусть $F = (F_1, F_2, \dots, F_m) \in \mathbb{R}^m$, тогда систему (5.7) с начальными условиями (5.8) можно записать в виде

$$\begin{cases} F(x,u) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m \\ F(x_0,u_0) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{5.9}$$

В дальнейшем для СФУ (5.7) будем рассматривать *матрицу Якоби*, которую будем обозначать:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Определитель квадратной матрицы Якоби (5.10) называется *якобианом* и записывается в виде:

$$I(x,u) = \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| = \det \frac{\partial F\,(x,u)}{\partial u} = \frac{\partial\,(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial\,(u_1, u_2, \ldots, u_m)} \tag{5.11}$$

Теорема 5.3 (об однозначной разрешимости СФУ)**.** *Пусть функции* $F_k\,(x,u)$*,* $k = \overline{1,m}$ *от* $(n+m)$ *переменных* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$*,* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in G \subset \mathbb{R}^m$ *непрерывны по* x *и по* u *в некоторых окрестностях точек* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in D \subset \mathbb{R}^n$*,* $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m}) \in G \subset \mathbb{R}^m$*. Если выполнено начальное условие*

$$F_k(x_0, u_0) = \vec{0},\ \ k = \overline{1,m}, \tag{5.12}$$

то, в случае непрерывной дифференцируемости

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_m) \in \mathbb{R}^m \tag{5.13}$$

по $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$*, если якобиан* $I(x,u) = \det \frac{\partial F(x,u)}{\partial u}$ *рассматриваемой СФУ* $F\,(x,u) = \vec{0}$ *в точке* (x_0, u_0) *удовлетворяет условию*

$$I(x_0, u_0) \neq 0, \tag{5.14}$$

тогда система (5.7) *будет иметь в соответствующих окрестностях точек* x_0 *и* u_0 *единственное решение, т. е.* $\exists! u = u(x)$*, удовлетворяющая начальному условию* $u(x_0) = u_0$*.*

Доказательство. Доказательство проведём, используя ММИ (метод математической индукции).

Во-первых, при $m = 1$ СФУ (5.7) даёт ФУ (5.1), для которого теорема об однозначности решения уже доказана.

Во-вторых, предполагая, что теорема доказана при $m = k,\ k \in \mathbb{N}$, рассмотрим случай $m = k+1$.

Из условия (5.14) в силу правила Лапласа вычисления определителя разложением по какой-либо строке (столбцу) следует, что в силу (5.14) в точках $x_0,\ u_0$ хотя бы один из миноров k-ого порядка рассматриваемого якобиана ненулевой. Без ограничения общности (перестановкой строк, столбцов) считаем, что этот минор k-ого порядка

$$I_0 = \frac{\partial\,(F_1, F_2, \ldots, F_k)}{\partial\,(u_1, u_2, \ldots, u_k)}(x_0, y_0) \neq 0 \tag{5.15}$$

является главным угловым минором матрицы Якоби рассматриваемой СФУ. Тогда, во-первых, в силу индуктивного предположения, при $m = k$ СФУ

$$\begin{cases} F_i\,(x, v, u_{k+1}) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases} \tag{5.16}$$

для fix u_{k+1} однозначно разрешена относительно $v = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, т. е. $\exists! v = v\,(x, u_{k+1})$, удовлетворяющее (5.16) в соответствующих окрестностях рассматриваемых точек, и при этом выполнено начальное условие $v(x_0) = v(x_0, u_{0,k+1}) = v_0$.

В силу разрешимости (5.16) получаем

$$F_i(x, v(x, u_{k+1}), u_{k+1}) \equiv 0 \quad \forall i = \overline{1, k}. \tag{5.17}$$

Дифференцируя равенства по u_{k+1} как сложные функции, получаем

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_i}{\partial u_{k+1}} \equiv 0 \quad \forall i = \overline{1, k}. \tag{5.18}$$

При подстановке v в $(k+1)$-е уравнение системы получим ФУ вида

$$H(x, u_{k+1}) = 0, \tag{5.19}$$

где

$$H(x, u_{k+1}) = F_{k+1}\left(x, v(x, u_{k+1}), u_{k+1}\right). \tag{5.20}$$

(5.19) определяет некоторую функцию

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_{k+1}(x) \\ u_{k+1}(x_0) = u_{0,k+1}. \end{cases} \tag{5.21}$$

Осталось показать, что (5.20) с начальным условием (5.21) имеет единственное решение относительно u_{k+1} в рассматриваемых окрестностях начальных точек. Для этого, в силу теоремы об однозначной разрешимости ФУ достаточно проверить, что

$$\left.\frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}}\right|_{(x_0, u_{0,k+1})} \neq 0. \tag{5.22}$$

Дифференцируя функцию (5.20) по u_{k+1} в точках x_0 и u_0 (по правилу дифференцирования сложной функции), получаем

$$\frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_{k+1}}. \tag{5.23}$$

Но тогда

$$I(x_0, u_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{k+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c} \text{прибавляем } (k+1)\text{-му столбцу} \\ \text{линейную комбинацию предыдущих} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_1}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_1}{\partial u_{k+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_2}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_2}{\partial u_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_2} & \cdots & \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial u_{k+1}} + \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \end{vmatrix} \overset{(5.18),(5.23)}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{k+1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= [\text{правило Лапласа}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_1} & \frac{\partial F_k}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial u_k} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2k+2} \cdot \frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} = \frac{\partial H(x, u_{k+1})}{\partial u_{k+1}} \cdot I_0,$$