

Classification
Physics Abstracts
86-30Z — 02.70

Le dimensionnement des actionneurs électriques : un problème de programmation non linéaire

A. D. Kone, B. Nogarede et M. Lajoie Mazenc

Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique Industrielle, URA n 847, Toulouse, France

(Reçu le 17 juillet 1992, révisé le 3 novembre 1992, accepté le 24 novembre 1992)

Résumé. — Dans cet article, une méthodologie générique de dimensionnement des actionneurs électriques est proposée. Cette méthodologie est basée sur l'interprétation directe du problème de dimensionnement en tant que problème d'optimisation. Après avoir procédé à la formalisation du problème, les auteurs précisent les méthodes numériques de résolution adaptées à la formulation obtenue. La procédure est enfin validée dans le cas particulier du dimensionnement d'une structure à aimants permanents sans encoche.

Abstract. — In this paper, a generic design methodology of electric actuators is proposed. This methodology is based on the direct interpretation of the design problem as an optimization problem. After having formalized the design process, the authors specify the numerical solution methods suited to the obtained formulation. The process is finally validated in the particular case of the design of a slotless permanent magnet structure.

Introduction.

La diversité des domaines d'application et la multitude de technologies envisageables actuellement rendent de plus en plus complexes la définition et le dimensionnement d'un actionneur électrique associé à son dispositif d'alimentation électronique. Pour un cahier des charges donné, la phase de conception se découpe en un certain nombre d'étapes successives et le plus souvent itératives.

Dans un premier temps le concepteur doit choisir la structure la mieux adaptée à ses besoins, ce qui sous-entend de définir simultanément une structure électromagnétique, une structure de convertisseur ainsi qu'un type de commande. La deuxième phase consiste à optimiser les dimensions et les caractéristiques de la solution choisie en intégrant des contraintes de diverses natures (électrique, thermique, mécanique, aéraulique, etc.). Il s'agit enfin, en tenant compte de phénomènes « fins » négligés lors des deux étapes précédentes, d'affiner les dimensions obtenues préalablement.

Les méthodes classiques de simulation numériques, basées sur une discrétisation spatiale et/ou temporelle fine du problème, conviennent parfaitement à la troisième phase. En revanche, la lourdeur de leur mise en œuvre les rend mal adaptées au niveau des deux premières étapes concernant le choix et l'optimisation de la structure qui impliquent de nombreux « balayages » tant sur le plan structural que dimensionnel. Il semble donc beaucoup plus judicieux, à ces niveaux, d'exploiter des modèles décrivant de manière analytique le comportement dimensionnel de la structure. Certes moins fines et précises, ces représentations, à caractère global, sont en revanche bien adaptées à la prise en compte de phénomènes physiques de diverses natures.

Néanmoins, même si l'on arrive à décrire ces phénomènes à l'aide de lois relativement simples, le problème du dimensionnement d'un actionneur électrique demeure un problème

difficile compte tenu du grand nombre de variables mises en jeu et de la complexité de leur interdépendance, liée au couplage des différents effets dans la structure. Dès lors, en vue d'aboutir à un dimensionnement rationnel, la mise en place d'un formalisme mathématique s'avère indispensable.

Le présent article propose une méthodologie générale de dimensionnement basée sur la mise en œuvre des théories de la Programmation Non Linéaire. L'originalité de la démarche proposée, qui vise à formuler *dès le départ* le problème en terme d'optimisation, réside dans son caractère générique tant sur le plan des diverses structures possibles que vis-à-vis des cahiers des charges envisageables.

Dans un premier temps, une formalisation du problème du dimensionnement d'un actionneur électrique est proposée. Les méthodes numériques de résolution les mieux adaptées sont ensuite introduites. La méthodologie développée est enfin illustrée dans le cas particulier du dimensionnement d'une structure à aimants permanents sans encoches.

1. Formalisation du problème.

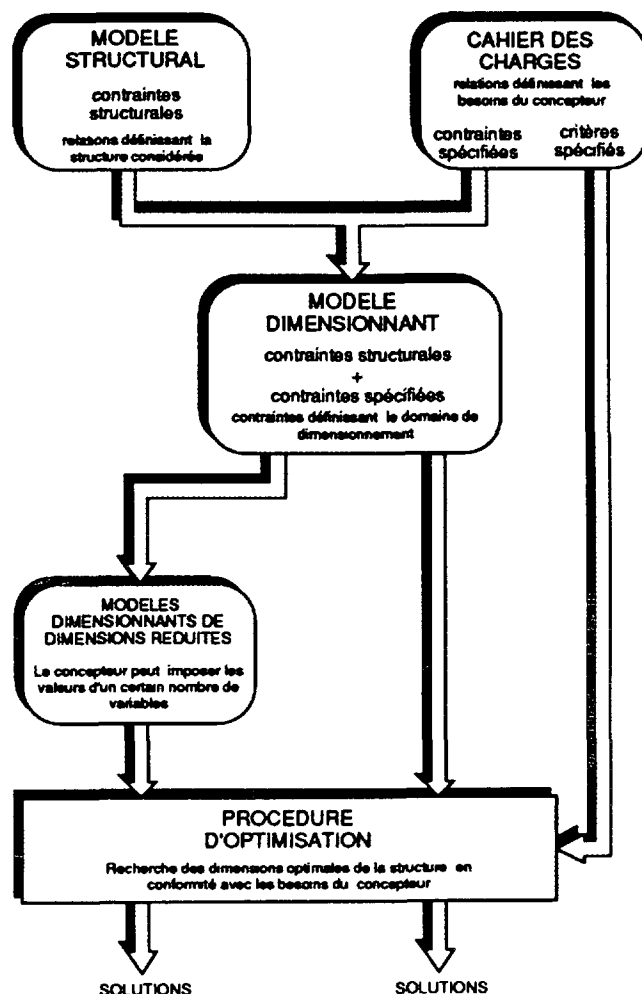


Fig. 1. — Schéma général de la méthodologie développée.

[General scheme of the developed methodology.]

1.1 DÉMARCHE GÉNÉRALE DE CONCEPTION. — D'une manière générale, la démarche de conception d'un dispositif quelconque est initiée par la présence d'un besoin formulé, que nous appellerons *cahier des charges*.

Pour répondre à ce besoin, il existe en général un nombre important et sans cesse croissant de solutions possibles qui, dans le cas qui nous intéresse, correspondent à la combinaison d'un dispositif électromagnétique et d'un convertisseur électronique associés à une stratégie de commande, l'ensemble constituant ce que nous dénommons la *structure*.

Notre objectif est avant tout de développer une procédure rationnelle de dimensionnement d'une structure donnée, qui puisse être éventuellement couplée à des procédures comparatives. Il est donc essentiel que la procédure soit souple et rapide de manière à pouvoir s'intégrer facilement dans un schéma itératif.

Ainsi, la résolution du problème de dimensionnement, tel que nous l'appréhendons, consiste à faire réagir le modèle définissant la structure d'une part, avec l'ensemble des spécifications et critères formant le cahier des charges d'autre part ; ces deux entités étant formulées mathématiquement de manière analytique.

1.2 SCHÉMA GÉNÉRAL DE RÉOLUTION. — La démarche de conception envisagée, qui vise à rechercher une solution satisfaisant aux critères du cahier des charges, sous les contraintes définissant la structure considérée d'une part et les spécifications du cahier des charges d'autre part, se présente ainsi directement sous la forme d'un problème d'optimisation.

La structure générale de résolution adoptée est schématisée sur la figure 1. La première étape consiste à associer les relations définissant le comportement dimensionnel de la structure étudiée, formant ce que nous appellerons le « *modèle structural* » avec les relations traduisant les spécifications du *cahier des charges*.

1.2.1 Le modèle structural. — Il est composé des relations qui traduisent les lois physiques régissant le fonctionnement de la structure. Ces relations font intervenir les dimensions et les caractéristiques de la structure, considérées comme les variables du problème. De manière générale, ces relations peuvent être du type égalité (ex. : expression du couple électromagnétique en fonction des dimensions et caractéristiques de la structure) ou du type inégalité (ex. : conditions relatives à la démagnétisation des aimants).

Ainsi, n étant le nombre de variables (supposées scalaires) décrivant la structure et composant un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, le modèle structural est alors défini par :

— p_s contraintes égalités :

$$h_{sk}(\mathbf{x}) = 0, \quad k \in [1, p_s]_{\mathbb{N}} \quad (1.1)$$

avec,

$$\forall k \in [1, p_s]_{\mathbb{N}}, \quad h_{sk} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

— q_s contraintes inégalités :

$$g_{sj}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j \in [1, q_s]_{\mathbb{N}} \quad (1.2)$$

avec,

$$\forall j \in [1, q_s]_{\mathbb{N}}, \quad g_{sj} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

— n « butées » :

$$x_i^{(Ls)} \leq x_i \leq x_i^{(Us)}, \quad i \in [1, n]_{\mathbb{N}}. \quad (1.3)$$

Les butées fixent le domaine des valeurs physiquement admissibles des variables (ex. : arc polaire, mesuré en angle électrique, compris entre 0 et π). Notons que les relations correspondantes pouvaient être incluses dans les contraintes inégalités définies par (1.2). Néanmoins, il est plus judicieux de les traiter de manière différente : les variables repérées hors de leurs limites y sont ramenées simplement en leur affectant la valeur de la limite violée. En

général, les fonctions h_{sk} et g_{sj} sont non linéaires. Toutefois les fonctions $h_{sk}(\mathbf{x})$ sont supposées linéairement indépendantes, i.e.

$$\nexists (\lambda_1, \dots, \lambda_{p_s}) \in (\mathbb{R}^*)^{p_s} / \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=1}^{p_s} \lambda_k h_{sk}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.4)$$

1.2.2 Le cahier des charges. — Il précise les besoins du concepteur relatifs à la structure. Ces besoins sont formulés d'une part à l'aide de contraintes de type égalité (ex. : rapport du diamètre d'alésage à la longueur de fer fixé) ou de type inégalité (ex. : entrefer mécanique limité) et d'autre part à l'aide de critères d'optimisation (ex. : recherche du volume d'aimant et des pertes Joule minimaux). Ces derniers peuvent s'exprimer en fonction des variables du modèle structural et d'un ensemble de m paramètres (ex. : valeur minimale de l'entrefer mécanique) composant un vecteur δ . Le cahier des charges peut ainsi être défini par :

- un ensemble de contraintes décrit par :

— p_c contraintes égalités :

$$h_{ck}(\mathbf{x}, \delta) = 0, \quad k \in [1, p_c]_{\mathbb{N}} \quad (1.5)$$

avec, $\forall k \in [1, p_c]_{\mathbb{N}}, \quad h_{ck} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

— q_c contraintes inégalités :

$$g_{cj}(\mathbf{x}, \delta) \geq 0, \quad j \in [1, q_c]_{\mathbb{N}} \quad (1.6)$$

avec, $\forall j \in [1, q_c]_{\mathbb{N}}, \quad g_{cj} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

— n « butées » :

$$x_i^{(Lc)} \leq x_i \leq x_i^{(Uc)}, \quad i \in [1, n]_{\mathbb{N}}. \quad (1.7)$$

Les fonctions h_{ck} et g_{cj} , généralement non linéaires, sont appelées « *contraintes spécifiées* ». Les fonctions h_{si} et h_{ck} sont supposées linéairement indépendantes (cf. (1.4)). Les butées correspondent, ici, à la définition d'un domaine « d'intérêt » dans lequel le concepteur recherche *a priori* une solution (ex. : la machine doit avoir un diamètre d'alésage compris entre 0,01 et 0,5 m).

- un ensemble de r critères d'optimisation qui peut être formulé par :

Minimiser $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \delta)$, avec $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$

où $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \delta) = (f_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, f_r(\mathbf{x}, \delta))^T \quad (1.8)$

et $\forall i \in [1, r]_{\mathbb{N}}, \quad f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Les r fonctions scalaires f_i sont supposées linéairement indépendantes. Elles sont appelées *fonctions critères ou objectifs*. La coexistence simultanée de plusieurs critères définit en fait le problème en terme d'optimisation vectorielle et la fonction vectorielle \mathbf{F} est dite *vecteur critère* ou *vecteur objectif*. Néanmoins, comme nous le verrons plus loin, des méthodes plus ou moins élaborées permettent de se ramener à un problème d'optimisation scalaire.

Remarque : Pour pouvoir exploiter toutes les possibilités du modèle structural, il semble judicieux de ne pas restreindre sa généralité en y introduisant des paramètres. C'est la raison pour laquelle toutes les grandeurs qui y apparaissent sont considérées comme variables, les paramètres n'intervenant qu'au niveau du cahier des charges.

1.2.3 Le modèle dimensionnant. — Dans la mesure où c'est l'association du modèle structural et du cahier des charges qui permet le dimensionnement de la structure, le jeu de contraintes ainsi formé sera dénommé « *modèle dimensionnant* » et est donc défini par :

— $p = p_s + p_c$ contraintes égalités :

$$h_k(\mathbf{x}, \delta) = 0, \quad k \in [1, p]_{\mathbb{N}}$$

— $q = q_s + q_c$ contraintes inégalités :

$$g_j(\mathbf{x}, \delta) \geq 0, \quad j \in [1, q]_{\mathbb{N}} \quad (1.9)$$

— n butées :

$$x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$$

avec $x_i^{(L)} = \sup [x_i^{(Ls)}, x_i^{(Lc)}]$ et $x_i^{(U)} = \inf [x_i^{(Us)}, x_i^{(Uc)}]$.

En général p est inférieur à n .

L'exploitation du modèle dimensionnant par la procédure d'optimisation conduit, par application des critères du cahier des charges, à la résolution du problème de dimensionnement, c'est-à-dire, à la détermination des valeurs des variables définissant les dimensions et les caractéristiques de la structure, selon les besoins du cahier des charges.

1.2.4 Les modèles dimensionnants de dimensions réduites. — Le modèle dimensionnant définit intégralement le problème. Néanmoins, il paraît intéressant de considérer des « modèles dimensionnants de dimensions réduites », obtenus en fixant *a priori* les valeurs d'un certain nombre de variables indépendantes. Cette possibilité permet notamment au concepteur de diriger de manière interactive sa progression vers la solution sans pour autant remettre en question la formulation initiale du problème.

La valeur d'une variable peut être imposée de deux manières différentes : soit en introduisant une contrainte égalité, soit en retirant directement la variable imposée (connue) du vecteur des variables (inconnues). Le dernier procédé est le plus séduisant car il permet de réduire la dimension de l'espace de recherche de la solution sans rajouter de contrainte et simplifie ainsi le problème.

Toutefois cette imposition de variable ne peut se faire que sous certaines conditions.

Ainsi, pour un modèle initial ayant p contraintes égalités et n variables ($n \geq p$), on peut imposer au plus $n - p$ variables. Au-delà, le système serait surdéterminé. Le nombre n_i de variables imposées vérifie donc la condition :

$$0 \leq n_i \leq n - p. \quad (1.10)$$

La démonstration de (1.10) est triviale, dans le cadre de l'hypothèse d'indépendance linéaire, lorsque toutes les fonctions sont linéaires. En revanche, elle n'est pas évidente pour le cas non linéaire, mais reste généralement applicable.

En outre, les variables ne peuvent pas être imposées indépendamment des relations qui les lient entre elles. Il est donc nécessaire de mettre en œuvre une procédure qui gère l'élaboration de ces modèles de dimensions réduites. Ainsi, au cours d'une séquence d'imposition, la procédure indique à l'utilisateur les variables qu'il peut imposer, en fonction de la structure du problème et des variables qu'il a déjà imposées.

L'algorithme développé utilise une matrice d'incidence qui est construite à partir du jacobien des contraintes. L'examen systématique de ses lignes et colonnes permet ainsi de repérer la dépendance de chaque contrainte vis-à-vis des différentes variables.

La procédure veille d'une part à ce que l'imposition d'une variable ne conduise pas à la définition de sous-systèmes surdéterminés. En effet, l'existence, au sein des contraintes égalités, d'un sous-système de m équations à m inconnues interdit, sous peine de surdétermination du système, l'imposition d'une de ces m variables.

Cette procédure interdit d'autre part la définition de contraintes non réalisables. Dans le cas d'une contrainte inégalité, elle vérifie que la contrainte est réalisée lorsque toutes ses variables ont été fixées. Dans le cas d'une contrainte égalité mettant en jeu m variables dont $m - 1$ sont connues (implicitement ou explicitement), elle veille à ce que la m -ième ne soit pas imposée dans la mesure où l'utilisateur ne connaît pas *a priori* la valeur vérifiant la contrainte.

1.3 CONCLUSION : LA FORMULATION DU PROBLÈME À RÉSOUDRE. — Le dimensionnement consiste à rechercher des solutions satisfaisant un ensemble de relations définissant une structure physique donnée, dans un but précis, formulé par un cahier des charges. Tel que nous l'avons formalisé, ce problème consiste, selon le modèle dimensionnant considéré (de dimension initiale ou réduite), à rechercher une solution de l'un des deux cas de figure suivants :

Rechercher une solution d'un problème d'optimisation : lorsque $p < n$, il ne peut y avoir de solution unique pour le système d'équations correspondant. Ainsi, il y aura en général une multitude de solutions dans le domaine défini par les contraintes du problème. L'introduction de critères permet de se diriger vers celles qui sont les mieux adaptées aux besoins. Ainsi, si n_{ni} est le nombre de variables du modèle dimensionnant de dimension réduite, le problème de dimensionnement sera formulé par :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser} && \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^{n_{ni}} \rightarrow \mathbb{R}' \\ &\text{assujettie à :} && h_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) = 0, \quad k \in [1, p]_{\mathbb{N}} \\ & && g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \geq 0, \quad j \in [1, q]_{\mathbb{N}} \\ &\text{et} && x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i \in [1, n_{ni}]_{\mathbb{N}}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Rechercher une solution d'un système d'équations dans un domaine donné : lorsque, à la limite on met en jeu un modèle de dimension réduite dans lequel le nombre de variables devient égal à p , nous obtenons un système de p équations à p inconnues qui suffit généralement à déterminer les valeurs des variables inconnues (ce qui n'est strictement vrai que dans le cas d'un problème linéaire). Cependant seules les solutions situées dans le domaine défini par les contraintes inégalité sont valables. Le problème revient ainsi à résoudre le système :

$$\begin{cases} h_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) = 0, & k \in [1, p]_{\mathbb{N}} \\ g_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \geq 0, & j \in [1, q]_{\mathbb{N}} \\ x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, & i \in [1, p]_{\mathbb{N}}. \end{cases} \tag{1.12}$$

2. Méthodes numériques de résolution.

2.1 GÉNÉRALITÉS. — La différence entre (1.11) et (1.12) est l'injection de critères d'optimisation dans le premier cas. Le second peut être résolu naturellement, en généralisant les méthodes numériques classiques de résolution d'équations non linéaires telles que la méthode de Newton-Raphson. Cependant, à cause des problèmes de convergence de ces dernières, on préfère souvent utiliser des techniques d'optimisation [1]. Le problème (1.12) ne faisant pas intervenir de critère, la méthode d'optimisation peut être appliquée à une norme, construite à partir des contraintes du problème, dont la minimisation conduit à la résolution du système.

Dès lors, les problèmes définis par les relations (1.11) et (1.12) reviennent tous deux à la résolution d'un problème d'optimisation.

2.2 CHOIX DES MÉTHODES DE RÉOLUTION. — La Programmation Non Linéaire offre différentes techniques pour résoudre un problème d'optimisation avec contraintes. Elles peuvent être classées en deux groupes :

— *les méthodes de transformation* : elles transforment le problème en une séquence de problèmes sans contrainte pouvant alors être résolus par des techniques d'optimisation sans contrainte ;

— *les méthodes primitives avec contraintes* : elles permettent de résoudre directement les problèmes avec contraintes, sans transformation préalable.

De par l'importance de la généralité dans les problèmes de dimensionnement (problèmes avec ou sans contraintes égalités et inégalités essentiellement non linéaires), les méthodes de transformation, qui utilisent des algorithmes d'optimisation sans contrainte, semblent être, naturellement, les mieux adaptées. D'autre part, les problèmes d'optimisation multivariable sans contrainte sont plus simples et plus faciles à résoudre par rapport à ceux avec contraintes. De plus les algorithmes de recherche sans contrainte disponibles sont particulièrement sûrs et efficaces. Plusieurs auteurs ont d'ailleurs utilisé avec succès des méthodes de transformation sur des problèmes d'électrotechnique [2-4].

2.3 DESCRIPTION DES MÉTHODES DE RÉOLUTION CHOISIES. — La résolution du problème fait intervenir trois niveaux algorithmiques correspondant à la résolution d'un problème scalaire sans contrainte, à l'introduction des contraintes grâce aux techniques de transformation, et enfin à la prise en compte d'un problème multicritère.

2.3.1 Techniques d'optimisation scalaire multivariable sans contrainte. — De manière générale, ces méthodes itératives sont basées sur le principe suivant : à la k -ième itération, on définit une direction de descente \mathbf{d}_k dans l'espace de recherche. Ensuite, à partir du point \mathbf{x}_{k-1} (qui est soit le point de départ à la première itération, soit le point résultant de la $(k-1)$ -ième itération), on recherche le minimum \mathbf{x}_k de la fonction objectif $f(\mathbf{x})$ sur la droite (D) de direction \mathbf{d}_k passant par \mathbf{x}_{k-1} . Cette minimisation s'effectue de manière « discrète » en essayant plusieurs pas de progression différents, ou « continue » en utilisant une technique de minimisation monovariable sachant que tout point \mathbf{x} de (D) (en particulier \mathbf{x}_k) est défini par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha \mathbf{d}_k, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

La recherche de \mathbf{x}_k minimisant $f(\mathbf{x})$ sur (D) équivaut donc à la recherche d'un réel α^* tel que la quantité $\{f(\mathbf{x}_{k-1} + \alpha^* \mathbf{d}_k)\}$ soit minimale dans le cas continu (on parle alors de *recherche linéaire*) ou au moins inférieure à $f(\mathbf{x}_{k-1})$ dans le cas discret.

Chaque méthode, du fait de l'originalité de la construction de ses directions de recherche, peut être particulièrement efficace et sûre sur un type de fonctions donné et totalement inefficace sur un autre. Il est donc utile de mettre en œuvre plusieurs méthodes différentes, dans l'espoir d'un gain d'efficacité sur un plus large éventail de fonctions. Ainsi, les méthodes de Hooke-Jeeves [5, 6] et Rosenbrock [6], les techniques des directions conjuguées de Powell [5, 6, 8] et Zangwill [6] ; les algorithmes du gradient conjugué de Fletcher-Rives (FR) [5, 6], Polak-Ribière (PR) [5, 6, 9] et Beale-Powell [5, 9] ; et enfin les méthodes à métriques variables de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) [5, 6], Broyden-Fletcher-Shanno (BFS) [5] et Davidon [5, 10] ont été retenus.

Dans la littérature, plusieurs études comparatives permettent de se faire une idée des algorithmes les plus performants (robustesse, efficacité, temps de calcul). D'une manière

générale, les techniques du second ordre (méthodes à métriques variables) et du gradient (lorsque l'on peut calculer rapidement et avec précision les dérivées partielles) et la méthode des directions conjuguées de Powell sont considérées comme supérieures.

2.3.2 Techniques de transformation. — Les théories de Lagrange et de Kuhn et Tucker, dans lesquelles le problème avec contraintes est *transformé* en une fonction sans contrainte (le Lagrangien) pour développer des conditions d'optimalité, fournissent une motivation puissante et une base théorique pour de telles méthodes. L'idée de convertir un problème avec contraintes en une séquence de problèmes sans contrainte est très attractive, car les problèmes sans contrainte peuvent être résolus à la fois efficacement et sûrement. On peut espérer en outre que seulement la résolution de quelques sous-problèmes sans contrainte, de difficultés modérées, sera requise pour approcher avec une précision acceptable, la solution du problème avec contraintes.

Les sous-problèmes sont construits de manière à forcer la convergence des itérations vers la solution du problème initial avec contraintes, en « pénalisant » toutes les violations de contrainte. On met en œuvre à cet effet un critère qui favorise la sélection des points admissibles par rapport aux points inadmissibles en affectant une pénalité à la fonction à optimiser pour chaque contrainte violée [5-7].

Dans la méthode des pénalités classique la fonction objectif transformée ou fonction auxiliaire P est de la forme :

$$P(\mathbf{x}, R) = f(\mathbf{x}) + \Omega[R, \mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (2.2)$$

où R (ensemble de réels strictement positifs) est le paramètre de pénalité et Ω la relation de pénalité. La méthode des pénalités consiste à minimiser séquentiellement un ensemble de problèmes sans contrainte (2.2) en augmentant après chaque séquence la valeur du paramètre R , forçant ainsi, comme R devient très grand, la convergence vers la solution du problème avec contraintes. La technique décrite est souvent dénommée **SUMT** (Sequential Unconstrained Minimization Technique) en Anglais.

Cependant, lorsque R croît, les séquences deviennent de plus en plus mal conditionnées, ce qui peut entraîner de graves problèmes numériques provoquant la faillite de la méthode. Des méthodes à paramètres de pénalité fixes ont été introduites pour y remédier. Parmi ces dernières nous nous intéressons à une méthode du **Lagrangien Augmenté** appelée Méthode des Multiplicateurs ou MOM (Method Of Multipliers) dont la relation de pénalité est [5] :

$$\Omega[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}, \mathbf{h}] = R \left[\sum_{k=1}^p [[h_k(\mathbf{x}) + \tau_k]^2 - \tau_k^2] + \sum_{j=1}^q [\min^2 [0, g_j(\mathbf{x}) + \sigma_j] - \sigma_j^2] \right] \quad (2.3)$$

R est ici un facteur d'échelle constant et σ et τ , deux ensembles de paramètres fondamentalement différents de R (ce sont en fait des estimations des paramètres de Kuhn et Tucker) en ce qu'ils influencent les relations de pénalité d'une manière qui force la convergence des itérations sous des conditions plutôt douces pour la fonction auxiliaire P . La technique consiste à faire varier les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\tau}$ à la fin de chaque séquence selon des règles de remise à jour définies.

Le choix du paramètre de pénalité R au départ est important car la convergence peut en dépendre. Une difficulté importante avec les méthodes de transformation est le problème de l'échelle. Un problème est à une mauvaise échelle lorsque les modules de ses variables ou de ses fonctions ne sont pas comparables. Une ou plusieurs variables et/ou contraintes peuvent alors dominer artificiellement la recherche et entraîner prématurément sa fin. Il est donc indispensable, pour disposer d'un outil efficace, de prévoir une procédure de mise à l'échelle

des variables et des contraintes. Une technique développée par Root et Ragsdell [11] peut être utilisée à cette fin.

2.3.3 Problèmes multi-critères. — Généralement, le problème du dimensionnement des machines électriques fait intervenir plusieurs critères. La caractéristique principale d'un problème d'optimisation vectorielle est l'apparition d'un conflit des critères. En effet, les optima relatifs à chacun des objectifs pris individuellement sont en général sensiblement différents. Dans ces conditions la solution sera un point tel que, lorsqu'il est atteint, il ne soit plus possible d'améliorer la valeur d'un critère sans détériorer celles des autres. Cette solution est alors dite *Pareto-optimale* [12]. Cependant, dans le cadre d'une approche plus simple, il est aussi possible de chercher à transformer un problème d'optimisation vectorielle en un problème scalaire, par l'une des deux techniques suivantes :

- La méthode des facteurs de pondération : elle consiste à prendre comme critère scalaire une somme pondérée des composantes du vecteur objectif :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \rho_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i(\mathbf{x}_0)} \quad (2.4)$$

Les ρ_i sont les poids. Leur sensibilité est améliorée en rapportant chaque critère à sa valeur au point de départ \mathbf{x}_0 . Bien que ce procédé soit attrayant, on peut rarement estimer à l'avance l'influence des poids et du point de départ sur la solution. Aussi, la méthode de Marglin lui est souvent préférée.

- La méthode de Marglin : elle revient à considérer une seule composante du vecteur-critère comme objectif à optimiser, le reste étant transformé en contraintes inégalités en se donnant, pour chaque critère f_i transformé, une valeur maximale V_{mf_i} . Le problème vectoriel se réduit ainsi au problème scalaire :

Minimiser :

$$f_g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

assujettie à :

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &\geq 0, \quad j = 1, \dots, q \\ V_{mf_\ell} - f_\ell(\mathbf{x}) &\geq 0, \quad \ell = 1, \dots, g-1, \quad g+1, \dots, r \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0, \quad k = 1, \dots, p \\ x_i^{(L)} &\leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En pratique, le problème d'utilisation de cette méthode réside dans le choix des valeurs maximales V_{mf_i} admises pour les critères transformés en contraintes. En effet si ces valeurs sont prises trop grandes, on obtiendra une solution très voisine de celle du problème mono-critère avec la fonction objectif considérée. Par contre, lorsqu'elles sont trop petites, les contraintes correspondantes ne pourront pas être satisfaites simultanément et il n'y aura donc pas de point optimal. La solution est de rechercher dans un premier temps les minima individuels des différents critères, puis de prendre pour chaque critère transformé, une valeur un peu plus grande que son minimum.

3. Exemple d'application.

La méthode de dimensionnement proposée a été implantée sur calculateur (HP 9000). A titre d'illustration, la procédure développée a été appliquée au cas du dimensionnement d'une Machine à Aimants Permanents Sans Encoche (MAPSE) à forme d'onde rectangulaire, schématisée sur la figure 2 [13].

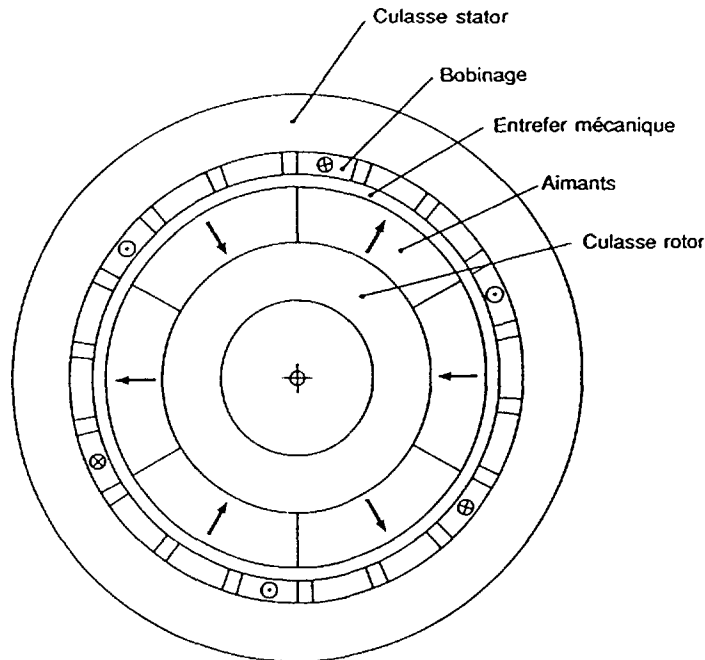


Fig. 2. — Structure bidimensionnelle de la MAPSE.

[MAPSE bi-dimensionnal structure.]

3.1 MODÈLE STRUCTURAL. — La structure est définie par les relations traduisant la conversion électromécanique et la conservation du flux. Ainsi le couple électromagnétique, calculé en intégrant sur l'ensemble de la zone des courants le produit de l'induction à vide (supposée de direction radiale dans le bobinage) par le courant, est donné par :

$$\Gamma_{em} = \frac{\pi}{2\lambda} (1 - K_f) \sqrt{k_r \beta E_{ch}} ED^2 (D + E) B_e \quad (3.1)$$

où D est le diamètre d'alésage ; E , l'épaisseur du bobinage ; k_r , le coefficient de remplissage du bobinage ; λ , le facteur de forme de la machine (rapport du diamètre d'alésage à la longueur) ; β , le coefficient d'arc polaire (rapport de la longueur effectivement occupée par un aimant à la longueur d'un pôle) ; K_f , le coefficient de fuites interpolaires (rapport du flux de court-circuit interpolaire au demi flux émis par le pôle), non négligeables compte tenu de l'importance relativement grande de l'entrefer magnétique et de la proximité de deux pôles voisins ; B_e le niveau d'induction, à vide, au niveau du diamètre d'alésage ; et E_{ch} un paramètre qui représente grossièrement l'échauffement de la machine et est défini par le produit de la charge linéique A par la densité de courant dans le cuivre J_{cu} .

$$E_{ch} = AJ_{cu} = k_r EJ_{cu}^2. \quad (3.2)$$

Le logiciel de calcul numérique du champ DIFIMEDI [14] a permis d'établir une relation empirique entre le coefficient de fuites et les dimensions géométriques :

$$K_f \approx 1,5 p \beta \frac{e + E}{D} \quad (3.3)$$

où p représente le nombre de paires de pôles de la machine et ; e , l'entrefer mécanique.

Si ℓ_a représente l'épaisseur des aimants et M leur aimantation, l'induction à vide dans l'entrefer B_e , supposée purement radiale, est donnée par :

$$B_e = \frac{2 \ell_a M}{D \operatorname{Log} \left[\frac{D + 2 E}{D - 2(\ell_a + e)} \right]} \quad (3.4)$$

En négligeant les fuites interpolaires et le flux de réaction d'induit, la conservation du flux permet de déduire l'épaisseur C des culasses (supposées identiques au rotor et au stator) connaissant l'induction dans le fer B_{fer} .

$$C = \frac{\pi \beta B_e}{4 p B_{\text{fer}}} D. \quad (3.5)$$

Le nombre de paires de pôles p est obtenu à partir de la connaissance du double pas polaire Δ_p et du diamètre d'alésage D par :

$$p = \frac{\pi D}{\Delta_p} \quad (3.6)$$

Le modèle structural n'est donc formé que de contraintes de type égalité, correspondant aux relations (3.1) à (3.6) auxquelles s'ajoutent les butées structurales précisant les intervalles de définition des variables. Ces domaines correspondent à l'intervalle $[0, 1]$ pour K_f , k_r et β , et, pour les autres variables, à des intervalles compris entre 0 et une valeur positive grande à l'échelle de la variable considérée.

3.2 CAHIER DES CHARGES. — A titre d'exemple, on s'intéresse à une MAPSE capable de développer un couple électromagnétique de 10 Nm, utilisant des aimants terres rares ($M = 0,9$ Tesla) et des tôles supportant une induction de 1,5 Tesla. Les emplacements du bobinage, en raison de la forme des conducteurs et des couches d'isolant seront remplis à 70 % par le cuivre. L'échauffement admis est constant et on admettra un produit de la charge linéique par la densité de courant de $100 \times 10^+9$ A/m. Le double pas polaire doit être de l'ordre de 100 mm. En raison de contraintes technologiques, l'entrefer mécanique ne doit pas être plus faible que 1 mm. Les fuites interpolaires quant à elles sont limitées à 30 % du total de flux engendré par l'inducteur. En outre la machine doit être dimensionnée de manière à avoir le volume des parties actives, le volume d'aimant et les pertes par effet Joule les plus faibles possibles.

La transcription des spécifications du cahier des charges conduit à introduire ici deux contraintes inégalités faisant intervenir deux paramètres ($e_{\min} = 1$ mm pour l'entrefer minimal et $K_{f_{\max}} = 30$ % pour le coefficient de fuites interpolaires maximal) :

$$e - e_{\min} \geq 0 \quad (3.7)$$

$$K_{f_{\max}} - K_f \geq 0. \quad (3.8)$$

Du fait de la possibilité d'imposer des variables (cf. 1.2.4), il n'est pas nécessaire de définir d'autres paramètres pour les autres spécifications, car ces dernières peuvent être prises en compte en imposant directement les variables concernées.

Les butées du cahier des charges, définissant le domaine d'intérêt, sont précisées dans la première colonne du tableau I.

Tableau I. — *Dimensions et caractéristiques des solutions obtenues.*

[Dimensions and characteristics of the obtained solutions.]

Problème	Minimisation du Volume des Parties Utiles V_u	Minimisation du Volume des Aimants V_a	Minimisation des Pertes par effet Joule P_J	Optimisation multi-critère : $V_{a \max} = 1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ $P_{J \max} = 45,000 \text{ W}$
$V_u \text{ (m}^3\text{)}$	$6,073 \times 10^{-4}$	$6,704 \times 10^{-4}$	$6,961 \times 10^{-4}$	$6,137 \times 10^{-4}$
$V_a \text{ (m}^3\text{)}$	$1,102 \times 10^{-4}$	$6,716 \times 10^{-5}$	$2,131 \times 10^{-4}$	$1,328 \times 10^{-4}$
$P_J \text{ (watts)}$	51,317	93,211	38,215	45,000
$D \text{ (m)}$ Butées : min. : 0,01 max. : 0,5	0,1273	0,1273	0,1273	0,1273
$L \text{ (m)}$ Butées : min. : 0,004 max. : 0,5	0,0692	0,1273	0,0510	0,0604
$\ell_a \text{ (m)}$ Butées : min. : 0,001 max. : 0,05	0,0053	0,0017	0,0117	0,0074
$E \text{ (m)}$ Butées : min. : 0,001 max. : 0,05	0,0038	0,0021	0,0054	0,0044
$C \text{ (m)}$ Butées : min. : 0,001 max. : 0,05	0,0062	0,0042	0,0091	0,0067
β Butées : min. : 0,8 max. : 1,0	0,8	0,8	1,0	0,8
p Butées : min. : 1 max. : 10	4	4	4	4

Tableau I (suite).

Problème	Minimisation du Volume des Parties Utiles V_u	Minimisation du Volume des Aimants V_a	Minimisation des Pertes par effet Joule P_j	Optimisation multi-critère : $V_{a\max} = 1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ $P_{j\max} = 45,000 \text{ W}$
B_e (T) Butées : min. : 0,1 max. : 1,0	0,462	0,315	0,545	0,502
J_{cu} (A/m ²) Butées : min. : $1,0 \times 10^5$ max. : $1,0 \times 10^7$	$6,148 \times 10^6$	$8,179 \times 10^6$	$5,160 \times 10^6$	$5,687 \times 10^6$
K_f Butées : min. : 0,01 max. : 0,5	0,180	0,118	0,300	0,204
e (m) Butées : min. : 0,0001 max. : 0,005	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010

La machine doit être dimensionnée selon le critère des volumes des parties actives V_u , et d'aimant V_a , et des pertes Joule P_j minimaux. Le vecteur objectif est donc formé par :

$$V_u = \pi \frac{D}{\lambda} (D + E - e - \ell_a)(2C + E + e + \ell_a) \quad (3.9)$$

$$V_a = \pi \beta \ell_a \frac{D}{\lambda} (D - 2e - \ell_a) \quad (3.10)$$

$$P_j = \pi \rho_{cu} \frac{D}{\lambda} (D + E) E_{ch} \quad (3.11)$$

où ρ_{cu} est la résistivité du cuivre.

3.3 MODÈLE DIMENSIONNANT. — Il est composé par les contraintes égalités correspondant aux relations (3.1) à (3.6), les contraintes inégalités (3.7) et (3.8), auxquelles il faut rajouter les butées définissant le domaine de recherche. Compte tenu des valeurs des butées structurales et des butées du cahier des charges, ce domaine se confond avec le domaine d'intérêt.

3.4 MODÈLE DIMENSIONNANT DE DIMENSION RÉDUITE. — Le modèle dimensionnant de dimension réduite correspondant aux spécifications du cahier des charges ci-dessus est défini en imposant les variables suivantes aux valeurs spécifiées :

$$k_r = 0,70$$

$$M = 0,90 \text{ Tesla}$$

$$B_{\text{fer}} = 1,50 \text{ Tesla}$$

$$E_{\text{ch}} = 10^{+11} \text{ A/m}$$

$$\Gamma_{\text{em}} = 10 \text{ N.m}$$

$$\Delta_p = 0,100 \text{ m}.$$

Sachant que le modèle structural est composé de 17 variables, le modèle dimensionnant de dimension réduite obtenu, qui comprend 8 contraintes (dont 6 égalités), compte donc 11 inconnues à déterminer.

3.5 RÉOLUTION DU PROBLÈME. — Les résultats présentés ici ont été obtenus avec la MOM associée à l'algorithme des directions conjuguées de Powell. Une résolution mono-critère par rapport à chacune des fonctions composant le vecteur critère a été effectuée dans un premier temps. Une optimisation multi-critère, associant simultanément les trois fonctions objectifs, a ensuite été réalisée. Dans ce dernier cas, la méthode de Marglin a été utilisée. Le volume des parties utiles a été choisi comme critère d'optimisation, sachant que la transformation en contraintes inégalités des deux autres objectifs (V_a et P_j) fait intervenir les valeurs maximales $V_{a \text{ max}}$ et $P_{j \text{ max}}$ choisies en fonction des résultats des optimisations mono-critères (cf. Tab. I). Les résultats obtenus dans les quatre cas sont présentés sur la figure 3 et le tableau I.

De manière générale les dimensions et caractéristiques obtenues sont relativement éloignées de leurs butées définies *a priori*. Seul le coefficient d'arc polaire β se stabilise systématiquement sur ses butées qui, compte tenu du type de machine considérée (forme d'onde rectangulaire), ont été choisies de manière à définir un intervalle relativement étroit au voisinage de l'unité.

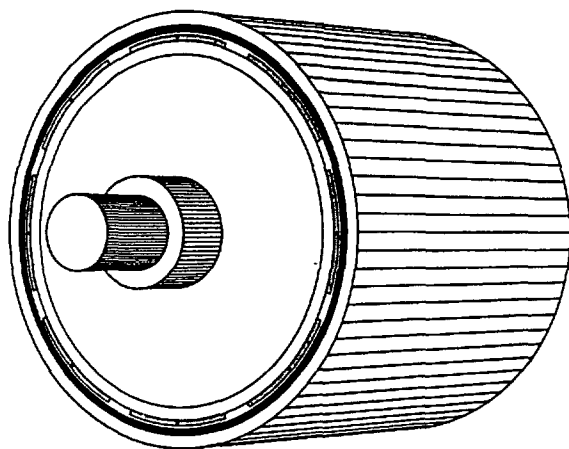
Notons toutefois que, dans les cas où les valeurs de certaines variables sont sur leurs butées, l'optimum obtenu pourrait être éventuellement amélioré en changeant les valeurs des butées concernées lorsque cela est possible.

D'autre part, on peut noter que les quatre machines obtenues présentent le même nombre de pôles ainsi que le même diamètre d'alésage. Ceci s'explique par le fait que, travaillant à pas polaire fixé, la contrainte (3.6) reliant le diamètre d'alésage D au nombre entier p n'autorise que des valeurs particulières de D . Dans la mesure où les machines dimensionnées sont dans la même gamme de taille, les diamètres obtenus prennent la même valeur.

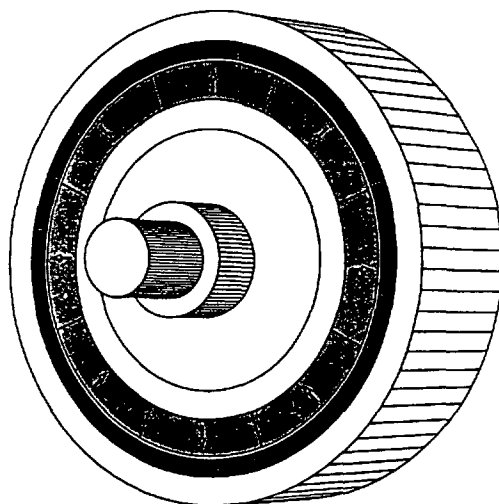
Dans le cas des dimensionnements mono-critères, les valeurs des différentes fonctions objectifs diffèrent sensiblement suivant le critère d'optimisation considéré. En particulier, l'optimisation des pertes Joule conduit à un volume d'aimant supérieur de plus de 200 % par rapport à la solution relative à la minimisation du volume des aimants. Notons néanmoins que le dimensionnement relatif à cet optimum est peu crédible si l'on considère en particulier l'épaisseur d'aimant obtenue (1,7 mm !). En vue de répondre aux exigences technologiques, il est possible soit de définir une butée inférieure plus grande pour l'épaisseur d'aimant, soit d'introduire une contrainte supplémentaire au niveau du cahier des charges.

Dans le cas du dimensionnement multi-critère, les valeurs obtenues pour les trois critères (qui dépendent bien sûr des valeurs maximales choisies pour les objectifs transformés en contraintes) ne sont pas très éloignées de leurs optima relatifs aux optimisations mono-critères : mis à part le cas du volume des aimants qui augmente de plus de 100 % par rapport à son optimum, les écarts relatifs aux autres critères n'excèdent pas 17 %. Ainsi, le dimensionnement multi-critère, qui semble présenter en outre les caractéristiques mécaniques les plus réalistes, nous apparaît comme la solution la plus satisfaisante. Notons que cette solution privilégie plutôt les pertes Joule et que d'autres dimensionnements peuvent être obtenus selon les préoccupations du concepteur.

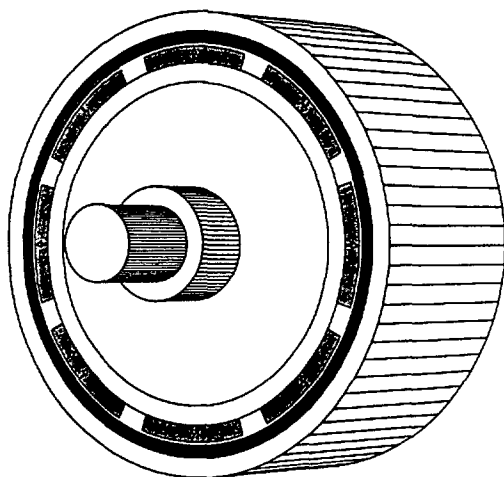
Enfin, précisons que les temps de calcul sont tout à fait acceptables dans la mesure où ils ne



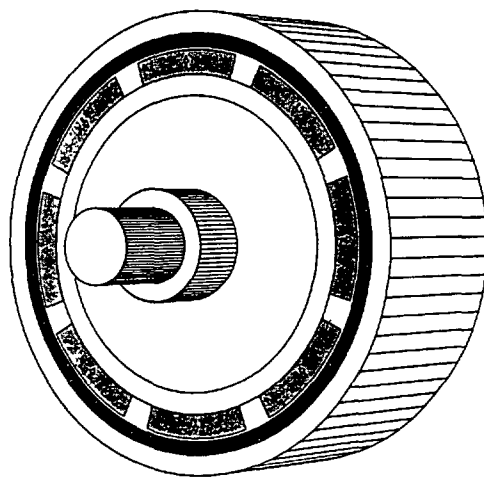
Minimisation du volume des aimants
[Minimization of the magnet volume]



Minimisation des pertes par effet Joule
[Minimization of the Joule effect losses]



Minimisation du volume des parties actives
[Minimization of the acting parts volume]



Optimisation multi-critère
[Multiobjective optimisation]

Fig. 3. — Machines optimales obtenues (« échelle » $\approx 1/4$).

[Optimized obtained machines (1/4 scale).]

dépassent pas 40 s (temps CPU sur HP 9000), ce qui autorise une utilisation performante de la procédure au sein d'un schéma de dimensionnement itératif.

Conclusion.

Dans cet article, une méthodologie de dimensionnement des actionneurs électriques fondée sur les théories de la Programmation Non Linéaire a été présentée.

Le problème a tout d'abord été formulé en termes d'optimisation, à partir des spécifications et critères du cahier des charges, et des relations décrivant le comportement dimensionnel de la structure. Le formalisme adopté favorise notamment le découplage entre le modèle définissant la structure, la formulation du cahier des charges et le module de résolution mathématique, ce qui confère à la procédure un caractère générique tant au niveau des types de structures envisageables que vis-à-vis des spécifications possibles. D'autre part, la méthodologie développée offre au concepteur la possibilité de réduire de manière interactive le domaine de recherche en vue de maîtriser son dimensionnement, grâce à la mise en œuvre d'une procédure d'analyse séquentielle des dépendances contraintes-variables.

Compte tenu de l'éventualité de la coexistence simultanée de plusieurs critères d'optimisation au niveau du cahier des charges, le problème du dimensionnement se formule généralement en termes d'optimisation vectorielle. Néanmoins, l'utilisation de techniques telles que la méthode de Marglin, permet de se ramener à une optimisation scalaire. En ce qui concerne les méthodes de résolution, la confrontation de différentes techniques de transformation, qui permettent de ramener la formulation avec contraintes à une formulation sans contrainte, a conduit à privilégier les méthodes du Lagrangien Augmenté par rapport aux méthodes des fonctions de pénalité classiques.

La procédure a enfin été implantée sur ordinateur et validée dans le cas du dimensionnement d'une structure à aimants permanents et induit sans encoches. Bien que le problème considéré soit relativement simple (11 inconnues et 8 contraintes) l'exploitation de l'outil a permis de démontrer l'efficacité de la méthode qui fournit, suivant le critère considéré, des solutions optimales difficilement accessibles par un calcul manuel.

La procédure développée est à l'heure actuelle associée à des modèles de machines à aimants permanents qui prennent en compte l'encochage de l'induit et qui intègrent en outre des contraintes relatives à l'alimentation électronique de la structure. La complexité de ces modèles devrait mettre d'autant mieux en évidence l'intérêt et la puissance de cette nouvelle approche, rationnelle et générique, du dimensionnement des actionneurs électriques.

Bibliographie

- [1] VIGNES J., ALT R. et PICHAT M., Algorithmes Numériques, Analyse et Mise en œuvre, Tome 2 : Equations et Systèmes Non Linéaires (Editions Technip, Paris, 1980).
- [2] RUSSENSCHUCK S. and ANDRESSEN E. Ch., Mathematical Design Optimization Of A Permanent Magnet Synchronous Motor With FD Calculation Method (ISEF, Southampton, 1991).
- [3] WATTERSON P. A., ZHU J. G. and RAMSDEN V. S., Optimization Of Permanent Magnet Motor Using Field Calculations Of Increasing Precision, *IEEE Trans. Magn.* **28** (1992) Number 2.
- [4] LIU Xian and SLEMON Gordon R., An Improved Method Of Optimization For Electrical Machines, *IEEE Trans. Energy Conversion* **6** (1991) Number 3.
- [5] REKLAITIS G. V., RAVINDRAN A. and RAGSDALL K. M., Engineering Optimization, Methods And Applications (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1983).
- [6] BAZARAA M. S. and SHETTY K. M., Nonlinear Programming, Theory And Algorithms (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1979).

- [7] GILL P. E., MURRAY W. and WRIGHT M. H., Practical Optimization (Academic Press, Inc., San Diego, 1981).
- [8] POWELL M. J. D., An Efficient Method For Finding The Minimum Of A Function Of Several Variables Without Calculating Derivatives, *Computer J.* **7** (1964) 155-162.
- [9] POWELL M. J. D., Restart Procedures For The Conjugate Gradient Method, *Mathematical Programming* **12** (1977) 241-254.
- [10] DAVIDON W. C., Optimally Conditionned Algorithms Without Line Searches, *Mathematical Programming* **9** (1975) 1-30.
- [11] ROOT R. R. and RAGSDALL K. M., Computational Enhancements Of The Method Of Multipliers, *ASSME J. Mech. Des.* **102** (1980) 517-523.
- [12] OJO Olorunfemi, Multiobjective Optimum Design Of Electrical Machines For Variable Speed Motor Drives, *IEEE Industry Application Society Annual Meeting* **1** (1991) 163-168.
- [13] NOGAREDE B., Etude de moteurs sans encoches à aimants permanents de forte puissance à basse vitesse, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse. No. 334 (1990).
- [14] LAJOIE-MAZENC M., HECTOR J., FAUCHER J. et DAVAT B., DIFIMEDI : Code Conversationnel de Calcul du Champ dans les Structures Magnétiques Notice d'Utilisation, L.E.E.I. Toulouse (avril 1985).