

Г.С. Осипенко, Н.Б.Ампилова

**ВВЕДЕНИЕ В СИМВОЛИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Санкт-Петербург
2004

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой вводный курс в конструктивные методы исследования динамических систем. Описаны методы прикладной символической динамики и их применение к изучению неперерывных и дискретных динамических систем. Также рассматриваются методы исследования глобальной структуры динамических систем, основанные на использовании символического образа системы, представляющего собой конечный ориентированный граф, построенный по выбранному покрытию фазового пространства. Полученный ориентированный граф порождает символическую динамику, отражающую динамику исходной системы. Символический образ позволяет изучать глобальную структуру исходной системы в терминах теории графов и допускает компьютерное исследование.

Каждая глава снабжена достаточным количеством примеров, приведены результаты численных экспериментов с подробными комментариями. Для понимания описанной тематики читатель должен быть знаком с общим курсом теории дифференциальных уравнений. Необходимые первоначальные сведения по этому курсу приведены в Приложении А. Теоремы приводятся без доказательств, основное внимание удалено их применению. Доказательства необходимых теорем читатель может найти в соответствующих оригинальных работах. Книга рассчитана на студентов старших курсов, исследователей, занимающихся различными приложениями теории динамических систем.

Созданию этой книги в значительной мере помогали И.В.Романовский (разработка и реализация компьютерного алгоритма вычисления спектра Морса), Е.И.Петренко (создание программного комплекса исследования динамических систем), С.Ю. Кобяков (построение символического образа и локализация инвариантных множеств), Л.В.Линчук (программный комплекс LINE). Авторы глубоко признательны А.В. Скитовичу, просмотревшему рукопись и сделавшему много ценных замечаний и поправок.

Публикация книги осуществлена по решению Организационного Комитета молодежной конференции "Computer modelling of dynamical systems", июнь 2004, С.-Петербург и при финансовой поддержке UNESCO-ROSTE и программы "Интеграция".

Авторы и Организационный Комитет благодарны UNESCO-ROSTE и программе "Интеграция" за поддержку.

Глава 1

Динамика

Изучению какого-либо физического процесса обычно предшествует построение его математической модели. Модель представляет собой систему уравнений, описывающих изучаемый процесс в математических терминах. Уравнения, входящие в систему, могут иметь различную природу. Зависимость между величинами, входящими в уравнения, может быть линейной (т.е представлять собой линейную функцию) или нелинейной, уравнения могут содержать параметры (уравнения с параметрами) или содержать как искомые функции, так и их производные (дифференциальные уравнения). Примеры таких моделей известны: например, модели движения маятника, движения жидкости, модель распространения тепла, модель процесса размножения бактерий.

Под процессом мы понимаем множество наблюдаемых параметров, которые зависят от времени t . Множество значений параметров процесса в момент времени t характеризует его состояние. Множество состояний процесса образует фазовое пространство системы.

Например, закон радиоактивного распада вещества можно сформулировать так: скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна оставшемуся в данный момент количеству вещества. В этом случае состояние процесса определяется количеством вещества. Процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества может быть описан следующим образом: скорость роста популяции пропорциональна ее объему. Здесь состояние процесса определяется количеством бактерий. В данных случаях фазовое пространство одномерно и представляет собой множество положительных вещественных чисел.

Рассмотрим механическую систему, описывающую движение материальной точки. Состояние рассматриваемой точки характеризуется двумя величинами: координатами и скоростью. В зависимости от того, где происходит движение, для однозначного определения состояния точки потребуется различное количество характеристик. Если точка движется по прямой, то потребуется две величины (координата на прямой и скорость) и фазовым пространством, таким образом, будет являться плоскость R^2 или ее часть. При движении точки в плоскости координаты задаются двумя величинами и вектор скорости также имеет две составляющих. Следовательно, фазовым пространством является четырехмерное евклидово пространство R^4 . Аналогично для описания движения точки в трехмерном пространстве потребуется 6 величин, характеризующих состояние данной точки в некоторый момент времени и фазовым пространством такой системы будет пространство R^6 .

Уравнения, задающие систему, описывают изменение состояния объекта с течением времени. Если этот закон изменения выражается с помощью дифференциальных уравнений, то говорят, что задана система с непрерывным временем. Если же уравнения, определяющие систему, задают закон изменения состояния системы через фиксированный интервал времени, то система называется системой с дискретным временем. Величина этого временного интервала определяется условиями конкретной задачи. Таким образом, мы можем представлять себе поведение интересующего нас объекта, рассматривая движение точек в фазовом пространстве в определенные моменты времени, а закон этого движения задается нашей системой уравнений.

Одним из наиболее известных является класс систем, описывающих так называемые детерминированные процессы. Это означает, что существует правило в виде системы уравнений, ко-

торое однозначно определяет весь будущий ход процесса и его прошлое, исходя из состояния в настоящее время. Системы, описывающие процессы размножения бактерий и радиоактивного распада вещества а также механические системы, задающие движение материальной точки, являются детерминированными, т.е. процесс однозначно определяется по заданному начальному положению и уравнениям системы. Разумеется, существуют и недетерминированные системы: процесс распространения тепла в некоторой среде является полудетерминированным, так как будущее определяется настоящим, а прошлое — нет. А вот движение частиц в квантовой механике не является детерминированным процессом. Нужно заметить, что факт детерминированности того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно — только с некоторой степенью точности. В дальнейшем мы еще вернемся к этому обстоятельству, а сейчас будем считать, что наши математические модели отражают реальные физические процессы, т.е. являются достаточно точными.

Мы будем изучать дискретные и непрерывные динамические системы. Дискретная система задается отображением (разностным уравнением) $x_{n+1} = f(x_n)$, где каждое последующее состояние системы x_{n+1} однозначно определяется предыдущим состоянием x_n и отображением f . При этом номер n можно трактовать как дискретное время. Таким образом, эволюция системы описывается последовательностью $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ в фазовом пространстве.

Хотя исторически главным объектом исследований в теории динамических систем были потоки, порожденные дифференциальными уравнениями, в семидесятые годы прошлого века особое внимание было обращено на дискретные динамические системы. Более подробно о связи этих двух видов систем можно прочесть в книге [79]. Непрерывная динамическая система задается, как правило, автономным дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = F(x)$ (или системой таких уравнений). Решение такого уравнения имеет вид $\Phi(t, x_0)$, где x_0 задает начальное состояние системы при $t = t_0$, а t трактуется как время. В этом случае эволюция системы описывается кривой $\{x = \Phi(t, x_0), t \in R\}$ в фазовом пространстве. Основные теоремы курса дифференциальных уравнений гарантируют существование решения Φ при достаточно широких предположениях относительно отображения F , однако его нахождение (интегрирование системы) является довольно трудной задачей. Более того, решения большинства дифференциальных уравнений не выражаются через элементарные функции. При решении реальных задач решение Φ часто строится с использованием численных методов.

В этом смысле дискретные динамические системы являются более простыми для изучения, так как отображение f является в этом случае аналогом решения Φ и проблема интегрирования не усложняет понимания эволюции системы. Компьютерное моделирование позволяет легко строить траекторию системы на конечном интервале времени, что дает возможность решать многие задачи.

1.1. Хаос и порядок

Поскольку процесс, описываемый детерминированной системой, однозначно определяется заданным начальным состоянием, то можно предположить, что поведение такой системы является достаточно регулярным, т. е. следует некоторому определенному закону. Такой взгляд господствовал в 19 столетии. Однако, с развитием науки меняются и наши представления об окружающем мире. В 20 веке были созданы теория относительности, квантовая механика и теория хаоса.

Теория относительности опровергла представления Ньютона об абсолютном пространстве-времени, а квантовая механика показала, что нельзя считать детерминизм присущим всем физическим явлениям. Теория хаоса показала, что многие детерминированные системы могут проявлять свойства нерегулярности, т. е. обладают решениями, которые зависят от времени непредсказуемым образом. Примером хаотической зависимости может служить десятичная запись иррационального числа, где каждая последующая цифра, может быть какой угодно независимо от всех предыдущих, т.е. зная первые n цифр, мы не можем прогнозировать последующую цифру.

Термин “хаос”, по-видимому, был введен Д.Йорке в 60-е годы. Однако, первооткрывателем хаотического поведения траекторий следует считать А.Пуанкаре [94], который в 1888 году исследуя

проблему трех тел, обнаружил сильно неустойчивые орбиты. За эту работу 21 января 1889 года он получил премию короля Швеции Оскара II. Пуанкаре показал существование двоякоасимптотических орбит в задаче трех тел. Такую орбиту мы сейчас называем гомоклинической. Основное ее свойство состоит в том, что она начинается и заканчивается вблизи одной и той же периодической орбиты. Следует отметить, что в данном случае хаотические траектории возникают в строго детерминированных механических системах, подчиненных законам Ньютона.

В 1935 году Г. Биркгоф [48] впервые применил символическую динамику для кодировки траекторий вблизи гомоклинической орбиты. С. Смейл применил ту же технику при построении так называемой “подковы” — простой модели хаотической динамики [39]. “Подкова Смейла” оказала существенное влияние на теорию хаоса, так как этот пример является типичным, а методы символической динамики оказались тем инструментом, который позволяет описать природу детерминированного хаоса.

Регулярное изучение хаоса началось в 1960-х годах, когда исследователи осознали, что даже самые простые нелинейные модели порождают столь же неупорядоченное поведение, как самый бурный водопад. Незаметные различия исходных условий порождают значительные расхождения в результатах, что называют “чувствительной зависимостью от начальных данных”. Один из пионеров исследования хаоса Эдвард Лоренц назвал это “эффектом бабочки”: трепетание крыльев бабочки в Пекине может через месяц вызвать ураган в Нью-Йорке. Однако, большинство людей продолжает оставаться на позиции Лапласа, философа и математика XVIII века, который полагал, что существуют формулы, описывающие движения любых физических тел и, следовательно, не остается ничего неопределенного ни в прошлом, ни в будущем. Они считают, что усложнением математической модели и повышением точности вычислений можно добиться абсолютно детерминированного описания системы. При этом наличие хаоса в модели рассматривается как недостаток этой модели, а работа исследователя оценивается отрицательно. Если при проведении исследования или эксперимента выясняется, что объекту исследования присущи некоторые черты неустойчивости или хаоса, то это объясняется посторонними “шумами”, неучтенными возмущениями или плохой постановкой опыта. Вполне понятно стремление биологов, физиологов, экономистов разложить свои системы на “атомы”, и построить их детерминированные модели. Однако следует иметь в виду два факта:

- 1) абсолютная точность вычислений невозможна;
- 2) более сложные математические модели порождают еще большую зависимость от начальных данных.

Поэтому многие параметры системы определены с известной точностью, например, ускорение свободного падения. Более того, любая модель всегда описывает реальную систему приближенно, и начальное состояние системы также определено с известной точностью. Стремление получить более точное описание приводит к усложнению математической модели, которая, как правило, является нелинейной. Все это неминуемо приводит к системам, допускающим неопределенные или хаотические решения (траектории). Следовательно, хаотического поведения систем избежать нельзя, и мы должны научиться предвидеть хаос и им управлять.

Практическим примером такого подхода является решение проблемы передачи информации. Известно, что при передаче информации (в компьютерах, телефонных сетях и т.д.) возникают сбои или шумы. При этом промежутки чистой передачи сменяются периодами помех. Считалось, что внезапное появление помех порождено “человеческим фактором”. Дорогостоящие попытки очистить линии передачи или увеличить мощность сигнала не привели к решению проблемы шума. Промежутки чистой передачи и промежутки помех расположены весьма хаотично как по продолжительности, так и по порядку следования. Однако в этом хаосе интервалов шума и чистой передачи обнаружилась закономерность: среднее соотношение между совокупным временем чистой связи и совокупным временем шума остается постоянным и, более того, это соотношение не зависит от масштаба, т.е. оно одинаково как для часа, так и для секунды. Это значит, что шумы не являются локальной проблемой и порождены не только “человеческим фактором”. Выход из, казалось бы, тупиковой ситуации был найден очень простой — разумнее выбрать сравнительно слабую и недорогую связь, но дублировать ее для исправления ошибок. Такая стратегия

передачи информации применяется в современных компьютерных сетях.

Экономика также дает примеры хаотической зависимости. Так, профессор экономики Гарвардского университета Хаутхаккер, изучая диаграмму изменения цен на хлопок за восемь лет, обнаружил слишком много больших скачков, а статистический график никак не хотел принимать ожидаемую форму нормального распределения. Он обратился к Бенуа Мандельброту, который работал в исследовательском центре корпорации IBM. Компьютерный анализ изменения цен показал, что точки, которые не ложились на нормальную кривую, образуют странную симметрию. Каждый отдельно взятый скачок цены был случайным, однако последовательность таких изменений не зависела от масштаба: дневные скачки и месячные скачки прекрасно соответствовали друг другу при соответствующем изменении времени. Причем такая закономерность не менялась в течении шестидесяти лет, на которые выпали две мировые войны и множество кризисов. Таким образом, внутри хаотической динамики скрывается поразительная закономерность.

Хаотическая зависимость наблюдается не только в статистических процессах. Рассмотрим маятник, который состоит из двух и более жестких звеньев. Первое звено закреплено на неподвижной точке подвеса, к концу этого звена крепится второе звено и так далее. Эта механическая система строго детерминирована и описывается набором дифференциальных уравнений. Если запустить маятник так, чтобы он делал большое число оборотов, то можно наблюдать хаотическое движение. Маятник будет хаотично менять направление вращения и число оборотов. При этом точно повторить движение в следующем опыте не удается. Таким образом, мы можем наблюдать хаос в строго детерминированных механических системах. Объяснение здесь очень простое: система обладает свойством чувствительной зависимости от начальных данных [104],[50].

1.2. Динамика системы и кодирование траекторий

Современная теория и практика динамических систем показывают необходимость изучения структур, описание которых выходит за рамки использования объектов классического анализа — аналитических формул, интегралов, рядов и т.д. Важным инструментом, позволяющим исследовать такие сложные явления в динамических системах как хаос, существование странных аттракторов является метод символической динамики. Название отражает основную идею метода — описание динамики системы при помощи допустимых последовательностей символов (допустимых слов) из конечного набора символов (алфавита). Поясним эту идею на следующем гипотетическом примере.

Предположим, что “прибор” (реальный или условный) фиксирует состояние системы или положение фазовой точки. Эти значения выдаются с некоторой точностью. Например, электронные часы показывают значение t_i , когда реальное значение t лежит в интервале $[t_i, t_i + h)$, где величина $h > 0$ зависит от конструкции часов. В общем случае, можно считать, что фазовое пространство M исследуемой системы покрыто конечным числом ячеек $\{M_i\}$ и прибор указывает номер или индекс i ячейки, когда точка x лежит в ячейке M_i . Ячейки могут пересекаться, когда стрелка прибора стоит точно на границе M_i и M_j . Тогда любое значение i или j считается правильным. Можно считать, что прибор фиксирует индекс ячейки через равные промежутки времени и траектория системы (т.е. множество последовательных значений фазовой точки под действием системы) кодируется последовательностью индексов $\{z(k), k \in Z\}$. Индексами могут быть символы любой природы: номера, буквы, координаты и т.д. Если символами являются буквы алфавита, то число букв совпадает с числом ячеек, и траектории кодируются последовательностями букв, которые называются допустимыми словами. Так, для передачи любого сообщения с помощью телеграфного кода используется алфавит из двух символов: “точка” и “тире”.

Таким образом, множество возможных состояний системы (фазовое пространство) разбивается на конечное число ячеек. Каждая ячейка соответствует “символу”, а “прибор” в каждую единицу времени показывает “символ”, соответствующий той ячейке, в которой лежит текущее состояние системы. Следует отметить, что по данной последовательности символов однозначно восстанавливается последовательность ячеек, через которые проходит траектория. Ясно, что такое описание динамики будет более точным, когда ячейки выбираются достаточно мелкими.

Переход от бесконечного фазового пространства к конечному набору символов можно рассматривать как дискретизацию фазового пространства.

Таким образом, поведение системы “кодируется” с помощью специально построенного языка. При этом существует определенное соответствие между последовательностями символов и динамикой системы. Например, периодической орбите системы соответствует повторение конечного набора символов. Свойство возвратности орбиты выражается повторением символа в допустимом слове. В результате динамика системы определяется не конкретными значениями символов, а порядком их следования. Отметим, что динамика системы определяет также допустимость перехода из одной ячейки в другую и, следовательно, от одного символа к другому. При этом от одного символа возможен переход к нескольким. В этом случае множество всех допустимых слов является бесконечным. Например, если алфавит состоит из символов $\{0, 1\}$ и допустимы переходы от любого символа к любому, то мы получим множество бесконечных двоичных последовательностей, имеющее мощность континуум. Если запретить переход от символа 1 к символу 0, то мы получим последовательности, отличающиеся в тех местах, где происходит переход от 0 к 1 и, следовательно, таких последовательностей счетное число. Динамика первой системы допускает бесконечное число периодических орбит, в то время как у второй системы их всего две: $\{0\}$ и $\{1\}$.

Впервые кодировка траекторий последовательностями символов для описания глобального поведения геодезических на поверхностях отрицательной кривизны была применена Ж.Адамаром в 1898 г. [66]. Основателем методов символической динамики является Х.Морс [76]. Название “символическая динамика” ввели Х.Морс и Ж.Хедлунд ([77]). Большой вклад в развитие методов символической динамики внес Р.Боуэн [49]. Существенное влияние на развитие этих методов оказал пример упоминавшейся ранее “подковы Смейла”. В.М.Алексеев применил метод символической динамики для исследования задач небесной механики [1]. Он использовал термин “символический образ” для обозначения пространства допустимых последовательностей при кодировании траекторий системы.

Теоретические основы и приложения символической динамики можно найти в лекциях В.М.Алексеева [2].

В попытке найти подход к компьютерному моделированию динамических систем, Ч.Шу создал метод “отображение ячейка-в-ячейку” [69]. Этот метод показал достаточную эффективность в исследовании глобальной структуры динамических систем с хаотическим поведением траекторий. Идея метода состоит в том, что исходное отображение приближается отображением ячеек (“cells”). При этом считается, что образ ячейки M_i совпадает с ячейкой M_j , если центр ячейки M_i отображением f переводится в некоторую точку ячейки M_j . Предложенный метод является компьютерно-ориентированным и его реализация не вызывает принципиальных трудностей. К основным недостаткам метода следует отнести его слабое теоретическое обоснование. Поэтому результаты численных экспериментов требуют тщательного изучения, а выводы — обоснования. Известен также обобщенный вариант этого метода, когда образ ячейки $f(M_i)$ может состоять из нескольких ячеек $\{M_j\}$ с вероятностью, пропорциональной объему или мере пересечения $f(M_i) \cap M_j$. Такой подход приводит к конечным марковским цепям, теория которых хорошо развита. Компьютерная реализация является более громоздкой и представляет определенные трудности. Детали описанных методов и результаты численных экспериментов можно найти в книге [69].

В 1983 году Г.С.Осипенко ввел понятие символического образа динамической системы относительно конечного покрытия [82, 83]. Под символическим образом понимался ориентированный граф, у которого вершина i соответствует ячейке M_i , а ребро $i \rightarrow j$ существует, если в M_i найдется точка x , образ $f(x)$ которой лежит в M_j .

Между исходной системой и ее символическим образом существует следующее соотношение:

- траекториям системы соответствуют допустимые пути на графе;
- символический образ отражает глобальную структуру динамической системы;
- символический образ является конечным приближением системы, а максимальный диаметр ячейки определяет точность приближения.

М.Делниц и его соавторы разработали технику подразбиений для численного исследования динамических систем. Суть этого метода состоит в том, чтобы, следуя определенным условиям, исключать из рассмотрения ненужные ячейки и проводить более мелкое подразбиение остальных ячеек. На этом пути построены алгоритмы для локализации различных инвариантных множеств, разработан численный метод построения устойчивых и неустойчивых многообразий [55]. Были также разработаны алгоритмы для вычислений приближений инвариантной меры и старшего показателя Ляпунова [56],[45]. На основе разработанных алгоритмов создан и успешно функционирует пакет GAIO, см. <http://math-www.uni-paderborn.de/agdellnitz/gaio/>.

Общая схема предлагаемого символического анализа заключается в следующем. По конечному покрытию фазового пространства динамической системы строится ориентированный граф, вершины которого соответствуют ячейкам покрытия, а ребра соответствуют допустимым переходам. Такой граф называется символическим образом динамической системы относительно данного покрытия.

Символический образ можно рассматривать как конечную дискретную аппроксимацию динамической системы. При этом более мелкое покрытие порождает более точную аппроксимацию. С помощью процесса последовательного подразбиения элементов покрытия можно строить последовательность символьических образов и, тем самым, уточнять структурные характеристики системы.

Описанный метод может быть успешно применен к решению следующих задач:

1. Локализация периодических траекторий заданного периода.
2. Построение периодической траектории.
3. Локализация цепно-рекуррентного множества.
4. Построение (положительно, отрицательно) инвариантного множества.
5. Построение аттрактора и его области притяжения.
6. Построение фильтраций и точной последовательности фильтраций.
7. Определение структурного графа динамической системы.
8. Оценка топологической энтропии.
9. Оценка показателей Ляпунова.
10. Оценка спектра Морса.
11. Проверка гиперболичности и нормальной гиперболичности.
12. Проверка структурной устойчивости.
13. Проверка управляемости.
14. Построение изолирующих окрестностей инвариантных множеств.

1.3. Динамические системы. Определения и примеры

Пусть M — подмножество q -мерного пространства R^q . Как правило, M является замкнутым ограниченным множеством (компактом) или гладким многообразием в R^q . Пусть Z — множество целых чисел и R — множество вещественных. Динамической системой называется непрерывное отображение $\Phi(x, t)$, где $x \in M$, $t \in Z$ (или $t \in R$), такое, что

$$\Phi : M \times Z \rightarrow M \text{ (или } \Phi : M \times R \rightarrow M\text{)},$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= x, \\ \Phi(\Phi(x, t), s) &= \Phi(x, t + s), \end{aligned}$$

где t, s принадлежат Z (или R). Переменная t трактуется как время, а многообразие M называется фазовым пространством. Если $t \in Z$, то мы имеем динамическую систему с дискретным временем, которая называется каскадом или дискретной динамической системой. Часто дискретные динамические системы порождены итерационными процессами или разностными уравнениями $x_{n+1} = f(x_n)$. В случае, когда $t \in R$, мы имеем дело с системой с непрерывным временем, которая называется непрерывной динамической системой. Иногда непрерывные динамические

системы называются потоками, а дискретные каскадами. Как правило, непрерывные динамические системы порождены автономными системами дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, т.е. такими, у которых правая часть не зависит явно от времени.

Пример 1.1.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение $x' = ax$ на прямой R . Решение с начальными данными (x_0, t_0) имеет вид $F(x_0, t - t_0) = x_0 \exp a(t - t_0)$. В этом случае непрерывная динамическая система задается отображением $F(x, t)$, т.е.

$$\Phi = x \exp at.$$

Если $a < 0$, то $x \exp at \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если $a > 0$, то $|x \exp at| \rightarrow \infty$, при $t \rightarrow \infty$. Если фиксировать время сдвига вдоль траекторий t , например, положить $t = 1$, то мы получим дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = bx_n, \quad b = \exp a.$$

В этом случае коэффициент $b > 0$. Дискретная система $x_{n+1} = bx_n$ может быть задана непосредственно (без дифференциального уравнения). При этом коэффициент b может быть отрицательным. В последнем случае говорят, что отображение $\Phi(x) = bx$ меняет ориентацию.

Пример 1.2. Уравнение Лотки-Вольтерра. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (-c + dx_1)x_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь параметры a, b, c, d положительны, а сама система представляет собой самый известный пример описания динамики взаимодействующих популяций и называется уравнениями Лотки–Вольтерра. В приведенной модели x_1 и x_2 обозначают численности популяций жертв и хищников соответственно, a — скорость размножения жертв в отсутствие хищников, а слагаемое $-bx_2$ учитывает потери от хищников. Таким образом, прирост на особь \dot{x}_1/x_1 для жертв составляет $a - bx_2$. Для хищников в отсутствие пищи их популяция уменьшается, так что $\dot{x}_2/x_2 = -c, c > 0$ при $x_1 = 0$. Слагаемое dx_1 компенсирует это уменьшение в случае удачной охоты.

Дискретные динамические системы

Пусть непрерывное отображение $f : M \rightarrow M$ имеет непрерывное обратное f^{-1} , т.е. f является гомеоморфизмом. Тогда f порождает дискретную динамическую систему вида $\Phi(x, n) = f^n(x)$, $n \in Z$. Отображение $f^m(x)$ представляет собой композицию m раз функции f , для $m > 0$; композицию m раз функции f^{-1} , для $m < 0$; тождественное отображение для $m = 0$. Дискретные динамические системы часто называют каскадами. Таким образом, изучается динамика каскада

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad x_k \in M \subset R^q, \quad k \in Z.$$

Иногда будем считать, что f — диффеоморфизм. Это означает что существуют и непрерывны все частные производные.

Траекторией (или орбитой) начальной точки x_0 называется бесконечная в обе стороны последовательность

$$T(x_0) = \{x_k = f^k(x_0), \quad k \in Z\}.$$

Точка x_0 называется неподвижной, если $f(x_0) = x_0$. Траектория неподвижной точки состоит из одной точки $T(x_0) = \{x_k = x_0\}$. Точка x_0 называется p -периодической, если $f^p(x_0) = x_0$. Существует наименьшее положительное число p , называемое наименьшим периодом. Например, неподвижная точка является p -периодической для любого p , но ее наименьший период равен единице. Траектория периодической точки x_0 с наименьшим периодом p состоит из p различных точек $T(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$. Дискретные динамические системы задаются как правило различными видами рекуррентных соотношений, в частности разностными уравнениями. Исследованию этого вида дискретных динамических систем посвящена работа [41].

Пример 1.3. Рассмотрим отображение плоскости R^2 в себя вида

$$f : (x, y) \rightarrow (ay + bx^2, -ax).$$

Поскольку $f(0, 0) = (0, 0)$, начало $(0, 0)$ является неподвижной точкой с траекторией $T(0, 0) = \{x_k = (0, 0), k \in Z\}$. При $b \neq 0$, существует еще одна неподвижная точка с координатами $x_0 = (1+a^2)/b$, $y_0 = -a(1+a^2)/b$ и траекторией $T(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0)\}$. Если $b = 0$, то отображение f есть суперпозиция двух линейных преобразований: $f = L_1 \circ L_2$, где L_1 есть умножение на a и $L_2 = (y, -x)$ – поворот на угол $\alpha = -90^\circ$. При $a = 1$ мы получаем вращение, при этом каждая точка (x, y) порождает периодическую траекторию периода $P = 4$, т.е. $f^4(x, y) = (x, y)$. Таким образом, траектория точки $(1, 1)$ имеет вид: $T(1, 1) = \{(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)\}$. Можно подобрать a и b таким образом, чтобы динамическая система имела бесконечно много периодических траекторий с неограниченными наименьшими периодами [69].

Непрерывные динамические системы

Свойства пространств гладких непрерывных и дискретных динамических систем описаны в монографиях [64, 65, 67, 93, 105]. Дискретным динамическим системам, порождаемым разностными уравнениями, посвящена работа [41]. Для описания непрерывной динамической системы, задаваемой дифференциальными уравнениями, рассмотрим оператор сдвига вдоль ее траекторий, определяемый следующим образом. Пусть $\dot{x} = F(t, x)$ система обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in M$, $F(t, x)$ есть C^1 векторное поле периодическое по t с периодом ω . Обозначим $\Phi(t, t_0, x_0)$ решение системы при начальных условиях $\Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Исследование глобальной динамики данной системы приводит к изучению преобразования Пуанкаре $f(x) = \Phi(\omega, 0, x)$, которое является оператором сдвига вдоль траекторий на период ω . Непрерывные динамические системы называются потоками.

Пример 1.4. Уравнение Дуффинга с вынуждающей силой имеет вид

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = B \cos(ht),$$

где t – независимая переменная, k , α , β , B , и h являются параметрами, x искомая функция. С помощью замены переменной $y = \dot{x}$ уравнение может быть записано в виде системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - \alpha x - \beta x^3 + B \cos(ht).\end{aligned}$$

Если $B \neq 0$, система периодична с периодом $\omega = \frac{2\pi}{h}$. Пусть $h = 2$ и $(X(t, x, y), Y(t, x, y))$ есть решение с начальными данными (x, y) при $t = 0$. В этом случае преобразование Пуанкаре имеет вид

$$f : (x, y) \rightarrow (X(\pi, x, y), Y(\pi, x, y)).$$

Если система является автономной (т.е. векторное поле F не зависит от t), мы можем взять за период произвольное $\omega \neq 0$, при этом не нарушая общности можно положить его равным 1. Оператор сдвига имеет вид $f(x) = \Phi(\omega, x)$, где $\Phi(t, x)$ есть решение автономной системы, $\Phi(0, x) = x$. При численном решении оператор сдвига можно построить методом Рунге-Кутта или Адамса.

Пример 1.5. Невозмущенное уравнение Дуффинга имеет вид

$$\dot{x} + k\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0.$$

Соответствующая система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - \alpha x - \beta x^3,\end{aligned}$$

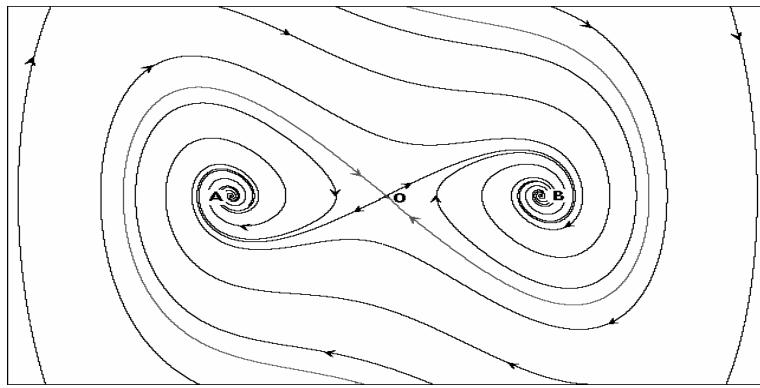


Рис. 1.1. Фазовый портрет уравнения Дуффинга

является автономной и оператор сдвига может быть записан следующим образом

$$f : (x, y) \rightarrow (X(1, x, y), Y(1, x, y)).$$

Для исследования указанных систем применяются методы компьютерного моделирования. Например, хорошие результаты дает применение пакета Maple. Фазовый портрет системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - 0.27x^3 - 0.48y,\end{aligned}$$

показан на рис.1.1.

У системы имеются три состояния равновесия O , A и B . Существуют две траектории, стремящиеся к O при $t \rightarrow +\infty$. Эти траектории называются устойчивыми сепаратрисами и обозначаются $W^s(O)$. Таким образом, для каждой точки $x \in W^s(O)$ ее ω -предельное множество есть точка O . Существуют также две траектории, называемые неустойчивыми сепаратрисами и обозначаемые $W^u(O)$, стремящиеся к O при $t \rightarrow -\infty$. Для каждой точки $x \in W^u(O)$ точка O является ее α -предельным множеством. Все траектории, кроме $W^s(O)$, стремятся к состояниям равновесия A и B .

Связь между дискретными и непрерывными динамическими системами

Исторически главным объектом исследования в теории динамических систем были непрерывные динамические системы, порожденные системами дифференциальных уравнений. Однако в последнее время появилась тенденция обращать основное внимание на дискретные системы, порожденные диффеоморфизмами. Покажем, что существует соответствие между непрерывными и дискретными системами. Мы убедимся, что каждая непрерывная система порождает дискретную систему и наоборот, и при этом существует естественное соответствие между траекториями этих систем. Самый простой способ перейти от непрерывной системы к дискретной это рассмотреть отображение или оператор сдвига вдоль траекторий на фиксированное время. (Метод построения отображения сдвига вдоль траекторий был рассмотрен выше.) Из теоремы существования и дифференцируемости решений дифференциальных уравнений следует, что если система уравнений была гладкой, то отображение сдвига будет диффеоморфизмом. Возникает обратная задача включения диффеоморфизма в поток, т. е. для данного диффеоморфизма найти векторное поле, такое, чтобы его оператор сдвига совпадал с данным диффеоморфизмом. Однако, как показал М.И.Брин [21], большинство диффеоморфизмов не включается в потоки. Например, если диффеоморфизм меняет ориентацию (т. е. его якобиан — отрицательный), то он не может быть включен в поток, который всегда непрерывно деформируется к тождественному отображению. Таким образом, диффеоморфизмы образуют существенно более широкий класс, чем потоки, порожденные дифференциальными уравнениями. Однако при помощи понятия секущей, введенного Пуанкаре, можно построить соответствие, при котором возникает обратная ситуация. Рассмотрим пример секущей тора. Тор есть произведение окружностей $T = S \times S$ с координатами

$(x, y), 0 \leq x, y \leq 1$. Построим векторное поле $F = (0, 1)$ и соответствующую ему непрерывную динамическую систему на T . Траектории пересекают трансверсально окружность $S \times 0$, которая называется секущей для построенного потока на торе. Траектория с начальной точкой $(x, 0), x \in S$ за единицу времени возвратится и пересечет эту окружность в точке $(f(x), 0)$. Так рождается диффеоморфизм $f : S \mapsto S$ окружности, который называется отображением последования. Пуанкаре впервые применил этот прием для исследования динамики системы вблизи периодической траектории. В этом случае сечением является отрезок трансверсальный периодической траектории, а время возврата зависит от начальной точки. Рассмотрим обратный переход от диффеоморфизма к векторному полю. Пусть $f : M \mapsto M$ является диффеоморфизмом многообразия M . Построим новое многообразие M^* , отождествив в произведении $M \times [0, 1]$ точки $(x, 0)$ и $(f(x), 1)$. Единичное векторное поле $F = (0, 1)$ на $M \times [0, 1]$, для которого многообразие $M_0 = M \times 0$, является сечением. Таким образом, диффеоморфизм f на M порождает векторное поле F на M^* , для которого нулевое сечение M_0 является многообразием, на котором отображение последования совпадает с f . Оба описанных способа сопоставления потоков и диффеоморфизмов указывают на то, что качественная теория гладких потоков (дифференциальных уравнений) и теория дискретных систем развиваются параллельными путями, хотя и могут отличаться в деталях.

Как уже отмечалось, первоначальные сведения по курсу дифференциальных уравнений приведены в Приложении А. Для более глубокого знакомства с теорией дифференциальных уравнений можно использовать книги [14, 19, 32, 36, 67, 68]. Качественная теория дифференциальных уравнений изучает геометрию или топологию траекторий системы. С этим вопросом можно ознакомиться по книгам [11, 12, 15, 18, 31, 35, 64].

Глава 2

Символический образ динамической системы

Чтобы исследовать динамику системы, можно построить разбиение фазового пространства и затем отслеживать поведение траекторий, отмечая, в какой из элементов разбиения попадает очередная итерация выбранной начальной точки. Тем самым, мы получаем некоторую систему, которая описывает свойства исходной. Мы опишем один из способов построения такой системы, основанный на записи переходов (связей) из одного элемента разбиения в другой. Ориентированный граф, построенный по выбранному покрытию исследуемой системы и отражающий такие переходы называется символическим образом динамической системы.

2.1. Построение символического образа

Пусть $f : M \rightarrow M$ является гомеоморфизмом компакта M , $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ - конечное покрытие компакта M замкнутыми множествами и $\rho(*, *)$ — расстояние на M . Множества $M(i)$ назовем ячейками покрытия. Для каждого номера i определим подпокрытие $C(i)$ образа ячейки $M(i)$, состоящее из тех ячеек $M(j)$, которые его пересекают:

$$C(i) = \{M(j) : M(j) \cap f(M(i)) \neq \emptyset\}.$$

Множество $C(i)$ назовем образом ячейки $M(i)$ и положим

$$c(i) = \{j : M(j) \cap f(M(i)) \neq \emptyset\}.$$

Определение 2.1. Пусть G есть ориентированный граф, имеющий n вершин, при этом номер вершины i соответствует ячейке $M(i)$ (см. рис.2.1). Вершины i и j связаны ориентированным ребром (дугой) $i \rightarrow j$ если, и только если, $j \in c(i)$, то есть $M(j) \cap f(M(i)) \neq \emptyset$. Так построенный граф G называется символическим образом отображения f относительно покрытия C .

Параметры символического образа. Обозначим

$$\text{diam } M(i) = \max(\rho(x, y) : x, y \in M(i))$$

диаметр ячейки $M(i)$. Пусть d есть наибольший из диаметров ячеек $M(i)$ покрытия C , который мы будем обозначать $d(C)$. Пусть R_i — объединение всех ячеек $M(j)$ из подпокрытия $C(i)$:

$$R_i = \bigcup_{j \in c(i)} M(j)$$

Из построения следует, что $f(M(i))$ лежит внутри множества R_i :

$$f(M(i)) \subset R_i \subset \{x : \rho(x, y) \leq d, y \in f(M(i))\}.$$

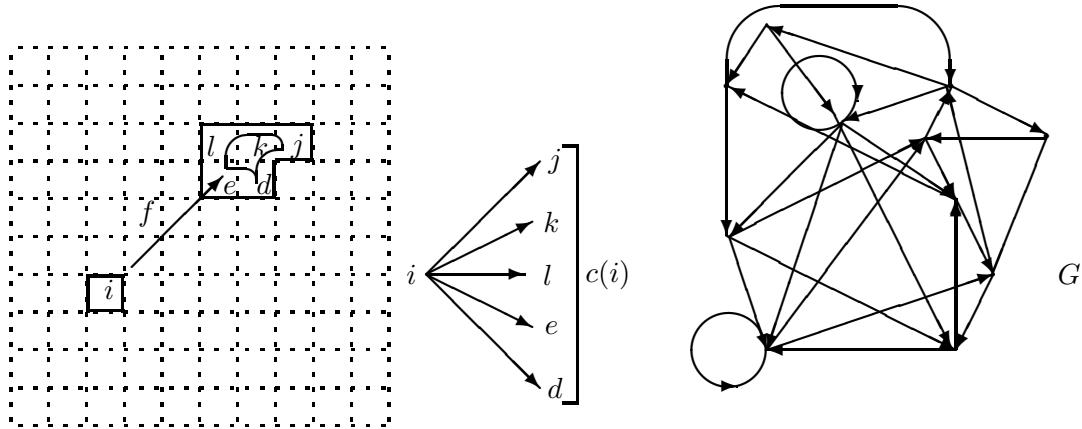


Рис. 2.1. Построение символического образа

Пусть q есть наибольший диаметр образов $f(M(i))$, $i = 1, 2, \dots, n$. Определим число r следующим образом. Если ячейка $M(k)$ не принадлежит подпокрытию $C(i)$, тогда расстояние между $M(k)$ и образом $f(M(i))$

$$r_{ik} = \rho(f(M(i)), M(k)) = \min(\rho(x, y) : x \in f(M(i)), y \in M(k))$$

является положительным. Пусть r есть минимальное значение среди таких r_{ik} . Так как число описанных пар (i, k) конечно, то $r > 0$. Таким образом, число r есть наименьшее расстояние между образами $f(M(i))$ и ячейками $M(k)$, которые не пересекаются. Число r называется нижней гранью символического образа G . Ясно, что нижняя грань зависит от покрытия C . Меняя покрытие C , мы можем построить покрытие, для которого r будет сколь угодно мало. Следующие утверждения описывают некоторые свойства нижней грани символического образа.

Утверждение 2.1. 1. Нижняя грань r удовлетворяет неравенству $r \leq d$.

2. Множество $R_i = \{\cup M(j) : j \in c(i)\}$ содержит r -окрестность образа $f(M(i))$:

$$\{x : \rho(x, f(M(i))) < r\} \subset R_i.$$

3. Если $x \in M(j)$ и $\rho(x, f(M(i))) < r$ то ячейка $M(j)$ принадлежит подпокрытию $C(i)$.

2.2. Псевдотраектории и допустимые пути

Определение 2.2. Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i, -\infty < i < +\infty\}$ называется ε -траекторией (или псевдотраекторией), если расстояние между образом $f(x_i)$ и x_{i+1} меньше чем ε :

$$\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

для любого i . Если при этом последовательность $\{x_i\}$ является периодической, то она называется периодической ε -траекторией, а точки x_i называются ε -периодическими. Если надо указать период p , то мы будем говорить о (p, ε) -периодической траектории.

Следует подчеркнуть, что, как правило, точная траектория системы редко известна, а в действительности мы находим только ε -траекторию для достаточно малых положительных ε .

Пример 2.1. На плоскости R^2 рассмотрим отображение вида:

$$f(x, y) = (y, 0.05(1 - x^2)y - x)$$

и возьмем последовательность точек $x_1 = (2, 0)$, $x_2 = (0, -2)$, $x_3 = (-2, 0)$, $x_4 = (0, 2)$, $x_{k+4} = x_k$. Нетрудно проверить, что данная последовательность является 4-периодической ε -траекторией для любого $\varepsilon > 0.1$. Действительно, $f(2, 0) = (0, -2)$; $f(0, -2) = (-2, -0.1)$; $f(-2, 0) = (0, 2)$, $f(0, 2) = (2, 0.1)$. Таким образом, $|x_{k+1} - f(x_k)| \leq 0.1$ для $k = 1, 2, 3, 4$.

Рисунок 2.2 иллюстрирует сказанное.

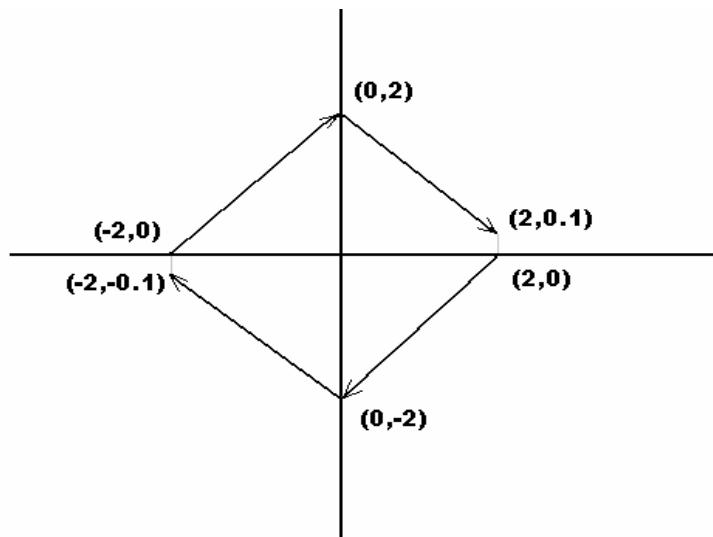


Рис. 2.2. Псевдотраектория отображения $f(x, y) = (y, 0.05(1 - x^2)y - x)$

Обозначим множество p -периодических точек через $\text{Per}(p)$, множество ε -периодических точек через $Q(\varepsilon)$ и множество (p, ε) -периодических точек через $Q(p, \varepsilon)$. Справедливы следующие включения:

$$\text{Per}(p) \subset Q(p, \varepsilon), \quad \bigcup_{p \in N} Q(p, \varepsilon) = Q(\varepsilon), \quad Q(p, \varepsilon) \subset Q(np, \varepsilon),$$

для любого $n \in N$. Следующее утверждение описывает свойства множества $Q(p, \varepsilon)$.

Утверждение 2.2. 1. Множества $Q(p, \varepsilon)$ и $Q(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ открыты.

2. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то $Q(p, \varepsilon_2) \subset Q(p, \varepsilon_1)$ и $Q(\varepsilon_2) \subset Q(\varepsilon_1)$.

3. Пределом последовательности вложенных множеств $Q_{n+1} \subset Q_n$ назовем их пересечение $\bigcap_n Q_n$. Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(p, \varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon > 0} Q(p, \varepsilon) = \text{Per}(p)$ есть множество периодических траекторий периода p .

Определение 2.3. Последовательность z_k вершин графа G называется допустимым путем (или просто путем), если для любого k график G содержит ребро $z_k \rightarrow z_{k+1}$. Путь называется периодическим, если последовательность $\{z_k\}$ является периодической.

Существует естественная связь между допустимыми путями на символическом образе G и ε -траекториями отображения f . Можно сказать, что допустимый путь является следом ε -траектории, причем обратное также верно. Справедлива следующая слабая теорема об отслеживании:

Теорема 2.1. 1. Если последовательность $\{z_k\}$ есть путь на символическом образе G и $x_k \in M(z_k)$, тогда последовательность $\{x_k\}$ есть ε -траектория гомеоморфизма f для любого $\varepsilon > q + d$, где q и d — наибольшие диаметры ячеек $M(i)$ и их образов $f(M(i))$ соответственно. В частности, если последовательность $\{z_k\}$ есть периодический путь на символическом образе, то последовательность $\{x_k\}$ есть ε -периодическая траектория.

2. Если последовательность $\{z_k\}$ есть путь на символическом образе G , тогда существует последовательность $\{x_k\}$, $x_k \in M(z_k)$, которая есть ε -траектория гомеоморфизма f для любого $\varepsilon > d$.
3. Если последовательность $\{x_k\}$ есть ε -траектория гомеоморфизма f , $\varepsilon < r$ и $x_k \in M(z_k)$, то последовательность $\{z_k\}$ есть допустимый путь на символическом образе G . В частности, если последовательность $\{x_k\}$ есть ε -периодическая траектория, то последовательность $\{z_k\}$ есть периодический путь на символическом образе G .

2.3. Матрица переходов

Обозначим Ver множество вершин графа G . Ориентированный граф G можно рассматривать как многозначное соответствие $G : \text{Ver} \rightarrow \text{Ver}$ между вершинами. Такой граф G однозначно определяется матрицей переходов $\Pi = (\pi_{ij})$, которая имеет размеры $n \times n$. Элемент $\pi_{ij} = 1$, если существует ориентированное ребро $i \rightarrow j$, в противном случае $\pi_{ij} = 0$.

Заметим, что матрицу переходов можно построить следующим образом

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= 1, && \text{если } f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset, \\ \pi_{ij} &= 0, && \text{если } f(M(i)) \cap M(j) = \emptyset.\end{aligned}$$

Покажем, что степень p матрицы переходов описывает допустимые пути длины p . Возведение этой матрицы в квадрат дает

$$\Pi^2 = (\pi_{ij}^2),$$

где $\pi_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \pi_{ik} \pi_{kj}$. Индекс “2” в выражении π_{ij}^2 означает следующее. Произведение $\pi_{ik} \pi_{kj} = 1$ в том и только том случае, если $\pi_{ik} = 1$ и $\pi_{kj} = 1$, иначе $\pi_{ik} \pi_{kj} = 0$. Итак, $\pi_{ik} \pi_{kj} = 1$ если и только если существует путь $i \rightarrow k \rightarrow j$ из i в j , проходящий через k . Тогда $\sum_{k=1}^n \pi_{ik} \pi_{kj} = \pi_{ij}^2$ есть число всех допустимых путей длины 2 из i в j . Аналогично можно проверить, что коэффициент π_{ij}^p степени Π^p есть число всех допустимых путей длины p из i в j . В частности, π_{ii}^p есть число p -периодических путей через вершину i . Таким образом, след

$$\text{tr} \Pi^p = \sum_{i=1}^n \pi_{ii}^p$$

есть число всех p -периодических путей.

Определение 2.4. Вершина символического образа называется возвратной, если через нее проходит периодический путь. Множество возвратных вершин обозначается RV . Две возвратные вершины i и j называются эквивалентными, если существует периодический путь, содержащий обе эти вершины.

Возвратные вершины $\{i\}$ единственным образом определяются ненулевыми диагональными элементами $\pi_{ii}^m \neq 0$ степеней матрицы перехода Π^m , $m \leq n$, где n число ячеек покрытия. По определению 2.4, множество возвратных вершин RV разбивается на непересекающиеся классы $\{H_k\}$ эквивалентных возвратных вершин. Каждый периодический путь ξ определяет единственный класс $H_k = H(\xi)$.

Заметим, что в теории графов вводится отношение эквивалентности, позволяющее разбить графы, удовлетворяющие определенным условиям, на классы эквивалентности. Граф G называется сильно связным, если любые две различные вершины i_1, i_2 могут быть соединены путем с началом в i_1 и концом в i_2 . Введем отношение $R(i_1, i_2) =$ “существует путь из i_1 в i_2 ”. Так как введенное отношение транзитивно, а обратное отношение R^{-1} тоже транзитивно, то отношение $S = R \cap R^{-1}$ транзитивно и симметрично. Таким образом S есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности в отношении S называются компонентами сильной связности графа G . [34],[17].

Нетрудно заметить, что разбиение на компоненты сильной связности соответствует разбиению на классы эквивалентных периодических путей.

2.4. Компьютерное построение символического образа

При построении символического образа естественным образом возникают следующие задачи:

1. Построение образа ячейки.

2. Представление полученного графа.

3. Обработка полученного графа.

Мы опишем один из возможных вариантов решения этих задач. Проект был реализован Е.Петренко в программном продукте “Tay”.

При построении символического образа следует помнить, что абсолютно точно образ ячейки построить невозможно. Кроме того, поскольку образ ячейки используется для определения ориентированных ребер $i \rightarrow j$, то ошибка при его вычислении может привести к появлению лишних ребер или к потере настоящих. В большинстве задач сохранение настоящих ребер является более важным, чем построение лишних. По этой причине мы будем строить образ ячейки с некоторым расширением.

Построение образа ячейки.

Пусть функция $f(x) : R^n \rightarrow R^n$, задает правую часть системы. Зафиксируем n положительных чисел p_1, \dots, p_n . Пусть область фазового пространства ограничена множеством S , заданным произведением отрезков:

$$S = [min_1, max_1] \times \dots \times [min_n, max_n]$$

Рассмотрим семейство множеств вида

$$W = [min_1, max_1]/p_1 \times \dots \times [min_n, max_n]/p_n,$$

где $[a, b]/p$ — множество, содержащее разбиение отрезка $[a, b]$ на p равных частей, т. е.

$$\frac{[a, b]}{p} = \left\{ \left[a + \frac{b-a}{p}(k-1), a + \frac{b-a}{p}k \right] \right\}, k = 1 \dots p.$$

Множество W образует покрытие множества S . Далее элемент разбиения множества S , принадлежащий W , будем называть ячейкой.

Такое покрытие можно построить следующим способом: возьмем некоторое подмножество фазового пространства S , разобьем координатные оси на части одинаковой длины, так, чтобы по i -ому направлению было p_i частей. Построенные множества, состоящие по каждой координате из одного элемента разбиения оси, образуют покрытие множества S .

Рассмотрим образы вершин каждой ячейки при отображении f . Чтобы построить образ ячейки по полученным образам вершин, можно сделать следующее:

- взять выпуклую оболочку из полученных образов вершин;
- взять наименьший параллелепипед, ориентированный по осям координат и содержащий образы вершин. Назовем его "Р-ячейка".

Мы опишем реализацию второго способа. Пусть есть некоторая ячейка J покрытия W , требуется найти представление её образа в виде объединения ячеек покрытия W . Для этого рассмотрим образы всех вершин ячейки J . Если вершина a^j задается координатами $(a_1^j, a_2^j, \dots, a_n^j)$, сравним i -е координаты вершин и выберем минимальные (m_i^j) и максимальные (M_i^j) для каждого i . Теперь рассмотрим точку, координаты которой есть минимальные выбранные значения и точку с координатами из максимальных значений. Эти точки определяют диагональ параллелепипеда, содержащего образ ячейки. Множество, заданное как декартово произведение отрезков вида $[a_{m_i^j}^j, a_{M_i^j}^j]$ представляет собой наименьший параллелепипед, ориентированный по осям координат и содержащий образы рассмотренных точек исходной ячейки, т.е. является Р-ячейкой.

Такой алгоритм позволяет за сравнительно небольшое время приближенно найти образ ячейки. Видно, что такое представление может содержать лишние точки и символический образ будет содержать лишние ребра. Чтобы получить более точное представление образа ячейки, нужно взять более мелкое покрытие, тогда разность между настоящим образом и построенным приближением будет уменьшаться.

Для ускорения вычисления значений функции системы в точках ячейки, разложим функцию f в ряд Тейлора до членов второго порядка в окрестности центральной точки ячейки J , а при построении образа ячейки будем рассматривать и ее центр.

Теперь представим полученный образ в виде объединения ячеек. Считаем, что ячейка принадлежит представлению, тогда и только тогда, когда она пересекается с построенным приближением образа. Расширим полученное приближение таким образом, чтобы его границы проходили по границам некоторых ячеек покрытия W . Для этого достаточно уменьшить все минимальные i -е координаты m_i^j до ближайшей координаты вида $\min_i + k_i(\max_i - \min_i)/p$, а максимальные границы следует увеличить до ближайшего $\max_i + k_l(\max_i - \min_i)/p$, где k_i, k_l — некоторые натуральные числа. По построению полученное множество есть параллелепипед, который можно задать в виде координат одной из его наибольших диагоналей. В нашем случае это та диагональ, у которой все координаты одного конца ближе всего к точке $(0, 0, \dots, 0)$, а вторые, соответственно наиболее удалены от неё. Полученное множество можно представить в виде объединения ячеек перебором по координатам с шагом по i -й координате $(\max_i - \min_i)/p$, где i принимает значения от 1 до n .

Представление графа

По определению символического образа вершине графа соответствует некоторая ячейка из разбиения множества S . При реализации алгоритмов построения символического образа эти два понятия отождествляются, а именно, любая вершина символического образа хранит информацию о соответствующей ей ячейке разбиения.

Рассмотрим граф (V, E) , где V — множество вершин, а множество E — множество ребер. Для ускорения счета нужно хранить граф наиболее оптимально, а также оптимизировать операции поиска вершины, добавления ребра (с проверкой, не было ли такое ребро уже добавлено к графу) и добавления новой вершины. Вершину в граф следует добавлять, если образ ячейки из множества W пересекается с выбранным множеством в фазовом пространстве.

Первоначально граф был представлен двойной списочной структурой, где все вершины хранились в списке, и у каждой из них был свой список ребер. В каждом элементе списка ребер хранится указатель на ту вершину, в которую ребро направлено. Данное представление не очень эффективно, так как для того, чтобы добавить ребро, требуется искать в списке вершину. Для ускорения процесса поиска было добавлено хэширование первого списка равномерной хэш-функцией. Данное решение уменьшило максимально возможное число операций, необходимое для поиска, тем самым ускорился процесс добавления нового ребра. Для дополнительного ускорения можно хэшировать и списки ребер, так как при добавлении ребра требуется проверить, есть ли в графе уже такое ребро.

Глава 3

Локализация периодических траекторий

Нашей целью является локализация и построение периодических траекторий на заданном компакте. Под локализацией подразумевается алгоритм построения монотонно убывающей последовательности вложенных окрестностей периодической траектории, пересечение которых дает искомую периодическую траекторию. При этом построенная последовательность сходится к искомой траектории. В нашем случае ставится задача о локализации множества p -периодических траекторий т. е. всех периодических траекторий периода p . Исследуя символический образ, мы можем отделить клетки покрытия, через которые проходят p -периодические траектории от клеток, не обладающих эти свойством. Объединение клеток с указанным свойством является замкнутой окрестностью искомого множества. Применяя далее специальный метод подразбиения элементов покрытия, мы построим последовательность символьических образов, порождающую последовательность вложенных окрестностей. Оказывается, если максимальный диаметр d разбиваемых клеток стремится к нулю, построенная последовательность окрестностей сходится к множеству p -периодических траекторий. Таким способом можно получить алгоритм локализации периодических траекторий фиксированного периода. Более того, согласно Теореме 2.1, мы можем найти периодические ε -траектории на каждом шаге алгоритма. Далее мы покажем, как применить метод Ньютона, чтобы найти достаточные условия существования настоящей p -периодической траектории вблизи ε -траектории.

3.1. Периодические ε -траектории

Определение 3.1. Точка $x \in M$ называется периодической для отображения f с периодом $p > 0$, если $f^p(x) = x$.

Если точка x p -периодическая, то она является kp -периодической для любого положительного целого k , т.е. $f^{kp}(x) = x$, $k \in N = \{1, 2, \dots\}$. Таким образом, мы можем говорить о наименьшем периоде $\min\{p > 0 : f^p(x) = x\}$. Множество всех периодических точек называется периодическим множеством и обозначается Per , а множество периодических точек периода p называется p -периодическим и обозначается $\text{Per}(p)$. Так как множества Per и $\text{Per}(p)$ представляют собой объединения траекторий, они являются инвариантными. Поскольку предел p -периодических траекторий есть p -периодическая траектория, множество $\text{Per}(p)$ замкнуто. В то же время множество периодических траекторий всех периодов Per может не быть замкнутым, так как предел периодических траекторий может быть непериодическим, если наименьший период стремится к бесконечности. Ясно, что

$$\bigcup_{p \in N} \text{Per}(p) = \text{Per}.$$

Напомним, что последовательность $\{U_k, k \in N\}$ образует фундаментальную систему окрестностей множества A , если $A \subset U_k$, $k \in N$, и для любой окрестности U множества A существует

$U_k \subset U$. Из Утверждения 2.2 главы 2 следует, что семейство открытых множеств $\{Q(p, \varepsilon), \varepsilon > 0\}$ образует фундаментальную систему окрестностей p -периодического множества $\text{Per}(p)$.

Определение 3.2. Вершина символического образа G называется p -периодической, если через нее проходит периодический путь периода p .

Здесь понятие наименьшего периода имеет тот же смысл, что и раньше. Заметим, что p -периодические вершины $\{i\}$ однозначно определяются ненулевыми диагональными элементами $\{\pi_{ii}^p \neq 0\}$ степеней матрицы перехода Π^p (см. раздел 2.3). Очевидно, что p -периодическая траектория $\{x_1, \dots, x_p\}$ порождает p -периодический путь $\{z_k, x_k \in M(z_k)\}$ на символическом образе. Обратное, вообще говоря, неверно. Обозначим за $P(p, d)$ (где d есть наибольший диаметр ячеек покрытия) объединение ячеек $M(i)$, для которых соответствующие вершины являются p -периодическими, т.е.

$$P(p, d) = \{\bigcup M(i) : i \text{ есть } p\text{-периодическая}\}.$$

Разумеется, множество $P(p, d)$ зависит от покрытия C . Однако в дальнейшем нам потребуется только зависимость P от наибольшего диаметра d . Обозначим за $T(p, d)$ объединение клеток $M(k)$, для которых вершины k не являются p -периодическими:

$$T(p, d) = \{\bigcup M(k) : k \text{ не } p\text{-периодическая}\}.$$

Следующая теорема описывает связь между p -периодическими путями на символическом образе и p -периодическими траекториями динамической системы.

Теорема 3.1. 1. Множество $P(p, d)$ является замкнутой окрестностью p -периодического множества $\text{Per}(p)$. Более того, $P(p, d)$ есть подмножество (p, ε) -периодических точек множества для любого $\varepsilon > q + d$, т.е.

$$P(p, d) \subset Q(p, \varepsilon), \quad \varepsilon > q + d.$$

2. Для любой окрестности V множества $\text{Per}(p)$ существует $d_0 > 0$, такое, что

$$\text{Per}(p) \subset P(p, d) \subset V, \quad d < d_0,$$

т.е., окрестность $P(p, d)$ достаточно мала, если наибольший диаметр d достаточно мал.

3. Множество $\text{Per}(p)$ совпадает с пересечением множеств $P(p, d)$ для всех $d > 0$:

$$\text{Per}(p) = \bigcap_{d>0} P(p, d). \tag{3.1}$$

4. Точки множества $T(p, d)$ не являются p -периодическими. Более того, если $\varepsilon < r$, не существует p -периодических ε -траекторий, проходящих через точку x из $T(p, d)$, т.е.,

$$Q(p, \varepsilon) \cap T(p, d) = \emptyset, \quad \varepsilon < r.$$

По построению множество $T(p, d)$ замкнуто и пара $\{P(p, d), T(p, d)\}$ образует замкнутое покрытие M . Следовательно, $P(p, d) \setminus T(p, d)$ является открытой окрестностью p -периодического множества $\text{Per}(p)$. Теорема 3.1 приводит нас к следующим включениям:

$$\text{Per}(p) \subset Q(p, \varepsilon_1) \subset M \setminus T(p, d) = P(p, d) \setminus T(p, d) \subset P(p, d) \subset Q(p, \varepsilon_2),$$

где $\varepsilon_1 < r < q + d < \varepsilon_2$. Таким образом, множество $P(p, d)$ содержит окрестность $Q(p, \varepsilon_1)$ и само содержится в $Q(p, \varepsilon_2)$. Однако, вообще говоря, множество $P(p, d_1)$ не вложено в $P(p, d_2)$ даже при условии $d_1 < d_2$.

3.2. Процедура подразбиения

Пусть $C = \{M(i)\}$ есть покрытие M и G является символическим образом, построенном на C . Построим новое покрытие NC , которое является подразбиением C в следующем смысле. Обозначим ячейки нового покрытия как $m(i, k)$. Это означает, что каждая ячейка $M(i)$ разбита таким образом, что новые ячейки $m(i, k)$, $k = 1, 2, \dots$, образуют ее подразбиение, т. е.

$$\bigcup_k m(i, k) = M(i).$$

Новые ячейки могут пересекаться и обычно они пересекаются по границе. Обозначим за NG новый символический образ, соответствующий покрытию NC . Вершины этого образа обозначим за (i, k) . Такое подразбиение порождает естественное отображение h из NG в G , отображающее вершины (i, k) на вершину i . Поскольку из неравенства $f(m(i, k)) \cap m(j, l) \neq \emptyset$ следует, что $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$, то дуга $(i, k) \rightarrow (j, l)$ отображается на дугу $i \rightarrow j$. Следовательно, h отображает ориентированный граф NG на граф G . Это удобно записать с помощью коммутативной диаграммы. Обозначим множества вершин графов G и NG за Ver и NVer соответственно. Каждый из графов G и NG можно рассматривать, как многозначное отображение $G : \text{Ver} \rightarrow \text{Ver}$, $NG : \text{NVer} \rightarrow \text{NVer}$. Таким образом, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{NVer} & \xrightarrow{NG} & \text{NVer} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \text{Ver} & \xrightarrow{G} & \text{Ver} \end{array}$$

Здесь коммутативность имеет тот же смысл, что и ранее, т. е.,

$$h(NG(i, k)) \subset G(h(i, k)).$$

Отсюда следует, что любой путь на NG отображается посредством h в некоторый путь на G , в частности p -периодические пути отображаются на p -периодические пути. Следовательно, образ $h(i, k)$ p -периодической вершины (i, k) является p -периодической вершиной. Обратное, однако, неверно, т.е. если образ является p -периодической вершиной, то его прообразы — вершины (i, k) могут оказаться не p -периодическими.

3.3. Алгоритм локализации

Теорема 3.1 позволяет построить окрестность p -периодического множества.

Применим процедуру адаптивного подразбиения. Здесь адаптивность означает, что ячейки, которые соответствуют p -периодическим вершинам, подвергаются подразбиению, в то время как остальные ячейки исключаются из рассмотрения. Приведем алгоритм локализации.

1. Строим исходное покрытие C компакта M . Находим символический образ G отображения f . Ячейки исходного покрытия могут иметь произвольный диаметр d_0 .
2. Выделяем на графике G p -периодические вершины $\{i_k\}$. Используя p -периодические вершины, находим замкнутую окрестность $P = \{\bigcup M(i_k) : i_k — p\text{-периодические}\}$ p -периодического множества $\text{Per}(p)$.
3. Разбиваем ячейки $\{M(i_k)\}$, соответствующие p -периодическим вершинам символического образа. Таким образом, определено новое покрытие.
4. Строим символический образ G для нового покрытия. Следует отметить, что новый символический образ можно строить на множестве $P = \{\bigcup M(i_k) : i_k \in \text{Per}(p)\}$. Другими словами, ячейки, соответствующие не p -периодическим вершинам, в построении нового покрытия и нового символического образа участия не принимают.

5. Переходим ко второму пункту.

Повторяя процесс последовательного измельчения покрытия, мы получаем последовательность окрестностей P_0, P_1, P_2, \dots p -периодического множества $\text{Per}(p)$ и последовательность наибольших диаметров d_0, d_1, d_2, \dots . Следующая теорема обосновывает описанный алгоритм локализации множества $\text{Per}(p)$.

Теорема 3.2. Последовательность множеств P_0, P_1, P_2, \dots обладает следующими свойствами:

1. Множества P_i вложены друг в друга и содержат p -периодическое множество $\text{Per}(p)$, т.е. $P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset \text{Per}(p)$;
2. Множество p -периодических точек есть предел последовательности множеств P_k при $d_k \rightarrow \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = \text{Per}(p)$.

Компьютерная реализация описанного алгоритма была выполнена С.Ю.Кобяковым в 2000г. С помощью полученной программы были локализованы периодические орбиты отображения Икеда.

Пример 3.1. Рассмотрим отображение Икеда

$$z \rightarrow d + C_2 z \exp(i(C_1 + C_3(1 + |z|^2))),$$

где $z = x + iy$, а d, C_1, C_2, C_3 — вещественные параметры. Это отображение было рассмотрено в 1979 году как модель для описания динамики оптических носителей информации [70]. В вещественном представлении отображение имеет вид:

$$T : (x, y) \rightarrow (d + C_2(x \cos \tau - y \sin \tau), C_2(x \sin \tau + y \cos \tau)),$$

где $\tau = C_1 - C_3/(1 + x^2 + y^2)$.

К.Икеда исследовал случай $0 < C_2 < 1, C_1 = 0.4, C_3 = 0.6, d$ — переменный параметр.

Численное моделирование проводилось при $d = 0.6, C_1 = 0.4, C_2 = 0.9, C_3 = 6.0$ и показало следующие результаты. У системы существует сток $A_0(0.3397, 0.2809)$, гиперболическая 2-периодическая орбита $H(1.0094, -0.1100), (-0.2110, -0.4211)$ и 2-периодический сток $S(0.5997, 0.6757), (0.2188, -0.7184)$ (см. рис.3.1a)).

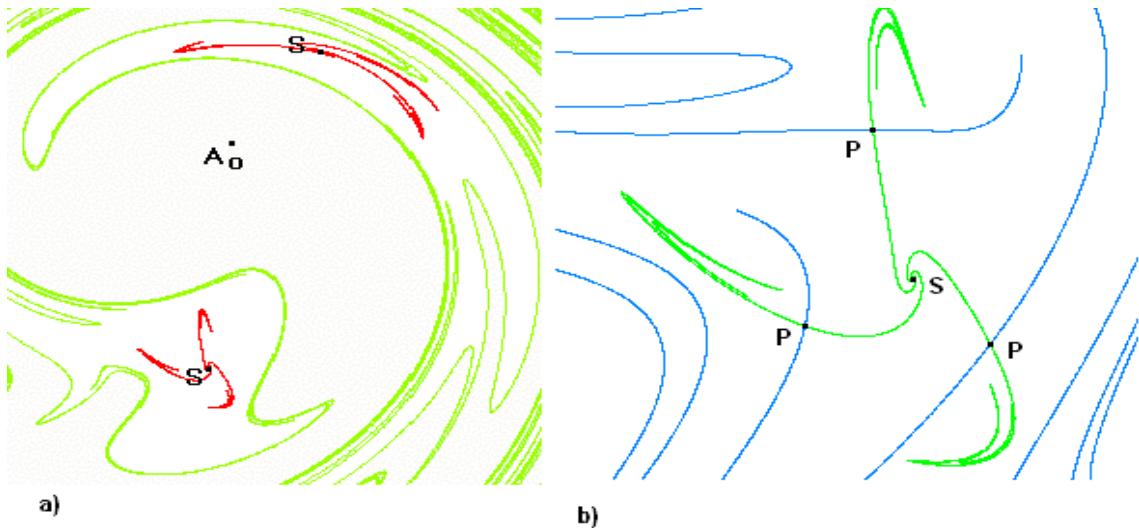


Рис. 3.1. Фазовый портрет отображения Икеда для $d = 0.6, C_1 = 0.4, C_2 = 0.9, C_3 = 6.0$.

Вокруг стока S располагается 6-периодическая гиперболическая орбита $P(0.1869, -0.5785), (0.3556, 0.7053)$,

$(0.2818, -0.7800), (0.6249, 0.6969),$
 $(0.1343, -0.7635), (0.8751, 0.4730)$. На рис. 3.1б) показано расположение трех точек орбиты P вокруг нижней точки $(0.2188, -0.7184)$ орбиты S .

Более подробно отображение Икеда описано в Приложении D.

Глава 4

Метод Ньютона

Алгоритм локализации множества p -периодических траекторий ничего не говорит о расположении отдельной траектории. Тем не менее, он позволяет построить p -периодическую псевдотраекторию. Действительно, если на символическом образе G_k найден p -периодический путь $\{z_1, \dots, z_p\}$, то выбирая в каждой ячейке $M(z_i)$ произвольную точку x_i мы построим последовательность $\{x_1, \dots, x_p\}$, которая согласно теореме 2.1 главы 2 является периодической ε -траекторией для любого $\varepsilon > d + q(d)$. Так как для непрерывного отображения f величина $d + q(d) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow 0$, мы можем построить p -периодические траектории для достаточно малых положительных ε .

Однако на каждом шаге алгоритма мы не можем гарантировать существование настоящей траектории $\{y_1, \dots, y_p\}$ вблизи построенной ε -траектории $\{x_1, \dots, x_p\}$ так, чтобы настоящая отслеживала построенную псевдотраекторию. Данная задача об отслеживании может быть решена на основе метода Ньютона. Этот метод не только гарантирует существование настоящей траектории $\{y_1, \dots, y_p\}$, но и позволяет оценить расстояние между псевдотраекторией и настоящей траекторией.

Мы опишем алгоритм, основанный на методе Ньютона [26] и позволяющий строить последовательность периодических псевдотраекторий, сходящихся к траектории фиксированного периода. Нашей целью является некоторая “теорема об отслеживании”, дающая достаточные условия существования настоящей p -периодической траектории в окрестности ее приближений. Мы получим эти условия в терминах условий сходимости метода Ньютона и, тем самым, получим алгоритм построения последовательных приближений к настоящей траектории.

4.1. Основные результаты

Напомним основные результаты, относящиеся к условиям сходимости процесса Ньютона. Начнем с приближенного нахождения корней уравнения $f(x) = 0$.

Теорема 4.1. [26]. Пусть V, W открытые множества в банаховом пространстве, $0 \in W$, отображение $F : V \rightarrow W$ дифференцируемо, и производная F' является липшицевой с константой L . Допустим, что оператор $F'(x_0)$ обратим в точке $x_0 \in V$ и $KRL < 1/4$, где $K = \|(F'(x_0))^{-1}\|$, $R = \|(F'(x_0))^{-1}F(x_0)\|$. Пусть шар $\{x : \|x - x_0\| \leq 2R\}$ лежит в V . Тогда существует единственное решение x^* уравнения $F(x) = 0$ и

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{R}{2^{n-1}},$$

где

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_0))^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Рассмотрим применение этой теоремы к решению уравнения $F(x) = 0$. Пусть x_0 есть приближенное решение, т.е. $\|F(x_0)\|$ достаточно малое число. Если определитель матрицы Якоби $\det F'(x_0)$ отличен от нуля, то существует обратная матрица $(F'(x_0))^{-1}$. Найдем величины

$K = \|(F'(x_0))^{-1}\|$ и $R = \|(F'(x_0))^{-1}F(x_0)\|$. При этом отметим, что число R будет достаточно малым, если $\|F(x_0)\|$ — достаточно малое число, т.е. x_0 — хорошее приближение к решению. Константу Липшица L для производной можно оценить по величине второй производной. Если выполнена оценка $KRL < 1/4$, то во-первых мы можем утверждать, что существует настоящее решение x^* , а во-вторых имеет место оценка для приближений, построенных по приведенной рекуррентной формуле.

Пусть f диффеоморфизм, заданный на многообразии M и $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ — p -периодическая ε -траектория f . Так как M является многообразием, существуют окрестности $V(x_i) \equiv V_i$, которые можно отождествить с шарами радиусов a_i . Положим $D = \bigcup_i V_i, i = 1, \dots, p$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены следующие условия:

1. производная f' удовлетворяет условию Липшица с константой L в окрестностях $V_i, i = 1, 2, \dots, p$;
2. отображение $C = A_p A_{p-1} \dots A_1 - I$ обратимо, где $A_i = f'(x_i), i = 1, 2, \dots, p$;
3. для каждого $i = 1, 2, \dots, p$, $a_i \geq 2K \frac{a^{p-1}}{a-1} \varepsilon \equiv \sigma$, где
 $K = \max_i \|(A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_p \dots A_i - I)^{-1}\|$, $a = \max_D \|f'(x)\|$;
4. $LK^2 \left(\frac{a^{p-1}}{a-1}\right)^2 \varepsilon < \frac{1}{4}$.

Тогда существует единственная периодическая траектория $\{y_1, y_1, \dots, y_p\}$ диффеоморфизма f , такая что $\|x_i - y_i\| < \sigma, i = 1, 2, \dots, p$.

Последняя теорема дает следующий алгоритм построения p -периодической траектории.

1. Построить периодическую ε -траекторию $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ с помощью методов символьической динамики.
2. Проверить условия теоремы 4.2. Если они выполняются, то вблизи $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ существует p -периодическая траектория $\{y_1, y_1, \dots, y_p\}$. Если условия не выполнены, то возвратиться к первому шагу и построить периодическую ε -траекторию, применяя метод подразбиения.
3. Построить последовательность p -периодических ε -траекторий $x^k = \{x_1 + v_1^k, x_2 + v_2^k, \dots, x_p + v_p^k\}$ по рекуррентной формуле

$$v^{k+1} = v^k - (F'(0))^{-1}F(v^k),$$

где $F(v) = \{f(x_1 + v_1) - (x_2 + v_2), \dots, f(x_p + v_p) - (x_1 + v_1)\}$.

В соответствии с теоремой 4.2 последовательность

$$\{x^k = \{x_1 + v_1^k, \dots, x_p + v_p^k\}\}$$

сходится к настоящей p -периодической траектории $x^* = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ и

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{R}{2^{k-1}},$$

где $R = \|(F'(0))^{-1}F(0)\|$.

Таким образом, используя методы символьической динамики и метод Ньютона, мы можем построить приближение к настоящей периодической траектории. При этом последнее неравенство дает оценку расстояния между ε - и настоящей траекториями.

4.2. Существование периодической траектории в компоненте периодических ε -траекторий

Мы приведем ряд достаточных условий существования периодической траектории.

Определение 4.1. Пусть E — некоторое непустое подмножество $Q(p, \varepsilon)$. Множество E называется компонентой $Q(p, \varepsilon)$, если для любого $x \in E$ каждая p -периодическая ε -траектория, проходящая через x , содержится в E и не существует подмножества $E_1 \subset E$ с таким свойством.

Нетрудно доказать, что любая компонента E является открытым множеством.

Утверждение 4.1. Пусть \overline{E} является замыканием E , и $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} = p$ -периодическая ε -траектория, $x_i \in \overline{E}$, $i = 1, 2, \dots, p$. Тогда $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Таким образом, p -периодическая ε -траектория не может выходить на границу компоненты.

Теорема 4.3. Пусть E — компонента $Q(p, \varepsilon)$ и для любой p -периодической ε -траектории $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, $x_i \in E$ оператор $A_p A_{p-1} \dots A_1 - I$ обратим, где $A_i = f'(x_i)$. Тогда в E существует p -периодическая траектория диффеоморфизма f .

4.3. Существование периодической траектории (орбиты) в компоненте периодических вершин

Пусть G символический образ диффеоморфизма f , соответствующий покрытию C . Обозначим множество всех p -периодических вершин $G(p)$.

Определение 4.2. Непустое множество $\Lambda \subset G(p)$ называется компонентой $G(p)$, если для каждой вершины $i \in \Lambda$ любой p -периодический путь, проходящий через i , содержится в Λ , и не существует непустого подмножества Λ с таким свойством.

Мы приведем достаточные условия существования настоящей p -периодической траектории, содержащейся в объединении компонентных клеток

$$R(p) = \{\bigcup M(i) : i \in \Lambda\}.$$

Обозначим центры клеток $M(i)$ за a_i .

Определение 4.3. Компонента Λ называется изолированной, если множества $\{\bigcup M(i) : i \in \Lambda\}$ и $\{\bigcup M(k) : k \in G(p) \setminus \Lambda\}$ не пересекаются.

Рассмотрим следующее специальное покрытие M . Пусть C обозначает покрытие M шарами $M(i) = V(a_i, d/2)$ радиуса $d/2$ с центрами a_i . Рассмотрим новое покрытие C^* многообразия M шарами $M^*(i) = V(a_i, d)$, т. е. шарами с центрами в тех же точках, но вдвое больших радиусов. Ясно, что в этом случае ячейки пересекаются не только по границе. Пусть G^* символический образ, соответствующий покрытию C^* и $G^*(p)$ обозначает множество всех возвратных вершин периода p в G^* .

Утверждение 4.2. Пусть Λ^* является изолированной компонентой $G^*(p)$, $R^*(p) = \{\bigcup M^*(i) : i \in \Lambda^*\}$ и E есть компонента $Q(p, d/2)$. Тогда либо $E \subset R^*(p)$, либо $E \cap R^*(p) = \emptyset$.

В соответствии с утверждением 4.2, чтобы установить существование компоненты $R^*(p)$ в $Q(p, d/2)$, достаточно проверить, что

$$R^*(p) \cap Q(p, d/2) \neq \emptyset.$$

Другими словами, нужно проделать следующее. Пусть G^*, C^* как в утверждении 4.2. Клетки $M^*(i_k)$ в $R^*(p)$ разбиваются таким образом, чтобы их наибольший диаметр $d_1 < d/2$. Если новое покрытие имеет p -периодическую клетку $m(i, j)$, лежащую в $R^*(p)$, то, согласно утверждению 4.2, существует p -периодическая $d/2$ -траектория, проходящая через $m(i, j)$ (здесь $m(i, j)$ означает подразбиение $M(i)$, т.е. $\bigcup_j m(i, j) = M(i)$). А это и означает, что

$$R^*(p) \cap Q(p, d/2) \neq \emptyset.$$

Следующая теорема дает достаточные условия существования настоящей периодической траектории в компоненте периодических ε -траекторий.

Теорема 4.4. Пусть $C^*, G^*, \Lambda^*, R^*(p)$ как в утверждении 4.2. Предположим, что $R^*(p) \cap Q(p, d/2) \neq \emptyset$ и для любого периодического пути $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ в Λ^* оператор $B_p B_{p-1} \dots B_1 - I$ обратим. Здесь $B_i = f'(a_i)$, a_i — центр клетки $M^*(z_i)$,

$$\|(B_p B_{p-1} \dots B_1 - I)^{-1}\|pd^{p-1}\alpha(d/2) < 1,$$

$\alpha(\cdot)$ модуль непрерывности производной f' на $R^*(p)$ и a определяется как в теореме 4.2. Тогда существует настоящая периодическая траектория $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ диффеоморфизма f , содержащаяся в $R^*(p)$.

4.4. Пример построения периодической орбиты

Рассмотрим отображение $T = T_{\lambda, \mu}$ расширенной плоскости $\tilde{R}^2 = R^2 \cup \infty$ в себя:

$$z_{n+1} = T(z_n), z = (x, y).$$

Отображение T имеет вид:

$$\begin{aligned} T : \quad x_1 &= (1 - \lambda)x + \lambda\mu y(1 - y), \\ &y_1 = (1 - \lambda)y + \lambda\mu x(1 - x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где λ, μ — вещественные параметры.

Топология на \tilde{R}^2 предполагается индуцированной топологией сферы Римана, т.е. окрестностями бесконечно удаленной точки являются дополнения всевозможных компактов. Мы предполагаем, что ∞ является неподвижной точкой.

Динамическая система, порожденная отображением (4.1), была исследована в работах ([61],[8]). Были получены оценки на область притяжения к бесконечно удаленной точке, в частности было показано, что в этой области лежит внешность круга

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 \leq 2r^2, \tag{4.2}$$

где $r = 0.5(1 - \lambda + \lambda\mu)/\lambda\mu$.

Исследуемая система имеет четыре неподвижные точки, две из которых при определенных значениях параметров являются фокусами. Эти точки расположены симметрично относительно диагонали $y = x$, поэтому достаточно исследовать одну из них. При изменении параметров в окрестности фокуса наблюдается бифуркация Хопфа, т.е. модули собственных значений матрицы Якоби, вычисленной в данной неподвижной точке проходят единичную окружность и при этом в окрестности фокуса возникает инвариантная кривая. Подробному исследованию бифуркации Хопфа для двупараметрических семейств отображений плоскости посвящена работа [44]. В работе [8] были получены оценки на значения параметров λ, μ , при которых в окрестности фокуса возникает инвариантная кривая. Известно, ([5]) что дальнейшее изменение этих параметров может приводить к появлению на инвариантной кривой периодических точек, причем

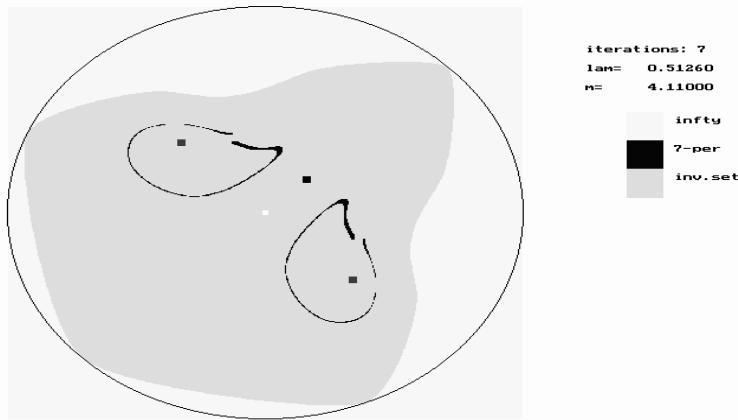


Рис. 4.1. Множество P для $\varepsilon = 0.01228$.

одновременно существуют две орбиты: седловая и устойчивая. Результаты компьютерного моделирования показывают, что при $\lambda = 0.512603$, $\mu = 4.11$ возникают периодические орбиты периода 7.

Численный метод нахождения периодической орбиты заключается в построении начального приближения к орбите и последующем его уточнении методом Ньютона.

Для построения начальных приближений были применены:

1. методы символьической динамики; Динамической системе сопоставляется символьический образ. Как известно, периодическим траекториям исследуемой системы соответствуют периодические пути на символическом образе. Таким образом, используется метод поиска на графике периодических путей заданного периода.
2. метод сеток.

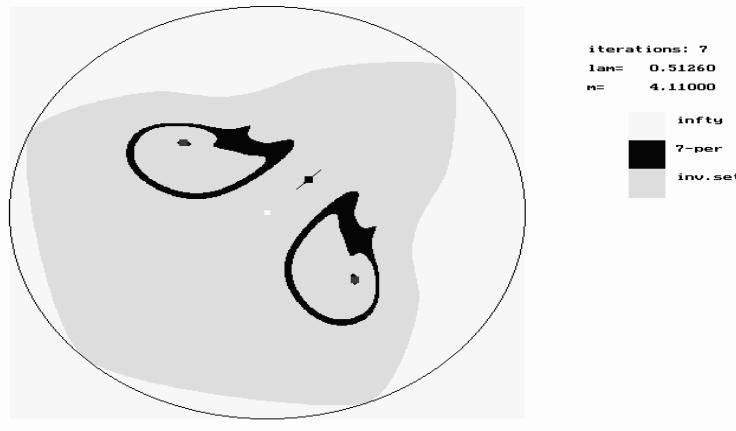
При использовании второго способа на множестве, определяемом неравенством (4.2), строится сетка с шагом h . Затем для любой точки z этой сетки проверяется выполнение условия $\|(T^k(z) - z)\| < \varepsilon$, где k — заданный период, а ε не меньше шага h . Точки сетки, для которых выполняется это условие, являются подозрительными на периодические. Обозначим это множество P . Число ε выбирается экспериментально при условии $\varepsilon \geq h$. На рисунках 4.1 и 4.2 показаны множества P , построенные при различных значениях ε . Круг содержит инвариантное множество исследуемой системы при указанных значениях параметров, темный фон показывает инвариантное множество, квадратиками обозначены неподвижные точки. Области, нарисованные черным цветом, показывают множества P , построенные при заданных значениях ε .

В построенном нами множестве P содержатся первые приближения к корням уравнения $T^k(z) - z = 0$. Для того, чтобы получить более точные значения корней, мы воспользуемся методом Ньютона, а именно, теоремой 4.1.

В нашем случае $F(z_0) = T^k(z_0) - z_0$ и $DF(z_0) = DT^k(z_0) - I$. Обозначим множество точек, в которых метод Ньютона не определен (т.е. множество точек z , для которых $|DT^k(z) - I| = 0$), через Cr . Исключим из дальнейшего рассмотрения те точки множества P , которые содержатся в Cr , т. е. рассмотрим множество $P_1 = P \setminus (P \cap Cr)$. Это множество первых приближений к корням уравнения $T^k(z) - z = 0$. Поскольку исходное отображение T определяет полином второй степени, уравнение имеет степень $2k$. Следовательно, требуется найти $2k$ корней уравнения $F(z) = 0$.

Результаты вычислений показывают, что далеко не все точки из множества P_1 являются начальными приближениями для метода Ньютона.

Выберем произвольную точку z_0 из множества P_1 . Полагая, что она является начальным

Рис. 4.2. Множество P для $\varepsilon = 0.06$.

приближением некоторого корня искомого уравнения, строим процесс последовательных приближений по формуле метода Ньютона.

Заметим, что даже если этот процесс сходится, неравенство $KRL < 0.25$ из теоремы 4.1 может не выполняться для некоторых начальных приближений $z_0 \in P_1$. В этом случае в качестве x_0 нужно взять ту итерацию z_l , для которой это неравенство выполняется.

Если метод Ньютона сходится к некоторой точке z^* , определяем тип устойчивости этой точки, вычисляя собственные числа матрицы $DT^k(z^*) - I$. Достаточно найти две точки, к которым сходится процесс Ньютона и которые имеют различный тип устойчивости. Обозначим их z_{st}^* (устойчивая) и z_{sd}^* (седловая) соответственно. Тогда орбиты, полученные из этих точек дадут первое приближение к орбитам периода k . Заметим, что такой способ построения позволяет получить ε -траекторию периода k , где $\varepsilon = \rho(z_s^*, T^k(z_s^*))$ и s соответствует индексам st или sd .

Уточнение периодических орбит

Для того, чтобы воспользоваться методом уточнения периодических орбит, нам потребуются следующие вспомогательные факты [6].

Утверждение 4.3. 1.Производная отображения T из 4.1 в области U существования периодической орбиты удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 2\lambda\mu$.

2.При выполнении условий $\lambda < 1, \mu > 0$ производная отображения $F(z) = T^k(z) - z$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 2d(\alpha + \beta)^k$, где $\alpha = 1 - \lambda, \beta = \lambda\mu, d = 2\sqrt{2}r$ в области U .

Построим из точек z_{sd}^*, z_{st}^* (начальные приближения равны z_0^1 и z_0^2 соответственно) периодические орбиты и обозначим их $SdOrb$ и $StOrb$. По доказанному выше, производная отображения $F(z)$ удовлетворяет условию Липшица. Вычислим величины R_1, R_2 , где $R_1 = \|DF(z_0^1)^{-1}F(z_0^1)\|, R_2 = \|DF(z_0^2)^{-1}F(z_0^2)\|$.

Для точек из множеств $SdOrb$ и $StOrb$ найдем пару (седловая,устойчивая), для которой расстояние между ними (обозначим его ρ) является наименьшим. Тогда размер окрестности, в которой лежит корень исходного уравнения можно выбрать $\min\{R_1, R_2, \rho/2\}$. Таким образом, точки орбит первого приближения будут окружены непересекающимися окрестностями и для построения истинных орбит можно воспользоваться теоремой 4.2.

По замеченному выше, производная исходного отображения удовлетворяет условию Липшица на области U с константой $2\lambda\mu$. Размер окрестностей V_i положим равным $\min\{R_1, R_2, \rho/2\}$.

Орбиты периода 7 исходного отображения T были построены при следующих значениях параметров:

$$\lambda = 0.51260309232291; \mu = 4.11; h = 1/2000; \varepsilon = h.$$

Полученное множество первых приближений P_1 в окрестности одной из внедиагональных неподвижных точек приведено в таблице 1.

Точки множества P_1 , принадлежащие разным орбитам, для которых метод Ньютона сходится, показаны в таблице 2.

Для первой точки константы из теоремы 4.1 имеют следующие значения :

$$L = 2753.87180686379, \quad K = 1.06329193217488, \quad R = 0.00021927999662, \quad KRL = 0.642089036344767.$$

Для второй точки эти константы равны

$$L = 2753.87180686379, \quad K = 0.76224726788667, \quad R = 0.00026423675833, \quad KRL = 0.554667639692385.$$

Таким образом, $R_1 = 0.00021927999662$, $R_2 = 0.00026423675833$.

Приближенные значения орбит, построенных из указанных в таблице 2 точек приведены в таблице 3. Как видно из приведенных данных, построенные приближения являются (p, ε) -траекториями с $p = 7$ и $\varepsilon = 10^{-8}$.

Таблица 1

Множество первых приближений			
x	y	x	y
0.915190530280922	0.161171040150149	0.919543991540338	0.162912424653915
0.929992298562935	0.168136578165214	0.934345759822351	0.170748654920863
0.939569913333649	0.174231423928396	0.943052682341182	0.176843500684045
0.757595232690079	0.208188421751837	0.756724540438196	0.209059114003720
0.755853848186313	0.209929806255603	0.733215849637352	0.238662650567746
0.731474465133586	0.241274727323395	0.729733080629820	0.243886804079045
0.727991696126054	0.246498880834694	0.726250311622288	0.249110957590343
0.990070063942870	0.286550724421317	0.990070063942870	0.287421416673200
0.966561373142026	0.438051176248978	0.965690680890143	0.440663253004627
0.963078604134493	0.447628791019692	0.956983758371312	0.466784020561121
0.956113066119429	0.469396097316770	0.955242373867545	0.472878866324303
0.741922772156184	0.531215247200471	0.904742223258325	0.532085939452354
0.904742223258325	0.532956631704237	0.743664156659950	0.533827323956120
0.903871531006442	0.533827323956120	0.903871531006442	0.534698016208003
0.745405541163716	0.536439400711770	0.895164608487611	0.554723938001315
0.895164608487611	0.555594630253198	0.894293916235728	0.557336014756964
0.894293916235728	0.558206707008847	0.888199070472546	0.660077700479171
0.887328378220663	0.660948392731054	0.886457685968780	0.661819084982937
0.887328378220663	0.661819084982937	0.874267994442416	0.666172546242353
0.875138686694299	0.666172546242353	0.876009378946182	0.666172546242353

Таблица 2

Точки сходимости				
начальное приближение		результат		
x	y	x	y	тип точки
0.915190530280922	0.161171040150149	0.912391624536223	0.160105567817306	седловая
0.894293916235728	0.558206707008847	0.894754262324649	0.556339195966324	устойчивая

Таблица 3

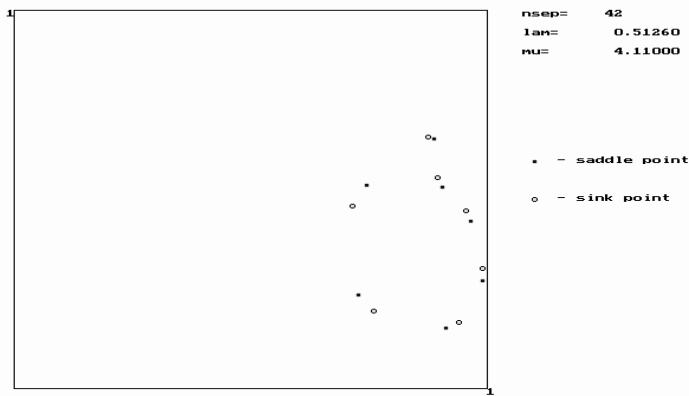


Рис. 4.3. 7-периодические орбиты в окрестности инвариантной кривой

Первое приближение седловой орбиты		Первое приближение устойчивой орбиты	
x	y	x	y
0.912391624536223	0.160105567817306	0.894754262324649	0.556339195966324
0.728001818355833	0.246438011730560	0.956112937627579	0.469553283886238
0.746071666369410	0.537291231199655	0.990753158834290	0.317262174192534
0.887402910484926	0.661004435034576	0.939237135916475	0.173933695791150
0.904603773727284	0.532680706134007	0.760487726442444	0.205011303544961
0.965350638171502	0.441434780126280	0.714028936030814	0.483667137282152
0.989982515983677	0.285623800797494	0.874153158085516	0.665928497052353
0.912391619916745	0.160105562444139	0.894754280689455	0.556339182260344

Наиболее близко лежащие точки из найденных орбит: (0.887402910484926, 0.661004435034576) и (0.874153158085516, 0.665928497052353). Половина расстояния между ними ($\rho/2$) приблизительно равна 0.00706.

Проверим оценки, требующиеся в теореме 4.2. В качестве размера окрестностей V_i был выбран минимум из чисел $2R_1, 2R_2, \rho/2 = 0.00044$. В силу замечания о (p, ε) -орбите число ε было выбрано равным 10^{-8} . Остальные константы имеют следующие значения:

$$a = 2.10828189573076, L = 4.21359741887862, K = 3.19327339144196.$$

$$\sigma = 0.00010611199917, LK^2 \left(\frac{a^p - 1}{a - 1} \right)^2 \epsilon = 0.118610200921989.$$

В таблице 4 приведены уточненные значения орбит.

Таблица 4

Седловая орбита периода 7		Устойчивая орбита периода 7	
x	y	x	y
0.912391615040759	0.160105560364150	0.874152967987909	0.665928384886275
0.728001813208850	0.246438019401378	0.894754248086580	0.556339741794211
0.746071672266959	0.537291240092729	0.956112801009135	0.469553573603168
0.887402912172150	0.661004433464394	0.99075555641944	0.317213132264479
0.904603775825471	0.532680702825706	0.939237432340894	0.173933953537148
0.965350639860169	0.441434775147776	0.760488225003084	0.205010880502697
0.989982515788768	0.285623795271109	0.714028653089086	0.483666383734544

Найденные орбиты показаны на рисунке 4.3.

Результаты построения начальных приближений к периодическим орбитам как методами символьической динамики, так и методом сеток с последующим уточнением методом Ньютона, практически совпадают. Число ϵ при построении множества P выбиралось в диапазоне $(0.0001, 0.001)$. Метод Ньютона для орбит сходится в среднем за 4-5 итераций. Орбита найдена с точностью до 10^{-9} .

Глава 5

Локализация множества цепно-рекуррентных траекторий

В данной главе приводится обзор различных типов неблуждающих траекторий и обсуждается алгоритм нахождения таких траекторий. Предлагается реализация алгоритма, основанная на использовании символьического образа. Рассматривается связь между множеством цепно-рекуррентных траекторий динамической системы и компонентами сильной связности соответствующего символьического образа. Более подробное изложение вопроса о применении методов символьической динамики к исследованию цепно-рекуррентных множеств можно найти в [84].

5.1. Определения и примеры

Определение 5.1. Точка x называется цепно-рекуррентной, если для любого положительного ε существует периодическая ε -траектория, проходящая через x . Цепно-рекуррентным множеством Q называется множество всех цепно-рекуррентных точек.

Цепно-рекуррентное множество инвариантно, замкнуто и содержит возвращающиеся траектории всех типов, таких как периодические, почти периодические, гомоклинические и другие. Напомним, что $Q(\varepsilon)$ обозначает множество ε -периодических точек. Тогда из определения цепно-рекуррентного множества следует, что $Q \subset Q(\varepsilon)$ и $Q(\varepsilon_1) \subset Q(\varepsilon_2)$, если $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ и, таким образом, справедливо равенство

$$Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(\varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon > 0} Q(\varepsilon).$$

Понятие *возвращаемость* в теории динамических систем определяется разными способами. Рассмотрим основные моменты.

Рекуррентная точка. Точка x_0 называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ и n_0 существует $n > n_0$ такое, что расстояние $\rho(f^n(x_0), x_0) < \varepsilon$.

Неблуждающая точка. Точка x_0 называется неблуждающей, если для любого $\varepsilon > 0$ и n_0 существует $n > n_0$ такое, что $f^n(V(\varepsilon, x_0)) \cap V(\varepsilon, x_0) \neq \emptyset$, где $V(\varepsilon, x_0) = \{x : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ является ε -окрестностью x_0 .

Ясно, что периодическая точка является рекуррентной, рекуррентная точка является неблуждающей, а неблуждающая точка является цепно-рекуррентной.

Слабо неблуждающая точка [103]. Точка x_0 называется слабо неблуждающей, если для любого $\varepsilon > 0$ существует возмущенная система g такая, что $\rho(f, g) = \sup_x \rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ и x_0 является неблуждающей для g .

π -точка [103], [107]. Точка x_0 называется π -точкой (или точкой, порождающей периодические траектории), если для любого $\varepsilon > 0$ существует возмущенная система g такая, что $\rho(f, g) < \varepsilon$ и x_0 периодична для g . В работе [35] В.А.Плисс рассмотрел C^1 π -точку. Точка

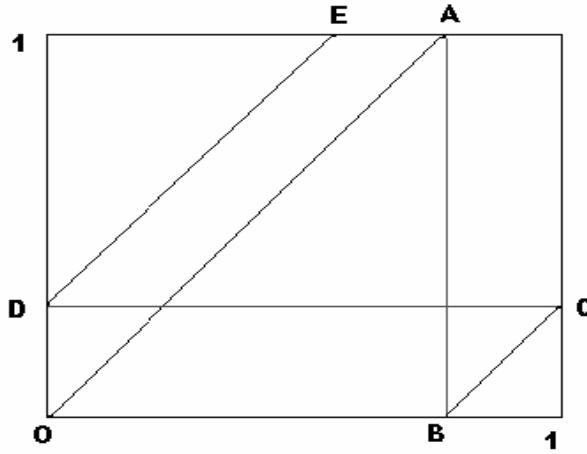


Рис. 5.1. Траектории на торе

x_0 порождает периодическую траекторию в C^1 -топологии, если для любого $\varepsilon > 0$ существует C^1 -возмущенная система g такая, что $\rho(f, g) < \varepsilon$, $\rho(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}) < \varepsilon$ и x_0 периодическая для g . А.Н.Шарковский [103] и M.Shub [107] показали, что множество слабо неблуждающих точек и множество π -точек совпадают с цепно-рекуррентным множеством. Таким образом, справедливо включение

$$\text{Per} \subset \Omega_0 \subset \Omega \subset Q,$$

где Per — множество периодических точек, Ω_0 — множество рекуррентных точек и Ω — неблуждающее множество, а Q является цепно-рекуррентным множеством.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5.1. Замыкание множества периодических точек не является рекуррентным множеством. Рассмотрим поток на торе T^2 (т.е. рассмотрим единичный квадрат и отождествим его противоположные стороны). Пусть точка (x, y) плоскости R^2 отождествляется с точкой $(x + n, y + m)$, где n и m целые. Например (см.рис.5.1), точка A отождествляется с точкой B , а точка C отождествляется с точкой D . Система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a, \\ \dot{y} &= b,\end{aligned}\tag{5.1}$$

где a и b постоянные, задает поток на торе. Система (5.1) может быть задана как уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, которое имеет решение $y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$. Траектории представляют собой параллельные прямые на плоскости (x, y) . На торе эти прямые должны быть отождествлены. Таким образом, траектория точки $O = (0, 0)$ представляет собой последовательность

$$T(O) = \{[OA], A \equiv B, [BC], C \equiv D, [DE], \dots\}.$$

Если $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$, где n и m целые, т.е., $\frac{a}{b}$ рационально, то каждая траектория $y = y_0 + \frac{n}{m}(x - x_0)$ замкнута. Разумеется, если $(x - x_0) = m$ и $y - y_0 = n$, то $x = x_0(\text{mod}1)$ и $y = y_0(\text{mod}1)$, т.е., точки (x_0, y_0) и $(x_0 + m, y_0 + n)$ отождествляются на торе и мы получаем только периодические траектории. Если $\frac{a}{b}$ иррационально, то каждая траектория не возвращается в начальную точку и является всюду плотной на торе. Мы получаем так называемую иррациональную обмотку тора. В этом случае не существует периодических траекторий и каждая точка рекуррентна. Таким образом, $\text{Per} = \emptyset$ и рекуррентное множество Ω_0 совпадает с тором T^2 .

Пример 5.2. Рекуррентное множество не совпадает с неблуждающим.

Рассмотрим уравнения невозмущенного маятника

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x.\end{aligned}$$

Система обладает гиперболическими точками покоя (седлами) $(\pm\pi, 0)$. Точки связаны сепаратрисами.

Любая траектория, находящаяся внутри области, ограниченной сепаратрисами, является периодической. Любая точка на сепаратрисе — неблуждающая, как предел периодических точек. Однако, эти точки не рекуррентны. В этом случае мы получаем соотношение $\text{Per} = \Omega_0 \subset \Omega = Q, \Omega_0 \neq \Omega$. (см. 5.2, левый рисунок)

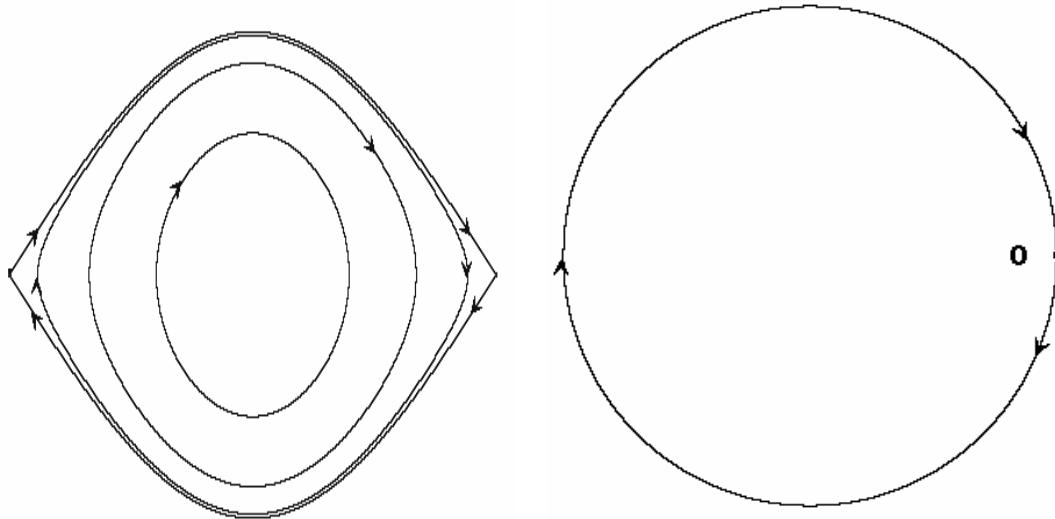


Рис. 5.2. $\text{Per} = \Omega_0 \subset \Omega = Q, \Omega_0 \neq \Omega. \quad \Omega \neq Q$.

Пример 5.3. Неблуждающее множество не совпадает с цепно-рекуррентным множеством.

Рассмотрим случай, когда выполняется включение $\Omega \subset Q$, т.е. неблуждающее множество есть подмножество цепно-рекуррентного. Пусть на окружности задана динамическая система S^1 с единственной точкой покоя O . Координата на S^1 — угол φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$. Уравнение движения на окружности имеет вид $\dot{\varphi} = \cos \varphi - 1$.

Для всех точек $\varphi \neq 0$ мы получаем $\dot{\varphi} < 0$, т.е. угол уменьшается. Поскольку траектория не может проходить через состояние равновесия O , неблуждающее множество состоит из точки O . Тем не менее, поскольку любая псевдотраектория обходит точку O , цепно-рекуррентное множество Q есть окружность S^1 .

Итак, в этом случае $O = \text{Per} = \Omega_0 = \Omega \subset Q = S^1, \Omega \neq Q$. (см. 5.2, правый рисунок)

Пример 5.4. Гомоклиническая траектория.

Траектория $T(x)$ называется гомоклинической, если α - и ω -предельные множества точки x совпадают с периодической траекторией T_0 . В частности, T_0 может быть неподвижной точкой (состоянием равновесия) x_0 . Например, траектория $T \neq O$, рассмотренная в предыдущем примере является гомоклинической. Рассмотрим случай $T_0 = x_0$ и предположим, кроме того, что периодическая траектория T_0 гиперболична, т.е. дифференциал $Df(x_0)$ имеет собственные числа с ненулевыми вещественными частями. Из определения следует, что гомоклинические траектории лежат в цепно-рекуррентном множестве.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^2.\end{aligned}$$

Она имеет два состояния равновесия $(0, 0), (1, 0)$ и интеграл энергии $H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \frac{1}{3}x^3$. Инвариантная кривая $H(x, y) = 0$ содержит состояние равновесия $(0, 0)$ и гомоклиническую траекторию, которая начинается и заканчивается в этой точке. (см. рис. 5.3)

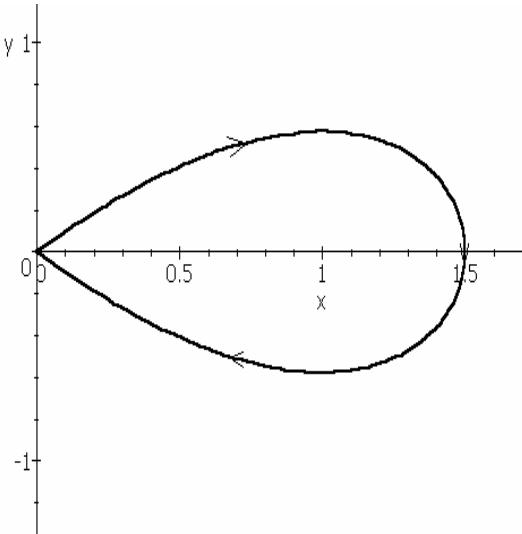


Рис. 5.3. Гомоклиническая траектория

5.2. Цепно-рекуррентные траектории и символический образ

Определение 5.2. Вершина символического образа называется возвратной, если существует периодический путь, проходящий через нее. Две возвратные вершины i и j называются эквивалентными, если существует периодический допустимый путь, проходящий через вершины i и j .

Возвратные вершины однозначно определяются ненулевыми диагональными элементами матрицы переходов Π^m , $m \leq n$, где n есть число ячеек покрытия. Согласно определению, множество возвратных вершин разбивается на несколько классов эквивалентности. Ясно, что каждый периодический путь ξ находится в некотором классе, который однозначно определяется по ξ .

Обозначим через $P(d)$ объединение ячеек $M(i)$ для которых вершины i являются возвратными:

$$P(d) = \{\bigcup M(i) : i - \text{возвратные}\}.$$

Заметим, что множество $P(d)$ вообще говоря зависит от покрытия C , но в дальнейшем зависимость P от наибольшего диаметра d будет для нас более важной. Пусть $T(d)$ есть объединение ячеек $M(k)$, для которых вершины k не являются возвратными:

$$T(d) = \{\bigcup M(k) : k - \text{невозвратные}\}.$$

Теорема 5.1. 1. Множество $P(d)$ является замкнутой окрестностью цепно-рекуррентного множества. Кроме того, $P(d)$ состоит из ε -периодических точек для любого $\varepsilon > q + d$, т. е.

$$P(d) \subset Q(\varepsilon), \quad \varepsilon > q + d.$$

2. Цепно-рекуррентное множество Q совпадает с пересечением множеств $P(d)$ для всех положительных d :

$$Q = \bigcap_{d>0} P(d).$$

3. Точки из множества $T(d)$ не являются цепно-рекуррентными. Кроме того, если $\varepsilon < r$, то не существует ε -периодической траектории, проходящей через точку x множества $T(d)$, т.е.

$$Q(\varepsilon) \bigcap T(d) = \emptyset, \quad \varepsilon < r.$$

Множество $T(d)$ является замкнутым по построению и пара $Q(d), T(d)$ образует замкнутое покрытие M . Следовательно, множество $P(d) \setminus T(d)$ является окрестностью цепно-рекуррентного множества Q . Из теоремы 5.1 следует включение:

$$Q \subset Q(\varepsilon_1) \subset M \setminus T(d) = P(d) \setminus T(d) \subset P(d) \subset Q(\varepsilon_2),$$

где $\varepsilon_1 < r < d < q + d < \varepsilon_2$.

Отметим, что множества $P(d)$ не являются монотонными по d , т. е. из условия $d_1 > d_2$ не обязательно следует, что множество $P(d_1)$ содержит $P(d_2)$. Однако, если C_2 является подразбиением покрытия C_1 , то $P(d_2) \subset P(d_1)$. Это свойство лежит в основе следующего алгоритма.

Алгоритм локализации цепно-рекуррентного множества.

1. Строим исходное покрытие C компакта M . Находим символический образ G отображения F . Заметим, что ячейки исходного покрытия могут иметь произвольный диаметр d_0 .
2. Выделяем на графе G возвратные вершины $\{i_k\}$. Используя их, находим замкнутую окрестность $P = \{\bigcup M(i_k) : i_k \text{ — возвратные}\}$ цепно-рекуррентного множества Q .
3. Разбиваем ячейки $\{M(i_k)\}$, соответствующие возвратным вершинам символического образа i , таким образом, определяем новое покрытие.
4. Строим символический образ G для нового покрытия.
5. Переходим ко второму пункту.

Повторяя процесс последовательного измельчения покрытия, мы получаем последовательность окрестностей P_0, P_1, P_2, \dots цепно-рекуррентного множества Q и последовательность наибольших диаметров d_0, d_1, d_2, \dots ячеек, соответствующих возвратным вершинам символического образа для покрытия C_k . Следующая теорема обосновывает описанный алгоритм локализации множества Q .

Теорема 5.2. Последовательность множеств P_0, P_1, P_2, \dots обладает следующими свойствами:

1. Окрестности P_k вложены друг в друга, т. е.

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset Q,$$

2. Если наибольшие диаметры $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = Q.$$

Таким образом, описанный алгоритм дает монотонно убывающую последовательность окрестностей, сходящуюся к цепно-рекуррентному множеству.

5.3. Реализация алгоритма

Пусть $G(V, E)$ — ориентированный граф, V — множество вершин, E — множество ребер. Вершины v_1 и v_2 сильно связаны в G , если существует путь из v_1 в v_2 и из v_2 в v_1 . Если все вершины в ориентированном графе сильно связаны, то G называется сильно связанным. Как было показано в этой главе, задача о локализации цепно-рекуррентного множества заданной динамической системы сводится к исследованию соответствующего символического образа и выделению на нем классов возвратных вершин. Из определения возвратной вершины следует, что компоненте сильной связности соответствует объединение классов возвратных вершин. Таким образом, выделение таких классов на графе эквивалентно нахождению компонент сильной

связности. Для этого использован алгоритм Тарьяна [34], который обладает достаточно хорошей оценкой сложности: $O(n + m)$, где n — количество узлов, m — количество ребер.

Алгоритм выделения компонент сильной связности. Алгоритм основан на обходе графа в глубину и использует два стека. Стек “маршрут” содержит путь от начальной вершины до текущей. Каждая новая исследуемая вершина опускается в стек “маршрут”, а при возвратах — извлекается. В “стек” добавляются все просмотренные вершины. Алгоритм не производит никаких действий по удалению индивидуальной вершины из стека. Все элементы найденной компоненты сильной связности удаляются после ее окончательного формирования.

Заведем счетчик вершин с некоторым начальным значением и припишем к каждой вершине 3 числовых параметра: “номер”, “связка” и “номер компоненты сильной связности”. Поле “номер” определяется простой последовательной нумерацией вершин по мере их обхода алгоритмом. Поле “связка” для произвольной вершины хранит номер другой вершины, которая была нумерована раньше. Если рассматриваемая вершина является корнем компоненты сильной связности, то значения полей “номер” и “связка” совпадут. Заметим, что значение поля “связка” всегда меньше или равно значению поля “номер”. Схему работы алгоритма можно представить следующим образом.

- **Шаг 1.** Выбрать произвольную нерассмотренную вершину v , если такой нет, то процесс закончен. Для этого достаточно проверить, было ли инициализировано значение поля “номер” для этой вершины.
- **Шаг 2.** Положить вершину v в стеки “стек” и “маршрут”, увеличить счетчик на 1. Пристроить полям “номер” и “связка” этой вершины значение счетчика.
- **Шаг 3.** Выбрать некоторое нерассмотренное ребро, выходящее из вершины v и рассмотрим вершину, в которую оно ведет; обозначим ее w .
 - Если ребро идет в не рассмотренную ранее вершину, положим $v = w$ и перейдем на **Шаг 2**.
 - Если ребро идет в уже рассмотренную вершину, перейдем на **Шаг 4**.
 - Если вершина v не имеет неисследованных выходов и значение поля “связка” меньше значения поля “номер”, перейдем на **Шаг 5**.
 - Если вершина v не имеет неисследованных выходов и значение поля “связка” равно значению поля “номер”, перейдем на **Шаг 6**.
- **Шаг 4.** Если значение поля “номер” вершины w меньше значения поля “номер” вершины v и w находится в стеке “стек”, тогда положим значение поля “связка” вершины v равным минимуму из значений полей “связка” вершин v и w . Перейдем на **Шаг 3**.
- **Шаг 5.** Извлечем вершину v из стека “маршрут” и рассмотрим вершину, которая оказалась на вершине стека. Обозначим последнюю u . Положим значение поля “связка” вершины u равным минимуму из значений полей “связка” вершин v и u . Положим v равным u и перейдем на **Шаг 3**.
- **Шаг 6.** Извлечем вершину v и все элементы, записанные позже нее в стек, из стека “стек” и поместим их в новую компоненту сильной связности. (Заметим, что больше эта компонента модифицироваться не будет.) Для этого прибавим 1 к счетчику компонент сильной связности и запишем это значение в параметр “компоненты сильной связности” всех извлеченных вершин. Извлечем вершину v из стека “маршрут”. Если в итоге “маршрут” окажется пустым, перейдем на **Шаг 1**, иначе положим v равным вершине на вершине “маршрута” и перейдем на **Шаг 3**.

Заметим, что мы можем получить компоненту сильной связности, состоящую из одной вершины, при этом у нее нет ребра, ведущего в нее же. Для того чтобы не рассматривать такие

“компоненты сильной связности”, было добавлено дополнительное условие на шаге формирования компоненты сильной связности (**Шаг 6**). А именно, если на верхушке стека “маршрут” лежит текущая вершина v , то она единственная в своей компоненте. По формулировке алгоритма она становится компонентой сильной связности. Если у этой вершины есть ребро идущее в неё, то это петля и значит компонента сильной связности, иначе это просто проходящая вершина, и она не представляет важности. После выделения сильных компонент удаляем все вершины с пустым полем “компоненты сильной связности”. Большая проблема возникает, когда требуется удалить все входящие в такие вершины ребра, поскольку в представлении графа для экономии памяти мы храним только информацию об исходящих ребрах. Для этого нужно пройти все ребра с целью найти вершину, из которой выходит ребро, входящее в удаляемую вершину. Как оказалось, этот процесс выполняется медленнее, чем сам процесс выделения сильных компонент. На практике оказалось выгодным либо потратить в 2 раза больше памяти на хранение входящих в каждое ребро вершин, либо просто помечать вершину как удаленную. Правда, при этом нужно проверять, существует ли каждое найденное ребро и каждый узел, но эта операция является линейной и не сильно увеличит время работы. Мы используем метод отметки узлов.

Алгоритм был применен к исследованию уравнения Ван-дер-Поля.

Пример 5.5. Рассмотрим систему уравнений Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = a(1-x^2)y - x, \end{cases}$$

где $a = 1.5$. Известно, что эта система имеет цепно-рекуррентное множество, состоящее из неподвижной точки $(0,0)$ и периодической траектории. На рисунке представлено последовательное построение множеств P_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ясно, что P_6 является достаточно малой окрестностью цепно-рекуррентного множества Q .

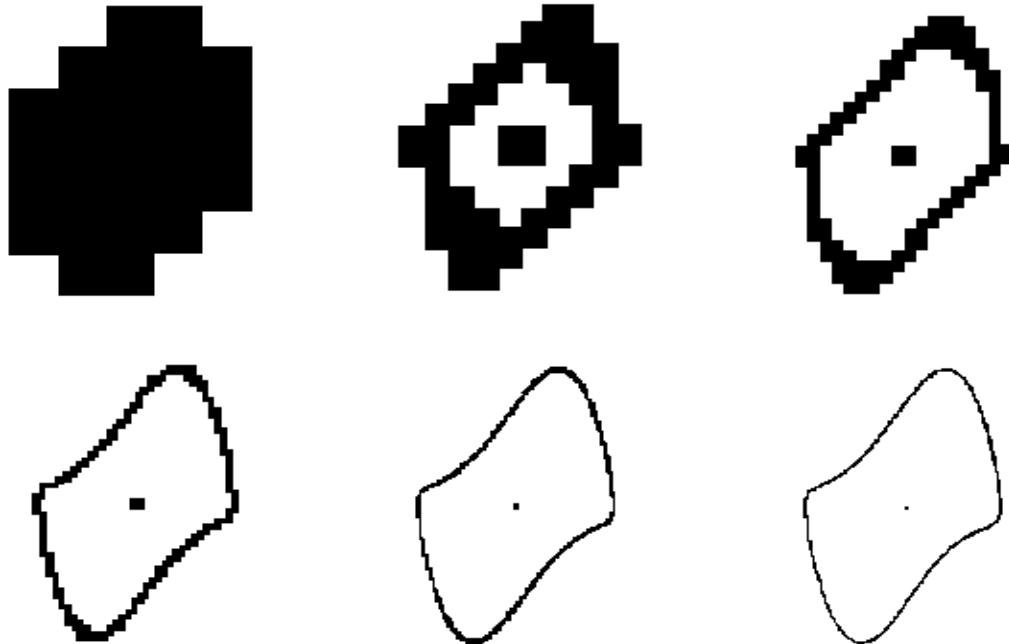


Рис. 5.4. Цепно-рекуррентное множество для уравнения Ван-дер-Поля

Глава 6

Локализация инвариантных множеств

Настоящая глава посвящена локализации инвариантных множеств различных типов, максимальных в некотором компакте. Под локализацией мы понимаем построение такой убывающей последовательности вложенных окрестностей, что искомое множество является пределом этой последовательности. Алгоритм локализации использует символический образ системы и является модификацией алгоритма поиска компонент сильной связности. Для локализации положительно инвариантного множества множество так называемых неуходящих вершин. Используя метод адаптивного подразбиения можно построить последовательность вложенных множеств, сходящихся к искомому инвариантному множеству.

6.1. Инвариантные множества

Пусть $f : M \rightarrow M$ — гомеоморфизм, порождающий дискретную динамическую систему на многообразии M .

Определение 6.1. Множество I^+ называется положительно инвариантным, если для любой точки из I^+ , ее образ лежит в I^+ , т.е. из включения $x \in I^+$ следует, что $f(x) \in I^+$. Аналогично, множество I^- называется отрицательно инвариантным, если для любого $x \in I^-$, $f^{-1}(x) \in I^-$. Множество I называется инвариантным, если для любой точки $x \in I$ $f(x) \in I$ и $f^{-1}(x) \in I$.

Из определения следует, что положительно инвариантное множество есть объединение положительных полутраекторий, отрицательно инвариантное множество состоит из отрицательных полутраекторий. Инвариантное множество I есть объединение целых траекторий.

Пусть K — фиксированный компакт в M , обозначим I^+ — максимальное по включению положительно инвариантное множество в K , I^- — максимальное отрицательно инвариантное, I — пересечение I^+ и I^- . Ясно, что множество I^+ состоит из положительных полутраекторий, лежащих в рассматриваемом компакте. Множество I состоит из траекторий, полностью лежащих в рассматриваемом компакте K . Это верно и для непрерывных систем.

Пример 6.1. Рассмотрим гиперболическую особую точку в центре некоторого квадрата K на плоскости. Пусть f — оператор сдвига на единицу времени линейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

В этом случае (см.рис.6.1) $I^+ = \{y = 0\} \cap K$ представляет собой отрезок на X-оси, $I^- = \{x = 0\} \cap K$ — отрезок на Y-оси, I — неподвижная особая точка, $I^- \cup I^+$ — объединение двух отрезков на X и Y-осях.

Основным результатом этой главы являются алгоритмы для локализации множеств I^+ , I^- , I , и $I^+ \cup I^-$. Задачи о локализации описанных множеств часто возникает в приложениях. Например, если требуется найти начальные данные траекторий, которые не выходят из заданной области, то это означает, что нужно построить положительно инвариантное множество I^+ .

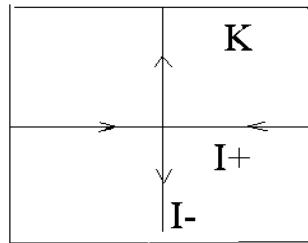
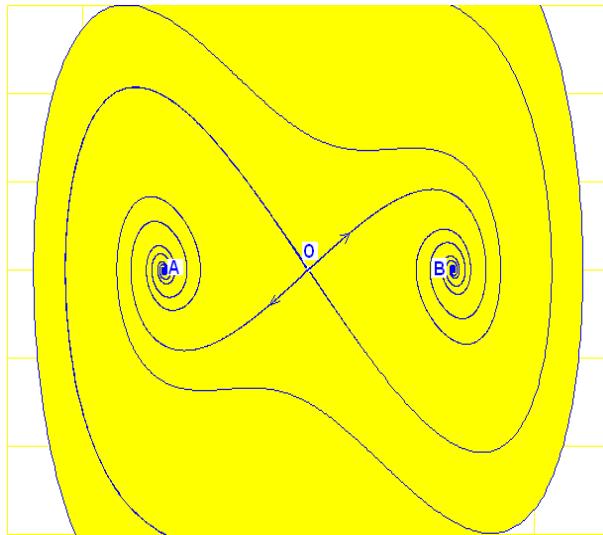


Рис. 6.1. Положительно и отрицательно инвариантные множества.

Пример 6.2. Рассмотрим уравнение Дуффинга

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - 0.27x^3 - 0.48y\end{aligned}$$

в области $K = [-4.3, 4.3] \times [-3, 3]$. На рис.6.2 серым фоном отмечено положительно инвариантное множество I^+ максимальное в K . В области K содержатся три состояния равновесия A, O и B , при этом A и B являются фокусами, а O является гиперболическим состоянием равновесия. Инвариантные множества I^- и I совпадают и состоят из указанных состояний равновесия и неустойчивых многообразий гиперболического состояния равновесия O , которые стремятся к состояниям равновесия A и B по спиралям.

Рис. 6.2. Инвариантные множества I^+ и $I^- = I$ для уравнения Дуффинга.

Инвариантные множества I, I^+, I^- могут иметь достаточно сложную структуру и даже дробную размерность. Последнее связано как правило с существованием хаотических режимов в динамической системе.

Пример 6.3. Рассмотрим модификацию отображения Икеда, описанного в главе 3.

$$(x, y) \rightarrow (d + a(x \cos \tau - y \sin \tau), b(x \sin \tau + y \cos \tau)),$$

где $d = 2, a = -0.9, b = 0.9$. Модификация заключается в том, что при таких параметрах отображение T не сохраняет ориентацию.

В области $K = [-2, 4] \times [-3, 2]$ инвариантные множества I и I^- совпадают и имеют вид, показанный на рисунке 6.3. Локально это инвариантное множество есть произведение отрезка на канторово множество и имеет дробную размерность между 1 и 2.

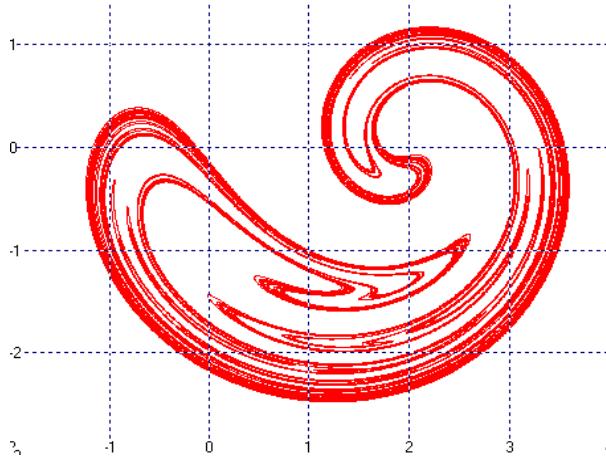


Рис. 6.3. Инвариантное множество не сохраняющего ориентацию отображения Икеда.

6.2. Символический образ и инвариантные множества

Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ покрытие компакта K замкнутыми множествами - ячейками. Обозначим $d = \max \text{diam} M(i)$. Построим G — символический образ отображения f относительно покрытия C . Назовем ячейку $M(i)$ выходящей из K , если $f(M(i)) \cap K = \emptyset$. Назовем ячейку уходящей, если все допустимые пути из соответствующей ей вершины символического образа ведут в вершины, соответствующие выходящим ячейкам. Вершины символического образа также будем называть “выходящими” и “уходящими”. Ясно, что вершина является “неуходящей”, если из нее существует путь, продолжаемый до бесконечности. Обозначим V^+ множество неуходящих вершин графа G .

Теорема 6.1. [90] Пусть $M_d^+ = \{\bigcup M(i) : i \in V^+\}$ — объединение всех неуходящих ячеек покрытия C , $d = \max \text{diam} M(i)$, тогда:

- 1) M_d^+ является замкнутой окрестностью положительно инвариантного множества I^+ максимального в K , т. е. $I^+ \subset M_d^+$;
- 2) если C_2 — покрытие, являющееся подразбиением покрытия C_1 , то $M_{d_2}^+ \subset M_{d_1}^+$;
- 3) если C_k — последовательность подразбиений, то

$$\lim_{d_k \rightarrow 0} M_{d_k}^+ = \bigcap_k M_{d_k}^+ = I^+.$$

Можно более точно описать множество M_d^+ с помощью ε -инвариантных множеств. Напомним, что последовательность точек $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ называется положительной ε -полутраекторией, если расстояние $\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ для любого $i = 1, 2, \dots$

Определение 6.2. Назовем максимальным положительно ε -инвариантным множеством в K множество I_ε^+ , состоящее из всех положительных ε -полутраекторий, лежащих в K .

Ясно, что положительно инвариантное множество лежит в положительно ε -инвариантном множестве: $I^+ \subset I_\varepsilon^+$.

Теорема 6.2. 1) Отображение $\varepsilon \rightarrow I_\varepsilon^+$ — возрастающее по ε . Более того, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то $I_{\varepsilon_1}^+ \supset I_{\varepsilon_2}^+$.

2) Если $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$, то $I_\varepsilon^+ \rightarrow I^+$, т.е.

$$I^+ = \bigcap_{\varepsilon > 0} I_\varepsilon^+.$$

Заметим, что монотонность последовательности множеств I_ε^+ позволяет определить $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^+$ как $\bigcap_{\varepsilon > 0} I_\varepsilon^+$. Напомним, что $q = \max \text{diam} f(M(i))$, r — наименьшее из расстояний от образа ячейки до ячейки, с которой он не пересекается.

Теорема 6.3. Пусть M_d^+ — объединение всех неуходящих ячеек покрытия C , тогда

$$I_r^+ \subset M_d^+ \subset I_{q+d}^+.$$

Так как в силу непрерывности f при $d_k \rightarrow 0$ соответственно $q_k, r_k \rightarrow 0$, из теорем 6.2 и 6.3 следует, что утверждение 3 теоремы 6.1 $\lim_{d_k \rightarrow 0} M_{d_k}^+ = I^+$ остается верным и без выполнения условия о том, что C_k является последовательностью подразбиений.

Таким образом, с помощью множеств M_d^+ осуществляется локализация положительно инвариантного множества. Заметим, что аналогично можно построить последовательности множеств, локализующие I^- , $I^+ \cup I^-$ и $I^+ \cap I^-$ в K .

Сформулируем аналогичную теорему для отрицательно инвариантного множества и для $I = I^+ \cap I^-$. Изменим направление всех ребер символического образа на противоположное и полученный граф обозначим G^{-1} . Пусть V^- — множество неуходящих вершин графа G^{-1} .

Теорема 6.4. Пусть $M_d^- = \{\bigcup M(i) : i \in V^-\}$ — объединение всех неуходящих ячеек обращенного символического образа G^{-1} , тогда:

- 1) M_d^- является замкнутой окрестностью отрицательно инвариантного множества I^- максимального в K , т. е. $I^- \subset M_d^-$;
- 2) если C_2 — подразбиение покрытия C_1 , то $M_{d_2}^- \subset M_{d_1}^-$;
- 3) если C_k — последовательность подразбиений, то

$$\lim_{d_k \rightarrow 0} M_{d_k}^- = \bigcap_k M_{d_k}^- = I^-.$$

Множество вершин V_0 назовем инвариантным, если это множество с любой вершиной содержит бесконечный в обе стороны путь, проходящий через эту вершину. Ясно, что максимальное по включению инвариантное множество вершин $V^i = V^+ \cap V^-$. Инвариантное множество динамической системы I максимальное в компакте K обладает следующими свойствами.

Теорема 6.5. Пусть $M_d^i = \{\bigcup M(i) : i \in V^i\}$, тогда:

- 1) M_d^i является замкнутой окрестностью инвариантного множества I максимального в K , т. е. $I \subset M_d^i$;
- 2) если C_2 — подразбиение покрытия C_1 , то $M_{d_2}^i \subset M_{d_1}^i$;
- 3) если C_k — последовательность подразбиений, то

$$\lim_{d_k \rightarrow 0} M_{d_k}^i = \bigcap_k M_{d_k}^i = I.$$

Из теоремы 6.5 следует алгоритм локализации максимального положительно инвариантного множества. Алгоритм основывается на методе аддитивного подразбиения: на каждом шаге часть ячеек исключается из рассмотрения, а остальные подразбиваются.

Алгоритм

- 1) Определяется C — начальное покрытие K , по которому строится символический образ динамической системы.

- 2) Находятся все неуходящие вершины G . Строится окрестность $U = \{\bigcup M(i) : i - \text{неуходящая}\}$ положительно инвариантного множества.
- 3) Клетки, соответствующие неуходящим вершинам, подразделяются; клетки, соответствующие уходящим вершинам, исключаются из рассмотрения.
- 4) Для полученного множества ячеек строится новый символический образ G .
- 5) Возврат к шагу 2).

Из теоремы 6.5 следует, что построенная последовательность вложенных множеств U_k сходится к искомому множеству $I^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k$.

6.3. Построение неуходящих вершин

Пусть фиксирован компакт $K \subset M$. Рассмотрим покрытие C данного компакта и построим G — символический образ, V — множество его вершин и E — множество его дуг. Цель этого раздела описать метод определения неуходящих вершин символического образа G , т. е. метод реализации второго шага предыдущего алгоритма.

Напомним, что в теории графов класс эквивалентных возвратных вершин называется компонентой сильной связности. Выходящая вершина — это вершина без исходящих дуг. Уходящая вершина — это такая вершина, что все допустимые пути из нее заканчиваются в выходящих вершинах. Иначе говоря, из уходящей вершины нельзя указать путь, продолжаемый до бесконечности.

Теорема 6.6. Максимальное множество неуходящих вершин есть объединение компонент сильной связности и множества вершин, из которых достижима хотя бы одна такая компонента.

Алгоритм нахождения всех неуходящих вершин является модификацией хорошо известного эффективного метода Тарьяна [34] для нахождения компонент сильной связности. Следующие утверждения лежат в основе алгоритма.

Утверждение 6.1. 1) Периодический путь состоит из неуходящих вершин.

2) Если путь $\{i_k\}$ проходит через неуходящую вершину i_m , то все предыдущие вершины i_k , $k > m$ являются неуходящими.

3) Если все дуги из вершины i_m заканчиваются уходящими вершинами, то i_m — уходящая вершина.

Следовательно, алгоритм состоит в построении допустимых путей. Причем, двигаясь по текущему пути мы либо приходим к неуходящей вершине и тогда все пройденные вершины — неуходящие, либо приходим к уходящей вершине, и тогда надо вернуться на шаг назад и продолжить путь по другому ребру. Таким образом, мы можем разделить вершины на неуходящие и уходящие.

Сложность алгоритма

Алгоритм посещает каждую вершину только два раза: при достижении нерассмотренной ранее вершины и при возврате в вершину. Таким образом, общее количество шагов не превосходит удвоенного количества ребер и не меньше количества вершин. Тогда времененная сложность алгоритма оценивается величиной $O(\max(|E|, |V|))$. Очевидно, что принципиально лучшего по временной сложности алгоритма не существует, т.к. каждую вершину и каждую дугу необходимо просмотреть хотя бы один раз.

Замечание 6.1. Абсолютное время работы алгоритма сильно зависит от схемы хранения графа. Будем полагать, что схема хранения ориентирована на быстрый доступ к вершинам и дугам. Для локализации отрицательно инвариантного множества следует обратить все дуги и использовать данный алгоритм. Или, что тоже самое, осуществлять поиск в глубину не по исходящим дугам, а по входящим. Например, пусть дуги хранятся в массиве исходящих дуг. Их эффективное обращение (создание дополнительного массива входящих дуг) увеличивает общую временную сложность на $O(|E|)$. Работа с необращенным массивом исходящих дуг сильно усложнит

поиск очередной нерассмотренной входящей дуги, что может дать общую временную сложность $O(|E| \max(|E|, |V|))$.

Приведенный алгоритм нахождения максимального множества неуходящих вершин можно дополнить до алгоритма Тарьяна [34], таким образом, полученный алгоритм будет выделять компоненты сильной связности и максимальное множество неуходящих вершин, а тем самым выделять множество вершин, приходящих к таким компонентам, но не принадлежащих им.

Ниже приведен пример работы программного средства для локализации объединения положительно и отрицательно инвариантных множеств модифицированного отображения Икеда, максимальных в заданной области. Представленные результаты получены С.Кобяковым, который реализовал описанный выше алгоритм в программном продукте ASI4DSPRJ.

Пример 6.4. Рассмотрим модифицированное отображение Икеда с параметрами $d = 1$, $a = -0.9$, $b = 1.2$, $C_1 = 0.4$, $C_3 = 6$. Методами символического анализа была найдена гиперболическая точка $H(-0.0950, 2.1937)$ и построены I^+ и I^- в области $K = [-10, 10] \times [-10, 10]$ (см.рис.6.4).

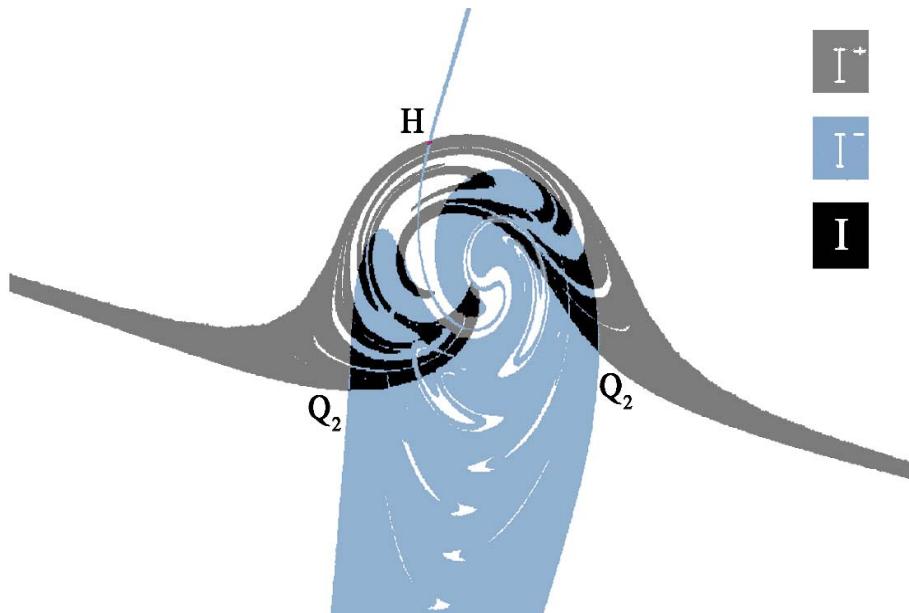


Рис. 6.4. Локализация инвариантных множеств I^+ и I^- для модифицированного отображения Икеда.

Пересечение $I = I^+ \cap I^-$ содержит гомоклинические точки 2-периодической траектории $Q_2(-1.5584, -1.9046), (3.0088, -1.2438)$, которые порождают хаос.

Глава 7

АтTRACTоры

Наибольший интерес при изучении динамических систем представляют те инвариантные множества, которые обладают свойством устойчивости — атTRACTоры. Локализация таких множеств позволяет построить глобальный фазовый портрет системы. В данной главе приводятся примеры атTRACTоров для различных динамических систем и описываем алгоритм их построения, основанный на использовании символического образа. Вводится понятие атTRACTора на символическом образе и устанавливается соответствие между атTRACTорами системы и символического образа. При выборе достаточно малого покрытия такой метод позволяет строить атTRACTор системы и его область притяжения с любой степенью точности. Подробный материал по этому вопросу содержится в работах [86, 87].

7.1. Определения и примеры

Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом $f : M \rightarrow M$ компактного многообразия M . Пусть $\rho(x, y)$ есть расстояние на M . Расстояние между точкой x и множеством A определяется как $\rho(x, A) = \inf(\rho(x, y) : y \in A)$. Обозначим через $V(\varepsilon, A) = \{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ ε -окрестность множества A .

Определение 7.1. • Инвариантное множество Λ называется устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x \in V(\delta, \Lambda)$, то положительная полутраектория $T^+(x) \subset V(\varepsilon, \Lambda)$.

• Устойчивое множество Λ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если существует окрестность V множества Λ такая, что для каждого $x \in V$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f^n(x), \Lambda) = 0.$$

- Замкнутое асимптотически устойчивое множество Λ называется атTRACTором.
- Если Λ — атTRACTор, то множество

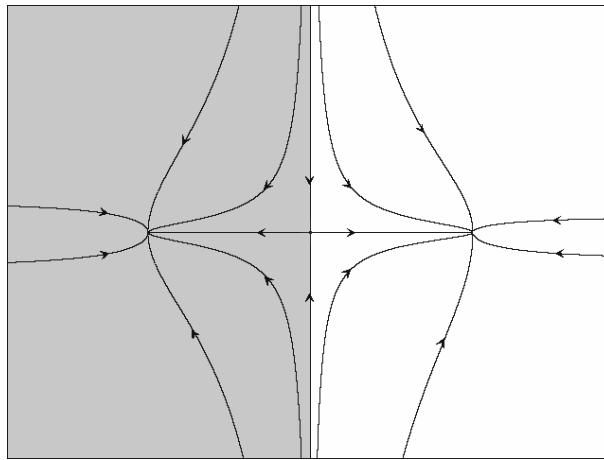
$$W^s(\Lambda) = \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f^n(x), \Lambda) = 0\}$$

называется бассейном или областью притяжения этого атTRACTора Λ .

Пример 7.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Система имеет три атTRACTора: состояния равновесия $A_1 = (-1, 0)$, $A_2 = (1, 0)$ и интервал $A_3 = [-1, 1] \times \{0\}$. Состояние равновесия $(-1, 0)$ имеет область притяжения $W^s(A_1) = (-\infty, 0) \times (-\infty, \infty)$, точка $(1, 0)$ имеет область притяжения $W^s(A_2) = (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$, область притяжения атTRACTора A_3 есть $W^s(A_3) = b f R^2$ (см. рис.7.1).

Рис. 7.1. Аттракторы системы $\dot{x} = x - x^3, \dot{y} = -y$.

Пример 7.2. Рассмотрим возмущенное уравнение Дуффинга $\ddot{x} - x + x^3 + \varepsilon \dot{x} = 0$ и соответствующую ему систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 - \varepsilon y.\end{aligned}$$

У системы существуют три состояния равновесия $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$. Точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ являются аттракторами, устойчивые сепаратрисы точки $(0, 0)$ разделяют области притяжения $W^s(-1, 0)$ и $W^s(1, 0)$. На рисунке 7.2 показаны области притяжения состояний равновесия $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ динамической системы для $\varepsilon = 0.15$.

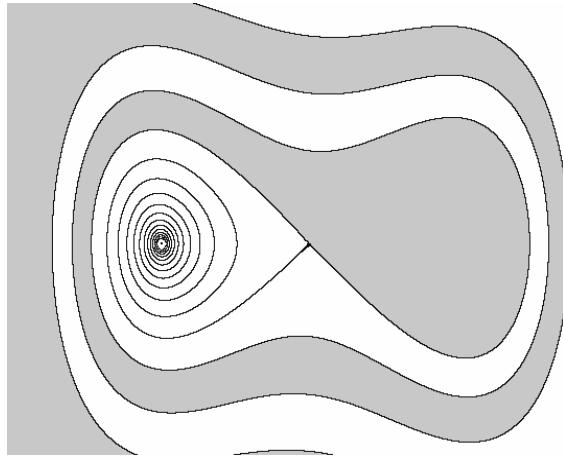


Рис. 7.2. Области притяжения для возмущенного уравнения Дуффинга.

Из определения области притяжения следует, что область притяжения аттрактора Λ является объединением тех точек, ω -предельные множества которых лежат в Λ , т.е $W^s(\Lambda) = \{x : \omega(x) \subset \Lambda\}$. Заметим, что если для некоторой окрестности V замкнутого множества Λ выполнено условие $\omega(x) \subset \Lambda$, (для $x \in V(\Lambda)$), то из этого не следует, что Λ является аттрактором. Эту ситуацию иллюстрирует следующий пример.

Пример 7.3. Рассмотрим систему на плоскости с состоянием равновесия в начале координат O и областью Λ , заполненной эллиптическими траекториями, т.е. траекториями $T(x)$, для которых их α - и ω -предельные множества совпадают с началом координат O (см.рис.7.3). Так

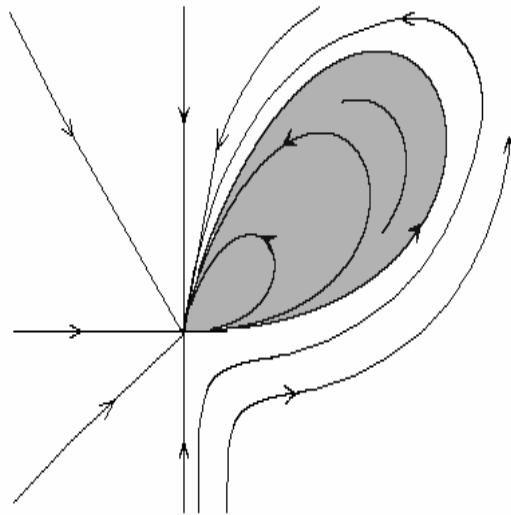


Рис. 7.3. Иллюстрация примера, когда $\omega(\Lambda) \neq \bigcup_{x \in \Lambda} \omega(x)$.

как Λ является объединением траекторий, оно инвариантно. Точка O является ω -предельным множеством любой точки $x \in R^2$, т.е. $\omega(x) = O$. Тем не менее точка O не является аттрактором, так как она неустойчива. Более того, в этом случае множество Λ — аттрактор.

Этот пример показывает, что, вообще говоря, $\omega(\Lambda) \neq \bigcup_{x \in \Lambda} \omega(x)$. Можно гарантировать лишь выполнение включения $\bigcup_{x \in \Lambda} \omega(x) \subset \omega(\Lambda)$.

Утверждение 7.1. [23] Замкнутое инвариантное множество Λ является аттрактором тогда и только тогда, когда существует окрестность V множества Λ такая, что

$$\Lambda = \bigcap_{n>0} \overline{f^n(V)}.$$

Область притяжения аттрактора есть инвариантное множество [23]. Очевидно, что инвариантное множество для гомеоморфизма f будет инвариантным и для обратного отображения f^{-1} .

Определение 7.2. Инвариантное множество Λ^* называется репеллером для f , если Λ^* есть аттрактор для f^{-1} .

Можно дать эквивалентное определение репеллера.

Определение 7.3. Инвариантное множество Λ^* называется репеллером для f , если существует окрестность U такая, что ее α -предельное множество совпадает с Λ^* : $\alpha(U) = \Lambda^*$.

Пусть множество Λ является аттрактором и $W^s(\Lambda)$ — его область притяжения. Множество $\Lambda^* = M \setminus W^s(\Lambda)$ является репеллером [47], который называется дуальным репеллером для Λ , а пара Λ, Λ^* называется парой аттрактор-репеллер.

Пример 7.4. Рассмотрим уравнение $\dot{\varphi} = \sin \varphi$ на окружности S^1 . Уравнение имеет два состояния равновесия $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Точка $\varphi = \pi$ является аттрактором, а точка $\varphi = 0$ его дуальным репеллером. (рис.7.4)

Аттракторы могут иметь достаточно сложную структуру. Существуют так называемые «странные» аттракторы. Этот термин впервые появился в работе Д. Рюэля и Ф. Такенса [38] и

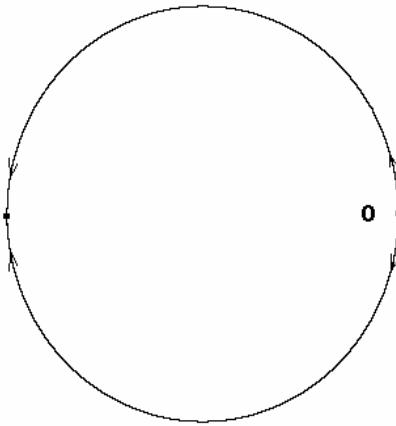


Рис. 7.4. Пара аттрактор-репеллер.

означал существование компактного притягивающего множества, отличного от состояния равновесия, предельного цикла или другой гладкой поверхности. Такие множества имеют дробную размерность и динамика системы на них является хаотичной. Странный аттрактор имеет всюду плотную траекторию, т. е. траекторию, замыкание которой совпадает со всему аттрактором.

Численное моделирование таких аттракторов можно осуществлять с помощью достаточно большого числа итераций произвольной точки, лежащей в области притяжения аттрактора. В этом случае орбита выбранной точки попадает в сколь угодно малую окрестность аттрактора и в силу существования хаотических режимов точки траектории распределяются по всему аттрактору. Хорошо известным примером такого аттрактора является аттрактор Хенона.

Пример 7.5. Аттрактор Хенона

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + y - ax^2, \\y_1 &= bx.\end{aligned}$$

Известно, что при $a = 1.4, b = 0.3$ у динамической системы, порождаемой описанным отображением, в области $[-1.5, 1.5] \times [-1, 1]$ существует странный аттрактор, на котором динамика системы является хаотичной. Размерность аттрактора лежит между 1 и 2. Аттрактор Хенона показан на рис.7.5.

Утверждение 7.2. [23] Инвариантное множество Λ будет аттрактором тогда и только тогда, когда существует окрестность U множества Λ такая, что

$$f(\overline{U}) \subset U, \quad \Lambda = \bigcap_{n>0} f^n(U), \quad W^s(\Lambda) = \bigcup_{n<0} f^n(U).$$

Множество U называется фундаментальной окрестностью Λ . Одной из наших целей является построение аттрактора, репеллера и области притяжения без использования дополнительной информации о динамической системе. Следующие утверждения описывают свойства аттракторов в терминах ε -траекторий.

Утверждение 7.3. Пусть Λ есть аттрактор, $x \in W^s(\Lambda)$ и V — окрестность Λ . Тогда

1) существуют окрестность U^* множества Λ , $U^* \subset V$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что любая положительная ε_1 -полутраектория, проходящая через U^* , остается в U^* ,

2) существует ε_2 такое, что каждая ε_2 -траектория, проходящая через $V(\varepsilon_2, x)$, достигает U^* .

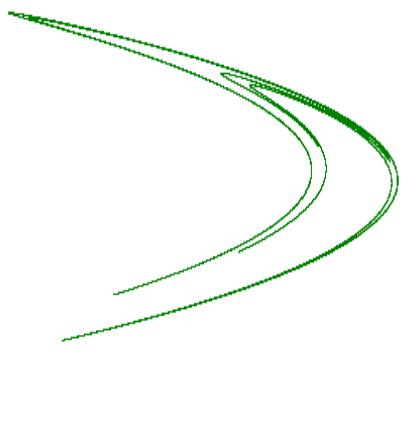
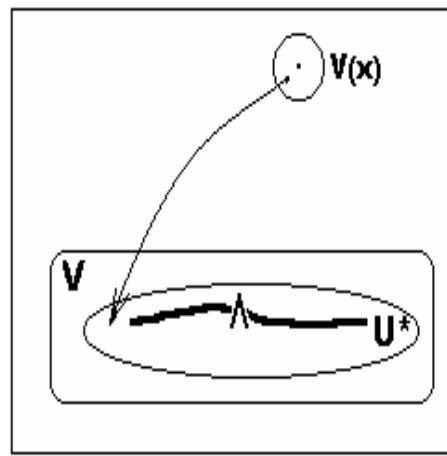


Рис. 7.5. Аттрактор Хенона.

Рис. 7.6. Окрестность аттрактора и ε -траектории.

Очевидно, что $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ удовлетворяет обоим заключениям утверждения, то есть, каждая ε -траектория, проходящая через $V(\varepsilon, x)$, достигает U^* и остается там.(см. рис.7.6.)

Следующее утверждение описывает свойство окрестностей аттрактора и области притяжения.

Утверждение 7.4. Пусть V_1 произвольно малая окрестность аттрактора Λ и V_2 произвольно большая окрестность, лежащая в области притяжения вместе со своим замыканием, т.е.

$$\Lambda \subset V_1 \subset V_2 \subset \bar{V}_2 \subset W^s(\Lambda).$$

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и окрестности U_1, U_2 аттрактора Λ ,

$$\Lambda \subset U_1 \subset V_1 \subset V_2 \subset U_2 \subset \bar{U}_2 \subset W^s(\Lambda)$$

такие, что

- 1) каждая ε -траектория, проходящая через $U_2 \setminus U_1$ начинается вне U_2 и заканчивается в U_1 ,
- 2) каждая положительная ε -полутраектория, проходящая через U_1 , остается там,
- 3) каждая отрицательная ε -полутраектория, проходящая через $M \setminus \bar{U}_2$, остается там.

7.2. Аттрактор на символическом образе

Рассмотрим символический образ G , соответствующий покрытию с максимальным диаметром ячеек d . Пусть $\text{Ver}(G)$ есть множество вершин графа G . Рассмотрим подграф $G(L)$ с

множеством вершин $L \subset \text{Ver}(G)$ и множеством ребер $i \rightarrow j$, где вершины i и j принадлежат L . Будем говорить, что L инвариантное множество, если для каждой вершины $i \in L$ существуют ребра $j \rightarrow i$ и $i \rightarrow k$ в $G(L)$. Для построения инвариантного множества рассмотрим путь $\omega = \{\dots, i_{-1}, i_0, i_1, \dots\}$ бесконечный в обе стороны. Множество вершин $\text{Ver}(\omega)$ пути ω образует инвариантное множество, так как для каждого $i_k \in \omega$ существуют ребра $i_{k-1} \rightarrow i_k$ и $i_k \rightarrow i_{k+1}$. Другими словами, семейство путей $S = \{\omega\}$ дает нам инвариантное множество вершин $\text{Ver}(S)$. Можно сказать, что L инвариантное, если через каждую вершину $i \in L$ проходит допустимый бесконечный в обе стороны путь, лежащий в L . Согласно утверждению 2.1, каждая траектория $\{x_k\}$ гомеоморфизма f порождает путь $\{z_k : x_k \in M(z_k)\}$ на символическом образе G . Следовательно, инвариантное множество $\Lambda \subset M$ порождает инвариантное множество вершин вида

$$L(\Lambda) = \{z : M(z) \cap \Lambda \neq \emptyset\}.$$

В частности, множество всех вершин $\text{Ver}(G)$ инвариантное. Пусть L инвариантное множество вершин на символическом образе G . Множество вершин

$$\text{En}(L) = \{i : i \notin L, \text{ существует ребро } i \rightarrow j, j \in L\}$$

называется входом в L . Множество вершин

$$\text{Ex}(L) = \{i : i \notin L, \text{ существует ребро } j \rightarrow i, j \in L\}$$

называется выходом из L .

Определение 7.4. • Будем говорить, что инвариантное множество $L \subset \text{Ver}(G)$ есть аттрактор, если оно не имеет выхода, т.е. $\text{Ex}(L) = \emptyset$.

- Будем говорить, что инвариантное множество $L \subset \text{Ver}(G)$ есть репеллер, если оно не имеет входа, т.е. $\text{En}(L) = \emptyset$.

Пусть $L \subset \text{Ver}(G)$ аттрактор. Будем говорить, что $D(L)$ есть область притяжения для L , если для любого $j \in D(L)$ допустимый путь, проходящий через вершину j , заканчивается в L . То есть, для любого пути $\{\dots, j, \dots, i_k, \dots\}$ существует число K такое, что вершины i_k , $k > K$, принадлежат L .

Утверждение 7.5. Пусть $L \subset \text{Ver}(G)$ аттрактор. Тогда

1. вершины из $D(L) \setminus L$ невозвратные,
2. множество вершин $L^* = \text{Ver}(G) \setminus D(L)$ есть репеллер.

Репеллер $L^* = \text{Ver}(G) \setminus D(L)$ назовем дуальным к аттрактору L , а пару L, L^* назовем парой аттрактор - репеллер.

Следующее утверждение описывает структуру аттрактора на символическом образе.

Утверждение 7.6. Каждый аттрактор L состоит только из классов эквивалентных возвратных вершин и путей между этими классами.

Приведенные утверждения проиллюстрированы на рис. 7.7.

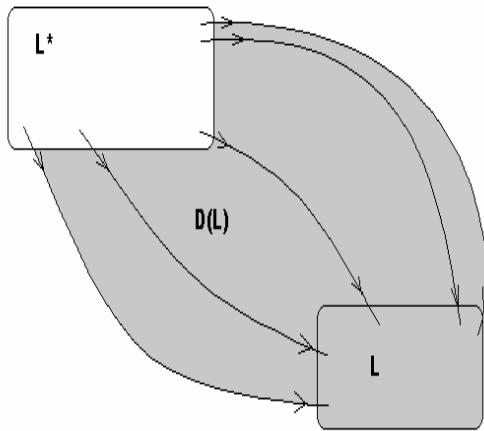


Рис. 7.7. Пара аттрактор-репеллер.

7.3. Аттракторы системы и символического образа

Естественно предположить, что существует соответствие между аттракторами динамической системы и ее символического образа. Следующая теорема показывает, что аттрактор символического образа порождает аттрактор динамической системы.

Теорема 7.1. Если L и $D(L)$ есть аттрактор и его область притяжения на символическом образе G , то существуют аттрактор Λ гомеоморфизма f и его область притяжения $W^s(\Lambda)$ такие, что множество

$$U = \text{Int}\{\bigcup M(i), i \in L\}$$

есть фундаментальная окрестность Λ и

$$\{\bigcup M(j), j \in D(L)\} \subset W^s(\Lambda).$$

Таким образом, зная аттрактор и его область притяжения, мы можем построить фундаментальную окрестность аттрактора динамической системы и оценить его область притяжения.

Следующая теорема показывает, что аттрактор и его область притяжения могут быть построены с любой точностью при достаточно мелком покрытии.

Теорема 7.2. Пусть $\Lambda \subset M$ аттрактор, V_1 — его произвольно малая окрестность и V_2 — произвольно большая окрестность такие, что

$$\Lambda \subset V_1 \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset W^s(\Lambda).$$

Тогда существует $d_0 > 0$ такое, что каждый символический образ G , соответствующий покрытию с максимальным диаметром ячеек $d < d_0$, имеет аттрактор L и его область притяжения $D(L)$ такие, что

$$\Lambda \subset \{\bigcup M(i), i \in L\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \{\bigcup M(j), j \in D(L)\} \subset W^s(\Lambda).$$

На рис.7.8 показаны оценки аттрактора и его области притяжения, построенные на основании теоремы 7.2.

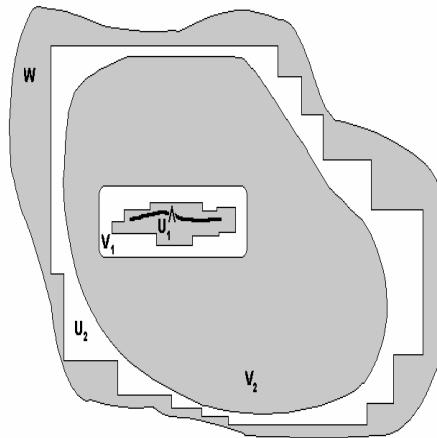


Рис. 7.8. Оценка аттрактора и его области притяжения.

7.4. Матрица перехода и аттракторы.

Введем отношение квазипорядка между вершинами на символическом образе. Будем писать $i \prec j$ тогда и только тогда, когда существует допустимый путь вида

$$i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_m = j.$$

Следовательно, вершина i будет возвратной тогда и только тогда, когда $i \prec i$, и пара возвратных вершин i, j будет эквивалентной тогда и только тогда, когда $i \prec j \prec i$.

Утверждение 7.7. Вершины символического образа G могут быть перенумерованы таким образом, что

- эквивалентные вершины окажутся занумерованными подряд идущими целыми числами,
- новые номера вершин i, j выбраны таким образом, что $i < j$, если $i \prec j \neq i$.

Другими словами, матрица переходов имеет при такой нумерации вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\Pi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ddots & & & & \\ 0 & & (\Pi_k) & \cdots & \cdots \\ \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & (\Pi_s) \end{pmatrix}$$

где каждый диагональный блок Π_k либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин H_k , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. Следует отметить, что перенумерация, описанная в утверждении 7.7, определена не единственным образом. Из утверждений 7.6 и 7.7 следует, что для любого аттрактора $L = \{i\}$, его области притяжения $D(L) = \{j\}$, и соответствующего репеллера $L^* = \{k\}$, существует перенумерация такая, что

$$k < j < i, \quad \text{где } j \in D(L) \setminus L.$$

Но, согласно утверждению 7.5, вершины из множества $D(L) \setminus L$ невозвратные. Следовательно, матрица переходов принимает вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\Pi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \ddots & & \\ & \ddots & & 0 & \cdots \\ 0 & & 0 & & (\Pi_2) \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где блоки Π_1 , Π_2 соответствуют репеллеру L^* и аттрактору L , соответственно. Таким образом, мы можем найти аттракторы символического образа, представляя матрицу переходов в виде (7.1).

7.5. Построение пары аттрактор-репеллер

Пусть C есть покрытие компакта M , G — символический образ для C и L, L^* это пара аттрактор-репеллер на G . Построим подразбиение ячеек $\{M(i), i \in L\}$, оставив другие ячейки без изменений. Для нового покрытия NC построим символический образ NG . Обозначим за NL вершины, соответствующие новым ячейкам. Множество NL не является, вообще говоря, аттрактором на NG .

Утверждение 7.8. Максимальное инвариантное множество I в NL является аттрактором на NG , дуальным к репеллеру L^* , а множество вершин $\text{Ver}(NG) \setminus L^*$ является областью притяжения для I .

Рассмотрим аналогичное построение для пары аттрактор-репеллер (L, L^*) . Для этого построим подразбиение ячеек $\{M(i), i \in L \cup L^*\}$, оставив другие ячейки без изменений. Пусть NG — символический образ, соответствующий этому покрытию и $NL \cup NL^*$ — вершины, соответствующие новым ячейкам.

Утверждение 7.9. Максимальное инвариантное множество I в NL и максимальное инвариантное множество I^* в NL^* образуют пару (I, I^*) аттрактор-репеллер на символическом образе NG . При этом множество $D(I) = \text{Ver}(NG) \setminus I^*$ является областью притяжения аттрактора I .

Утверждения 7.8, 7.9 и теорема 7.1 являются основой следующего алгоритма.

Алгоритм построения аттрактора, его области притяжения и репеллера динамической системы

- 1) Пусть C есть покрытие компакта M ячейками с максимальным диаметром d . Строим символический образ G , соответствующий данному покрытию.
- 2) Выделяем на графе G аттрактор L , его область притяжения $D(L)$ и репеллер L^* .
- 3) Определяем множества

$$\begin{aligned} A &= \{\bigcup M(i), i \in L\}, \\ W &= \{\bigcup M(j), j \in D(L)\}, \\ R &= \{\bigcup M(k), k \in L^*\}. \end{aligned}$$

Пусть $d_1 = \max\{\text{diam}M(i), \text{diam}M(k) : i \in L, k \in L^*\}$.

4) Ячейки, соответствующие аттрактору L и репеллеру L^* , подразбиваются, остальные не меняются. Строится новое покрытие.

5) Строим символический образ NG для нового покрытия, $NL \cup NL^*$ — вершины, соответствующие новым ячейкам.

6) Строим новые аттрактор L и репеллер L^* как максимальные инвариантные множества в NL и NL^* соответственно. Положим $D = \text{Ver}(NG) \setminus L^*$.

7) Переходим к пункту 3).

Повторяя этот процесс, мы получаем последовательность множеств $A_1, A_2, \dots; W_1, W_2, \dots; R_1, R_2, \dots$, и последовательность чисел d_1, d_2, \dots .

Теорема 7.3. 1. Описанный алгоритм определяет последовательности вложенных друг в друга множеств

$$\begin{aligned} A_1 &\supset A_2 \supset \dots, \\ W_1 &\subset W_2 \subset \dots, \\ R_1 &\supset R_2 \supset \dots. \end{aligned}$$

2. Если $d_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} A_s &= \bigcap_s A_s = \Lambda \text{ есть аттрактор,} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} W_s &= \bigcup_s W_s = W^s(\Lambda) \text{ есть его область притяжения,} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} R_s &= \bigcap_s R_s = \Lambda^* \text{ есть репеллер, соответствующий } \Lambda.\end{aligned}$$

3. Каждый аттрактор Λ может быть построен с помощью такого алгоритма.

Замечание 7.1. Аттрактор, построенный согласно теореме 7.3, однозначно определяется начальным выбором аттрактора L символического образа, полученного на первом цикле алгоритма, а аттрактор Λ динамической системы является максимальным в множестве $A = \{\bigcup M(i), i \in L\}$.

Вообще говоря, число возможных аттракторов на символическом образе растет при уменьшении максимального диаметра покрытия d . При этом структура аттракторов может быть достаточно сложной и их число может быть неограниченным при $d \rightarrow 0$. Изучению структуры аттракторов динамических систем посвящена следующая глава.

Следующий пример показывает нетривиальность структуры аттракторов.

Пример 7.6. Рассмотрим систему, определенную на области $M = [-5, 2] \times [-2, 2]$. Разобъем область M на три части: $M_1 = [-5, -3.5] \times [-2, 2]$, $M_2 = [-3.5, -2] \times [-2, 2]$, и $M_3 = [-2, 2] \times [-2, 2]$. В M_1 определим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(x+4)(x+3), \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

В области M_3 рассмотрим возмущенную систему Дуффинга

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 - 0.25y.\end{aligned}$$

В M_2 определим гладкое векторное поле, связывающее введенные системы (см.рис.7.9). Вблизи границы ∂M мы определим векторное поле таким образом, чтобы траектории через ∂M входили в M . Система имеет два состояния равновесия $(-4, 0)$ и $(-3, 0)$ в M_1 . Точка $(-4, 0)$ является аттрактором, точка $(-3, 0)$ является гиперболической. У системы Дуффинга существуют два аттрактора: $(\pm 1, 0)$, а также гиперболическая точка $(0, 0)$. Кроме трех точек-аттракторов $(-4, 0)$ и $(\pm 1, 0)$ неустойчивая сепаратриса $W^u(O)$ начала $O(0, 0)$ является аттрактором. Более того, объединение неустойчивых сепаратрис $W^u(-4, 0)$ и $W^u(O)$ также является аттрактором. Таким образом, рассматриваемая система имеет 5 аттракторов. Наибольший из них показан на рис. 7.9 жирной линией. Каждый из этих аттракторов можно построить с помощью алгоритма локализации, при этом каждый из них определяется выбором начального приближения. Например для наибольшего аттрактора в качестве начального приближения выбирается M .

Рассмотрим пример численного построения аттрактора и его области притяжения. Описанный выше алгоритм построения аттрактора и его области притяжения был реализован Д.Фандингер (Штуттгарт).

Пример 7.7. Рассмотрим систему Дуффинга

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 - \varepsilon y\end{aligned}$$

для $\varepsilon = 0.15$. Для аттрактора A , который в данном случае есть состояние равновесия $(-1, 0)$, получены оценки его фундаментальной окрестности и области притяжения. При вычислениях для

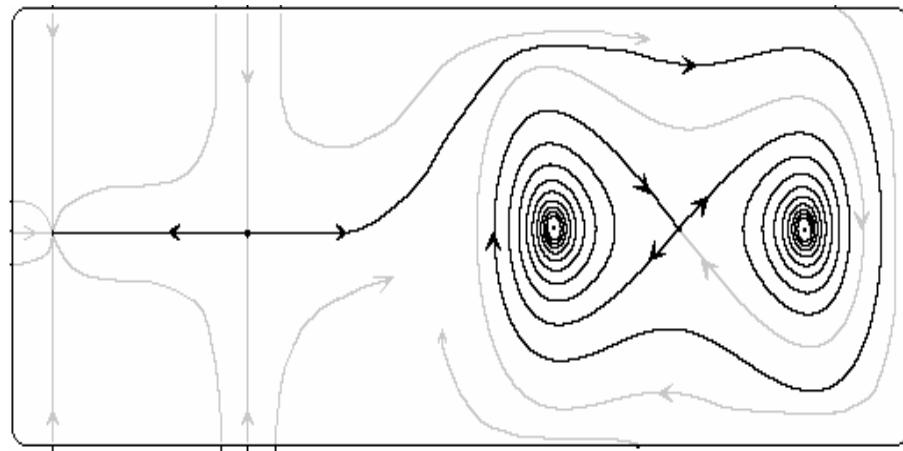


Рис. 7.9. Максимальный аттрактор в заданной области.

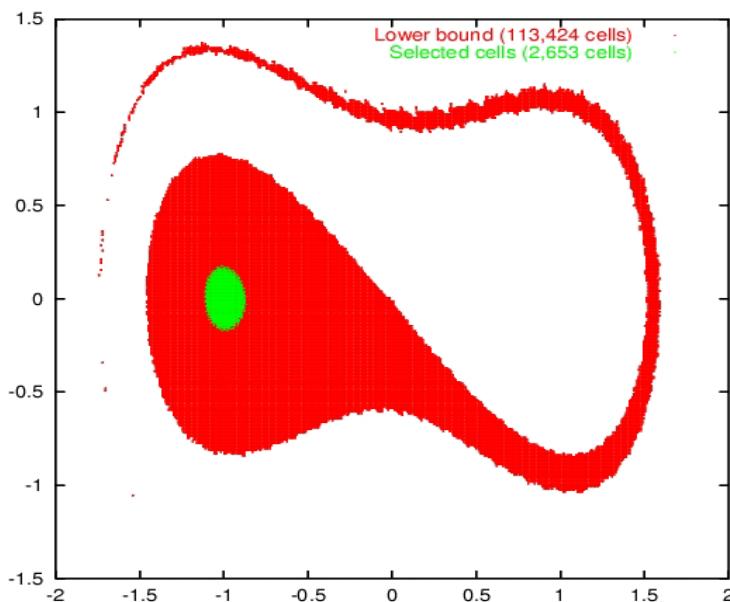


Рис. 7.10. Оценка аттрактора А и его области притяжения для уравнения Дуффинга.

получения хорошей локализации аттрактора потребовалось 2653 ячеек, для оценки фундаментальной окрестности и 113424 ячеек для оценки области притяжения. Выделенная на рис. 7.10 верхняя часть области притяжения меньше, чем на самом деле, поскольку вычисления ограничены областью исследования $[-2, 2] \times [-1.5, 1.5]$, т. е. если траектория покидала данную область, то считалось, что она ушла в бесконечность.

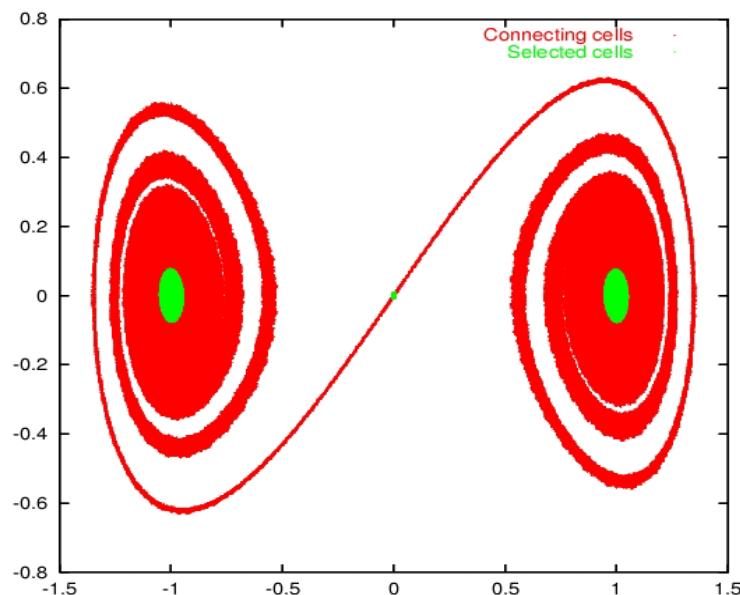


Рис. 7.11. Оценка максимального аттрактора для уравнения Дуффинга.

Для исследуемого уравнения также была получена оценка аттрактора, максимального в данной области. Результат показан на рис. 7.11.

Глава 8

Фильтрации

Как правило динамическая система имеет много аттракторов и репеллеров. Динамика пары аттрактор-репеллер устроена достаточно просто: траектории, расположенные вне данных аттрактора и репеллера, начинаются вблизи репеллера и заканчиваются вблизи аттрактора. Если система имеет много аттракторов, то возникает не очень простая динамика между аттракторами и репеллерами. Для ее описания используется такой объект как фильтрация. Можно сказать, что фильтрация — это упорядоченная по включению последовательность аттракторов. Однако, такое определение фильтрации неконструктивно. Результаты предыдущей главы показывают, что мы можем построить достаточно малую (фундаментальную) окрестность аттрактора, но не сам аттрактор. Поэтому нам удобно дать эквивалентное определение, которое использует фундаментальные окрестности, и, как следствие, получить данное выше определение фильтрации.

8.1. Определение и свойства фильтрации

Пусть f — гомеоморфизм многообразия M .

Определение 8.1. [80] Фильтрацией для гомеоморфизма f называется конечная последовательность $F = \{F_0, F_1, \dots, F_m\}$ открытых множеств таких, что $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_m = M$ и для каждого $k = 0, 1, \dots, m$, $f(\overline{F_k}) \subset F_k$.

Пример 8.1. Рассмотрим систему на плоскости

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Система имеет три состояния равновесия $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$. Точка $(0, 0)$ является гиперболической, а состояния равновесия $(\pm 1, 0)$ — аттракторы. Пусть F_1 — фундаментальная окрестность точки $(-1, 0)$ и V_1 является фундаментальной окрестностью точки $(1, 0)$. Существует открытое множество F_3 , содержащее окрестности F_1, V_1 , множество $[-1, 1] \times 0$. При этом каждая траектория, пересекающая границу, входит внутрь F_3 . В этом случае мы получаем фильтрацию $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset F_4 = R^2$, где $F_2 = F_1 + V_1$. Очевидно, по свойству симметрии можно заменить F_1 на V_1 (см.рис.8.1).

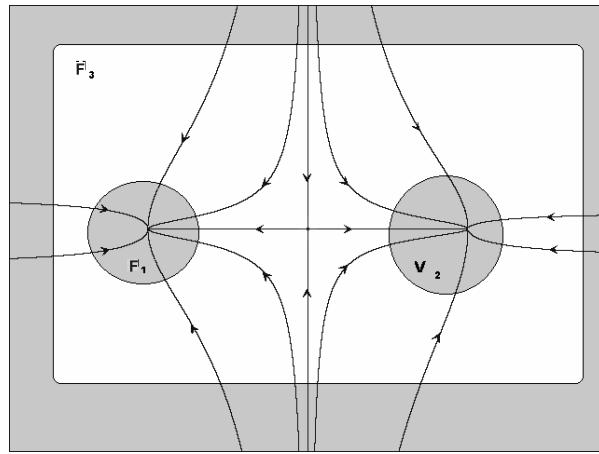
Второе условие $f(\overline{F_k}) \subset F_k$ есть свойство фундаментальной окрестности аттрактора (см.утверждение 7.2).

Следующее утверждение описывает структуру аттракторов, порожденных фильтрацией.

Утверждение 8.1. [23]

1) Для данной фильтрации F каждое максимальное инвариантное подмножество в F_k , $k = 0, 1, \dots, m$

$$A_k = \{\bigcap f^n(F_k) : n \in Z^+\}$$

Рис. 8.1. Фильтрация $\emptyset \subset F_1 + V_1 \subset F_3 \subset R^2$.

есть аттрактор;

2) аттракторы $\{A_k\}$ вложены друг в друга:

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m = M.$$

Множеством Морса называется пересечение аттрактора и репеллера. Максимальное инвариантное множество I_k в $U_k \setminus U_{k-1}$ является пересечением аттрактора A_k и репеллера R_{k-1} двойственного (дуального) к A_{k-1} , т.е $I_k = A_k \cap R_{k-1}$. Описанный набор инвариантных множеств $\{I_k\}$ называется разложением Морса.

Пример 8.2. Рассмотренная в примере 8.1 система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

обладает фильтрацией $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset F_1 + V_1 \subset F_3 \subset F_4 = R^2$. Аттрактор A_1 состоит из одной точки $(-1, 0)$, аттрактор A_2 состоит из пары точек $(-1, 0)$ и $(+1, 0)$, аттрактор A_3 есть отрезок $[-1, 1] \times \{0\}$. Выполняются включения $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 = R^2$.

Пример 8.3. Возмущенная система Дуффинга

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 - \varepsilon y,\end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$, имеет аналогичные предыдущему примеру топологию траекторий и фильтрацию $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset F_1 + V_1 \subset F_3 \subset F_4 = \mathbf{R}^2$. Аттрактор A_1 состоит из точки $(-1, 0)$, аттрактор A_2 состоит из точек $(-1, 0)$ и $(+1, 0)$, аттрактор A_3 состоит из состояния равновесия $O(0, 0)$ и его неустойчивых сепаратрис, которые приближаются по спирали к точкам $(-1, 0)$ и $(+1, 0)$, соответственно. Выполняются включения $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 = R^2$. Фазовый портрет системы показан для $\varepsilon = 0.15$. Траектории, показанные на рис. 8.2, суть сепаратрисы состояния равновесия O .

Следующий пример показывает, что фильтрация и ее последовательность аттракторов не является единственной.

Пример 8.4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin x, \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

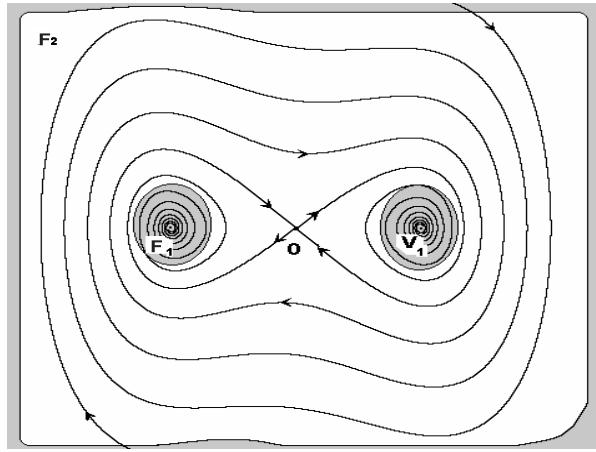
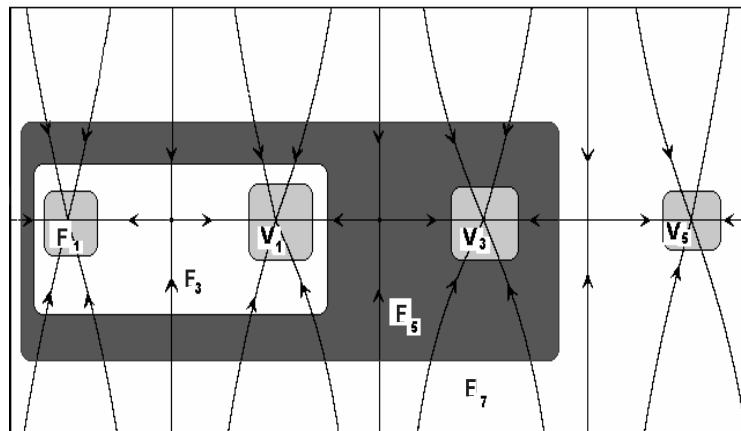


Рис. 8.2. Фильтрация для системы Дуффинга.

в области $D = [-12, 12] \times [-5, 5]$. Она имеет состояния равновесия в точках $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Траектории, пересекающие границу ∂D входят в D . Система обладает фильтрацией $\emptyset \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset F_4 \subset F_5 \subset F_6 \subset F_7 \subset R^2$, где $F_2 = F_1 + V_1$, $F_4 = F_3 + V_3$, $F_6 = F_5 + V_5$. Для данной фильтрации $K_1 = (-3\pi, 0)$, $K_2 = (-\pi, 0)$, $K_3 = (-2\pi, 0)$, $K_4 = (\pi, 0)$, $K_5 = (0, 0)$, $K_6 = (3\pi, 0)$, $K_7 = (2\pi, 0)$. (см. рис.8.3)

Рис. 8.3. Фильтрация для системы $\dot{x} = \sin x, \dot{y} = -y$.

Обозначим максимальное инвариантное подмножество в $F_k \setminus F_{k-1}$ через

$$K_k(F) = \{\cap f^n(F_k \setminus F_{k-1}) : n \in \mathbb{Z}\},$$

и положим $K(F) = \{\cup K_k(F) : k = 1, \dots, m\}$.

Утверждение 8.2. Цепно-рекуррентное множество лежит в $K(F)$:

$$Q \subset K(F) = \bigcup_k K_k(F).$$

Определение 8.2. • Фильтрация $F^* = \{F_0^*, \dots, F_p^*\}$ уточняет фильтрацию $F = \{F_0, \dots, F_q\}$, если для каждого $\alpha = 1, \dots, p$ существует $\beta(\alpha)$, $1 \leq \beta(\alpha) \leq q$ такое, что

$$F_\alpha^* \setminus F_{\alpha-1}^* \subset F_{\beta(\alpha)} \setminus F_{\beta(\alpha)-1}.$$

- Последовательность F^1, F^2, \dots фильтраций для f называется тонкой, если F^{k+1} уточняет F^k и

$$\bigcap_k K(F^k) = Q.$$

Из определения 8.1 следует, что свойство последовательности F быть фильтрацией сохраняется при C^0 -возмущении динамической системы. Поэтому можно сказать, что последовательность фильтраций контролирует рост цепно-рекуррентного множества.

Заметим, что если конечная последовательность F^1, \dots, F^m является тонкой, то последняя фильтрация F^m сама является тонкой, т.е. $Q = \bigcup_k K_k(F^m)$. Существуют динамические системы, для которых недостаточно конечной последовательности фильтраций чтобы определить цепно-рекуррентное множество. Следующий пример показывает, что для определения цепно-рекуррентного множества может потребоваться бесконечная последовательность уточняющих фильтраций.

Пример 8.5. Рассмотрим систему из примера 8.1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Описанная фильтрация $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset F_1 + V_1 \subset F_3 \subset F_4 = R^2$ имеет $K_1 = (-1, 0)$, $K_2 = (+1, 0)$, $K_3 = (0, 0)$. Эта фильтрация является тонкой, так как цепно-рекуррентное множество Q состоит из состояний равновесия $(0, 0)$ и $(\pm 1, 0)$, т.е., $Q = K_1 + K_2 + K_3$.

Пример 8.6. Уравнение

$$\dot{x} = x^2 \sin \frac{\pi}{x},$$

где $x \in R$, не допускает тонкой фильтрации, поскольку любая окрестность состояния равновесия 0 содержит бесконечное число равновесий, образующих отдельные компоненты цепно-рекуррентного множества. Уравнение имеет положения равновесия в точках $x = \frac{1}{n}$, $n \in Z$.

Существует фильтрация $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset F_4 \subset F_5 = R$, где F_1 есть окрестность интервала $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, $F_2 = F_1 + V_1$, $F_3 = F_1 + V_1 + V_2$, V_1 и V_2 окрестности точек $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, соответственно, и $F_4 = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Существует бесконечно много положений равновесия в F_1 , более того, динамика в F_1 похожа на динамику системы в окрестности F_4 . Поэтому мы можем построить ту же самую последовательность фильтраций в F_1 , которая уточняет F_1 . Повторяя этот процесс, можно получить бесконечную последовательность уточняющих фильтраций. (см. рис.8.4)

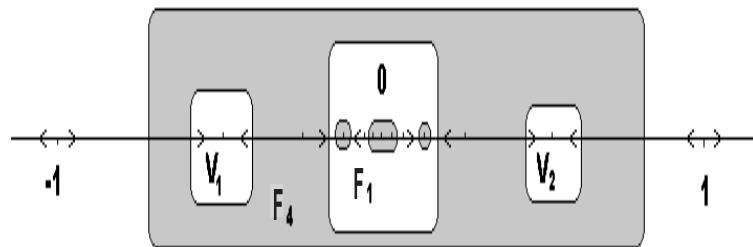


Рис. 8.4. Фильтрация для системы $\dot{x} = x^2 \sin \frac{\pi}{x}$.

Далее мы покажем, что для любого гомеоморфизма f существует тонкая последовательность фильтраций, причем последняя может быть построена при помощи специальной последовательности символьических образов.

8.2. Фильтрация на символическом образе

Определение 8.3. Конечная последовательность $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_m\}$ множеств вершин на символическом образе G называется фильтрацией, если

$$\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_m = \text{Ver}(G)$$

и для каждого B_k , $k = 1, 2, \dots, m$, если вершина i ребра $i \rightarrow j$ лежит в B_k , то вершина j также лежит в B_k .

Второе условие означает, что не существует выхода из B_k . Введенное понятие проиллюстрировано на рис.8.5.

Пусть L_k максимальное инвариантное множество в B_k .

Утверждение 8.3. Каждое максимальное инвариантное множество $L_k \subset B_k$ есть аттрактор и

$$\emptyset = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = \text{Ver}(G).$$

Для каждого k множество B_k соответствует фундаментальной окрестности $F_k = \{\bigcup M(z), z \in B_k\}$ аттрактора.

Пусть $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_m\}$ фильтрация на символическом образе. Максимальное инвариантное подмножество множества $B_k \setminus B_{k-1}$ обозначается $J_k(\Phi)$ и положим $J(\Phi) = \bigcup_k J_k(\Phi)$.

Утверждение 8.4. Множество возвратных вершин RV лежит в $J(\Phi)$:

$$RV \subset J(\Phi).$$

Мы будем называть фильтрацию Φ тонкой, если множество возвратных вершин $RV = J(\Phi)$.

Обозначим классы эквивалентных возвратных вершин через H_p , $p = 1, \dots, s$. Будем писать $H_p \prec H_q$ в том и только том случае, если существует допустимый путь из H_p в H_q . Рисунок 8.6 иллюстрирует эту ситуацию. Пусть вершины на символическом образе перенумерованы согласно утверждению 7.7. В этом случае матрица переходов принимает вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\Pi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ddots & & & & \\ 0 & & (\Pi_p) & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & (\Pi_s) \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок Π_p соответствует либо классу эквивалентных возвратных вершин H_p , либо одной невозвратной вершине. В последнем случае Π_p совпадает с нулем. Введем числа $n(H_p) = \min\{i : i \in H_p\}$ и построим множества

$$E_p = \{i : i \geq n(H_p)\}, \quad p = 1, \dots, s, \quad E_{s+1} = \emptyset.$$

Положим $B_k = E_p$, где $p = s + 1 - k$, $k = 0, 1, \dots, s$. Мы имеем $B_0 = \emptyset$ и $B_s = \text{Ver}(G)$.

Утверждение 8.5. Конечная последовательность $\Phi = \{\emptyset = B_0, B_1, \dots, B_s = \text{Ver}(G)\}$, введенная в определении 8.3, есть тонкая фильтрация на символическом образе G .

Теорема 8.1. Пусть $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_s\}$ фильтрация на символическом образе G . Тогда конечная последовательность $F = \{F_0, F_1, \dots, F_s\}$, где $F_k = \text{int}\{\bigcup M(i) : i \in B_k\}$, есть фильтрация для отображения f .

Таким образом, утверждение 8.5 и теорема 8.1 указывают алгоритм построения фильтрации.

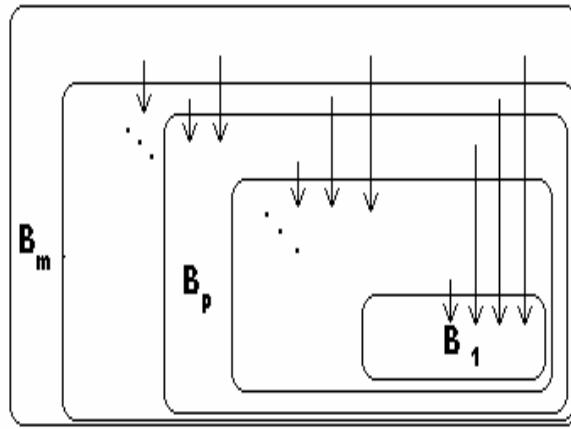


Рис. 8.5. Фильтрация на символическом образе.

8.3. Построение фильтрации динамической системы

Рассмотрим алгоритм построения тонкой последовательности фильтраций.

1) Пусть C произвольное конечное покрытие компакта M замкнутыми ячейками. Построим символический образ G для данного покрытия.

2) Выделяем классы H_p эквивалентных вершин. Пусть

$$n(H_p) = \min\{i : i \in H_p\}$$

и

$$d = \max\{\text{diam}M(i) : i \text{ — возвратные}\}.$$

3) Полагая $B_k = \{i : i \geq n(H_p), p = s + 1 - k\}$, получаем тонкую фильтрацию $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_s\}$ на символическом образе G .

4) По фильтрации Φ строим фильтрацию для динамической системы $F = \{F_0, F_1, \dots, F_s\}$, где $F_k = \{\bigcup M(i) : i \in B_k\}$.

5) Ячейки $\{M(i) : i \text{ — возвратные}\}$, соответствующие возвратным вершинам, подвергаются подразбиению. Таким образом, определяется новое покрытие.

6) Строим символический образ G для нового покрытия.

7) Возвращаемся ко второму пункту.

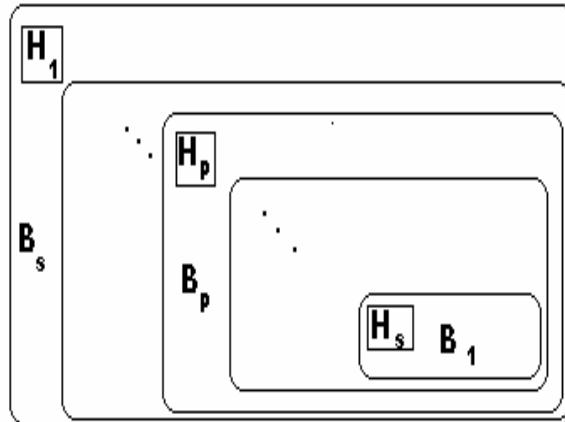


Рис. 8.6. Классы эквивалентных возвратных вершин.

Описанный алгоритм дает последовательность символьических образов G_m , тонких фильтраций Φ_m на каждом G_m , последовательность фильтраций F_m на M и последовательность чисел d_m . Следующая теорема обосновывает предложенный алгоритм.

Теорема 8.2. 1) Если в описанном алгоритме $d_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то последовательность фильтраций $\{F_m\}$ будет тонкой.

2) Для каждого гомеоморфизма f существует тонкая последовательность фильтраций.

Глава 9

Структурный граф динамической системы

Одной из важных практических задач теории динамических систем является разработка конструктивных методов для исследования глобальной структуры траекторий системы. Классические работы 60-80 годов прошлого столетия [35, 76, 80, 92, 95, 96, 105] показали, что глобальная динамика системы существенно определяется связями между компонентами цепно-рекуррентного множества. В настоящей главе мы даем теоретическое обоснование компьютерно-ориентированного метода вычисления структурного графа динамической системы. Вершины $\{i\}$ структурного графа соответствуют компонентам цепно-рекуррентного множества. Каждое ребро $i \rightarrow j$ соответствует траекториям, которые имеют α -предельное множество в компоненте Q_i и ω -предельное множество в компоненте Q_j , т.е. ребра $\{i \rightarrow j\}$ соответствуют связям $\{Q_i \rightarrow Q_j\}$. По структурному графу можно судить не только о количестве компонент и связях между ними, но и о структуре атTRACTоров и их областей притяжения. Основное предположение — конечное число компонент цепно-рекуррентного множества. Основные результаты этой главы получены Д.А.Мизиным и Г.С.Осипенко.

9.1. Символический образ и структурный график

Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом $f : M \rightarrow M$ на компактном метрическом пространстве M . Напомним, что Q — это множество цепно-рекуррентных точек для рассматриваемой системы.

Определение 9.1. Подмножество $\Omega \subset Q$ называется компонентой цепно-рекуррентного множества, если любые две точки из Ω могут быть соединены периодической ε -траекторией для любого $\varepsilon > 0$.

Из определения следует, что цепно-рекуррентное множество Q может быть представлено в виде объединения непересекающихся инвариантных замкнутых компонент Q_i :

$$Q = \bigcup_i Q_i$$

Пусть $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$ — компоненты цепно-рекуррентного множества динамической системы. Будем говорить, что между компонентами Q_i и Q_j есть связь $Q_i \rightarrow Q_j$, если существует точка x такая, что $\alpha(x) \subset Q_i$, а $\omega(x) \subset Q_j$. Другими словами, существует траектория, которая идет от Q_i к Q_j .

Определение 9.2. Рассмотрим график Γ с множеством вершин $\{i\}$, соответствующих компонентам Q_i , и с множеством ребер $\{i \rightarrow j\}$, соответствующих связям $\{Q_i \rightarrow Q_j\}$. Так построенный

граф Γ будем называть структурным графом динамической системы, а соответствующую матрицу переходов $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$, если существует ребро $i \rightarrow j$ и $a_{ij} = 0$ в противном случае, — структурной матрицей динамической системы f .

По определению, структурный граф и его матрица переходов являются топологическими инвариантами динамической системы. Иначе говоря, если существует такая непрерывная и обратимая замена координат, которая переводит траектории одной динамической системы в траектории другой, то такие системы имеют одинаковые структурные графы.

Структурная матрица имеет размер $q \times q$, где q — число компонент цепно-рекуррентного множества. Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 9.1. Если динамическая система имеет конечное число компонент цепно-рекуррентного множества, то существует конечный алгоритм для построения структурного графа.

Пусть G — символический образ отображения f относительно покрытия C . Напомним, что вершина i является возвратной, если на G существует допустимый замкнутый путь, проходящий через i и возвратные вершины i, j являются эквивалентными, если существует допустимый замкнутый путь, проходящий через i и j . Поэтому множество возвратных вершин RV разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных возвратных вершин H_k , $RV = \bigcup_k H_k$. Множество возвратных вершин RV является аналогом цепно-рекуррентного множества, а классы H_k являются аналогом компонент этого множества.

Согласно утверждению 7.7, гл.7 матрица допустимых переходов символического образа при соответствующей нумерации вершин приводится к виду

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\Pi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ddots & & & & \\ 0 & & (\Pi_k) & \cdots & \cdots \\ \ddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & (\Pi_s) \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок Π_k либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин H_k , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. По символическому образу G построим новый граф G^* , отождествляя эквивалентные вершины на G в одну. А именно, каждому классу эквивалентности H_k сопоставим на графе G^* вершину k , а ребро $k \rightarrow l$ будет означать, что существует допустимый путь из класса H_k в класс H_l , не проходящий через другие классы $\{H_m, m \neq k, l\}$.

Определение 9.3. Построенный таким образом граф G^* будем называть структурным графом символического образа G .

Матрица переходов для G^* имеет вид

$$\Pi^* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & \cdots & \cdots \\ \ddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

где на диагонали стоят единицы, под диагональю стоят нули и размер матрицы определяется числом классов эквивалентных возвратных вершин.

Ясно, что структурный граф символического образа является аналогом структурного графа динамической системы. Однако, как показывает следующий пример, данные графы могут существенно отличаться.

Пример 9.1. Структурные графы линейного отображения и его символического образа.

Рассмотрим линейное отображение f_λ расширенной прямой $(-\infty, +\infty) \cup (\infty = +\infty = -\infty)$ в себя:

$$f_\lambda : x \rightarrow \lambda x,$$

$\lambda \in (0, 1)$. Таким образом, в качестве компакта M рассматривается компактифицированная прямая, которая гомеоморфна окружности S^1 , при этом ∞ является неподвижной точкой. Рассмотрим случай $\lambda = 1/2$. Построим символический образ данного отображения. Пусть покрытие C состоит из отрезков единичной длины $[n, n+1]$, $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ и отрезка $[3, +\infty) = (-\infty, -3]$. Перенумеруем ячейки покрытия так, чтобы их номера соответствовали правым концам отрезков для $n > 0$ и левым для отрицательных n . Отрезку $[3, +\infty)$ сопоставим ячейку $M(\infty)$. Образ ячейки $M(1) = [0, 1]$ пересекается с $M(-1) = [-1, 0]$, т.е. вершина $i = 1$ является возвратной. Образ ячейки $M(2) = [1, 2]$ пересекается с $M(2)$ и $M(1)$, т.е. вершина $i = 2$ является возвратной. Более того, так как $f(M(1)) \cap M(2) = \emptyset$, то дуги $1 \rightarrow 2$ не существует, и вершины 1 и 2 не являются эквивалентными. Образ ячейки $M(3) = [2, 3]$ пересекается с $M(1)$, $M(2)$ и не пересекается с $M(3)$. Следовательно, вершина $i = 3$ является невозвратной (проходящей). Символический образ для данного покрытия показан на рис.9.1, а), структурный граф символического образа на 9.1,b).

Компонентами цепно-рекуррентного множества системы являются отрезки $[3, +\infty)$ и $[0, 1]$. Структурный граф динамической системы показан на рис. 9.1,c).

Отметим, что классы эквивалентных возвратных вершин $H(2)$ и $H(-2)$ являются «ложными» в том смысле, что ячейки $M(2)$ и $M(-2)$ не содержат цепно-рекуррентных точек. Более того, так как отображение f является линейным, то более мелкие покрытия сохраняют количество «ложных» классов. Можно проверить, что измельчение покрытия приводит к изменению символического образа а), но сохраняет структурный граф б). Это означает, что только измельчением покрытия мы не сможем уничтожить "ложные" классы и построить структурный граф динамической системы. (Позже мы дадим точное определение ложных классов).

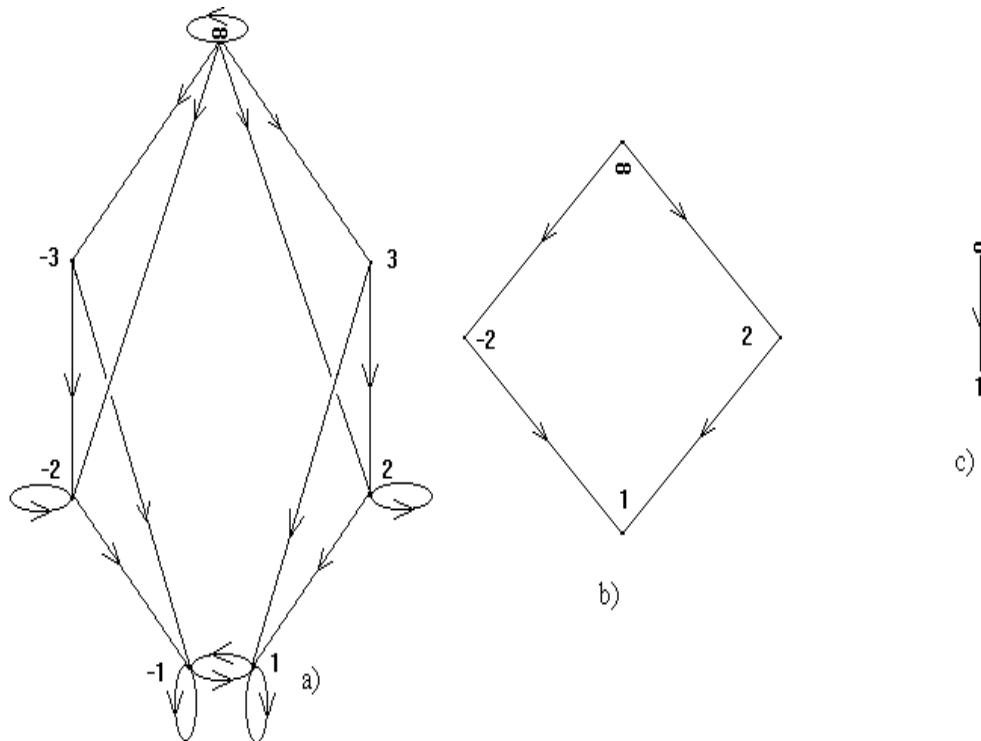


Рис. 9.1. Символический образ и структурные графы отображения $x \rightarrow 1/2x$.

9.2. Последовательность символьических образов

Пусть $C = \{M(i)\}$ есть замкнутое покрытие многообразия M и G является символьическим образом относительно C . Образуем новое покрытие NC посредством подразбиения покрытия C . Каждая ячейка $M(i)$ подвергается разбиению так, что $M(i) = \bigcup_k m(ik)$, где ячейки нового покрытия обозначаются $m(ik)$. Если вершину нового символьического образа NG обозначить $z = (ik)$, то возникает естественное отображение $s : s(z) = i$, где $m(z) \subset M(i)$. Обозначим через V и NV множество вершин исходного и нового символьических образов соответственно. Как было замечено в главе 2, символьский образ можно трактовать как многозначное отображение вершин. Таким образом, мы имеем два многозначных отображения $G : V \rightarrow V$ и $NG : NV \rightarrow NV$.

Пусть новый граф имеет ребро $z_1 \rightarrow z_2$, т. е. $f(m(z_1)) \cap m(z_2) \neq \emptyset$, $z_1 = (ik)$, $z_2 = (js)$. Тогда из включения $m(z) \subset M(s(z))$ следует, что $f(M(s(z_1))) \cap M(s(z_2)) \neq \emptyset$, т.е. существует ребро $s(z_1) \rightarrow s(z_2)$. Таким образом, s есть отображение ориентированных графов. Иначе говоря, мы имеем коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{s} & NV \\ G \downarrow & & NG \downarrow \\ V & \xleftarrow{s} & NV \end{array}$$

Здесь G и NG многозначные отображения и коммутативность означает включение $sNG(z) \subset Gs(z)$. Следовательно, допустимый путь отображается на допустимый путь. В частности, образ периодического пути есть периодический путь и образ возвратной вершины есть возвратная вершина.

Пусть $\{C_t, t \in N\}$ — последовательность покрытий многообразия M ячейками, которые являются последовательными подразбиениями. Обозначим через $M(z^t)$ ячейки покрытия C_t , где z^t — номер ячейки, и d_t — максимальный диаметр ячеек из C_t . Пусть $\{G_t\}$ — последовательность символьических образов непрерывного отображения $f : M \rightarrow M$, соответствующих покрытиям C_t . Возникает последовательность отображений и коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \xleftarrow{s_1} & V_2 & \xleftarrow{s_2} & V_3 & \xleftarrow{s_3} & \dots \\ G_1 \downarrow & & G_2 \downarrow & & G_3 \downarrow & & \\ V_1 & \xleftarrow{s_1} & V_2 & \xleftarrow{s_2} & V_3 & \xleftarrow{s_3} & \dots, \end{array}$$

где $s_t(z^{t+1}) = z^t$, если $M(z^{t+1}) \subset M(z^t)$.

Рассмотрим предельный случай измельчения покрытия, когда каждая ячейка состоит из одной точки, т.е. $M(x) = \{x\}$. В этом случае множество вершин есть множество точек многообразия M с дискретной топологией. Следовательно, множество вершин имеет мощность континуум. Множество ребер — это набор пар $(x, f(x))$. Таким образом, можно считать, что данный символьический образ совпадает с отображением $f : M \rightarrow M$. Пусть $C_t = \{M(1), M(2), \dots\}$ конечное покрытие и G_t — соответствующий ему символьский образ. Отображение s , сопоставляющее точке номер ячейки, в которой она лежит, дает коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{s} & M \\ G_t \downarrow & & f \downarrow \\ V & \xleftarrow{s} & M \end{array} \tag{9.2}$$

Здесь $s(x) = i$ если $x \in M(i)$. Заметим, что в данном случае отображение s является многозначным на границе ячеек. Из коммутативности приведенной диаграммы (9.2) следует, что траектория системы отображается на допустимый путь символьического образа. Таким образом, для последовательности символьических образов $\{G_t\}$, соответствующей последовательности подразбиений $\{C_t\}$ мы получаем коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \xleftarrow{s_1} & V_2 & \xleftarrow{s_2} & V_3 & \xleftarrow{s_3} & \dots \xleftarrow{s} M \\ G_1 \downarrow & & G_2 \downarrow & & G_3 \downarrow & & f \downarrow \\ V_1 & \xleftarrow{s_1} & V_2 & \xleftarrow{s_2} & V_3 & \xleftarrow{s_3} & \dots \xleftarrow{s} M \end{array}$$

Каждое отображение s_t является отображением ориентированных графов и отображает допустимый путь на допустимый путь. Пусть $\xi^t = \{z^t(k), k \in Z\}$ допустимый путь на символическом образе G_t . Обозначим P_t пространство допустимых путей на символическом образе G_t . Отображение $s_t : G_{t+1} \rightarrow G_t$ порождает отображение в пространствах путей, $s_t(P_{t+1}) \subset P_t$, однако $s_t(P_{t+1}) \neq P_t$, вообще говоря. Если на каждом символическом образе G_t отметить путь ξ^t , получим последовательность путей $\{\xi^t \in P_t\}$. Каждая траектория $T(x_0) = \{x_k = f^k(x_0), k \in Z\}$ порождает на G_t допустимый путь вида $\xi^t = \{z^t(k), x_k \in M(z^t(k))\}$. Причем для этих путей имеет место равенство $\xi^t = s_t(\xi^{t+1})$. Описанный путь можно рассматривать как кодировку траектории $T(x_0)$, соответствующую покрытию C_t . Пусть Cod_t это множество кодировок всех истинных траекторий системы f относительно покрытия C_t . Ясно, что множество кодировок траекторий лежит в множестве допустимых путей, т. е. $Cod_t \subset P_t$.

Теорема 9.2. (о сильном отслеживании.)

Пусть существует последовательность путей $\{\xi^t \in P_t\}$, $\xi^t = \{z^t(k), k \in Z\}$, таких, что $\xi^t = s_t(\xi^{t+1})$. Если $d_t \rightarrow 0$, то существует единственная траектория $T = \{x_{k+1} = f(x_k)\}$ такая, что $x_k \in M(z^t(k))$ для любого t .

Замечание 1. В условиях теоремы имеет место более общее равенство

$$\xi^t = s_t s_{t+1} \dots s_l (\xi^{l+1}).$$

Замечание 2. По теореме каждой последовательности путей $\{\xi^t\}$ соответствует единственная траектория T . Однако обратное неверно, т. е. траектория может порождать не одну последовательность $\{\xi^t\}$. Например, неподвижная точка, лежащая на границе ячейки, порождает бесконечно много описанных последовательностей.

Построим P_1^k — множество путей на G_1 , которые являются образами путей, допустимых на G_k при отображении s , т. е.

$$P_1^2 = s_1(P_2), P_1^3 = s_1 s_2(P_3), \dots, P_1^k = s_1 s_2 \dots s_{k-1}(P_k), \dots.$$

Аналогично строятся P_l^k — множество путей на G_l , которые являются образами путей допустимых на G_k при отображении s , $k > l$.

Пусть $\text{diam}(C)$ — максимальный диаметр ячеек покрытия C .

Теорема 9.3. . Пусть $C_1, C_2, \dots, C_l, \dots, C_k, \dots$ есть последовательность замкнутых покрытий пространства M таких, что каждое следующее покрытие является подразбиением предыдущего и $\text{diam}(C_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Тогда

1. $Cod_l \subset P_l^k$ для $k > l$;
2. $P_l^k \supset P_l^{k+1}$ для $k > l$;
3. $Cod_l = \bigcap_{k>l} P_l^k$.

9.3. Истинный структурный график символического образа

Пусть C — замкнутое покрытие компакта M , G — символический образ для этого покрытия, $\{H_k\}$ — классы эквивалентных возвратных вершин и G^* — структурный график символического образа. Множество $R(x) = \{\bigcup M(i_m) : f^m(x) \in M(i_m)\}$ будем называть носителем траектории $\{f^m(x)\}$, а множество $R_k = \{\bigcup M(i), i \in H_k\}$ носителем класса H_k .

Утверждение 9.1. 1. Если Q_k есть компонента цепно-рекуррентного множества и $Q_k \cap R_k \neq \emptyset$, то $R_k \supset Q_k$;

2. Для каждой компоненты Q_k цепно-рекуррентного множества существует R_k такое, что $R_k \supset Q_k$.

Из утверждения 9.1 следует, что на символическом образе среди всех классов эквивалентности должны быть те, носители которых содержат компоненты цепно-рекуррентного множества, такие классы будем называть *истинными*. Причем один носитель может содержать несколько таких компонент. Но среди классов эквивалентности могут быть и такие, у которых носители не содержат ни одной компоненты цепно-рекуррентного множества, такие классы будем называть *ложными*, а соответствующие им вершины на структурном графе символического образа G^* ложными вершинами. Кроме того, на структурном графе символического образа могут существовать и *ложные ребра*, то есть такие ребра $i \rightarrow j$ для которых на фазовом пространстве не существует точки x с ω -предельным множеством в $Q_j \subset R_j$ и с α -предельным множеством в $Q_i \subset R_i$. Покажем, что существует конечный алгоритм для построения нового графа, вершины которого соответствуют только тем классам эквивалентности на символическом образе, носители которых обязательно содержат компоненту цепно-рекуррентного множества, а все ребра между вершинами являются *истинными* (т. е. соответствуют связям между компонентами цепно-рекуррентного множества).

Определение 9.4. Определим новый граф G^{**} , для которого выполняются следующие условия.

1. Множество вершин графа G^{**} есть подмножество множества вершин структурного графа символического образа G^* , и $k \in \text{Ver}(G^{**})$ означает, что класс эквивалентных возвратных вершин H_k истинный.
2. Пусть $k, l \in \text{Ver}(G^{**})$, R_k, R_l — носители классов H_k и H_l . Ребро $k \rightarrow l$ есть на графике G^{**} тогда и только тогда, когда существует точка $x \in M$ такая, что а) $\omega(x) \subset Q_l$, $\alpha(x) \subset Q_k$, где $Q_l \subset R_l$, $Q_k \subset R_k$ — компоненты цепно-рекуррентного множества и б) носитель траектории точки x , $R(x)$, не пересекается с носителями других классов: $R(x) \cap R_i = \emptyset$ для $i \neq k, l$.

Так построенный график G^{**} будем называть истинным структурным графиком для символического образа G .

Построение графа G^{**} .

Пусть C_1 — замкнутое покрытие M , C_2 — его подразбиение, G_1, G_2 — соответствующие им символические образы и G_1^*, G_2^* структурные графы этих символьических образов. Напомним, что $P_1^2 = s(P_2)$ это множество путей на G_1 , которые являются образами путей на G_2 . Построим новый график G_{12}^* следующим образом. Пусть $k \in \text{Ver}(G_1^*)$. Будем включать вершину k в множество $\text{Ver}(G_{12}^*)$ только в том случае, если существует допустимый путь $\xi = \{i_n\} \in P_1^2$, где $i_n \in H_k, n \in Z$, т. е. в классе H_k лежит путь, который является образом $s(\xi^*)$ пути ξ^* на G_2 . Покажем, что в этой ситуации класс H_k содержит образ $s(H^*)$ некоторого класса H^* эквивалентных возвратных вершин на G_2 . Действительно, по определению $\xi = s(\xi^*) \subset H_k$. Так как путь ξ^* является бесконечным в обе стороны, а число вершин конечно, то он имеет периодические части в начале и в конце. Тогда ξ^* начинается в некотором классе A и заканчивается в классе B и при этом образы $s(A)$ и $s(B)$ необходимо лежат в H_k . Таким образом, за класс H^* можно взять A или B . Классы H_k , для которых $k \in \text{Ver}(G_{12}^*)$ будем называть отмеченными или выделенными.

Определим множество ребер графа G_{12}^* . Пусть $k, l \in \text{Ver}(G_{12}^*)$, будем считать, что ребро $k \rightarrow l$ существует на G_{12}^* , если существует допустимый путь $\xi \in P_1^2$ из класса H_k в класс H_l , не проходящий через другие выделенные классы, то есть существует путь ξ , не проходящий через классы H_i для $i \in \text{Ver}(G_{12}^*) \setminus \{k, l\}$. Из построения графа G_{12}^* следует, что $\text{Ver}(G_{12}^*) \subset \text{Ver}(G_1^*)$. Покажем, что число ребер графа G_{12}^* не превосходит числа ребер графа G_1^* . Пусть $k \rightarrow l$ — ребро на графике G_{12}^* . Тогда существует допустимый путь $\xi \in P_1^2$ на G_1 из класса H_k в класс H_l , не проходящий через другие выделенные классы H_i , $i \in \text{Ver}(G_{12}^*) \setminus \{k, l\}$. Этот путь либо а) проходит через невыделенные классы, либо б) не проходит через невыделенные классы. Тогда на структурном графике G_1^* этому пути либо а) соответствует путь конечной длины $k \rightarrow \dots \rightarrow l$, либо

б) соответствует ребро $k \rightarrow l$. При этом разным ребрам G_{12}^* соответствуют пути на G_1^* , которые отличаются набором ребер. Таким образом, каждому ребру графа G_{12}^* можно сопоставить хотя бы одно ребро на графе G_1^* . Заметим, что $E(G_{12}^*) \not\subset E(G_1^*)$, вообще говоря, где $E(G)$ обозначает множество ребер графа G . Однако число ребер графа G_{12}^* меньше числа ребер графа G_1^* , т.е. $|E(G_{12}^*)| \leq |E(G_1^*)|$, где $|E|$ — число элементов множества E .

Аналогично, рассматривая следующее разбиение C_3 и множество допустимых путей P_1^3 на графе G_1 , построим граф G_{13}^* . Согласно теореме 9.3, $P_1^3 \subset P_1^2$. Следовательно, $\text{Ver}(G_{13}^*) \subset \text{Ver}(G_{12}^*)$ и $|E(G_{13}^*)| \leq |E(G_{12}^*)|$.

Рассмотрим последовательность подразбиений $\{C_k\}$ и для каждого $k \in N$ по описанной схеме построим граф G_{1k}^* .

Утверждение 9.2. Пусть динамическая система имеет конечное число компонент цепно-рекуррентного множества и $\{G_{1k}^*\}$ есть последовательность построенных выше графов. Тогда существует номер $n_1 \in N$ такой, что для любого $k \geq n_1$ граф G_{1k}^* совпадает с истинным структурным граffом символического образа G_1 , то есть $G_{1k}^* = G_1^{**}, k \geq n_1$.

9.4. Построение структурного графа динамической системы

Построим аналогично графу G_1^{**} граф G_2^{**} , повторяя тот же алгоритм для структурного графа G_2^* . Покажем, что число вершин графа G_2^{**} не меньше числа вершин графа G_1^{**} . Действительно, если $k \in \text{Ver}(G_2^{**})$, то ее носитель содержит обязательно компоненту Q_k цепно-рекуррентного множества. Этой компоненте на граffе G_1^{**} соответствует ровно одна вершина l . Носитель R_l , соответствующий вершине l , может содержать несколько компонент цепно-рекуррентного множества. Этим компонентам на граffе G_2^{**} могут соответствовать несколько вершин. Таким образом, $|\text{Ver}(G_1^{**})| \leq |\text{Ver}(G_2^{**})|$. Из этого следует, что и число ребер граffа G_2^{**} не меньше числа ребер G_1^{**} .

Рассмотрим последовательность граffов:

$$G_1^{**}, G_2^{**}, G_3^{**}, \dots$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$|\text{Ver}(G_1^{**})| \leq |\text{Ver}(G_2^{**})| \leq \dots \leq |\text{Ver}(\Gamma)|,$$

$$|E(G_1^{**})| \leq |E(G_2^{**})| \leq \dots \leq |E(\Gamma)|,$$

где Γ — структурный граff динамической системы.

Теорема 9.4. Если динамическая система имеет конечное число компонент цепно-рекуррентного множества, то существует номер $m > 0$, такой, что $G_m^{**} = \Gamma$.

Таким образом, при условии ограниченности числа компонент цепно-рекуррентного множества, мы за конечное число шагов можем построить структурный граff динамической системы. Заметим, что в силу конечности символического образа, при построении последовательности G_{lk}^* ее значение стабилизируется, начиная с некоторых больших номеров k, l .

Схема вычисления.

1. Строится последовательность покрытий C_k и символьических образов G_k .
2. Определяются отображения $s : G_k \rightarrow G_l, k > l$.
3. Строятся граffы G_{lk}^* .
4. Строится структурный граff Γ равный G_{lk}^* для больших k, l .

Таким образом, для отображения f существует число k , конечная последовательность подразбиений C_1, \dots, C_k покрытия C и соответствующих им символьических образов G_1, \dots, G_k , по которым структурный граff динамической системы определяется однозначно.

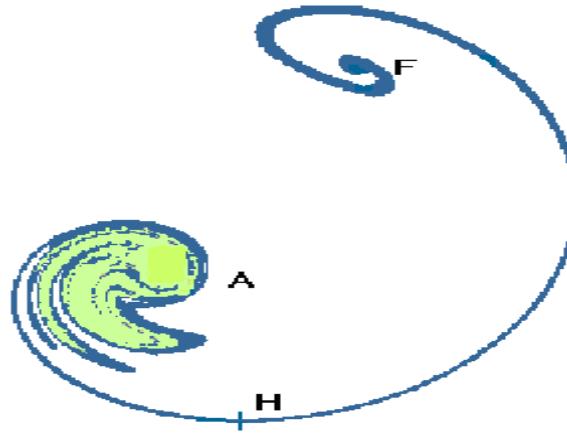


Рис. 9.2. Максимальный аттрактор отображения Икеда.

Пример 9.2. Структурный граф отображения Икеда.

Рассмотрим снова отображение Икеда (см. гл. 3):

$$T(x, y) = (d + C_2(x \cos \tau - y \sin \tau), C_2(x \sin \tau + y \cos \tau)),$$

где

$$\tau = C_1 - \frac{C_3}{1 + x^2 + y^2}.$$

Численное моделирование динамики этого отображения проводилось при следующих значениях параметров $C_1 = 0.4$, $C_2 = 0.9$, $C_3 = 6.0$, $d = 0.8$. При $|C_3| < 1$ отображение T является диссипативным, т. е. существует область D такая, что любая траектория попадает в эту область и остается в ней. Следовательно, существует глобальный аттрактор A_g . Добавляя к $\overline{R^2}$ бесконечно удаленную точку ∞ , получим компактифицированную плоскость $\overline{R^2}$, гомеоморфную сфере S^2 . Отображение T может быть продолжено на $\overline{R^2}$ так, что точка ∞ будет источником.

При данных параметрах все траектории системы (кроме ∞) достигают области $M = [-10, 10] \times [-10, 10]$. С помощью последовательности символьических образов была построена локализация глобального аттрактора как инвариантного множества максимального в M , см. рис. 9.2.

Цепно-рекуррентное множество исследуемого отображения имеет три компоненты: странный аттрактор Икеда A , гиперболическую точку H и устойчивый фокус F . Бесконечно-удаленная точка является отталкивающей компонентой.

Структурная матрица имеет вид

$$\begin{matrix} \infty & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ H & \\ A & \\ F & \end{matrix} .$$

Построенный структурный граф отображения T показан на рис. 9.3.

В рассматриваемом случае начальное покрытие имело только одну клетку — M . Затем, последующие подразбиения состояли в том, что каждая клетка делилась на 4 равные части. На восьмом шаге ($l=8$) происходит разделение компонент цепно-рекуррентного множества, однако, существует более двадцати ложных классов (компонент). На девятом шаге отображение $s : G_9 \rightarrow G_8$ уничтожает ложные классы и происходит стабилизация структурного графа G_k^{**} , $k \geq 8$. Таким образом, в данном случае достаточно сделать девять шагов для вычисления структурного графа.

Заметим, что ложные компоненты возникают как правило на границе истинных компонент и уничтожаются отображением s при следующем подразбиении, так как новый носитель истинной

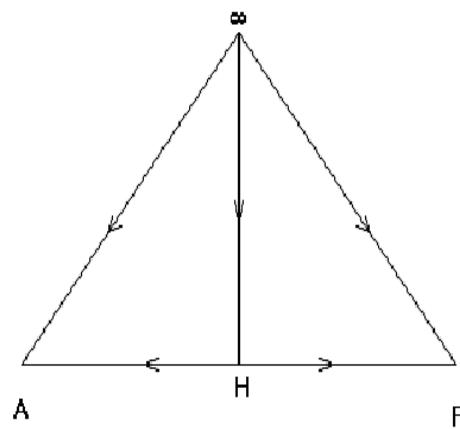


Рис. 9.3. Структурный график отображения Икеда.

компоненты вместе с «прилипшими» ложными компонентами оказывается внутри предыдущего носителя. Это наблюдение позволяет сделать вывод, что стабилизация структурного графа наступает почти сразу после разделения компонент цепно-рекуррентного множества.

Глава 10

Энтропия

В начале 60-х годов прошлого века началось широкое применение численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно благодаря компьютерному моделированию появилась первая работа, в которой было численно обнаружено явление динамического хаоса. Американский метеоролог Лоренц, проводя численные эксперименты с системой уравнений Навье–Стокса показал, что, при определенных ограничениях на параметры, траектории этой системы входят за конечное время внутрь некоторого множества, которое называется поглощающим, и впоследствии не покидают его. Следовательно, можно сказать, что у системы существует аттрактор, который находится внутри этого множества. Оказалось, что на этом множестве система обладает сложным хаотическим поведением. При изучении таких систем оказываются полезными характеристики, позволяющие оценить степень хаотичности или неопределенности в их поведении. Одной из таких характеристик является энтропия. В данной главе мы вводим понятие топологической энтропии и обсуждаем алгоритмы ее оценки. Энтропия динамической системы оценивается с помощью энтропии символического образа. Предложенный алгоритм реализован для вычисления энтропии отображения Хенона.

10.1. Определения и свойства

Пусть M — компактное метрическое пространство. Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом $f : M \rightarrow M$. Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ — конечное открытое покрытие M . Рассмотрим траекторию точки x длины N $\{x_k = f^k(x), k = 0, \dots, N-1\}$ и ее кодировку, т. е. последовательность $\xi(x) = \{i_k, k = 0, \dots, N-1\}$, где $x_k \in M(i_k)$. Члены этой последовательности отвечают тем элементам покрытия, в которые попадает траектория точки x . В этом случае мы будем говорить, что последовательность $\xi = \{i_k\}$ является допустимой кодировкой. Нетрудно понять, что не всякая последовательность индексов $\{i_k\}$ является допустимой кодировкой. Для характеристики роста числа допустимых кодировок в зависимости от длины N обычно используется величина $h = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log_a K(N)}{N}$, где $K(N)$ — число различных допустимых кодировок длины N , основание a может быть любым числом больше 1. Обычно используют $a = 2$ или $a = e$. Оказывается, что $h = 0$ для простых систем и $h > 0$ для систем с хаотическим поведением. В последнем случае верна оценка $K(N) = Ba^{hN}$, где B некоторая константа, т. е. число различных допустимых кодировок экспоненциально растет по N с показателем h . Поэтому величину h рассматривают как меру хаотичности системы.

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 10.1. Полиа [20] Пусть a_1, a_2, \dots — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n \quad \forall m, n \geq 1.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ существует и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

Пусть задан гомеоморфизм $f : M \rightarrow M$ и пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ — конечное открытое покрытие M . Для некоторого $M(i_0)$ мы найдем тот элемент $M(i_1)$ покрытия C , для которого пересечение его прообраза с $M(i_0)$ непусто: $M(i_0) \cap f^{-1}(M(i_1)) \neq \emptyset$. Далее, найдем такой $M(i_2)$, для которого $M(i_0) \cap f^{-1}(M(i_1)) \cap f^{-2}(M(i_2)) \neq \emptyset$ и так далее. Другими словами, рассмотрим те элементы покрытия $M(i_k)$, где $0 \leq i_k \leq n$, для которых $\bigcap_{k=0}^{N-1} f^{-k}(M(i_k)) \neq \emptyset$.

Обозначим полученное множество через $M(i_0 i_1 \dots i_{N-1})$, а совокупность таких множеств через C^N . Нетрудно заметить, что если точка $x \in \bigcap_{k=0}^{N-1} f^{-k}(M(i_k))$, то $f^k(x) \in M(i_k)$, $k = 0, \dots, N-1$. Таким образом, для произвольной точки x из $M(i_0 i_1 \dots i_{N-1})$ ее $N-1$ итерация проходит через множество $\bigcup M(i_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Совокупность всех множеств из C^N также образует конечное открытое покрытие M . Так как множества $M(i)$ могут пересекаться между собой, то могут пересекаться и элементы покрытия C^N . Обозначим через $\rho(C^N)$ мощность минимального подпокрытия, которое можно выбрать из C^N . Можно сказать, что $\rho(C^N)$ это число различных кодировок траекторий длины N . Положим

$$h(C) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log \rho(C^N)}{N},$$

где предел существует, так как последовательность $\rho(C^N)$ удовлетворяет условиям леммы Поля.

Определение 10.1. Величина

$$h(f) = \sup_C h(C),$$

где супремум берется по всем открытым покрытиям, называется топологической энтропией отображения $f : M \rightarrow M$.

Таким образом, каждому элементу $M(i_0, i_1, \dots, i_{N-1})$ множества C^N ставится в соответствие слово $[i_0, i_1, \dots, i_{N-1}]$ длины N , кодирующее некоторую траекторию. При этом разные траектории могут иметь один и тот же код.

Если нам известен код траектории длины N , то для прогноза дальнейшего поведения системы в течение p единиц времени мы имеем в среднем $\frac{|C^{N+p}|}{|C^N|}$ возможностей, где $|\cdot|$ обозначает мощность множества. Пусть $|C^N|$ растет экспоненциально с ростом N , то есть $|C^N| \sim Ab^N$, $b > 1$, где A, b — некоторые положительные числа. Возьмем произвольное положительное число q . Тогда при $p \geq \log_b q$ и любом N верно

$$\frac{|C^{N+p}|}{|C^N|} \sim b^p \geq q. \quad (10.1)$$

Соотношение (10.1) показывает, что сколь угодно длинная запись сведений о прошлом поведении системы оставляет при этих условиях по крайней мере q вариантов ее поведения в будущем, и в этом смысле система, конечно, напоминает случайную. Таким образом, экспоненциальный рост величины $|C^N|$ свидетельствует о сложности устройства динамической системы и о том, насколько она похожа на случайную. В этом случае

$$h(C) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log \rho(C^N)}{N} \sim \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log |C^N|}{N} \sim \log b > 0.$$

Если же $|C^N|$ растет существенно медленнее, например по степенному закону, $|C^N| \sim AN^\alpha$, где $\alpha > 0$, то

$$\frac{|C^{N+p}|}{|C^N|} \sim \left(1 + \frac{p}{N}\right)^\alpha \rightarrow 1, \quad N \rightarrow +\infty. \quad (10.2)$$

Следовательно, в этом случае лишь очень малое число слов имеет более одного варианта поведения в будущем и поведение системы оказывается предсказуемым. Соотношение (10.2) говорит о том, что число $|C^N|$, а вместе с ним и $\rho(C^N)$, практически не меняется с ростом N , то есть $h(C) = 0$. Таким образом, можно рассматривать топологическую энтропию как показатель хаотичности системы: если она равна нулю, то рост числа различных траекторий длины N с ростом N невелик и можно надеяться на успешное прогнозирование поведения системы в будущем. Если энтропия отлична от нуля, то вероятность определения состояния системы даже через ограниченное время сводится к минимуму и систему следует считать недетерминированной. То есть, можно сказать, что энтропия является мерой недетерминированности. Более подробно свойства топологической энтропии описаны в [16].

Пример 10.1. Рассмотрим тождественное отображение $f = id : M \rightarrow M$. Покажем, что топологическая энтропия этого отображения равна нулю, $h(f) = 0$. Действительно, пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ — произвольное открытое покрытие M . Тогда для любого N множества $M(11\dots 1)$, $M(22\dots 2)$, $M(nn\dots n)$ (число индексов в каждом множестве равно N) образуют минимальный набор множеств из множества C^N , который покрывает все M . То есть, величина $\rho(C^N)$ не зависит от N и, следовательно, $h(C) = 0$. Так как покрытие C выбиралось произвольно, то и $h(f) = 0$.

Определение 10.2. 1) Будем говорить, что покрытие D вписано в покрытие C ($D \succ C$), если каждый элемент покрытия D содержится в одном из элементов покрытия C .

2) Последовательность открытых покрытий $\{C_n\}$ называется исчерпывающей, если для любого покрытия B найдется такое n^* , что $C_n \succ B$ при $n > n^*$.

Заметим, что приведенное выше определение топологической энтропии не является конструктивным. Поэтому для вычисления этой характеристики удобно использовать следующее утверждение.

Утверждение 10.1. [2] Если последовательность открытых покрытий $\{C_n\}$ исчерпывающая, то

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(C_n).$$

Мы будем использовать специальные замкнутые покрытия фазового пространства, а точнее последовательность таких покрытий.

10.2. Оценка топологической энтропии

Определение 10.3. Пусть M — компактное пространство. Будем говорить, что $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ образует замкнутое конечное покрытие для M , если выполняются следующие условия: 1) $\bigcup_i M(i) = M$;

2) каждая ячейка есть замыкание своей внутренности: $M(i) = \overline{Int M(i)} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

3) ячейки пересекаются по границе: $M(i) \cap M(j) = \partial M(i) \cap \partial M(j)$, $i \neq j$, где $\partial M(i)$ обозначает границу множества $M(i)$.

Следующая теорема позволяет получить оценку топологической энтропии отображения f при помощи специальной последовательности покрытий $\{C_k\}$.

Теорема 10.1. Пусть $\{C_k = \{M_k(i)\}\}_{k \geq 1}$ есть последовательность замкнутых конечных покрытий компакта M , таких, что $C_{k+1} \succ C_k$ для любого k и $d_k = \text{diam}(C_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Тогда 1) последовательность $h(C_k)$ неубывающая, т. е. $h(C_k) \leq h(C_{k+1})$;

2) $h(f) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} h(C_k)$.

Таким образом, для нахождения оценки энтропии нам достаточно взять замкнутое покрытие области M и рассмотреть его последовательные подразбиения так, чтобы их диаметры стремились к нулю. Тогда предельное значение последовательности $\{h(C_k)\}$ будет оценкой сверху для топологической энтропии.

Для нахождения чисел $h(C_k)$ мы будем использовать понятие символического образа и методы символической динамики.

10.3. Элементы символической динамики

Для проведения дальнейших рассуждений нам будет удобно использовать следующую терминологию [71]. Рассмотрим конечное множество S символов, которое мы будем называть алфавитом. Из элементов множества S построим бесконечные в обе стороны последовательности букв:

$$\xi = \{i_n\} = \{\dots i_{-2} i_{-1} i_0 i_1 i_2 \dots\},$$

где $i_n \in S$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $S^{\mathbb{Z}}$ — пространство таких последовательностей над алфавитом S :

$$S^{\mathbb{Z}} = \{\xi = \{i_n\} : i_n \in S, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Конечную последовательность букв из S будем называть словом.(Например, для $S = \{a, b\}$ набор букв $u = abababbb$ есть слово длины 8.)

Пусть $P \subset S^{\mathbb{Z}}$. Будем говорить, что слово u является допустимым в P , если $u \in P$. Обозначим через $K(N)$ число допустимых слов длины N .

Определение 10.4. Энтропией пространства P называется $h(P) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log K(N)}{N}$.

Рассмотрим некоторый символический образ G и пусть X_G — его пространство допустимых путей. Заметим, что допустимые пути на символическом образе можно рассматривать как допустимые слова над алфавитом V , где V — множество вершин символического образа. Таким образом, можно установить соответствие между пространствами P и X_G .

Мы будем использовать понятие мультиграфа, который отличается от графа тем, что несколько ребер могут иметь общие начало и конец.

Определение 10.5. Пусть MG — мультиграф с множеством вершин Ver и множеством ребер E . Паре вершин $(i, j) \in Ver$ поставим в соответствие число π_{ij} равное числу ориентированных ребер, выходящих из вершины i и входящих в вершину j . Матрица $\Pi = (\pi_{ij})$ называется матрицей смежности для мультиграфа MG или матрицей допустимых переходов.

Заметим, что для обычного графа матрица смежности состоит из нулей и единиц. Для ребра e обозначим $i(e) \in Ver$ его начало, а $t(e) \in Ver$ — конец.

Определение 10.6. Пусть MG — мультиграф с множеством ребер E . Пространство

$$P_{MG} = \{\xi = \{e_i\} \in E^{\mathbb{Z}} : t(e_i) = i(e_{i+1}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

называется пространством ребер.

Нетрудно заметить, что P_{MG} можно рассматривать как пространство допустимых слов над алфавитом E .

Определение 10.7. Пусть G — граф с множеством вершин V , Π — его матрица смежности. Пространство

$$P_G = \{\xi = \{v_i\} \in V^{\mathbb{Z}} : \pi_{i,i+1} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

называется пространством вершин.

Введенное пространство P_G можно рассматривать как пространство допустимых слов (последовательностей) над алфавитом V или пространство допустимых путей на графе $G - X_G$.

Теорема 10.2. [2] Если Π — матрица допустимых переходов для графа G и λ ее максимальное собственное число, то энтропия пространства допустимых последовательностей P_G равна $h(P_G) = \log \lambda$.

10.4. Энтропия пространства оснащений

Определение 10.8. Оснащенным графом Γ называется пара (MG, W) , где MG есть мультиграф с множеством ребер E , а $W : E \rightarrow S$ функция, сопоставляющая каждому ребру e метку $W(e)$ из конечного алфавита S . При этом разные ребра могут быть помечены одинаковыми метками.

Например, если $S = E$ и $W(e) = e$, то функция W задает взаимно-однозначное отображение между метками и ребрами. Если же алфавит S состоит из единственной буквы, то $W : E \rightarrow S$ помечает все ребра одной и той же меткой.

Определение 10.9. Пусть $\Gamma = (MG, W)$ оснащенный граф, P_{MG} — пространство ребер для MG . Множество допустимых последовательностей меток

$$P_\Gamma = \{\xi = \{i_n\} \in S^Z : \text{существует } \gamma = \{e_n\} \in P_{MG}, i_n = W(e_n) \quad \forall n \in Z\}$$

называется пространством допустимых оснащенных путей. Граф Γ называется представлением данного пространства допустимых оснащенных путей.

Следует заметить, что у одного и того же пространства P_Γ может быть несколько различных представлений.

Определение 10.10. Граф $\Gamma = (MG, W)$ называется праворазрешающим графом, если для любой вершины выходящие из нее ребра имеют разные метки. Если праворазрешающий граф Γ представляет пространство допустимых оснащенных путей P_Γ , то Γ называется праворазрешающим представлением пространства P_Γ .

В следующем далее тексте мы для краткости будем называть пространство допустимых оснащенных путей просто пространством оснащений. Для вычисления энтропии пространства оснащений понадобится среди всех праворазрешающих представлений выделить представление с наименьшим числом вершин. Такое представление называется минимальным праворазрешающим представлением.

10.5. Вычисление энтропии пространства оснащений

Пусть P_Γ есть пространство оснащений, Γ — его представление. Приведем алгоритм построения минимального праворазрешающего представления R для P_Γ , описанный в [71]. Наша цель — построить новый оснащенный граф R , вершины которого назовем гипервершинами, а ребра — гиперребрами. Для минимального праворазрешающего графа R верны следующие утверждения:

- пространство меток графа R совпадает с алфавитом (пространством) P ;
- из любой гипервершины выходят гиперребра с разными метками;
- не существует другого представления для P с меньшим числом вершин.

Алгоритм построения минимального праворазрешающего представления R для P .

1. Рассмотрим пустой граф R и добавим одну гипервершину, совпадающую с произвольно выбранной вершиной графа Γ .
2. Выберем гипервершину H в R (если это возможно), из которой не выходит ни одного гиперребра. Если такой вершины нет, переходим к шагу 6).
3. Пусть H_1 — множество всех вершин в графе Γ в которых заканчиваются ребра такие, что
 - (a) началом этих ребер служат вершины, образующие гипервершину H ;
 - (b) эти ребра оснащены одинаковой меткой i .

Добавим в граф R гипервершину H_1 и гиперребро $H \rightarrow H_1$, оснащенное выбранной меткой i .

4. Повторим шаг 3) для всех меток графа Γ .
5. Переходим ко второму шагу.
6. Удаляем все гипервершины в R , в которых не заканчивается ни одно гиперребро (вместе со всеми гиперрами).
7. Если некоторые гипервершины были удалены, переходим к шагу 6), иначе останавливаемся.

Теорема 10.3. Построенный выше оснащенный граф R является минимальным праворазрешающим представлением для пространства оснащений P .

Пусть P_Γ пространство оснащений, $\Gamma = (MG, W)$ его минимальное праворазрешающее представление, Π — матрица смежностей для MG . Тогда энтропия пространства P равна максимальному собственному числу λ матрицы смежностей Π : $h(P) = \log \lambda_\Pi$.

10.6. Оценка энтропии с помощью символьического образа

Введенная в предыдущем разделе терминология будет полезна при получении оценки энтропии для символьического образа. В предыдущей главе было описано построение специальной последовательности символьических образов, с помощью которой можно отследить траектории исходной системы. Мы используем эту же технику для оценки энтропии. Напомним коротко идею построения.

Пусть $C = \{M(i)\}$ есть замкнутое покрытие фазового пространства M , G_1 — символьический образ относительно покрытия C . Образуем новое покрытие D посредством разбиения покрытия C , то есть каждая ячейка $M(i)$ подвергается разбиению снова. Пусть G_2 есть символьический образ относительно покрытия D . Обозначим через $m(i, k)$ ячейки покрытия D , где $\bigcup_k m(i, k) = M(i)$ и запишем вершины графа G_2 в виде (i, k) . Построим отображение $s : G_2 \rightarrow G_1$, которое все вершины (i, k) переводит в вершину i . Так как из $f(m(i, k)) \cap m(j, l) \neq \emptyset$ следует $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$, то отображение s переводит ориентированную дугу $(i, k) \rightarrow (j, l)$ в ориентированную дугу $i \rightarrow j$. Следовательно, отображение s переводит ориентированный граф G_2 в ориентированный граф G_1 . В частности, периодические пути переводятся в периодические пути. Таким образом, s можно рассматривать как отображение, сопоставляющее каждому пути на графе G_2 определенный путь на графе G_1 , а именно, если $\gamma = \{(i_n, j_n)\}$ путь на G_2 , то $\xi = s(\gamma) = \{(i_n)\}$ есть путь на G_1 . Заметим, что обратное отображение $\tilde{s} : G_1 \rightarrow G_2$ вообще говоря не определено.

Пусть $\Pi = (\pi_{ij})$ — матрица переходов для графа G_1 . Построим в соответствии с определением 10.7 пространство вершин P_1 . Как было отмечено выше, любое слово в последовательности из P_1 порождается неким путем на символьическом образе. Поэтому отображение $s : G_2 \rightarrow G_1$ можно распространить на отображение путей $s : P_2 \rightarrow P_1$, где P_2 есть пространство вершин для символьического образа G_2 . Обозначим $s(P_2) = P_1^2$.

В дальнейшем для простоты изложения последовательности из пространства вершин будем называть также путями, так как каждая такая последовательность строится по допустимому пути на символическом образе.

Утверждение 10.2. 1) Пусть P_1 — пространство последовательностей, построенное по символическому образу G_1 , P_1^2 — пространство последовательностей, построенное выше. Тогда энтропия пространства P_1^2 не превосходит энтропии пространства P_1 , т. е.

$$h(P_1^2) \leq h(P_1);$$

2) Пусть P_2 — пространство последовательностей, построенное по символическому образу G_2 , P_1^2 — пространство последовательностей, построенное выше. Тогда выполняется следующее неравенство

$$h(P_1^2) \leq h(P_2).$$

Утверждение 10.3. 1. Пусть последовательность $\xi = \{i_n\} \in P_1^2$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}, x_n \in M(i_n)$, которая есть ε -траектория гомеоморфизма f для любого $\varepsilon > d_2 = \text{diam}(G_2)$.

2. Пусть последовательность $\xi = \{i_n\} \in P_1 \setminus P_1^2$, $\varepsilon < r_2$, где r_2 — нижняя граница символического образа G_2 . Тогда не существует ε -траектории $\{x_n\}$, $x_n \in M(i_n)$.

Следствие 10.1. Если $\xi \in P_1 \setminus P_1^2$, то множество $\{\bigcup M(i_n), i_n \in \xi\}$ не содержит настоящей траектории.

Пусть $C = C_0$ — замкнутое покрытие области M и G_0 есть символический образ относительно этого покрытия. Рассмотрим последовательность замкнутых покрытий $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$ таких, что каждое последующее покрытие является подразбиением предыдущего. Пусть $G_0, G_1, G_2, \dots, G_k, \dots$ соответствующая последовательность символьических образов. Тогда, как было показано в предыдущей главе, следующая диаграмма является коммутативной

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & \xleftarrow{s_0} & V_1 & \xleftarrow{s_1} & V_2 & \xleftarrow{s_2} & \dots \xleftarrow{s} M \\ G_0 \downarrow & & G_1 \downarrow & & G_2 \downarrow & & f \downarrow \\ V_0 & \xleftarrow{s_0} & V_1 & \xleftarrow{s_1} & V_2 & \xleftarrow{s_2} & \dots \xleftarrow{s} M \end{array}$$

В этом случае мы имеем последовательности пространств допустимых путей и отображений вида

$$P_0 \xleftarrow{s_0} P_1 \xleftarrow{s_1} P_2 \xleftarrow{s_2} \dots \xleftarrow{s} \{T_f\},$$

где $\{T_f\}$ является пространством траекторий отображения f .

Фиксируем $l \geq 0$ и построим в P_l образы допустимых путей из P_k , где $k \geq l$:

$$\begin{aligned} P_l^{l+1} &= s_l(P_{l+1}), \\ P_l^{l+2} &= s_ls_{l+1}(P_{l+2}), \\ &\dots \\ P_l^{l+r} &= s_ls_{l+1}\dots s_{l+r-1}(P_{l+r}), \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем двойную последовательность пространств путей $P_l^k, l = 0, 1, \dots, k > l$, которая порождает двойную последовательность энтропий $h_l^k = h(P_l^k)$.

Теорема 10.4. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$ есть последовательность замкнутых покрытий M таких, что каждое последующее является измельчением предыдущего и $\text{diam}(C_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Тогда для любого натурального l справедливо:

1. $P_l^k \supset P_l^{k+1}$ для любого $k > l$ и энтропия h_l^k монотонно убывает по k :

$$h(P_l^k) \geq h(P_l^{k+1}).$$

2. Множество кодированных траекторий (Cod_l) есть $\lim_{k \rightarrow \infty} P_l^k = \bigcap_{k > l} P_l^k$.

3. Энтропия кодировок траекторий $h_l = h(Cod_l) = \lim_{k \rightarrow +\infty} h_l^k$ и h_l монотонно растет по l .

4. Если отображение f липшицево, то существует конечный предел $\lim_{l \rightarrow \infty} h_l = h^*$ и топологическая энтропия f удовлетворяет неравенству $h \leq h^*$.

Эта теорема дает конструктивный метод оценки энтропии динамической системы, который состоит в последовательном вычислении величин h_l^k .

Для этого построим оснащенный граф, являющийся представлением пространства P_l^k , используя последовательность символьических образов.

Пусть C_1 есть замкнутое покрытие фазового пространства M , C_2 — его подразбиение. G_1 , G_2 — символьические образы с множествами вершин Ver_1 , Ver_2 и с множествами ребер E_1 , E_2 соответственно. На основе графа G_2 построим оснащенный граф $\Gamma_{12} = (G_2, W_{12})$, где $W_{12} : E_2 \rightarrow Ver_1$ функция, сопоставляющая ребру $e \in E_2$ метку W_{12} из алфавита Ver_1 , т. е. метками на графике G_2 будут вершины графа G_1 . Это оснащение строится следующим образом. Если $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in Ver_2$ и $(i_1, j_1) \rightarrow (i_2, j_2)$ есть ориентированное ребро на графике G_2 , то это ребро помечается меткой $i_1 \in Ver_1$. Обозначим через P^* пространство оснащений, для которого так построенный граф Γ_{12} является представлением.

Утверждение 10.4. Пусть P^* — построенное выше пространство оснащений. Тогда пространства последовательностей P^* и P_1^2 совпадают, то есть $P^* = P_1^2$.

Таким образом, для любых $l > 0, k > l$ пространство P_l^k совпадает с пространством оснащений, представлением которого является оснащенный граф $\Gamma_{lk} = (G_k, W_{lk})$, где $W_{lk} : E_k \rightarrow Ver_l$ функция, сопоставляющая ребру $e \in E_k$ метку W_{lk} из алфавита Ver_l .

Для вычисления энтропии пространства P_l^k нам нужно найти минимальное праворазрешающее представление этого пространства. Согласно теореме 10.3, существует алгоритм, который строит минимальное праворазрешающее представление (R_{lk}) из графа Γ_{lk} . Пусть Π_{lk} — соответствующая матрица смежностей для графа R_{lk} . Тогда, согласно теореме 10.2, энтропия пространства P_l^k равна логарифму максимального собственного числа матрицы Π_{lk} :

$$h(P_l^k) = \log \lambda_{lk}.$$

Окончательно, из неравенства $h \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} h(C_k)$ получаем

$$h(f) \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} h(P_l^k) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_{lk}. \quad (10.3)$$

Алгоритм вычисления оценки топологической энтропии динамической системы.

1. Выбираем замкнутое покрытие $C = \{C_l\}$ компакта M и строим символьический образ G для этого покрытия.
2. Строим подразбиение C^* покрытия C ($C^* \succ C$) и соответствующий символьический образ G^* .
3. Используя символьические образы G и G^* строим оснащенный граф Γ и по нему строим минимальное праворазрешающее представление R .
4. Вычисляем логарифм максимального собственного числа матрицы смежности Π графа R и полагаем значение энтропии $h = \log \lambda_{max}$.

5. Подразбиваем покрытие C^* . Таким образом, определяется новое покрытие.
6. Строим символический образ G^* для нового покрытия.
7. Возвращаемся к третьему шагу.

Повторяя процесс последовательного подразбиения, получим последовательность положительных чисел $\{h_{lk} = \log \lambda_{lk}\}$.

Далее, в качестве начального покрытия C рассматриваем его подразбиение C^* и повторяем описанный выше алгоритм для этого покрытия. Затем снова подразбиваем начальное покрытие и так далее. В результате получаем двойную последовательность чисел $\{h_{lk} = \log \lambda_{lk}\}$, $k > l \geq 1$, для которой согласно неравенству 10.3, получаем

- величина $\log \lambda_{lk}$, где число $k - l$ является достаточно большим, есть оценка энтропии $h(C_l)$ отображения f для покрытия C_l ;
- величина $\log \lambda_{lk}$, где числа l и $k - l$ являются достаточно большим, есть оценка энтропии $h(f)$ отображения f .

10.7. Энтропия отображения Хенона

Рассмотрим отображение Хенона

$$f(x, y) = (1 - 1.4x^2 + 0.3y, x),$$

где $M = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$. Рассмотрим последовательность измельчений компакта M вида

$$C_k = \left\{ \left[-1.5 + \frac{3l}{2^k}, -1.5 + \frac{3(l+1)}{2^k} \right] \times \left[-1.5 + \frac{3p}{2^k}, -1.5 + \frac{3(p+1)}{2^k} \right] \right\},$$

$$k \in N, l, p = 0, \dots, 2^k - 1.$$

Эта последовательность покрытий удовлетворяет условиям теоремы 10.1. Следовательно, энтропию отображения Хенона можно оценить сверху $h(f) \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} h(C_l) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} h(P_l^k)$.

Результаты вычислений величин $h(P_l^k)$ представлены в табл. 10.7 (для краткости обозначений величины $h(P_l^k)$ обозначаются в таблице как h_{lk}). На рисунке 10.1 показана зависимость h_{lk}

Таблица 10.7. Верхние оценки для отображения Хенона

k	$ Ver_k $	$ E_k $	h_{1k}	h_{2k}	h_{3k}	h_{4k}	h_{5k}
1	4	10	-	-	-	-	-
2	12	54	0.85054	-	-	-	-
3	34	174	0.81455	1.06881	-	-	-
4	78	505	0.69273	0.89793	1.13639	-	-
5	181	1192	0.60009	0.76660	0.96874	1.15955	-
6	453	2885	0.57082	0.65094	0.81607	0.96145	1.15546
7	1108	7216	0.53494	0.57784	0.69467	0.80663	0.97145
8	2588	17836	0.50242	0.52710	0.61530	0.69029	0.81573
9	5915	42069	0.48540	0.49440	0.54327	0.59310	0.69123
10	13338	96921	0.47584	0.47751	0.50856	-	-
11	31534	218644	0.46761	-	-	-	-

от k . Хорошо просматривается сходимость линий к числу $h = 0.45 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, т. е. $h(f) \leq h$. Значение энтропии отображения Хенона равно 0.4651. Заметим, что это значение было получено другими методами в [60].

На рисунке 10.2 показана модификация изображения 10.1, при которой начала графиков соотнесены к одной начальной точке.

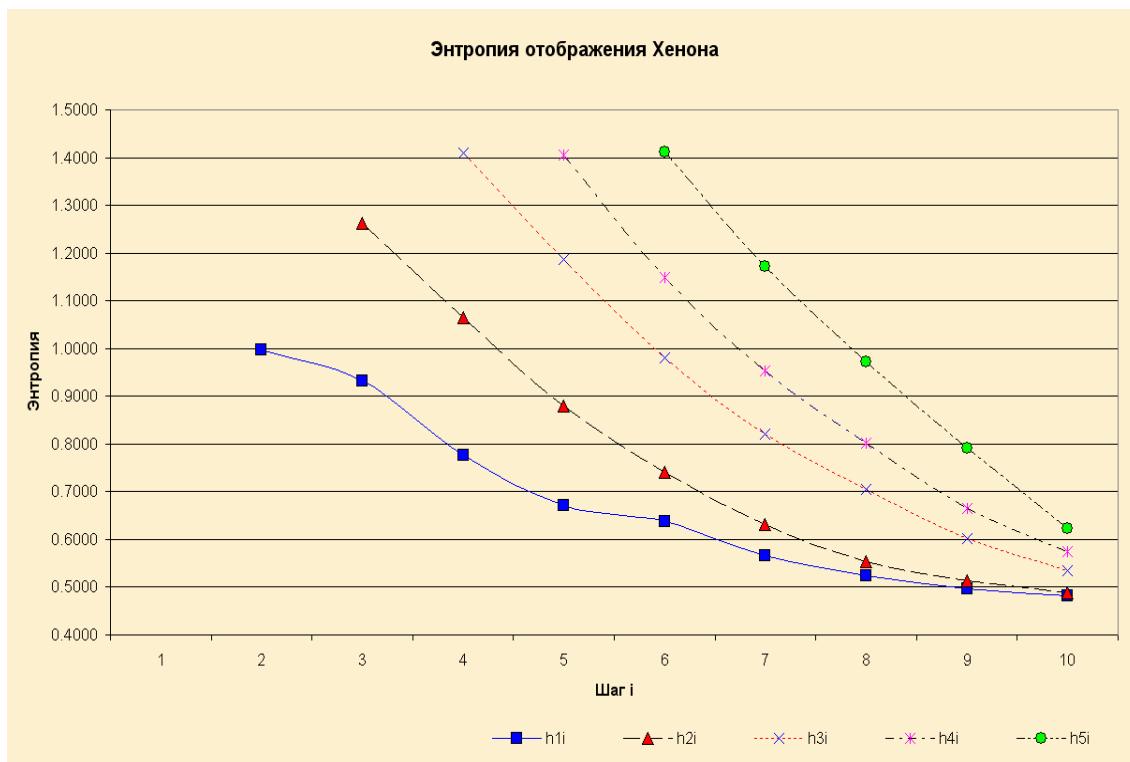


Рис. 10.1. Энтропия отображения Хенона.

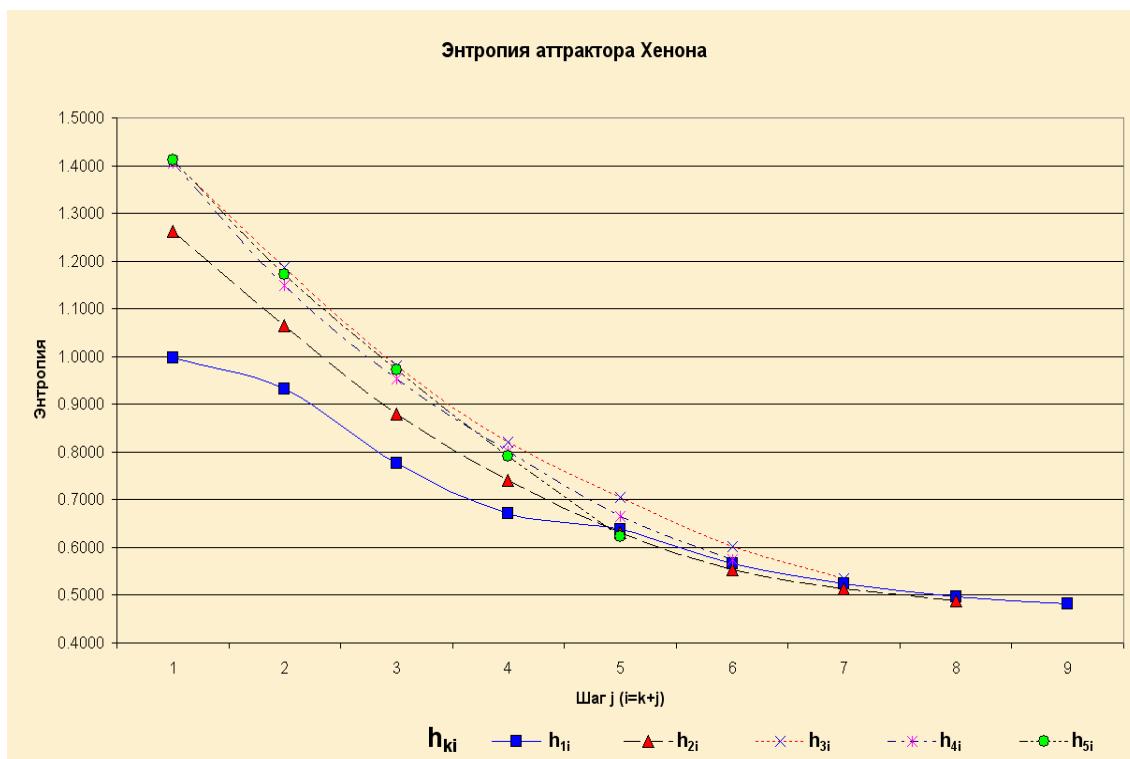


Рис. 10.2. Энтропия отображения Хенона: графики соотнесены к одному началу.

Таблица 10.8. Оценки энтропии для отображения $x \rightarrow \lambda x(1 - x)$

k	$h_{1k}, \lambda = 3.569$	$h_{1k}, \lambda = 4$	k	$h_{1k}, \lambda = 3.569$	$h_{1k}, \lambda = 4$
2	0.80544	0.85595	9	0.09250	0.69669
3	0.59282	0.80958	10	0.08919	-
4	0.44954	0.75826	11	0.04063	-
5	0.39664	0.73562	12	0.03713	-
6	0.16591	0.71605	13	0.03323	-
7	0.14127	0.70656	14	0.02527	-
8	0.10436	0.69967	15	0.02322	-

10.8. Энтропия логистического отображения.

Рассмотрим логистическое отображение

$$f(x) = \lambda x(1 - x),$$

где $M = [0, 1]$. Рассмотрим последовательность измельчений компакта M вида

$$C_k = \left\{ \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right] \right\},$$

$$k \in N, l = 0, \dots, 2^k - 1.$$

Поведение отображения f в значительной степени определяется параметром λ . Известно ([41]), что при $\lambda \leq 3.569$ существует конечное число циклов периода степени двойки и единственный притягивающий цикл, который притягивает почти все точки из отрезка $[0, 1]$. При $\lambda = 3.569$ существуют циклы любой степени двойки и все они отталкивающие. Однако энтропия все еще равна нулю.

При $\lambda > 3.569$ появляются циклы периодов, отличных от степени двойки. При $\lambda = 4$ весь отрезок $[0, 1]$ будет инвариантным множеством. В работе [41] показано, что энтропия одномерного отображения отлична от нуля в том и только в том случае, если существуют периодические точки с периодами, отличными от степени двойки.

В таблице 10.8 приведены расчеты последовательности $\{h_{1k}\}$ для логистических отображений с константами $\lambda = 3.569, \lambda = 4$.

Здесь видна сходимость величин h_{lk} к 0 для $\lambda = 3.569$ и сходимость величин h_{lk} к 0.69 для $\lambda = 4$. Подробное описание алгоритма для оценки энтропии динамических систем можно найти в работе [75].

Глава 11

Проективное пространство и характеристический показатель Ляпунова

При изучении линейных систем часто бывает удобно вводить проективное пространство. В частности, для систем на плоскости введение одномерного проективного пространства позволяет рассматривать исходное отображение как отображение окружности. В данной главе мы изложим материал, необходимый для использования проективного пространства P^1 , а именно рассмотрим способы введения координат, действие линейного отображения и его базисные множества на P^1 .

Кроме того, мы введем такую важную характеристику поведения динамической системы, как показатель Ляпунова. Известно, что одной из особенностей хаотических режимов является неустойчивость каждой траектории, принадлежащей хаотическому аттрактору. Характеристический показатель Ляпунова (ляпуновский показатель) является количественной мерой этой неустойчивости и позволяет оценить фрактальную размерность аттрактора и энтропию динамической системы. Характеристические показатели были введены А.М.Ляпуновым для описания свойств линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и характеризовали устойчивость положения равновесия, т. е. одной траектории. Детальную информацию можно найти в [24]. Мы определяем показатель Ляпунова для дискретных линейных систем, а именно для траекторий этих систем на проективном пространстве P^1 .

11.1. Определения и примеры

Рассмотрим пример, поясняющий введение одномерного проективного пространства.

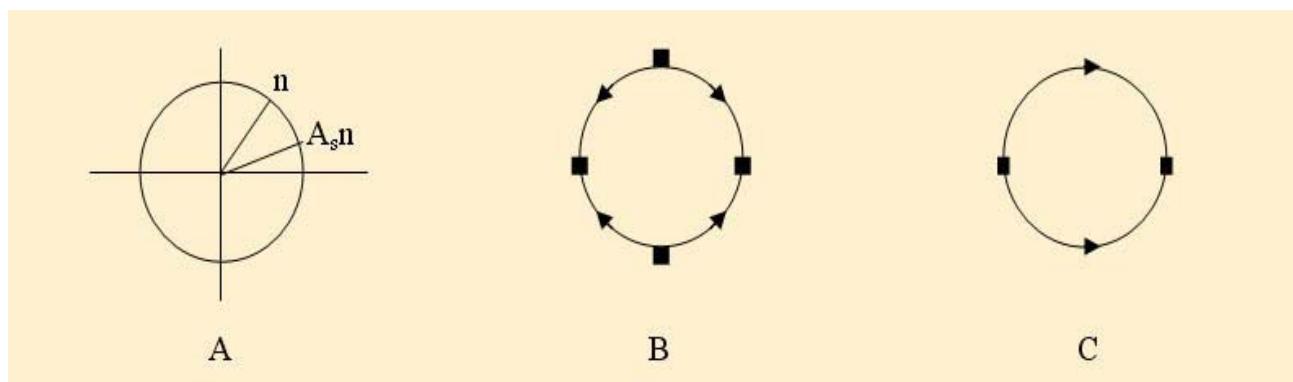


Рис. 11.1.

Пример 11.1. Пусть дискретная система задается линейным отображением $A : (x, y) \rightarrow (3x, 2y)$. Любое линейное отображение $A : v \rightarrow Av$ порождает отображение $A_s : e \rightarrow Ae/|Ae|$ на единичной окружности $S^1 = \{e = (p, q) : p^2 + q^2 = 1\}$ где $p = \cos \alpha$, $q = \sin \alpha$, α — угол между вектором $v = (x, y)$ и положительным направлением оси OX (рис.11.1,а)). В рассматриваемом случае

$$A_s(p, q) = (3p/\sqrt{9p^2 + 4q^2}, 2q/\sqrt{9p^2 + 4q^2}) = (P(p, q), Q(p, q)).$$

Отображение A_s порождает динамическую систему на окружности. Легко проверить, что A_s имеет 4 неподвижные точки: $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1)$. Рассмотрим образ точки (p, q) , $p > 0$, $q > 0$ и найдем отношение $Q/P = 2/3 q/p$. Отсюда следует, что $A_s^k e \rightarrow (1, 0)$ при $k \rightarrow +\infty$ и $A_s^k e \rightarrow (0, 1)$ при $k \rightarrow -\infty$. Таким образом, динамическая система на S^1 имеет фазовый портрет изображенный на рис.11.1,б)).

Отметим, что так как $A_s(-e) = -A_s e$, то динамическая система на S^1 симметрична относительно начала координат. Это свойство позволяет отождествить диаметрально противоположные точки на S^1 . Если на окружности S^1 отождествить диаметрально противоположные точки, то мы получим одномерное проективное пространство P^1 . Динамическая система на P^1 имеет фазовый портрет, изображенный на рис.11.1,в), правая неподвижная точка соответствует $(\pm 1, 0)$ на S^1 , левая соответствует $(0, \pm 1)$. Пространство P^1 можно рассматривать как множество прямых в R^2 , проходящих через начало координат.

Теперь рассмотрим общий случай. Проективное пространство P^{d-1} определяется как множество прямых $\{L\}$ в R^d , проходящих через начало координат. Так как каждая прямая пересекает единичную сферу S^{d-1} дважды в диаметрально противоположных точках, то пространство P^{d-1} можно получить, отождествив противоположные точки сферы S^{d-1} .

В общем случае линейное отображение $A : v \rightarrow Av$, $v \in R^d$ можно представить в виде:

$$Av = |Av| \cdot Av/|Av| = r|Ae| \cdot Ae/|Ae| = r|Ae| \cdot A_s(e),$$

где $r = |v|$, $e = \frac{v}{|v|} \in S^{d-1}$. Таким образом, линейное отображение $A : v \rightarrow Av$ является произведением отображений

$$e \rightarrow A_s(e),$$

$$r \rightarrow r|Ae|,$$

где первое отображение действует на единичной сфере S^{d-1} , а второе действует на положительной полупрямой R^+ и является умножением на число $|Ae|$. Отображение $A_s(e)$ симметрично относительно замены знака: $A_s(\pm e) = \pm A_s(e)$, что позволяет отождествить диаметрально противоположные точки и определить динамическую систему на полученном проективном пространстве.

11.2. Координаты в проективном пространстве

Рассмотрим плоскость R^2 с координатами (x, y) . Одномерное проективное пространство P^1 — это множество прямых $\{L\}$ в R^2 , проходящих через начало координат. В этом пространстве можно ввести координаты следующими тремя способами.

1. Каждая прямая, отличная от оси OY определяется однозначно уравнением $y = kx$, где $k \in R$. Таким образом, коэффициент k можно рассматривать как координату прямой $L(k) = \{(x, y) : x \in R, y = kx\}$ в проективном пространстве P^1 . При этом число k есть тангенс угла наклона прямой $L(k)$ к оси OX . Для вертикальной прямой $\operatorname{tg} \pi/2 = \pm\infty$. Таким образом, если числовую прямую R пополнить одной бесконечно удаленной точкой $\pm\infty$, то мы получим взаимно однозначное соответствие между точками проективного пространства P^1 и пополненной прямой $R \cup \infty$. Коэффициент $k \in R \cup \infty$ является координатой точки в P^1 . С топологической точки зрения дополненная прямая совпадает с окружностью. Такой метод введения координат в

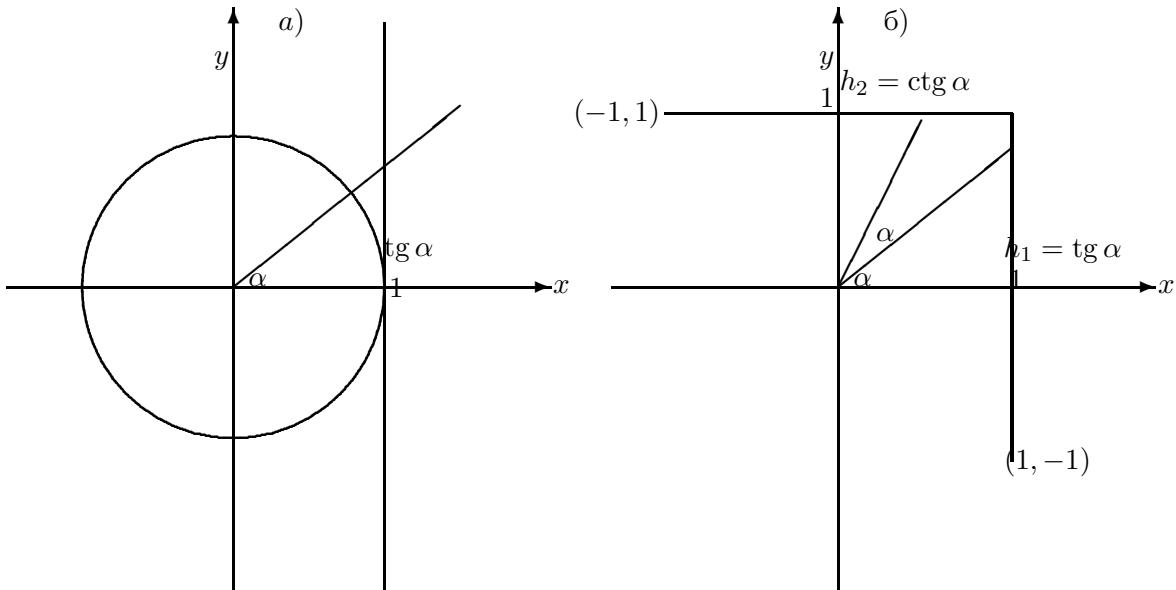


Рис. 11.2. Два способа введения координат на проективной прямой.

проективном пространстве P^1 является наиболее простым. Главный его недостаток — введение бесконечности, что доставляет определенные неудобства при компьютерной реализации.

2. Каждая прямая $L(k)$ однозначно определяется угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$, который однозначно определяется углом $\alpha \in (-\pi/2, +\pi/2)$ (см.рис.11.2,а). При этом для вертикальной прямой $\operatorname{tg}(\pm\pi/2) = \pm\infty$. Таким образом, если в замкнутом отрезке $[-\pi/2, +\pi/2]$ отождествить точки $\pm\pi/2$, то мы получим взаимно однозначное соответствие между точками полученной окружности и P^1 . Отметим, что $\alpha = \operatorname{arctg}(k)$. Заметим, что при данном методе введения координат мы имеем дело с отрезком $[-\pi/2, +\pi/2]$. Однако этот метод приводит к трудностям при переходе к многомерному случаю.

3. Рассмотрим два отрезка $I_1 = \{(1, y), y \in [-1, 1]\}$ и $I_2 = \{(x, 1), x \in [-1, 1]\}$ (см.рис.11.2,б). Эти отрезки имеют общую точку $(1, 1)$. Каждая прямая L , кроме $y = -x$, пересекает $I_1 \cup I_2$ только один раз. Таким образом, если отождествить точки $(1, -1)$ и $(-1, 1)$, то мы получим взаимно однозначное соответствие между прямыми L и точками множества $I_1 \cup I_2 \setminus \{(1, -1) = (-1, 1)\}$. Для того, чтобы найти координаты прямой $L : y = kx$ в описанной системе координат рассмотрим вектор $v = (x, y)$ на прямой L . Если $\max\{|x|, |y|\} = |x|$, то вектор $e_1 = (1, y/x)$ лежит на L , $-1 \leq y/x \leq 1$, а точка $(1, h_1 = y/x) \in I_1$. Если $\max\{|x|, |y|\} = |y|$, то вектор $e_1 = (x/y, 1)$ лежит на L , $-1 \leq x/y \leq 1$, а точка $(h_2 = x/y, 1) \in I_2$. Заметим, что $h_1 = y/x = \operatorname{tg} \alpha$ и $h_2 = x/y = \operatorname{ctg} \alpha$. Этот метод введения координат является наиболее громоздким. Однако, он не использует бесконечность и легко обобщается на многомерный случай.

Общий случай. Для введения локальных координат в проективном пространстве P^{d-1} , рассмотрим d копий K_1, \dots, K_d $(d-1)$ -мерного куба $K = \{(e_1, \dots, e_{d-1}) : |e_i| \leq 1\}$. Построим отображение множеств K_1, \dots, K_d в R^d так, что вложение i -й копии K_i имеет вид

$$(e_1, \dots, e_{d-1}) \rightarrow (e_1, \dots, 1, \dots, e_{d-1}),$$

где единица вставляется на i -е место. Не ограничивая общности, мы можем отождествить K_i и его образ, который назовем диском K_i . Построенные диски K_1, \dots, K_d пересекаются по точкам, у которых координаты имеют более чем одну единицу. Например, точка $(1, 1/2, 1, -3/4)$ лежит

в K_1 и K_3 пространства R^4 . Можно считать, что диски K_1, \dots, K_d задают локальные карты проективного пространства P^{d-1} . Действительно, рассмотрим прямую $L = \{tn, t \in R, n \in S^{d-1}\}$, где S^{d-1} сфера радиуса 1 в R^d . Пусть $\max\{|n_1|, \dots, |n_d|\} = |n_i|$. Тогда точка

$$(n_1/n_i, \dots, n_i/n_i, \dots, n_d/n_i) = (e_1, \dots, 1, \dots, e_{d-1})$$

является точкой пересечения прямой L и диска K_i . Таким образом, каждой прямой соответствует точка на дисках K_i . Однако такое соответствие не является взаимнооднозначным. Например, точкам $(1, 1/2, -1, 3/4)$ и $(-1, -1/2, 1, -3/4)$, лежащим в разных дисках, соответствует одна прямая, так как эти точки диаметрально противоположны. Заметим, что диаметрально противоположные точки лежат на границе дисков K_i . Чтобы получить взаимнооднозначное соответствие, надо отождествить диаметрально противоположные точки дисков K_i . В дальнейшем мы будем строить символический образ проективных отображений, и для этого надо иметь покрытие проективного пространства. Естественно рассматривать описанный набор дисков как исходное покрытие $C_0 = \{K_i\}$. Более мелкие покрытия будут являться подразбиениями данного покрытия.

11.3. Действие линейного отображения в проективном пространстве

Рассмотрим линейное отображение $A : R^2 \rightarrow R^2$. Пусть в координатах (x, y) отображение A имеет вид $A(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (X, Y)$ или задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Найдем образ прямой $L = \{y = kx\}$ при отображении A . Так как точка с координатами (x, kx) переходит в точку $(X, Y) = (ax + bkx, cx + dkx)$, то имеем равенство $x = X/(a + bk)$. Откуда следует, что $Y = (c + dk)/(a + bk) X$. Таким образом, угловой коэффициент образа (AL) есть величина

$$U(k) = \frac{c + dk}{a + bk}. \quad (11.1)$$

При этом $U(-a/b) = \infty$ и $U(\infty) = d/b$. Формула (11.1) описывает отображение $U : L \rightarrow AL$, действующее в проективном пространстве P^1 через угловой коэффициент $k \in R \cup \infty$. Эта же формула позволяет вычислить угол между образом AL и осью OX . Действительно, так как $k = \operatorname{tg}(\alpha)$, то формула

$$U(\alpha) = \operatorname{arctg}\left(\frac{c + d \operatorname{tg}(\alpha)}{a + b \operatorname{tg}(\alpha)}\right) \quad (11.2)$$

задает отображение $U : L \rightarrow AL$ в угловых координатах. При этом $U(\operatorname{arctg}(-a/b)) = \pi/2$ и $U(\pi/2) = \operatorname{arctg}(d/b)$.

Формула (11.1) позволяет описать отображение $U : L \rightarrow AL$ в координатах h_1, h_2 , введенных в предыдущем разделе. Действительно, так как $h_1 = \operatorname{tg}(\alpha) = k$, при $|k| \leq 1$ и $h_2 = \operatorname{ctg}(\alpha) = 1/k$ при $|k| \geq 1$, то формулы

$$U(h_1) = \begin{cases} H_1 = \frac{c + dh_1}{a + bh_1} & \text{при } |c + dh_1| \leq |a + bh_1|, \\ H_2 = \frac{a + bh_1}{c + dh_1} & \text{при } |a + bh_1| \leq |c + dh_1|, \end{cases} \quad (11.3)$$

$$U(h_2) = \begin{cases} H_1 = \frac{ch_2 + d}{ah_2 + b} & \text{при } |ch_2 + d| \leq |ah_2 + b|, \\ H_2 = \frac{ah_2 + b}{ch_2 + d} & \text{при } |ah_2 + b| \leq |ch_2 + d|, \end{cases} \quad (11.4)$$

задают отображение $U : L \rightarrow AL$ в координатах h_1, h_2 .

На первый взгляд, формула (11.1) является наиболее простой. Однако, она использует бесконечность, что создает трудности при компьютерной реализации. Формула (11.2) также не преодолевает эту трудность, т.к. при вычислении возможно деление на 0. Наконец, формулы (11.3) и (11.4) являются наиболее сложными. Однако, они преодолевают все описанные выше трудности.

Рассмотрим общий случай линейного отображения $A : R^d \rightarrow R^d$, действующего в d -мерном пространстве. Наша задача состоит в том, чтобы описать действие отображения $PA : P^{d-1} \rightarrow P^{d-1}$ в локальных картах $\{K_i\}$. Пусть точка $e = (e_1, \dots, e_d)$ лежит в K_i , т.е. $e_i = 1$, $|e_k| \leq 1$, $k \neq i$. Найдем образ $Pe = E = (E_1, \dots, E_d)$ и $\max\{|E_1|, \dots, |E_d|\} = |E_j|$. Тогда в локальных координатах

$$PAe = PE = (E_1/E_j, \dots, 1, \dots, E_d/E_j), \quad (11.5)$$

где единица стоит на j -м месте, т.е. PAe лежит в диске K_j . Естественно, если $|E_p| = |E_q|$, то образ PAe или попадает на пересечение границ дисков K_p и K_q , или ему соответствуют диаметрально противоположные точки этих дисков. Отметим, что отображение (11.5) является обобщением формул (11.3) и (11.4).

11.4. Базисные множества на проективном пространстве P^1

Под базисными множествами линейного отображения на проективном пространстве мы будем понимать компоненты цепно-рекуррентного множества динамической системы на P^1 , порожденной линейным отображением A . Не ограничивая общности можно предположить, что матрица A имеет каноническую жорданову форму, т.е. может быть одного из следующих видов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Действие матрицы A_1 .

Эта матрица имеет два действительных собственных числа a, d и собственные подпространства — оси OX и OY , соответственно. Очевидно, что

$$A_1^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}.$$

Из формулы (11.1) имеем

$$U^n(k) = (d/a)^n k.$$

Поскольку точки проективного пространства — это прямые, которые в системе координат в P^1 определяются с помощью углового коэффициента k , то для сокращения записи мы можем говорить о точках проективного пространства k_1, k_2, \dots , имея в виду соответствующие им прямые.

Точки $k = 0$ и $k = \infty$ проективного пространства, соответствующие осям в декартовой системе координат, являются неподвижными для отображения U .

Если $k \neq 0$ и $d/a > 1$, то $U^n(k) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, существуют две неподвижные точки отображения U : $k = 0$ и $k = \infty$, которые являются базисными множествами, остальные траектории идут от $k = 0$ к $k = \infty$.

Если $d/a = 1$, то $U(k) = k$, все точки отображения U являются неподвижными и P^1 является одним базисным множеством.

Если $0 < d/a < 1$, то $U^n(k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. имеется две неподвижные точки $k = 0$ и $k = \infty$, которые являются базисными множествами, остальные траектории идут от $k = \infty$ к $k = 0$.

Если $-1 < d/a < 0$, то $U^n(k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Этот случай аналогичен предыдущему, и при каждой итерации меняется знак $\text{sign } U(k) = -\text{sign } k$.

Если $d/a = -1$, то $U(k) = -k$, все точки кроме $k = 0$ и $k = \infty$ являются 2-периодическими и P^1 является одним базисным множеством.

Если $d/a < -1$, то $U^n(k) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. имеется две неподвижные точки $k = 0$ и $k = \infty$, которые являются базисными множествами, остальные траектории идут от $k = 0$ к $k = \infty$ и при каждой итерации меняется знак: $\text{sign } U(k) = -\text{sign } k$.

Действие матрицы A_2 .

Эта матрица имеет одно действительное собственное число и подпространство OX , которое соответствует $k = 0$. Матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aI + N,$$

где I — единичная матрица, а $N^2 = 0$, то есть N — нильпотентная матрица. В этом случае $U(k) = ak/(a+k)$. Так как $N^2 = 0$, то

$$A_2^n = (aI + N)^n = a^n I + na^{n-1}N = a^{n-1} \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

В частности $A_2^{-1} = a^{-2} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Тогда $U^n(k) = ak/(a+nk)$ и, если знак a совпадает со знаком nk (что достигается выбором знака n), то $U^n(k) \rightarrow 0$. При этом $U(-a) = \infty$ и $U(\infty) = a$, т.е. бесконечность является проходной точкой. Таким образом, имеется только одна неподвижная точка $k = 0$, которая образует единственное базисное множество, остальные траектории начинаются в этой точке и заканчиваются в ней, делая полный оборот по окружности P^1 .

Действие матрицы A_3 .

Эта матрица имеет два комплексно-сопряженных собственных числа, $z = a \pm bi$. Комплексное число $a + bi = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$, где $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\operatorname{tg} \phi = b/a$. Матрица A_3 имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

где последняя матрица задает поворот на угол ϕ против часовой стрелки, если $\phi > 0$. Тогда

$$A_3^n = \rho^n \begin{pmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}.$$

Если α — угловая координата на проективном пространстве, то A_3 порождает на P^1 отображение вида $U^n(\alpha) = \alpha + n\phi$. Периодическая точка периода n задается уравнением

$$U^n(\alpha) - \alpha = k\pi,$$

где k целое число. Отсюда следует равенство $n\phi = k\pi$, т.е. угол поворота ϕ рационально соизмерим с π . В этом случае все точки являются периодическими. Если же $\phi = \pi\theta$, где θ — иррациональное число, то траектория каждой точки $T(\alpha) = \{U^n(\alpha), n \in \mathbb{Z}\}$ является плотным множеством на P^1 . Таким образом, для отображения с матрицей A_3 пространство P^1 является одним базисным множеством.

11.5. Характеристический показатель Ляпунова

Исследование устойчивости инвариантного множества динамической системы означает изучение поведения траекторий системы вблизи этого множества. Простейшими инвариантными множествами являются неподвижные точки, состояния равновесия и периодические решения. Для них исследование динамики решений системы основано на линеаризации исходной системы в окрестности этого множества. Для этого применяется метод, восходящий к А.М.Ляпунову и А.Пункаре и состоящий в следующем.

Рассмотрим гладкую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (11.6)$$

где $t \in R$, $x \in M \subset R^n$. Пусть $x_0(t)$ — решение системы (11.6) с начальными данными $t = t_0$, $x = x_0$, устойчивость которого мы исследуем, а $x(t)$ — какое-то решение (11.6). Сделаем замену переменных $y(t) = x(t) - x_0(t)$. Подставляя выражение для $x(t)$ в систему (11.6), получаем

$$\dot{y} = f(t, x(t)) - f(t, x_0(t)) = \frac{\partial f(t, x_0(t))}{\partial x} y + h(t, y) = A(t)y + h(t, y), \quad (11.7)$$

где $\frac{\partial f(t, x_0(t))}{\partial x}$ есть матрица Якоби исходной системы, вычисленная на решении $x_0(t)$, а функция $h(t, y)$ имеет второй порядок малости в нуле. Таким образом, вопрос об устойчивости решения $x_0(t)$ системы (11.6) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы (11.7).

Система

$$\dot{y} = A(t)y \quad (11.8)$$

называется системой первого приближения для системы (11.7). При достаточной малости функции $h(t, y)$ и определенных свойствах системы (11.8) можно показать, что ее динамика определяет динамику системы (11.6) вблизи решения $x_0(t)$.

Поскольку вопрос об устойчивости некоторого решения $x_0(t)$ связан с исследованием возмущения этого решения по начальным данным, часто рассматривается система в вариациях

$$\dot{v} = A(t)v, \quad (11.9)$$

где матрица $A(t)$ имеет тот же смысл, что и выше, а $v(t)$ есть матрица частных производных исследуемого решения по начальным данным, т. е. $v(t) = \frac{\partial x_i(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0j}}$, $i, j = 1, \dots, n$, $v(0) = E$.

Для характеристики роста нормы решения $|v(t)|$ системы (11.9) А.М. Ляпунов ввел семейство функций $\exp \lambda t$ и число λ , называемое характеристическим показателем решения. Показатель решения $v(t)$ определяется следующим образом

$$\lambda(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \frac{1}{\tau} \ln |v(\tau)|. \quad (11.10)$$

Характеристический показатель обладает следующими свойствами.

Свойство 1.

$$\lambda(cv) = \lambda(v),$$

где $c \neq 0$.

Действительно,

$$\lambda(cv) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \frac{1}{\tau} \ln |cv(\tau)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \frac{1}{\tau} \ln |c||v(\tau)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \frac{1}{\tau} (\ln |v(\tau)| + \ln |c|) = \lambda(v).$$

Заметим, что из определения следует, что $\lambda(v)$ является характеристическим показателем решения $v(t)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число D такое, что $|v(t)| \leq D \exp((\lambda(v) + \varepsilon)t)$. Отсюда следует

Свойство 2.

$$\lambda(v_1 + v_2) = \max\{\lambda(v_1), \lambda(v_2)\}.$$

Доказательство.

Обозначим $\lambda_1 = \lambda(v_1)$ и $\lambda_2 = \lambda(v_2)$. Тогда справедливы неравенства

$$|v_1| \leq D_1 \exp((\lambda(v_1) + \varepsilon)t), |v_2| \leq D_2 \exp((\lambda(v_2) + \varepsilon)t).$$

Следовательно, эти неравенства выполнены для $D = \max\{D_1, D_2\}$. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Тогда $|v_1(t)| + |v_2(t)| \leq |v_1(t)| + |v_2(t)| \leq D \exp((\lambda_2 + \varepsilon)t)$. Ввиду произвольности ε получаем неравенство $\lambda(v_1 + v_2) \leq \lambda_2$.

Теперь покажем, что верно и обратное неравенство, т. е. $\lambda(v_1 + v_2) \geq \lambda_2$. Допустим, что $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda < \lambda_2$. Тогда

$$\lambda_2 = \lambda(v_2) = \lambda(v_1 + v_2 - v_1) \leq \max\{\lambda(v_1 + v_2), \lambda(v_1)\} = \max\{\lambda, \lambda_1\} < \lambda_2.$$

Полученное противоречие завершает доказательство свойства 2.

Максимальное число линейно-независимых (базисных) решений линейной системы дифференциальных уравнений равно размерности фазового пространства [68]. Поскольку любое решение такой системы можно представить как линейную комбинацию базисных, то из описанных свойств следует, что число различных характеристических показателей не превосходит размерности фазового пространства. Так как любое решение определяется начальными данными, то характеристический показатель зависит от выбора начальных данных.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (11.9), нормированная в нуле, т. е. $\Phi(0) = E$, где E — единичная матрица. Тогда справедливо равенство [68]

$$v(t) = \Phi(t)v_0,$$

где v_0 есть начальное данное решения $v(t)$.

Из приведенного соотношения следует, что $|v(t)| = |\Phi(t)e_0||v_0| = |e(t)||v_0|$, где $e_0 = \frac{v_0}{|v_0|}$ — единичный вектор, $e(t)$ — решение с начальным вектором e_0 . Таким образом, верно следующее равенство $\lambda(v) = \lambda(e(t)|v_0|) = \lambda(e)$.

Это наблюдение показывает, что показатель определяется только одномерным подпространством, натянутым на вектор e_0 . Такой вектор можно рассматривать как точку проективного пространства. Кроме того, из (11.10) следует, что характеристический показатель определяется ω -пределным множеством траектории. Поскольку любое решение начинается и заканчивается на цепно-рекуррентном множестве системы, то все показатели также определяются на этом множестве.

Рассмотрим несколько частных случаев.

Состояние равновесия

Если векторное поле не зависит от времени и решение $x_0(t)$ есть состояние равновесия, то мы получаем линейную систему с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$. Нетрудно проверить, что в этом случае характеристические показатели совпадают с вещественными частями собственных чисел матрицы A . Действительно, любое решение такой системы выражается линейно через функции вида $t^k \exp(\gamma t)$, $t^k \cos bt \exp(at)$, $t^k \sin bt \exp(at)$, где γ и $\mu = a + bi$ — собственные числа A . Непосредственные вычисления показывают, что

$$\lambda(t^k \exp(\gamma t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \frac{1}{\tau} \ln |\tau^k \exp(\gamma \tau)| = \gamma, \quad \lambda(t^k \cos bt \exp(at)) = \lambda(t^k \sin bt \exp(at)) = a.$$

Рассмотрим пример, показывающий зависимость показателя от выбора начальных условий.

Пример 11.2. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x.$$

Собственному числу $\nu_1 = 1$ соответствует собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, а собственному числу

$\nu_2 = 5$ вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Решение системы записывается в виде

$$x(t) = c_1 \exp t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \exp 5t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Тогда $x(t) = \exp 5t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\lambda(x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \frac{1}{\tau} \ln \exp 5\tau \sqrt{10} = 5$.

При выборе $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ мы получим значение характеристического показателя равное 1.

Выбор начального вектора $x(0)$, не совпадающего с собственными векторами, дает решение, характеристический показатель которого равен старшему показателю. Например для $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ решение

$$x(t) = 1/2 \exp t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1/2 \exp 5t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический показатель равный 5, т. е. старшему показателю.

Автономная система дифференциальных уравнений

Рассмотрим заданную на компакте K гладкую автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x). \quad (11.11)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 11.1. Для любого решения системы (11.11), отличного от состояния равновесия, один из характеристических показателей равен нулю.

Для доказательства рассмотрим решение системы (11.11) $\phi(t, x_0)$ с начальными данными $(0, x_0)$ (т. е. при $t = 0$, $x = x_0$). По основному свойству автономной системы справедливо равенство

$$\phi(t + s, x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0)), \quad (11.12)$$

для любых $s, t \in R, \phi \in K$. Это свойство следует из того, что сдвиг решения автономной системы, соответствующий замене аргумента t на $t + s$, является ее решением.

Дифференцируя равенство (11.12) по s получаем

$$\frac{\partial \phi(t + s, x_0)}{\partial(t + s)} \cdot \frac{\partial(t + s)}{\partial s} = \frac{\partial \phi(t, \phi(s, x_0))}{\partial \phi(s, x_0)} \cdot \frac{\partial \phi(s, x_0)}{\partial s}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{\partial(t + s)}{\partial s} = 1$ и полагая в полученном равенстве $s = 0$, получаем соотношение

$$f(\phi(t, x_0)) = \frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial x_0} \cdot f(x_0), \quad (11.13)$$

где $\frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial x_0}$ есть матрица Якоби $\frac{\partial \phi_i(t, x_0)}{\partial x_{0j}}$, вычисленная в точке (t, x_0) . Полученное равенство

означает, что векторное поле f инвариантно для отображения $\frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial x_0}$. Покажем, что $\frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial x_0}$ является фундаментальной матрицей системы в вариациях для системы (11.11). Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} (f(\phi(t, x_0))) = \frac{\partial}{\partial x} (\phi(x(t, x_0))) \cdot \left(\frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial x_0} \right) = A(t) \left(\frac{\partial \phi(t, x_0)}{\partial x_0} \right).$$

Тогда из равенства (11.13) следует, что $f(\phi(t, x_0))$ является решением системы в вариациях для (11.11). Это решение ограничено на компакте и поскольку в силу предположения оно не является состоянием равновесия, то можно вычислить его характеристический показатель:

$$\lambda(f(\phi(t, x_0))) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \frac{1}{\tau} \ln |f(\phi(\tau, x_0))| = 0,$$

так как норма $f(x)$ ограничена.

Таким образом, наше предложение доказано.

Если система двумерна и ее решение $\phi(t)$ является периодическим (и, следовательно, ограниченным по норме), то у него есть два характеристических показателя, один из которых равен нулю, а второй вычисляется по формуле (A.39) из Приложения А.

Дискретные динамические системы

Рассмотрим систему

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (11.14)$$

Фиксируем точку x_0 , построим ее орбиту $\{x_k = f^k(x_0)\}$ и построим линейную систему

$$v_{n+1} = A(x_n)v_n, \quad (11.15)$$

где $A(x_n) = Df(x_n)$. Для этой линейной системы последовательность $\{Df^k(x_0)e\}$, где e — единичный вектор, является орбитой. Характеристический показатель этой орбиты определяется по формуле

$$\lambda(x_0, e) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)e|.$$

Аналогично рассуждениям, приведенным выше, можно показать, что характеристический показатель траектории однозначно определяется начальной точкой x_0 и одномерным подпространством, натянутым на вектор e , т. е. точкой проективного пространства. Как было показано в начале этой главы, проективное пространство P^1 получается из единичной сферы $S^2 = \{e : |e| = 1\}$ отождествлением ее диаметрально противоположных точек $+e$ и $-e$.

Суммируя наши рассуждения, мы можем заметить следующее. Для нахождения характеристических показателей траектории дискретной динамической системы (11.14), нужно одновременно рассматривать систему (11.15), которая порождает отображение на единичной сфере:

$$e_{n+1} = U(e_n), \text{ где } U(e_n) = \frac{Df(x_n)e_n}{|Df(x_n)e_n|}.$$

Выражение $|Df^n(x_0)e|$ можно переписать в виде

$$|Df^n(x_0)e| = |Df(x_{n-1})e_{n-1}| |Df^{n-1}(x_0)e|, \quad (11.16)$$

где $e_{n-1} = \frac{Df^{n-1}(x_0)e}{|Df^{n-1}(x_0)e|}$. Применяя рекуррентно формулу (11.16), получим

$$|Df^n(x_0)e| = |Df(x_{n-1})e_{n-1}| |Df(x_{n-2})e_{n-2}| \dots |Df(x_1)e_1| |Df(x_0)e_0|,$$

$$\text{где } e_k = \frac{Df^k(x_0)e}{|Df^k(x_0)e|}.$$

Легко проверить, что последовательность $\{e_k\}$ является орбитой точки $e_0 = e$ динамической системы $e_{n+1} = U(e_n)$ на единичной сфере. Показатель Ляпунова записывается в виде

$$\lambda(x_0, e) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k|. \quad (11.17)$$

Покажем, что если орбита $\{(x_k, e_k)\}$ является p -периодической, то ее характеристический показатель есть среднее по периоду:

$$\lambda(x_0, e) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k|.$$

Действительно, любое целое число n можно представить в виде $n = mp + r$, где $0 \leq r < p$. Тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k| = \frac{mp}{n} \frac{1}{mp} \left(m \sum_{k=0}^{mp-1} \ln |Df(x_k)e_k| + R \right),$$

где $R = \sum_{k=mp}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k|$ и $|R| < p \max_k |\ln |Df(x_k)e_k||$, $m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\lambda(x_0, e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{mp}{n} \frac{1}{mp} \left(m \sum_{k=0}^{p-1} \ln |Df(x_k)e_k| + R \right) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |Df(x_k)e_k|$$

и наше утверждение доказано.

Нетрудно вычислить характеристические показатели неподвижной точки для отображения f . Пусть x_0 — неподвижная точка f . Соответствующая линейная системы имеет вид $v_{n+1} = Av_n$, где $A = Df(x_0)$.

Тогда $Df^n(x_0) = (Df(x_0))^n$ и по определению мы получаем $\lambda(x_0, e) = \ln |Df(x_0)e|$. Поскольку число характеристических показателей не превосходит размерности фазового пространства, мы получаем, что набор ляпуновских показателей в случае неподвижной точки определяется логарифмами модулей собственных значений матрицы $Df(x_0)$. Если для каждой траектории известен набор характеристических показателей, то можно говорить о показателях Ляпунова для системы.

Характеристические показатели двумерных линейных систем

Найдем характеристические показатели для траекторий линейных отображений, заданных матрицами A_1, A_2 и A_3 , где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Отображение с матрицей A_1 на P^1 имеет две неподвижные точки $(1,0)$ и $(0,1)$, где $(1,0)$ и $(0,1)$ — единичные векторы на осях координат. Неподвижные точки можно рассматривать как периодические траектории с периодом единицы. В этом случае $\lambda(1,0) = \ln |a|$ и $\lambda(0,1) = \ln |d|$. Любая траектория, отличная от неподвижных точек, имеет своим пределом точку $(1,0)$ или точку $(0,1)$. Из формулы (11.17) следует, что характеристический показатель рассматриваемой траектории равен $\ln |a|$ или $\ln |d|$, соответственно.

Отображение с матрицей A_2 на P^1 имеет одну неподвижную точку $(1,0)$ и $\lambda(1,0) = \ln |a|$. Легко проверить, что все остальные траектории имеют этот же показатель.

Для отображения, задаваемого матрицей A_3 , имеем $\ln |A_3e| = \ln \rho$, для любого e , $|e| = 1$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |A_3e(y_k)| = \ln \rho$$

и $\lambda = \ln \rho$ для любой траектории.

В следующей главе мы рассмотрим следующее обобщение показателей Ляпунова:

- 1) рассмотрим систему вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad v_{n+1} = A(x_n)v_n,$$

где отображение $A(x)v$ линейно по v и непрерывно по x ;

2) для p -периодических ε -траекторий $\gamma = \{(x_k, e_k)\}$ характеристические показатели будут вычисляться по формуле

$$\lambda(\gamma) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |A(x_k)e_k|;$$

3) мы рассмотрим всевозможные показатели λ , которые могут быть получены при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Глава 12

Спектр Морса

В предыдущей главе была введена одна из важных характеристик поведения динамики как отдельной траектории, так и всей системы в целом — показатель Ляпунова. Поскольку в процессе вычислений мы всегда имеем дело с некоторым приближением к настоящей траектории (ε -траектория), то можно вычислить ляпуновские показатели для таких приближенных траекторий. Поскольку таких траекторий бесконечно много, можно оценить их предельные значения. Оказывается, что множество предельных значений всех показателей Ляпунова по всем ε -траекториям образует новую важную характеристику системы, которая называется спектром Морса. Ф.Колониус и В.Клейман показали, что спектр Морса совпадает с периодическим спектром Морса, иначе говоря нужно учитывать показатели Ляпунова только для периодических ε -траекторий. В данной главе вводится понятие спектра Морса, приводятся основные результаты. Показано, как получить оценку спектра Морса с помощью методов символьической динамики, а именно через спектр Морса оснащенного символьического образа.

Получение такой оценки связано с поиском замкнутых путей на графе. Число таких путей резко возрастает при построении последовательности символьических образов. Мы предлагаем алгоритм, основанный на специализированном симплекс-методе, который ищет в графе контуры с минимальной и максимальной характеристиками.

12.1. Гладкие отображения и многообразия.

Пусть $f : U \subset R^d \rightarrow R^m$ — отображение, определенное на открытом подмножестве U . Говорят, что f является гладким отображением, если существуют непрерывные частные производные $\partial f_i / \partial x_j$. Матрица A с элементами $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ называется матрицей Якоби и линейное отображение Df , порожденное этой матрицей, является дифференциалом отображения f . Дифференциал действует на множестве векторов v , которое обозначается TR^d и называется касательным пространством. Дифференциал $Df(x)$ и касательное пространство $T_x R^d$ зависят от точки приложения $x \in U$. Можно считать, что касательное пространство $T_x R^d$ это копия R^d с началом координат в точке x . Так как приращение v в точке x порождает приращение f в точке $f(x)$, то дифференциал $Df(x)$ действует из касательного пространства в точке x — $T_x R^d$ в касательное пространство в точке $f(x)$ — $T_{f(x)} R^m$. Гладкое отображение $f : U \rightarrow V$ называется диффеоморфизмом, если существует такое гладкое отображение $g : V \rightarrow U$, что суперпозиция $g \circ f$ является тождественным преобразованием на U . Множество M называется многообразием размерности d , если для каждой точки $x \in M$ найдется окрестность V и взаимнооднозначное отображение $h : V \rightarrow U$, где U открытый шар R^d . Говорят, что отображение h задает локальную карту. Многообразие M является гладким, если существует набор локальных карт $\{h_t : V_t \rightarrow U_t : \bigcup_t V_t = M\}$, которые гладко согласованы, т. е. отображения $h_t \circ h_\tau^{-1}$ являются диффеоморфизмами на соответствующих подмножествах R^d . Более детальное описание многообразий можно найти в [31, 46]. Не ограничивая общности, мы полагаем, что многообразие M лежит в R^n [31]. Например, единичная сфера $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

является двумерным многообразием в R^3 . На многообразии M определено расстояние $\rho(*, *)$. Касательное пространство $T_x M$ можно рассматривать как копию R^d , которая касается M в точке x .

В пространстве диффеоморфизмов $f : M \rightarrow M$ введем C^1 -топологию. Определим C^0 -расстояние между f и g как $\rho_0(f, g) = \max_{x \in M} \rho(f(x), g(x))$. Норма дифференциала $Df : TM \rightarrow TM$

$$\|Df\| = \max_{x \in M} |Df(x)| = \max_{x \in M} \max_{|v|=1} |Df(x)v|,$$

и C^1 -расстояние $\rho_1(f, g) = \rho_0(f, g) + \|Df - Dg\|$.

12.2. Линейное расширение гомеоморфизма

Векторным расслоением называется тройка (E, M, π) , где E и M являются многообразиями или подмножествами R^d , E называется тотальным пространством расслоения (расслоенным пространством), M называется базой, π — проектор из тотального пространства E на базу M , а каждый слой $E(x) = \pi^{-1}(x)$ является d -мерным линейным пространством изоморфным R^d . Например, если $E = R^d \times M$, то (E, M, π) является векторным расслоением над M с проекцией $\pi(v, x) = x$, где $v \in R^d$, $x \in M$. Другим примером векторного расслоения является касательное расслоение TM над многообразием M , $TM = \{T_x M, x \in M\}$, где $T_x M$ — пространство касательных векторов к многообразию M в точке x . Можно представлять векторное расслоение как множество копий пространства R^d , каждая из которых соответствует точке $x \in M$.

Определение 12.1. Пусть задано векторное расслоение (E, M, π) , f — гомеоморфизм $M \rightarrow M$. Гомеоморфизм $F : E \rightarrow E$ называется линейным расширением f , если F накрывает f , т. е. $f \circ \pi = \pi \circ F$, и отображение $F|_{E(x)} : E(x) \rightarrow E(f(x))$ является линейным изоморфизмом на каждом слое.

Свойство "F накрывает f" можно изобразить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Исследование линейных расширений мотивировано изучением поведения дифференциала на касательном пространстве [98, 99, 51, 52, 100, 102, 54]. Как пример линейного расширения мы будем рассматривать дифференциал $Df = F : TM \rightarrow TM$ диффеоморфизма f на многообразии M .

12.3. Проективное расслоение ассоциированное с векторным

Рассмотрим пространство R^d . Напомним, что вещественное $(d-1)$ -мерное проективное пространство P^{d-1} определяется отождествлением одномерных подпространств R^d . Для $v \in R^d, v \neq 0$ мы обозначаем через $[v] \in P^{d-1}$ точку проективного пространства, которая есть класс эквивалентности прямых $\{kv : k \in R\}$. Каждой точке из пространства $R^d \setminus \{0\}$ можно поставить в соответствие прямую, проходящую через эту точку и начало координат, т. е. некоторую точку проективного пространства P^{d-1} . Другими словами, ненулевому вектору из R^d в проективном пространстве P^{d-1} соответствует прямая, натянутая на этот вектор. Тогда R^d можно рассматривать как расслоение над проективным пространством P^{d-1} с проекцией $q : R^d \setminus \{0\} \rightarrow P^{d-1}$, $q(v) = [v]$, где $[v]$ — точка проективного пространства, соответствующая прямой, натянутой на вектор v . Пусть $L(y)$ обозначает одномерное подпространство R^d , соответствующее точке $y \in P^{d-1}$.

Рассмотрим расслоение (P, M, p) над M такое, что каждый слой является проективным пространством $P^{d-1}(x)$, ассоциированным со слоем $E(x) = R^d$, p — проекция: $p(P^{d-1}(x)) = x$.

Такое расслоение (P, M, p) назовем проективным расслоением ассоциированным с векторным расслоением (E, M, π) . Таким образом, пространство E есть одномерное линейное расслоение над проективным расслоением P с проекцией $q(v) = [v]$. Мы будем использовать следующие координаты : (x, v) на E и (x, y) на P , где $x \in M$, $v \in E(x)$, $y \in P^{d-1}(x)$. Отображение F индуцирует гомеоморфизм $PF : P \rightarrow P$ на проективном расслоении так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & E \setminus \{0\} \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ P & \xrightarrow{PF} & P \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

коммутативна. В координатах x, y, v эти отображения имеют вид

$$F = (f(x), A(x)v), \quad PF(x, y) = (f(x), [A(x)e(y)]),$$

где $e(y)$ — базисный вектор в подпространстве $L(y)$, $A(x) = F|_{E(x)}$. Число $a(x, y) = |F(x, e(y))| = |A(x)e(y)|$ назовем коэффициентом изменения длины при отображении $F|_{L(y)}$. Если $\xi = \{(x_0, y_0), \dots, (x_p, y_p) = (x_0, y_0)\}$ является периодической траекторией на проективном пространстве, то при $\prod_{i=0}^{i=p-1} a(x_i, y_i) < 1$ отображение F сжимает вдоль ξ и растягивает, если $\prod_{i=0}^{i=p-1} a(x_i, y_i) > 1$.

12.4. Определение спектра Морса

Рассмотрим линейное расширение $F : E \rightarrow E$ диффеоморфизма f и проективное отображение $PF : P \rightarrow P$, индуцированное отображением F на проективном расслоении. Пусть $\xi = \{(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)\}$ является конечной ε -траекторией проективного отображения PF , т. е. расстояние $|PF(x_n, y_n) - (x_{n+1}, y_{n+1})| < \varepsilon$. Определим показатель роста ε -траектории ξ как

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \ln |F(x_i, e(y_i))| = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \ln a(x_i, y_i),$$

где $e(y_i)$ — базисный вектор одномерного подпространства $L(y_i)$. Пусть $\xi = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots\}$ является ε -полутраекторией, тогда величина

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \ln |F(x_i, e(y_i))| \tag{12.1}$$

называется характеристическим показателем Ляпунова ε -полутраектории ξ . Если $\xi = \{(x_0, y_0), \dots, (x_p, y_p) = (x_0, y_0)\}$ является периодической ε -траекторией периода p , то из формулы (12.1) следует, что ее характеристический показатель Ляпунова

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |F(x_i, e(y_i))|.$$

В соответствии с формулой (12.1) характеристический показатель определяется предельным поведением полутраектории ξ . Таким образом, все характеристические показатели определяются вблизи цепно-рекуррентного множества CR отображения PF на проективном расслоении.

Определение 12.2. Спектром Морса отображения F на цепно-рекуррентном множестве CR проективного отображения PF называется множество

$$\Sigma(F) = \{\lambda \in R : \text{существуют } \varepsilon_k \rightarrow 0 \text{ и конечные } \varepsilon_k\text{-траектории } \xi_k \text{ длины } m_k \text{ в } CR, \text{ такие, что } m_k \rightarrow \infty \text{ и } \lambda(\xi_k) \rightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty\}.$$

Ф. Колониус и В. Клейман [51] показали, что спектр Морса совпадает с периодическим спектром Морса, который определяется как множество

$$\Sigma_{per}(F) = \{\lambda \in R : \text{существуют } \varepsilon_k \rightarrow 0 \text{ и периодические } \varepsilon_k\text{-траектории } \xi_k \text{ такие, что } \lambda(\xi_k) \rightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty\}.$$

Заметим, что ε_k -периодическая траектория ξ_k может лежать в цепно-рекуррентном множестве CR , а может проходить вблизи него. Из результатов, полученных в [51] следует, что для определения спектра Морса это несущественно.

Известно [51](теорема 5.35), что спектр состоит из замкнутых отрезков, при этом каждой компоненте цепно-рекуррентного множества на проективном расслоении соответствует отрезок.

Таким образом, спектр Морса есть предельное множество для характеристических показателей Ляпунова периодических ε -траекторий на проективном расслоении при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда следует, что спектр Морса непрерывен сверху, т. е. при возмущении системы он не может резко возрасти. Однако известны примеры линейных расширений, спектр Морса которых резко уменьшается.

Динамика системы существенно определяется характеристическими показателями цепно-рекуррентных траекторий. Поскольку эти показатели входят в спектр Морса, его вычисление является важным этапом в исследовании динамических систем.

Если цепно-рекуррентное множество отображения F можно представить в виде объединения непересекающихся инвариантных множеств, то спектр Морса можно вычислять на каждой из компонент этого объединения. Над каждой компонентой цепно-рекуррентного множества в базе M имеется конечное число компонент в проективном расслоении, которое не превосходит размерности векторного пространства [101]. При этом спектры, вычисленные на компонентах, могут иметь общие точки. Рассмотрим следующий пример.

Пример 12.1. (Д. Саламон, Е. Зендер[100]) Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \sin^2 2\pi x, \dot{y} = (\cos 2\pi x)y, \dot{z} = (2 + \cos 2\pi x)z \quad (12.2)$$

как поток на векторном расслоении $E = S^1 \times R^2$, над базой $S^1 = R/Z$, где $x \in S^1$. Многообразие S^1 является одной компонентой цепно-рекуррентного множества уравнения $\dot{x} = \sin^2 2\pi x$.

Заметим, что при $x = 0$ и $x = 1/2$ мы получаем $\dot{x} = 0$. Поскольку первое уравнение не содержит переменных y и z , рассмотрим систему, полученную из последних двух уравнений при $x = 0$ и $x = 1/2$ соответственно. В первом случае мы получаем систему

$$\dot{y} = y, \dot{z} = 3z. \quad (12.3)$$

На плоскости переменных (y, z) положение равновесия $(0, 0)$ системы (12.3) есть неустойчивый узел с собственными числами 1 и 3, причем растяжение по оси z сильнее, чем по оси y .

В случае $x = 1/2$ получаем систему

$$\dot{y} = -y, \dot{z} = z. \quad (12.4)$$

Положение равновесия есть седло с собственными числами 1 и -1. Как было отмечено в предыдущей главе, характеристические показатели Ляпунова для положений равновесия в случае линейных систем с постоянными коэффициентами определяются собственными числами матрицы системы. Таким образом, числа 1,-1,3 содержатся в спектре Морса.

В системе (12.2) существуют инвариантные подрасслоения $E^y = S^1 \times R \times 0$ и $E^z = S^1 \times 0 \times R$ (рис.12.1). Эти подрасслоения порождают две компоненты цепно-рекуррентного множества на проективном расслоении — $PE^y = \{(x, 1, 0)\}$ и $PE^z = \{x, 0, 1\}\}$. Так как проективное пространство для одномерного подпространства состоит из одной точки, то каждая такая компонента гомеоморфна окружности S^1 . На каждой из этих компонент вычислим спектр Морса. Для инвариантного подрасслоения PE^z под точкой $x = 0$ выражение $2 + \cos 2\pi x$ равно 3, а под точкой

$x = 1/2$ оно равно 1. Следовательно, спектр содержит отрезок $[1, 3]$. Можно показать, что для этой компоненты цепно-рекуррентного множества этот отрезок представляет собой весь спектр. Аналогично для подразделения PE^y спектр есть отрезок $[-1, 1]$. Таким образом, над цепно-рекуррентной базой существуют две компоненты цепно-рекуррентного множества в проективном расслоении, PE^y и PE^z , причем их спектры пересекаются.

Покажем, что PE^z и PE^y являются аттрактор-репеллер парой. Обозначим пару (y, z) за v и матрицу $\text{diag}(\cos 2\pi x, 2 + \cos 2\pi x)$ за A , так что мы получим систему уравнений

$$\dot{x} = \sin^2 2\pi x, \dot{v} = Av \quad (12.5)$$

на E .

Чтобы получить систему на проективном расслоении, мы должны разделить радиальную и угловую составляющие вектора v . Пусть $r = |v|$ и $n = v/r$, так что $v = rn$. Уравнение для \dot{r} получается из равенства $r^2 = \langle v, v \rangle$, где $\langle v, w \rangle$ скалярное произведение. Итак, мы получаем

$$2r\dot{r} = 2\langle Av, v \rangle = 2r\langle An, n \rangle r$$

и $\dot{r} = \langle An, n \rangle r$.

Из равенства $v = rn$ следует $Anr = \dot{r}n + r\dot{n}$ и $\dot{n} = An - I(\dot{r}/r)n = (A - \langle An, n \rangle)n$, где I — единичная матрица. Окончательно мы получаем систему

$$\dot{r} = \langle An, n \rangle r, \dot{n} = (A - \langle An, n \rangle)n,$$

где $n = (\eta, \zeta)$, $\eta^2 + \zeta^2 = 1$. В нашем случае $\langle An, n \rangle = (\cos 2\pi x)\eta^2 + (2 + \cos 2\pi x)\zeta^2$,

$$\dot{\eta} = \cos 2\pi x - ((\cos 2\pi x)\eta^2 + (2 + \cos 2\pi x)\zeta^2)\eta$$

и $\dot{\zeta} = ((2 + \cos 2\pi x) - (\cos 2\pi x)\eta^2 - (2 + \cos 2\pi x)\zeta^2)\zeta$. Исходная система 12.2 на проективном расслоении имеет вид

$$\dot{x} = \sin^2 2\pi x, \dot{\eta} = -2\zeta^2\eta, \dot{\zeta} = 2\eta\zeta.$$

Из вида системы следует, что $\eta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что PE^z есть аттрактор в PE , а PE^y — репеллер.

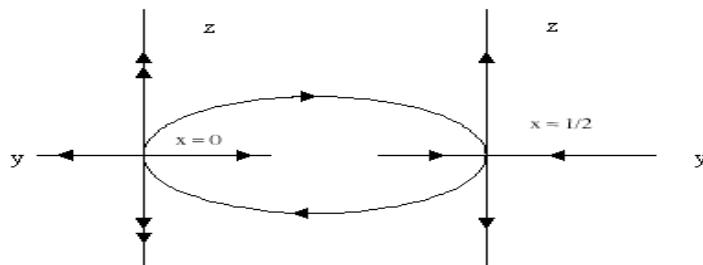


Рис. 12.1. Система на векторном расслоении.

12.5. Символический образ проективного отображения

В этой секции мы рассмотрим некоторые особенности построения символического образа гомеоморфизма на проективном расслоении. Пусть $G(f)$ является символическим образом гомеоморфизма $f : M \rightarrow M$ относительно покрытия $C(M) = \{m(1), \dots, m(q)\}$. Для построения символического образа проективного отображения $PF : P \rightarrow P$ удобно выбрать покрытие $C(P)$ пространства P следующим образом. Фиксируем маленькую ячейку $m(j)$ на M , тогда ограничение расслоения $P(m(j))$ диффеоморфно произведению $m(j) \times P^{d-1}$. Пусть $\{m^*(j^*)\}$ является покрытием проективного пространства P^{d-1} . Тогда $C(P) = \{M(jj^*) = m(j) \times m^*(j^*)\}$ является покрытием проективного расслоения P , а проекция любой ячейки покрытия $C(P)$ является ячейкой $C(M)$. В этом случае покрытия проективного расслоения и базы назовем согласованными. Вершины символического образа $G(PF)$ обозначим как (jj^*) . Описанные покрытия индуцируют естественное отображение h из $G(PF)$ на $G(f)$, сопоставляющее вершинам (jj^*) вершину j , т. е. $h(jj^*) = j$. Так как из $PF(M(kk^*)) \cap M(jj^*) \neq \emptyset$ следует $f(m(k)) \cap m(j) \neq \emptyset$, то ориентированное ребро $(kk^*) \rightarrow (jj^*)$ графа $G(PF)$ отображается на ориентированное ребро $k \rightarrow j$ графа $G(f)$. Следовательно отображение h переводит ориентированный граф на ориентированный граф так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Ver} & \xrightarrow{G(PF)} & \text{Ver} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \text{ver} & \xrightarrow{G(f)} & \text{ver} \end{array}$$

является коммутативной. Здесь через Ver и ver обозначены вершины $G(PF)$ и $G(f)$, соответственно. Отображение h переводит допустимые пути на допустимые пути и, в частности, периодические пути отображаются на периодические пути, а классы эквивалентных возвратных вершин отображаются на классы эквивалентных возвратных вершин.

12.6. Оснащенный символический образ и его спектр

Пусть $F : E \rightarrow E$ есть линейное расширение гомеоморфизма $f : M \rightarrow M$ и $PF : P \rightarrow P$ — индуцированное проективное отображение. Пусть $C = \{M(i)\}$ является покрытием проективного пространства P и $G = G(PF)$ — символический образ гомеоморфизма PF относительно C . Существование ориентированного ребра $i \rightarrow j$ на G означает, что существует точка (x, y) в ячейке $M(i)$, образ которой $PF(x, y)$ лежит в ячейке $M(j)$. Ребру $i \rightarrow j$ сопоставим число $a[ji] = |A(x)e(y)| = a(x, y)$, которое является коэффициентом изменения длины при действии матрицы $A(x)$ на прямой $L(y)$. Ясно, что описанная точка $(x, y) \in M(i)$ не является единственной. Если $(x^*, y^*) \in M(i)$ — другая точка, такая, что $PF(x^*, y^*) \in M(j)$, то справедлива оценка

$$|a(x^*, y^*) - a(x, y)| < \eta(d),$$

где $\eta(d)$ есть модуль непрерывности функции $a(x, y)$ и d — максимальный диаметр ячеек покрытия C .

Определение 12.3. Структуру, состоящую из символического образа G и чисел $\{\ln a[ji]\}$, мы назовем оснащенным символическим образом и обозначим G^* .

Каждый периодический путь $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\}$ на G периода p индуцирует коэффициент изменения длины вдоль этого пути

$$a[\omega] = a[z_p z_{p-1}] \dots a[z_2 z_1] a[z_1 z_0].$$

Число $\sigma(\omega) = (a(\omega))^{\frac{1}{p}}$ назовем мультипликатором и число

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \ln a[z_k z_{k-1}] = \ln \sigma(\omega)$$

назовем характеристическим показателем Ляпунова периодического пути ω .

Определение 12.4. Спектром оснащенного символического образа G^* называется множество

$$\Sigma(G^*) = \{\lambda \in R : \text{существует последовательность периодических путей } \omega_k \text{ на } G \text{ таких, что } \lambda(\omega_k) \rightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty\}.$$

Нетрудно понять, что спектр оснащенного символического образа является аналогом спектра Морса соответствующей динамической системы. Мы опишем конструктивный метод вычисления спектра символического образа и затем сравним этот спектр со спектром Морса динамической системы.

Заметим, что впервые метод оценки спектра Морса с помощью символического образа был предложен Г.С. Осипенко в работе [85]. Он доказал, что спектр Морса динамической системы можно оценить через спектр оснащенного символического образа. Эту теорему мы приведем ниже.

Рассмотрим некоторый класс H эквивалентных возвратных вершин. Периодический путь $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\} \subset H$ назовем простым, если его вершины z_1, \dots, z_p различны, т. е. $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, p$. Так как символический образ имеет конечное число вершин, число различных простых периодических путей конечно. Пусть ϕ_1, \dots, ϕ_q есть полный набор простых периодических путей для класса H с периодами p_1, \dots, p_q соответственно. Характеристический показатель простого периодического пути $\phi_j = \{z_1^j, \dots, z_{p_j}^j\}$ определяется как

$$\lambda(\phi_j) = \frac{1}{p_j} \sum_{k=1}^{p_j} \ln a[z_k^j z_{k-1}^j]. \quad (12.6)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) &= \min\{\lambda(\phi_j), j = 1, \dots, q\}, \\ \lambda_{\max}(H) &= \max\{\lambda(\phi_j), j = 1, \dots, q\} \end{aligned}$$

есть наименьший и наибольший из характеристических показателей простых периодических путей класса H .

Теорема 12.1. Спектр оснащенного символического образа G^* состоит из интервалов $[\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)]$, где $\{H_k\}$ — полный набор классов эквивалентных возвратных вершин символического образа G .

Эта теорема дает метод вычисления оснащенного символического образа, а именно сводит это вычисление к нахождению максимума и минимума функционала (12.6) на оснащенном графе. Заметим, что при большом числе простых путей задача нахождения экстремумов не является тривиальной.

Следует подчеркнуть, что интервалы $[\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)]$ могут пересекаться. Примеры подобной ситуации для динамических систем можно найти в работах [101, 51].

12.7. Оценка спектра Морса сверху

По теореме 12.1, спектр оснащенного символического образа можно найти с помощью соответствующих вычислений. В этом разделе мы найдем отрезки, содержащие спектр Морса, предполагая известным спектр некоторого оснащенного символического образа. Так как M — компакт, то отображение $A(x)$ имеет модуль непрерывности $\eta_A(\rho)$ по x , т.е. $|A(x_1) - A(x_2)| \leq \eta_A(\rho)$, где $\rho = \rho(x_1, x_2)$ — расстояние от x_1 до x_2 . Обозначим

$$\eta(\rho) = \eta_A(\rho) + \max_{x \in M} |A(x)|\rho,$$

$$\theta = (\min_{x \in M, |e|=1} |A(x)e|)^{-1} = \max_{x \in M} |A^{-1}(x)| > 0.$$

Утверждение 12.1. Пусть $\omega = \{i_0, \dots, i_p = i_0\}$ — допустимый периодический путь на G , $\lambda(\omega)$ — характеристический показатель ω , $\xi = \{(x_0, y_0), \dots, (x_p, y_p) = (x_0, y_0)\}$ — периодическая псевдотраектория, причем $(x_k, y_k) \in M(i_k)$ и $\sigma(\xi)$ — ее показатель. Тогда

$$|\lambda(\omega) - \sigma(\xi)| \leq \theta\eta(d),$$

где d — максимальный диаметр ячеек покрытия C .

Согласно утверждению 2.1 любая ε -траектория, при $\varepsilon < r$ — нижняя грань символического образа, реализуется в виде допустимого пути на G . Отсюда и из утверждения 12.1 следует

Утверждение 12.2. Пусть $\xi = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p) = (x_0, y_0)\}$ — периодическая ε -траектория, $\varepsilon < r$ и номер z_k такой, что $(x_k, y_k) \in M(z_k)$. Тогда $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\}$ — допустимый периодический путь и для любого оснащения G^* характеристический показатель $\lambda(\omega)$ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda(\omega) - \lambda(\xi)| \leq \theta\eta(d),$$

где d — диаметр покрытия C .

Данное утверждение показывает, что показатели периодических псевдотраекторий и соответствующих им периодических путей на символическом образе не сильно отличаются.

Теорема 12.2. Спектр Морса отображения $F : E \rightarrow E$ лежит в семействе интервалов

$$\{[\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)]\},$$

построенных для любого оснащения G^* , где $\{H_k\}$ — полный набор классов эквивалентных обратных вершин на символическом образе G , d — наибольший диаметр ячеек покрытия C .

Из теоремы 12.2 следует, что спектр Морса может быть оценен сверху как

$$\bigcup_k [\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)]$$

для любого оснащенного символического образа G^* . Так как символический образ G имеет конечное число вершин, то число интервалов $I_k = [\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)]$ также является конечным. Однако спектр отображения F может состоять из бесконечного числа интервалов. Например, рассмотрим линейное расширение F , индуцированное системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \sin \frac{1}{x}, \\ \dot{y} &= xy \end{aligned}$$

над уравнением $\dot{x} = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ясно, что цепно-рекуррентное множество базы состоит из состояний равновесия $\{0; \frac{1}{\pi k}, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Так как характеристический показатель линейного уравнения $\dot{y} = x^*y$ совпадает с числом x^* , то спектр отображения F есть $\{0; \frac{1}{\pi k}, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Фиксируем некоторое оснащение символического образа G^* . Обозначим $\tilde{\Sigma}$ объединение интервалов $\tilde{I}_k = [\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)]$, где d — максимальный диаметр ячеек на проективном пространстве. Полученное в качестве оценки множество $\tilde{\Sigma}$ назовем расширением спектра Σ . Напомним, что расстояние Хаусдорфа $H(A, B)$ между множествами A и B определяется как

$$H(A, B) = \max\{h(A, B), h(B, A)\},$$

где

$$h(A, B) = \sup_{u \in B} \rho(u, A) = \sup_{u \in B} \inf_{v \in A} \rho(u, v),$$

$\rho(u, v)$ — расстояние между точками u и v .

Теорема 12.3. Пусть $\{G^{*m}\}$ есть последовательность оснащенных символьических образов $\{G^m\}$ с максимальными диаметрами ячеек d^m и $\tilde{\Sigma}_m$ — последовательность расширенных спектров. Если $d^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ тогда расстояния Хаусдорфа

$$\begin{aligned} H(\Sigma(F), \Sigma) &\rightarrow 0, \\ H(\Sigma(F), \tilde{\Sigma}_m) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$.

Теорема 12.3 гарантирует, что хорошее приближение спектра Морса может быть получено, если выбрать достаточно мелкое покрытие C . Однако какие-либо оценки для максимального диаметра d покрытия отсутствуют. В этом случае наиболее предпочтительным является алгоритм, который строит монотонную последовательность множеств, сходящуюся к искомому спектру. Рассмотрим один из таких алгоритмов.

12.8. Локализация спектра динамической системы

Для локализации спектра Морса динамической системы модифицируем алгоритм локализации цепно-рекуррентного множества.

1. Строится исходное покрытие $C(P)$ и полагается $\Sigma_0 = R$. Определяется оснащенный символьический образ G отображения F . Ячейки исходного покрытия могут иметь произвольный диаметр d_0 .
2. На графе G определяются классы $\{H_m\}$ эквивалентных возвратных вершин и в каждом классе H_m находятся простые периодические пути $\{\phi_j^m\}$.
3. С использованием наборов простых периодических путей $\{\phi_j^m\}$, определяются интервалы $I_m = [\lambda_{min}(H_m) - \theta\eta(d), \lambda_{max}(H_m) + \theta\eta(d)]$ и $\Sigma_{n+1} = (\bigcup_m I_m) \cap \Sigma_n$.
4. Ячейки $\{M(i_k)\}$, соответствующие возвратным вершинам символьического образа подвергаются подразбиению. Остальные ячейки (невозвратные) исключаются из рассмотрения. Таким образом, определяется новое покрытие.
5. Строим символьический образ G для нового покрытия.
6. Переходим ко второму пункту.

Повторяя процесс измельчения покрытия и вычисления интервалов, мы получим последовательность диаметров $\{d_k\}$ и последовательность множеств $\{\Sigma_n\}$.

Теорема 12.4. [88, 30] Построенная последовательность $\{\Sigma_n\}$ обладает следующими свойствами:

- (i) каждое множество Σ_n содержит спектр Морса отображения F ,
- (ii) множества Σ_k вложены друг в друга, т.е.

$$\Sigma_0 \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \dots \supset \Sigma(F),$$

- (iii) если наибольший диаметр $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_k = \bigcap_k \Sigma_k = \Sigma(F).$$

Таким образом, предложенный алгоритм дает монотонно убывающую последовательность множеств, сходящуюся к спектру Морса.

12.9. Экспоненциальные оценки

Рассмотрим применение полученных результатов для оценки действия отображения F вдоль ε -траектории $\xi = \{(x_i, y_i)\}$. Согласно теореме 2.1, если $\varepsilon < r$, r — нижняя грань символического образа, то ε -траектории ξ соответствует допустимый путь $\omega = \{z_i\}$ символического образа, где $z_i : (x_i, y_i) \in M(z_i)$. Согласно теореме 12.2, спектр Морса лежит в объединении интервалов $\{\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)\}$, где $\{H_k\}$ — полный набор классов эквивалентных обратных вершин. Интервал $[\lambda_{\min}(H) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H) + \theta\eta(d)]$ естественно назвать расширенным спектром класса H .

Теорема 12.5. Если спектр класса H лежит в интервале $[a, b] = [\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)]$, то существуют положительные числа K_* и K^* такие, что для любой конечной ε -траектории $\xi = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)\}$, $\varepsilon < r$, r — нижняя грань символического образа, для которой соответствующий допустимый путь $\omega = \{z_i : (x_i, y_i) \in M(z_i)\}$ лежит в H , имеет место оценка

$$K_* \exp(pa) \leq \prod_{k=0}^{p-1} |F(x_k, e(y_k))| \leq K^* \exp(pb).$$

Следствие 12.1. Пусть конечная траектория $\xi = \{(x_k, y_k) = PF^k(x, y), k = 0, 1, \dots, p\}$ точки $(x, y) \in P$ такова, что соответствующий ей путь $\omega = \{z_k : (x_k, y_k) \in M(z_k)\}$ лежит в H , тогда

$$K_* \exp(pa)|v| \leq |F^p(x, v)| \leq K^* \exp(pb)|v|,$$

где $v \in L(y)$.

Таким образом, спектр Морса дает экспоненциальные оценки действия линейного расширения вдоль траекторий.

12.10. Цепно-рекуррентные компоненты на проективном раслоении

Подмножество $\Omega \subset CR$ назовем компонентой цепно-рекуррентного множества, если любые две точки из Ω можно соединить периодической ε -траекторией для любого положительного ε . Рассмотрим некоторые результаты о свойствах компонент цепно-рекуррентного множества на проективном расслоении.

Напомним, что замкнутое, асимптотически устойчивое по Ляпунову множество называется аттрактором и аттрактор для обратного отображения называется репеллером для прямого отображения. Пересечение аттрактора и репеллера называется множеством Морса. Фильтрация гомеоморфизма PF есть конечная последовательность $\{U_0 = \emptyset, U_1, \dots, U_l\}$ открытых множеств таких, что $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_l = P$ и для каждого $k = 0, 1, \dots, l$, $PF(\overline{U_k}) \subset U_k$. Второе условие является свойством фундаментальной окрестности аттрактора.

Теорема 12.6. [23, 51, 101] Пусть F — линейное расширение гомеоморфизма $f : M \rightarrow M$ на векторном расслоении (E, M, π) и PF — его индуцированное отображение на проективном расслоении (P, M, p) . Если Ω — цепно-рекуррентная компонента отображения f на M , то

- (i) цепно-рекуррентное множество сужения $PF|_{p^{-1}(\Omega)}$ имеет конечное число компонент $\Omega_1, \dots, \Omega_l$, $1 \leq l \leq \dim E$, которое является разложением Морса;
- (ii) каждое множество Ω_i определяет (непрерывное, постоянной размерности) подрасслоение E_i над Ω

$$E_i = \{v \in \pi^{-1}(\Omega) : v \neq 0 \Rightarrow [v] = y \in \Omega_i\};$$

- (iii) имеет место разложение

$$E|_{\Omega} = E_1 \oplus \dots \oplus E_l;$$

(iv) обратно, любая цепно-рекуррентная компонента Ω_* на проективном расслоении P проектируется на некоторую цепно-рекуррентную компоненту Ω базы M и имеет вид, описанный в пункте (ii).

В частности, из пункта (iv) следует, что любая компонента Ω_* цепно-рекуррентного множества проективного расслоения P пересекает каждый слой $p^{-1}(x)$ по некоторому проективному многообразию, которое непрерывно зависит от $x \in \Omega = p(\Omega_*)$. Дж.Селгрэйд показал [101], что данное свойство имеет место не только для компоненты цепно-рекуррентного множества, но и для любого множества Морса Ω_* на проективном расслоении. Описанное в (i)-(iii) разложение называется самым тонким разложением Морса на проективном расслоении.

Пусть $C(M) = \{m(j)\}$ — покрытие многообразия M и $C(P) = \{M(z)\}$ — согласованное покрытие проективного расслоения P , т.е. проекция ячейки есть ячейка: $p(M(z)) = m(j)$. Обозначим $G(f)$ и $G(PF)$ символические образы отображений f и PF соответственно. Как было указано выше, для согласованных покрытий существует естественное "проектирование" $h(z) = j$ из $G(PF)$ на $G(f)$, где $p(M(z)) = m(j)$. При этом проекция h есть отображение ориентированного графа $G(PF)$ на ориентированный граф $G(f)$.

Теорема 12.7. [88, 30] Пусть $G(f)$ и $G(PF)$ символические образы отображений f и PF для согласованных покрытий $C(M)$ и $C(P)$ соответственно. Если H — класс эквивалентных возвратных вершин символического образа $G(f)$ и $\{H_1, \dots, H_l\}$ полный набор классов эквивалентных возвратных вершин на символическом образе $G(PF)$, которые проектируются на H (т.е. $h(H_m) = H$, $m = 1, \dots, l$), Ω_m наибольшее инвариантное множество, лежащее в $V_m = \{\bigcup M(z), z \in H_m\}$, (возможно $\Omega_m = \emptyset$) то

- (i) l — число классов H_m , таких, что $\{h(H_m) = H, \Omega_m \neq \emptyset\}$ не превосходит $\dim E$;
- (ii) набор множеств $\{\Omega_1, \dots, \Omega_l\}$ является разложением Морса;
- (iii) каждое множество Ω_m определяет (непрерывное, постоянной размерности) подрасслоение E_m над Ω — компонентой цепно-рекуррентного множества, лежащей в $V = \{\bigcup m(j), j \in H\}$:

$$E_m = \{v \in \pi^{-1}(\Omega) : v \neq 0 \Rightarrow [v] = y \in \Omega_m\};$$

- (iv) имеет место разложение

$$E|_{\Omega} = E_1 \oplus \dots \oplus E_l;$$

- (v) если спектр класса H_m лежит в интервале $[a_m, b_m]$, то для любой точки $(x, v) \in E_m$ и $p > 0$ имеют место оценки

$$K_* \exp(pa_m) |v| \leq |F^p(x, v)| \leq K^* \exp(pb_m) |v|,$$

где числа K_* и K^* не зависят от P и $x \in M$;

(v) для любой компоненты Ω цепно-рекуррентного множества на M найдется число $d_0 > 0$ такое, что для любого покрытия $C(P)$ с максимальным диаметром ячеек $d < d_0$ полный набор классов эквивалентных возвратных вершин $\{H_m\}$ на символическом образе $G(PF)$ индуцирует (см. (ii)) разложение $\{\Omega_1, \dots, \Omega_l\}$, которое является самым тонким разложением Морса над Ω .

12.11. Проверка гиперболичности

Пусть $F : E \rightarrow E$ — линейное расширение гомеоморфизма $f : M \rightarrow M$ и Ω — инвариантное множество в M . Будем говорить, что отображение F гиперболично над Ω , если существует инвариантное разложение $E|_{\Omega} = E^s \oplus E^u$ и числа a и $\lambda > 0$ такие, что для любого $p > 0$ выполняются неравенства

$$|F^p(x, v)| < a \exp(-\lambda p) |v| \text{ для } v \in E^s,$$

$$|F^{-p}(x, v)| < a \exp(\lambda p) |v| \text{ для } v \in E^u.$$

Теорема 12.8. 1) Пусть выполнены условия теоремы 12.7. Если 0 не лежит в расширенном спектре $\{[\lambda_{\min}(H_k) - \eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \eta(d)], k = 1, \dots, l\}$, то линейное расширение F гиперболично над $\Omega \subset \{\bigcup M(i), i \in H\}$.

2) Если линейное расширение F гиперболично над компонентой цепно-рекуррентного множества $\Omega \subset M$, то существует $d_0 > 0$ такое, что для любого покрытия $C(P)$ проективного расслоения PE с максимальным диаметром ячейки $d < d_0$, согласованного с покрытием $C(M)$, найдется класс H на символическом образе $G(f)$ такой, что $\Omega \subset \{\bigcup M(i), i \in H\}$, а расширенный спектр классов $H_k, h(H_k) = H$ не содержит 0.

Теорема позволяет проверить гиперболичность с помощью компьютерно-ориентированного алгоритма. Более того, она гарантирует, что такая проверка возможна для достаточно мелкого покрытия. Это означает, что если применить метод последовательного подразбиения, то через конечное число шагов мы сможем проверить гиперболичность.

12.12. Вычисление спектра Морса

Как следует из всего вышесказанного, спектр Морса — это предельное множество показателей Ляпунова периодических псевдо-траекторий. Эта характеристика особенно важна, когда динамическая система имеет бесконечно много периодических траекторий, периоды которых неограничены. При использовании символического образа вычисление спектра Морса связано с поиском простых замкнутых путей и выделением среди них контуров с нужными характеристиками. К сожалению, при построении последовательности символьических образов число таких путей резко возрастает, что приводит к колоссальным затратам памяти и времени вычислений. Чтобы преодолеть эти проблемы, предлагается использовать алгоритм построения контуров с наибольшим и наименьшим значениями показателей, основанный на методе линейного программирования [37]. Мы приведем описание метода и основанные на нем результаты вычислений.

Определение контуров с экстремальными характеристиками Напомним некоторые сведения, необходимые для описания метода решения.

Пусть задан конечный ориентированный граф $\langle M, N \rangle$, где M — его множество вершин, а N — множество дуг. Каждой дуге $j \in N$ сопоставляется некоторое число c_j , характеристика дуги (в нашем случае $c_j = \ln a_j$). Любому контуру графа можно сопоставить его характеристику как среднее значение характеристик дуг, входящих в контур. Требуется найти контур с минимальной характеристикой (случай максимальной характеристики легко получается сменой знака у характеристик дуг).

В 1967 г. в работе [37] эта задача была сведена к специальной задаче линейного программирования и был построен метод ее решения, по существу являющийся специализированным симплекс-методом.

Основная идея этого метода состоит в следующем. Введем дополнительные переменные, характеризующие дуги и назовем их, например, длинами дуг (для дуги с номером j ее длина есть l_j). Вычислим сумму длин дуг, входящих в контур C и обозначим ее λ_C . Теперь каждому контуру поставим в соответствие вектор $Y = y_u, u \in C$ (контурный вектор), составленный по следующему правилу $y_u = \lambda_C$ при $u \in C, y_u = 0$ в остальных случаях.

Пусть число дуг в контуре C равно m . Введем также величины $x_j = l_j / \lambda_C$, которые образуют нормированный контурный вектор. Тогда задача о нахождении контуров с экстремальными характеристиками может быть сведена к следующей.

Найти набор неотрицательных переменных $x_j, j \in N$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j \in N} x_j = 1,$$

$$\sum_{j: e(j)=i} x_j - \sum_{j: b(j)=i} x_j = 0, \quad i \in M$$

(где $b(j)$ и $e(j)$ — соответственно начало и конец дуги j) и минимизирующих линейную функцию

$$\sum_{j \in N} c_j x_j.$$

Условия, накладываемые на переменные x_j , означают, что рассматривается замкнутый поток, в котором сумма потоков на дугах равна 1. В этой задаче каждая крайняя точка многогранника допустимых решений является элементарным замкнутым потоком — нормированным “контурным вектором”, т.е. таким набором переменных x_j , у которого все отличные от нуля значения равны между собой и в сумме равны 1 ($x_j = 1/m$), а соответствующие им дуги j являются дугами некоторого контура. Легко видеть, что значение целевой функции на контурном векторе совпадает с характеристикой соответствующего контура.

Таким образом, если m обозначает количество дуг в контуре, то при $x_j = 1/m$ мы получаем

$$\sum_{j \in N} c_j x_j = 1/m \sum_{j \in N} c_j = 1/m \sum_{j=1}^m \ln a_j.$$

Иначе говоря, контуры с наибольшим и наименьшим средним дают нам максимальное и минимальное значения характеристических показателей Ляпунова периодических путей на оснащенном символическом образе.

Заметим, что в связи с возникшей потребностью решения задач большого размера в метод [37] были внесены следующие изменения:

1. Для упрощения логики метода и предельного сокращения размерности выполняется предварительная подготовка графа $\langle M, N \rangle$. Именно, в нем выделяются сильносвязные компоненты — т. е. классы эквивалентности возвратных вершин — (эта операция линейна по числу дуг [34]), и задача решается для каждой такой компоненты отдельно.
2. Для каждой сильносвязной компоненты при реализации специализированного симплекс-метода допустимое базисное решение не пересчитывается явно, а значительная его часть строится заново с использованием метода типа метода Б. Ю. Левита для решения задачи о кратчайшем пути.
3. Используется очень эффективный метод построения начального допустимого базисного решения.

Для дальнейшего изложения мы ограничимся случаем, когда упомянутая в п. 1 предварительная подготовка уже выполнена и граф $\langle M, N \rangle$ сильно связан, т. е. в нем имеется путь из любой вершины в любую другую.

Метод типа симплексного предназначен для нахождения крайних точек многогранника допустимых решений, поэтому его применение в этом случае и даст нам контур с минимальной характеристикой. Но алгоритм работает не с крайними точками многогранника, а с более сложными конструкциями — допустимыми базисными решениями задачи линейного программирования. Такое решение определяется базисным множеством, — подмножеством $N' \subset N$, мощность которого равна рангу соответствующей ему подматрицы матрицы ограничений и рангу всей матрицы. Легко показать, что для того, чтобы множество N' было базисным, необходимо и достаточно, чтобы граф $\langle M, N' \rangle$ был деревом с одной дополнительной дугой и эта дополнительная дуга порождала в графе (единственный) контур. Этот контур является носителем самой крайней точки, а остальные дуги базисного решения используются для нахождения значений двойственных переменных. Напомним, что одновременно с основной (прямой) задачей линейного программирования ставится и решается следующая двойственная задача.

Найти переменную z и набор переменных v_i , $i \in M$, удовлетворяющие условиям

$$z + v_{e(j)} - v_{b(j)} \leq c_j, \quad j \in N,$$

и максимизирующие z .

В обычной схеме симплекс-метода базисному набору индексов N' отвечает система уравнений

$$v_{e(j)} - v_{b(j)} = c_j - z, \quad j \in N',$$

имеющая решение, единственное с точностью до постоянного слагаемого у переменных v (что позволяет называть их потенциалами). Эту систему приходится решать на каждой итерации, и решать удобно, находя сначала z как характеристику базисного контура, а затем, игнорируя одну из дуг контура и задав v для одной из вершин, на оставшемся базисном дереве последовательно находить все остальные потенциалы (как в методе потенциалов для транспортной задачи линейного программирования). Если полученные таким образом z и v удовлетворяют неравенствам

$$v_{e(j)} - v_{b(j)} \leq c_j - z, \quad j \in N,$$

то решение прямой задачи является оптимальным, и контур с минимальной характеристикой найден.

Однако, описанную схему расчетов можно сильно упростить и сделать более эффективной. Назовем дерево направленным с корнем i_0 , если в нем есть пути из i_0 во все остальные вершины. Используя это определение и учитывая, что речь идет о сильно связном графе, введем в алгоритм следующие изменения. Во-первых, будем рассматривать в качестве базисного графа $\langle M, N' \rangle$ направленное дерево, к которому добавлена одна дуга, ведущая в корневую вершину i_0 . Во-вторых, будем строить направленное дерево на каждой итерации заново, стремясь по возможности соблюдать требуемые неравенства. Для построения дерева используется техника, разработанная для решения задачи о кратчайшем пути. Известный метод Дейкстры [57] здесь не годится, так как “длины дуг” $c_j - z$ могут быть разного знака, лучше подходит метод Левита [27], близкий по технике, но более гибкий.

При построении дерева все множество вершин разбивается на три подмножества $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, где M_0 — множество обработанных алгоритмом вершин, M_1 — множество вершин, ждущих обработки, M_2 — вершины, до которых алгоритм еще не добрался. Вершины M_1 будут организованы в очередь. В любой момент у нас имеется направленное дерево с множеством вершин $M_0 \cup M_1$ с корнем в некоторой вершине i_0 , и для всех вершин $M_0 \cup M_1$ вычислены (возможно, не окончательно) потенциалы v .

Будем говорить, что вершина i_1 предшествует вершине i_2 , если i_1 лежит на контуре, либо в дереве существует путь из i_1 в i_2 .

Алгоритм построения дерева и оптимального контура

1. По заданному контуру $\langle M_c, N_c \rangle$ вычислить его характеристику z и, выбрав $i_0 \in M_c$ и положив $v[i_0] = 0$ найти все остальные $v[i]$ для $i \in M_c$. Образовать из контура дерево, удалив из рассмотрения (единственную) дугу, входящую в i_0 .
2. Включить в множество M_1 все вершины из M_c , образовав из них список.
3. Пока список M_1 не пуст, выполнять следующие действия (обработку вершины)
 - (a) Исключить из списка первую вершину i_1 и перевести ее в M_0 .
 - (b) Для каждой дуги j , такой что $b(j) = i_1$, вычислить

$$w = v[i_1] + c_j - z.$$

Положить $i_2 = e(j)$.

Если $i_2 \in M_2$, то перевести вершину i_2 из M_2 в M_1 , приписав ее в конце списка. Положить $v[i_2]$ равным w . Добавить к дереву дугу j .

Иначе (если $i_2 \in M_0 \cup M_1$) сравнить w с $v[i_2]$. Если $w \geq v[i_2]$, то закончить обработку этой дуги и перейти к пункту а).

Иначе проверить, не предшествует ли вершина i_2 вершине i_1 в имеющемся дереве. Если предшествует, то дуга j замыкает контур с характеристикой, меньшей чем z . Закончилась итерация нашего “симплекс-метода”. Теперь новый контур нужно взять в качестве базового и повторить алгоритм заново, т.е перейти к пункту 1.

Если же вершина i_2 не предшествует вершине i_1 , то нужно положить $v[i_2]$ равным w , включить в дерево дугу j , заменив ею какую-то другую дугу с концом i_2 , и в случае, если вершина i_2 уже находится в M_0 , перевести ее для повторной обработки в M_1 , поставив в начало списка (для пересчета потенциалов на дереве от i_2 и ниже). Перейти к пункту а).

4. Если вычисления дошли до этого пункта, то построена система потенциалов, удовлетворяющая требуемым неравенствам, и базисный контур имеет минимальную характеристику.

Что касается выбора начального базисного контура, то достаточно эффективна следующая процедура.

1. Для каждой вершины $i \in M$ среди выходящих из i дуг выбрать дугу $j(i)$ с наименьшим c_j . Множество отобранных дуг обозначим через N_s .
Подсчитать для каждой вершины i ее степень $s[i]$ — число входящих в нее отобранных дуг.
2. Составим список вершин с нулевой степенью.
3. Пока список не пуст, выполнять следующие действия
 - (a) Исключить из списка первую вершину i_1 .
 - (b) Исключить $j(i_1)$ из N_s .
 - (c) Уменьшить на единицу степень вершины $i_2 = e(j(i_1))$, если эта степень стала нулевой, то включить i_2 в список.
4. По исчерпании списка дуги, еще входящие в N_s образуют изолированные контуры, нужно их просмотреть и выбрать контур с минимальной характеристикой.

Численный эксперимент

Пример 12.2. Линейная система. Рассмотрим дискретную систему вида

$$F : \begin{aligned} x_1 &= 2x, \\ y_1 &= 1/2y. \end{aligned} \quad (12.7)$$

У нее существует единственная гиперболическая неподвижная точка $(0,0)$. Собственные числа матрицы Якоби в этой точке равны соответственно 2 и $1/2$. В этом случае спектр Морса состоит из двух чисел, представляющих собой логарифмы собственных чисел. Результаты эксперимента дают два интервала: $[-0.69287, -0.69287]$ и $[0.69313, 0.69313]$, т.е приближенные значения логарифмов собственных чисел. Нужно отметить, что в этом примере якобиан системы равен 1 и, как следствие, в результате построения символического образа получается много компонент сильной связности, причем часть из них — “ложные”, т.е. $\Omega_i = \emptyset$. Следовательно, возникает задача определения того, какие компоненты являются настоящими, а какие ложными. Для этого нужно строить отображения между двумя последовательными итерациями символического образа, как это сделано при построении структурного графа (см. гл. 9).

Пример 12.3. Отображение Хенона. Рассмотрим отображение

$$F : \begin{aligned} x_1 &= y + 1 - ax^2, \\ y_1 &= b x, \end{aligned} \quad (12.8)$$

где $a = 1.4$, $b = 0.3$. Как известно, при данных значениях параметров у отображения существуют две седловые неподвижные точки, координаты которых вычисляются по формулам

$$x = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y = bx.$$

Точки вещественны при выполнении неравенства $a > (1-b)^2/4$. Координаты неподвижных точек:

$$(x_1, y_1) = (-1.1313545, -0.3394063), (x_2, y_2) = (0.63135448, 0.18940634).$$

Собственные числа матрицы Якоби в точке (x, y) определяются по формулам: $\lambda(x) = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}$. В точке (x_1, y_1) собственные числа равны $\lambda_1 = -0.09202956$, $\lambda_2 = 3.2598221$. В точке (x_2, y_2) значения равны $\lambda_1 = 0.15594632$, $\lambda_2 = -1.92373886$.

Вычисляя логарифмы абсолютных значений собственных чисел, получаем:

$$\ln |\lambda_1(x_1)| = -2.38564544; \quad \ln |\lambda_2(x_1)| = 1.18167262;$$

$$\ln |\lambda_1(x_2)| = 0.65427061; \quad \ln |\lambda_2(x_2)| = -1.85824343.$$

При численном исследовании начальная область была выбрана $[-10, 10] \times [-10, 10]$, при начальном разбиении 10×10 ячеек. Итерации проводились до того момента, пока размеры ячейки не составили 0.001953×0.001953 . Символический образ распался на две сильные компоненты, одна из которых содержала 2 вершины, а вторая — 15179. На первых итерациях оснащенный символический образ распался на 5 сильных компонент, две из которых содержали по 1 вершине, две — по 3 вершины и одна — 27748. Отметим, что при последующих итерациях четыре малые компоненты сохранились. Оценка спектра Морса на полученных компонентах: $\{1.184467\}, \{-2.388265\}, [-2.389518, -2.388891], [1.181143, 1.182805], [-1.904604, 0.659633]$.

Таким образом, логарифмы абсолютных значений собственных чисел попадают в интервалы, полученные в результате численного эксперимента.

Пример 12.4. Отображение с задержкой. Дискретная динамическая система вида

$$F : \begin{aligned} x_1 &= y, \\ y_1 &= a y(1-x) \end{aligned} \tag{12.9}$$

получена из итерационного уравнения

$$N_{n+1} = aN_n(1 - N_{n-1}),$$

которое представляет собой стандартную дискретную логистическую модель. Здесь N_n обозначает плотность популяции в n -ом поколении, а параметр a отражает скорость роста. Преобразование к двумерной системе проводится с помощью замены переменных $x_n = N_{n-1}$, $y_n = N_n$. В наших обозначениях переход из состояния n в состояние $n+1$ соответствует вышеприведенной записи. Система обладает двумя неподвижными точками: $O_1 = (0, 0)$ и $O_2 = (1 - 1/a, 1 - 1/a)$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda a(1-x) + ay = 0.$$

Начало координат является седловой точкой при $a > 1$. Собственные числа в точке O_1 равны 0 и a . Точка O_2 является фокусом при $a > 5/4$. Собственные числа в этой точке равны $\lambda_{1,2} = 1/2(1 \pm \sqrt{5-4a})$, так что фокус устойчив для $|\lambda| < 1$, т.е. $a < 2$. При $a > 2$ точка теряет устойчивость через бифуркацию Хопфа. Возникающая при этой бифуркации инвариантная кривая разрушается при $a = 2.27$ с появлением странного аттрактора. Заметим, что при этих значениях параметра возникает гомоклиническое касание неустойчивой сепаратрисы седловой неподвижной точки с осью абсцисс.

Для значения параметра $a = 2.1$ получены следующие данные. Начальная область $[0, 10] \times [0, 10]$, начальное разбиение — 10×10 ячеек. На первых итерациях символический образ распадается на 2 сильные компоненты, первая содержит 1 вершину, вторая — все остальные. После 3

итераций большая сильная компонента распадается на 5 сильных компонент, из которых только 2 можно считать истинными, так как остальные не появляются при последующих итерациях. Итерации проводились до того момента, пока размеры ячейки не составили 0.0031×0.0031 .

Одно-элементная компонента после перехода к оснащенному символическому образу распалась на 2 одноэлементных сильных компоненты. Оценка спектра Морса для них получилась: $\{0.741406\}$ и $\{-7.944687\}$. На второй по величине компоненте оснащенный символический образ имеет 1 сильную компоненту. Оценка спектра Морса в этом случае следующая: $[0.010782, 0.095056]$. Самая большая сильная компонента символического образа в оснащенном символическом образе на начальных итерациях представляет собой одну сильную компоненту. Оценка спектра Морса на ней: $[-0.183874, 0.203773]$.

Пример вычисления спектра Морса для отображения Икеда, обладающего гиперболическим инвариантным множеством, будет подробно рассмотрен в главе 14.

Глава 13

Эквивалентность динамических систем

Основными типами современной математической модели являются дифференциальные или разностные уравнения, описывающие некоторую реально существующую динамическую систему. Сначала эти уравнения необходимо составить так, чтобы они адекватно описывали динамику системы, а затем определить структуру решений или траекторий системы. Уже на этапе составления математической модели мы абстрагируемся от некоторых несущественных на наш взгляд свойств системы. Более того, многие параметры модели определяются только приближенно. Следовательно, реальная исходная система заменяется некоторым модельным приближением. После построения модели возникает проблема решения полученной системы уравнений. При этом решение желательно получить в виде аналитического выражения или формулы, описывающей зависимость текущего значения от времени и начальных данных. Если этого не удается сделать, то используются различные численные методы построения решений. В этом случае модельная система заменяется другой системой, порожденной выбранным численным методом. Численное решение неудобно тем, что оно не содержит информации о динамике системы в целом. Знание решения в виде формулы избавляет нас от проблем численного анализа. Поэтому многие практики предпочитают иметь дело с более грубой, но интегрируемой моделью. Лучше всего подобную точку зрения выражает высказывание Н. Е. Жуковского: "Механиком является не тот, кто пишет уравнения, а тот, кто пишет их так, что они интегрируются". Чтобы этого добиться, математическая модель подправляется так, чтобы получилась интегрируемая система и, следовательно, строится еще более слабое приближение исходной системы. Однако и в случае аналитического решения мы вынуждены также применять численные методы для вычисления значений функций. Более того, существует много практических задач, где интегрируемые системы построить невозможно. Таким образом, в любом случае информация, которая получена в результате исследования, относится к динамической системе, которая отличается от исходной системы. В этом случае говорят, что мы имеем возмущение исходной системы.

Качественное изучение динамики системы состоит в геометрическом описании его пространства траекторий. Возникает естественный вопрос: когда два пространства траекторий имеют качественно одинаковые черты? В данной главе мы опишем, что понимается под одинаковой структурой решений различных систем, т. е. определим понятие эквивалентности динамических систем. Затем обсудим понятие возмущение динамической системы. На основании этого будет описана структурная устойчивость динамической системы относительно малого ее возмущения.

13.1. Топологическая эквивалентность

Качественное изучение динамических систем состоит в геометрическом описании его множества траекторий или орбит. В этом случае употребляют термины «пространство траекторий», «топологическая структура траекторий», «фазовый портрет» и другие. Для сравнения пространств траекторий динамических систем надо ответить на вопрос: какие динамические системы имеют одинаковую геометрию траекторий или одинаковые фазовые портреты, то есть надо определить

отношение эквивалентности на множестве динамических систем. Динамическая система задается аналитическим выражением, вид которого зависит от выбранной системы координат. Естественно считать, что две системы эквивалентны, если одна переходит в другую при некоторой замене координат. Пусть два отображения $f : M \rightarrow M$ и $g : D \rightarrow D$ задают дискретные системы на многообразиях M и D соответственно. Обозначим через x и y координаты на M и D соответственно. Тогда системы записываются в виде $x_n = f(x_{n-1})$ и $y_n = g(y_{n-1})$, соответственно. Предположим, что замена координат $h : M \rightarrow D$ переводит область M на D , т.е. $y = h(x)$, а систему f в систему g : $h(x_n) = g(h(x_{n-1}))$. При этом отображение h является взаимнооднозначным. Отсюда следует, что $x_n = h^{-1}(g(h(x_{n-1})))$, или

$$f = h^{-1}gh. \quad (13.1)$$

Таким образом, формула (13.1) описывает преобразование динамической системы при замене координат. Это равенство удобно выражать с помощью следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h. \\ D & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

При замене координат h орбиты системы f переходят в орбиты системы g .

Для непрерывных динамических систем

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad \dot{y}(\tau) = g(\tau, y), \quad t, \tau \in R,$$

существуют две возможности: 1) отображение h сохраняет время, т.е. $t = \tau$ и $f(t, x) = h^{-1}(g(t, h(x)))$, и 2) отображение h переводит траектории на траектории без сохранения времени, но с сохранением ориентации на траекториях. Последнее означает, что допускается монотонно возрастающая параметризация времени $\tau = \alpha(t)$ такая, что

$$f(t, x) = h^{-1}(g(\alpha(t), h(x))). \quad (13.2)$$

Если h сохраняет время, то говорят, что система f динамически эквивалентна системе g . В этом случае периоды траекторий сохраняются. Если h не сохраняет время, то периодические траектории отображаются на периодические траектории, но периоды их могут измениться. Тем не менее, поскольку в этом случае фазовый портрет сохраняется, для наших целей вторая эквивалентность более предпочтительна.

Определение 13.1. Две динамические системы называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм, который переводит траектории одной системы на траектории другой системы. При этом для непрерывных систем гомеоморфизм сохраняет ориентацию траекторий.

Таким образом, структурный график динамической системы и соответствующая ему структурная матрица, рассмотренные в главе 9, одни и те же для топологически эквивалентных систем. Другими словами, они являются топологическими инвариантами динамической системы.

Пример 13.1. Рассмотрим две автономные системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x), \quad \dot{y} = s(y)P(y), \quad x, y \in R^d,$$

где $s(x)$ является положительной функцией на R^d , например $s = 2$. Векторы $P(x)$ и $s(x)P(x)$ отличаются только длиной. Траектория автономной системы — это кривая, которая касается векторного поля во всех своих точках. Так как векторные поля P и sP отличаются только длиной, то любая траектория поля P касается поля sP и, следовательно, является его траекторией. Верно и обратное: траектории поля sP являются траекториями поля P . Таким образом,

рассмотренные системы имеют одинаковые траектории. Однако скорости движения на этих траекториях различны. Так, если $s = 2$, то скорость второй системы в два раза больше чем у первой. Если системы имеют периодическую траекторию, то период ее у второй системы будет в два раза меньше чем у первой. В этом случае отображение h является тождественным и параметризация времени задается соотношением $\tau = t/2$, т.е. имеет место равенство $f(t, x) = g(t/2, x)$, где $f(t, x)$ и $g(\tau, x)$ — решения соответствующих систем дифференциальных уравнений.

Если отображения f и g являются диффеоморфизмами, то кроме топологической эквивалентности можно определить гладкую эквивалентность, т.е. считать h диффеоморфизмом. В этом случае из равенства (13.1) следует равенство для дифференциалов $Df = Dh^{-1}DgDh$. Поэтому дифференциалы $Df(x)$ и $Dg(y)$ в неподвижных точках x и $y = h(x)$ имеют одинаковые собственные числа.

Пример 13.2. Рассмотрим два линейных отображения на прямой

$$f(x) = 0.5x, \quad g(y) = 0.3y.$$

Эти отображения имеют неподвижную нулевую точку, и сжимают с разными коэффициентами. Пространства траекторий (фазовые портреты) данных систем совпадают. Между ними есть топологическая эквивалентность, но нет гладкой эквивалентности, так как собственные числа (0.3 и 0.5) этих линейных отображений различны.

При топологической эквивалентности для дискретных систем выполнено равенство (13.1), для непрерывных систем — равенство (13.2). О структурной устойчивости и бифуркациях систем дифференциальных уравнений см. Приложение А.3.4. Следующее утверждение описывает некоторые свойства пространства траекторий, которые являются общими для топологически эквивалентных динамических систем.

Теорема 13.1. [31] Пусть h — топологическая эквивалентность между системами f и g . Тогда

- а) p — неподвижная точка системы f в том и только в том случае, когда $h(p)$ — неподвижная точка системы g ;
- б) траектория $T_f(p)$ системы f , проходящая через точку p , замкнута тогда и только тогда, когда $T_g(h(p))$ — замкнутая траектория системы g ;
- в) образом ω -предельного множества траектории $T_f(p)$ под действием h является ω -предельное множество траектории $T_g(h(p))$; аналогично для α -предельного множества.

Пример 13.3. Топологическая эквивалентность узла и фокуса. Рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений на плоскости R^2

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y \quad \text{и} \quad \dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y.$$

Обозначим соответствующие векторные поля X и Y . Начало координат является особой точкой для этих полей. Соответствующие решения (потоки) имеют вид

$$f(t, x, y) = \exp t(x, y) \quad \text{и} \quad g(t, x, y) = \exp t(x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t).$$

Траектории первой системы представляют собой прямые, проходящие через начало координат O . Такой вид фазового портрета называется дикритическим узлом. Траектории второй системы — спирали, выходящие из начала координат, фазовый портрет называется фокусом. Построим гомеоморфизм h , переводящий траектории системы f на траектории системы g . Так как O — это единственное состояние равновесия данных систем, то $h(O) = O$. Легко видеть, что все траектории обеих систем, кроме состояния равновесия, пересекают единичную окружность S^1 . Положим $h(p) = p$ для $p \in S^1$, т.е. h является тождественным на S^1 . Вне S^1 отображение h продолжается по траекториям. Если $q \in R^2 \setminus \{O\}$, то существует единственное t такое, что $f(t, q) = p \in S^1$. Положим $h(q) = g(-t, p) = g(-t, f(t, q))$. Непосредственно видно, что h непрерывно и имеет непрерывное обратное. Фазовые портреты для систем f и g показаны на рис.13.1. Построение гомеоморфизма h , сопрягающего соответствующие потоки, показано на рис.13.2.

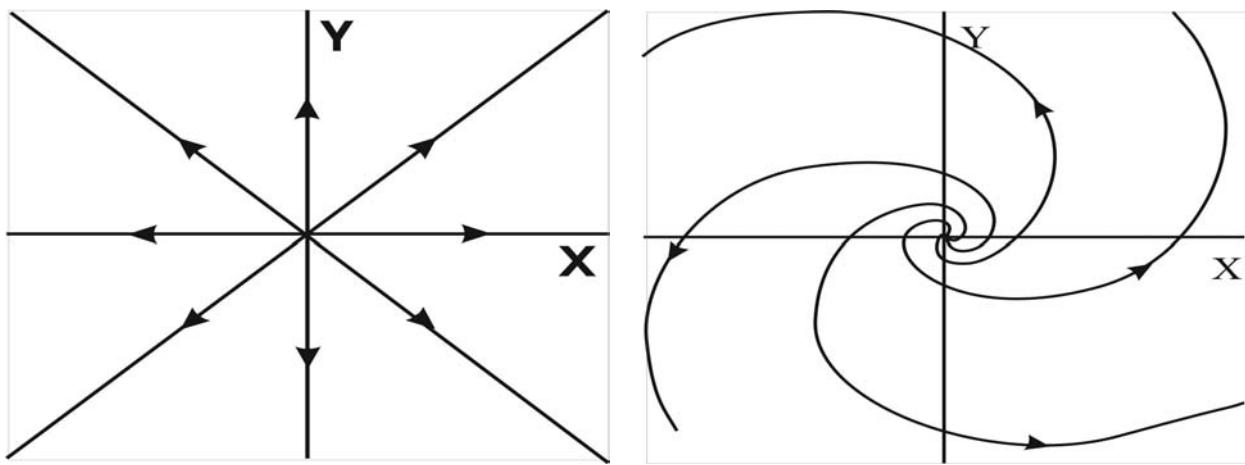


Рис. 13.1. Дикритический узел и фокус

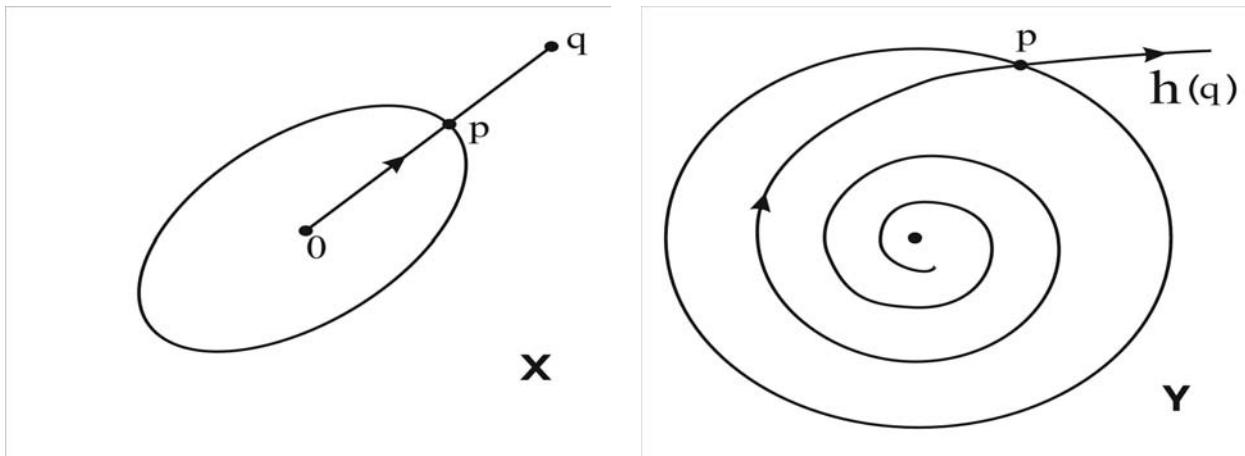


Рис. 13.2. Построение сопрягающего потока гомеоморфизма

Пример 13.4. Топологическая неэквивалентность фокуса и центра

Рассмотрим на плоскости две системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

Фазовый портрет первой системы в окрестности особой точки $(0,0)$ представляет собой фокус. Вторая имеет фазовый портрет, изображенный на рис. 13.3, который называется центром. Так как все траектории второй системы замкнуты, а первой — нет, рассматриваемые системы не являются топологически эквивалентными.

13.2. Эквивалентность на цепно-рекуррентном множестве.

Кроме топологической эквивалентности употребляются еще более слабые эквивалентности, когда сопрягающий гомеоморфизм h существует только на части фазового пространства. Рассмотрим пример такой эквивалентности. Пусть динамические системы f и g имеют цепно-рекуррентные множества $Q(f)$ и $Q(g)$ соответственно. Как было отмечено ранее, все α - и ω -пределные множества лежат в цепно-рекуррентном множестве, т. е. глобальная динамика системы существенно определяется динамикой на цепно-рекуррентном множестве. Это приводит нас к следующему определению эквивалентности.

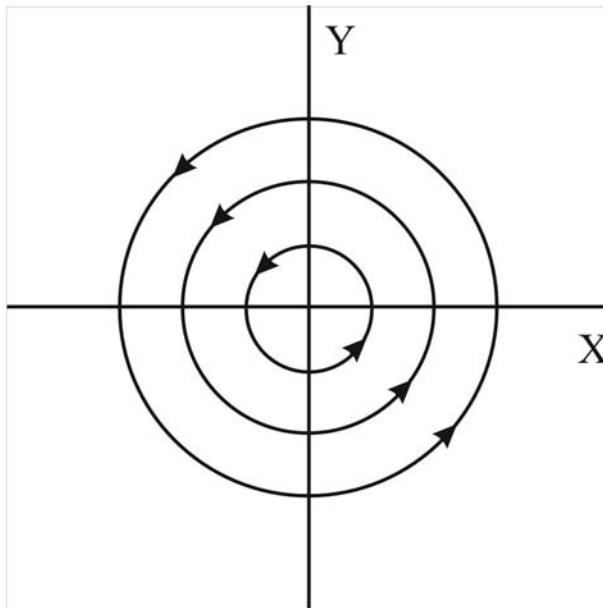


Рис. 13.3. Центр

Определение 13.2. Динамические системы f и g цепно-рекуррентно эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : Q(f) \rightarrow Q(g)$, который переводит цепно-рекуррентные траектории одной системы на цепно-рекуррентные траектории другой системы. При этом для непрерывных систем гомеоморфизм сохраняет ориентацию траекторий.

При цепно-рекуррентной эквивалентности равенство (13.1) выполнено на $Q(f)$ для дискретных систем, и равенство (13.2) выполняется на $Q(f)$ для непрерывных систем. Ясно, что цепно-рекуррентная эквивалентность имеет существенное значение, когда множество цепно-рекуррентных траекторий имеет сложную структуру, например, в случае хаоса.

13.3. Структурная устойчивость

Пусть f является диффеоморфизмом компактного многообразия M с касательным пространством TM . В этой главе мы будем изучать условия сохранения топологической структуры решений (фазового портрета) при малых возмущениях системы. В этом случае говорят, что динамическая система структурно устойчива. Точное определение будет дано ниже, а сейчас отметим особую значимость структурной устойчивости для практики. Действительно, математическая модель — это некое приближение к реальной системе. Как правило, мы знаем только приближенные значения многих параметров и констант. Таким образом, вместо реальной динамической системы изучается некоторое ее приближение. Поэтому информация, полученная в результате исследования системы является достоверной или значимой, если она сохраняется или мало меняется при допустимых изменениях параметров системы и ее возмущении.

В пространстве диффеоморфизмов введем C^1 -расстояние $\rho_1(f, g) = \rho(f, g) + \|Df - Dg\|$.

Определение 13.3. Диффеоморфизм f называется структурно устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, если $\rho_1(f, g) < \delta$, то найдется такой гомеоморфизм $h : M \rightarrow M$, который сопрягает f и g (т.е. $fh = hg$), и C^0 -расстояние $\rho(h, id) < \varepsilon$, где id — тождественное отображение.

Описанный гомеоморфизм h является заменой координат, которая переводит отображение g в f : $f = hgh^{-1}$. Следовательно, возмущенная система имеет такую же структуру (топологию) решений, как и невозмущенная. Условие $\rho(h, id) < \varepsilon$ означает, что отображение h мало смещает точки, т.е. фазовый портрет системы слегка деформируется. Таким образом, из определения

следует, что существует C^1 -окрестность диффеоморфизма f такая, что все диффеоморфизмы из этой окрестности имеют одинаковый фазовый портрет с точностью до почти тождественной замены координат.

Пусть q — неподвижная точка диффеоморфизма f . Будем говорить, что q — гиперболическая неподвижная точка, если дифференциал $Df(q)$ не имеет собственных значений $|\lambda| = 1$.

Пусть q — состояние равновесия гладкой системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x)$. Будем говорить, что q — гиперболическое состояние равновесия, если дифференциал $DF(q)$ не имеет собственных значений λ на мнимой оси.

Теорема 13.2. Гробмана-Хартмана [31].

Пусть q — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f и $A = Df(q)$. Тогда f в окрестности точки q топологически эквивалентен A , т. е. существуют такие окрестности $V(q) \subset M$ и $U(0) \subset R^d$ и такой гомеоморфизм $h : U \rightarrow V$, что

$$hA = fh.$$

Следствие 13.1. Диффеоморфизм структурно устойчив вблизи гиперболической неподвижной точки.

Аналогичные утверждения верны для гиперболического состояния равновесия системы дифференциальных уравнений. Более того, аналогичные утверждения верны для периодических орбит и траекторий [31].

Пример 13.5. Диффеоморфизм $f : (x, y) \rightarrow (2x - x^2 + y, x)$ имеет две неподвижные точки $(0,0)$ и $(2,2)$. Дифференциалы в этих точках

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Df(2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеют собственные значения $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ и $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ соответственно. Согласно теореме Гробмана-Хартмана, данный диффеоморфизм в окрестности неподвижных точек топологически эквивалентен дифференциальному.

Глава 14

Цепно-рекуррентная и Ω -устойчивость

В предыдущей главе мы определили топологическую эквивалентность динамических систем и соответствующее понятие структурной устойчивости. Здесь мы будем использовать две другие эквивалентности - цепно-рекуррентная эквивалентность и Ω -эквивалентность. Эти эквивалентности более слабые, чем топологическая эквивалентность. Напомним, что любая динамическая система имеет цепно-рекуррентное множество Q и неблуждающее множество Ω , которое лежит в Q . Часто эти инвариантные множества совпадают. В главе 5 приведен пример динамической системы, для которой цепно-рекуррентное множество существенно шире неблуждающего множества. Исторически множество неблуждающих траекторий было определено раньше, чем множество цепно-рекуррентных траекторий. Понятие неблуждающего множества используется главным образом в теоретических построениях. В практических приложениях это понятие встречается довольно редко, поскольку обычно свойство неблуждаемости для какой-либо точки либо очевидно, либо его очень трудно доказать. Так как всегда существует некоторая даже очень малая ошибка вычисления, то на практике мы оперируем приближенными траекториями. Это неизбежно приводит к тому, что цепно-рекуррентная точка выглядит как периодическая при любом численном расчете. В главе 5 приведен алгоритм локализации цепно-рекуррентного множества динамической системы. Для неблуждающего множества в настоящее время подобного алгоритма не существует. Важнейшим свойством данных множеств является то, что любая траектория начинается и заканчивается в них. Таким образом, динамика системы существенно определяется динамикой на этих множествах. Причем, динамика системы, суженной на данные множества, может быть весьма нетривиальной для многомерных систем. Структурная устойчивость оказалась очень сильным и трудно проверяемым свойством. Поэтому возникла необходимость ослабить отношение топологической эквивалентности и первым претендентом явилась Ω -устойчивость, которая гарантирует сохранение динамики на неблуждающем множестве. Аналогично можно поставить вопрос об устойчивости динамики на цепно-рекуррентном множестве при малом возмущении системы. В этой главе мы опишем условия Ω -устойчивости и цепно-рекуррентной устойчивости. При этом выяснится, что данные условия эквивалентны и, следовательно, в случае устойчивости инвариантные множества Ω и Q совпадают. Однако практически легче показать цепно-рекуррентную устойчивость, которая сводится к проверке гиперболичности на цепно-рекуррентном множестве. Для проверки гиперболичности достаточно построить хорошую оценку спектра Морса. Таким образом, будет построен алгоритм проверки, который реализуется в виде компьютерной программы. Полученная технология проверки применима к нетривиальным цепно-рекуррентным множествам, что будет показано на примере отображения Икеда.

14.1. Неблуждающее множество.

Пусть $f : M \rightarrow M$ является диффеоморфизмом компактного многообразия. Точка $x \in M$ называется блуждающей, если существуют окрестность $V(x)$ и число $n_0 > 0$ такие, что

$f^n(V) \cap V = \emptyset$ при $|n| > n_0$. Иначе точка x называется неблуждающей. Можно сказать, что точка x является неблуждающей, если для любой окрестности $V(x)$ и любого n_0 найдутся точка $x^* \in V(x)$ и целое число $n > n_0$, что $f^n(x^*) \in V(x)$.

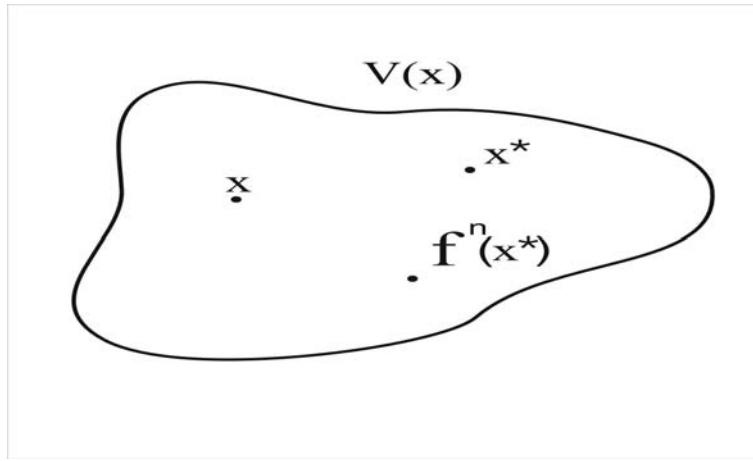


Рис. 14.1. Неблуждающее множество

Отсюда следует, что неблуждающая точка является цепно-рекуррентной. Множество неблуждающих точек называют неблуждающим множеством и обозначают Ω или $\Omega(f)$, если надо указать диффеоморфизм. Известно [31], что неблуждающее множество инвариантно, замкнуто и содержит α - и ω -предельные множества. Таким образом, любая орбита начинается и заканчивается вблизи неблуждающего множества.

Определение 14.1. Диффеоморфизм f называется Ω -устойчивым, если существует $V(f) — C^1$ -окрестность f такая, что для любого $g \in V(f)$ найдется гомеоморфизм $h : \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$, что $hf(x) = gh(x)$ для всех $x \in \Omega(f)$.

Из определения следует, что, с точностью до замены координат, все диффеоморфизмы из окрестности $V(f)$ имеют одинаковое неблуждающее множество и динамику на нем. Так как все α - и ω -предельные множества лежат в неблуждающем множестве, то все траектории диффеоморфизмов из $V(f)$ имеют одинаковое асимптотическое поведение при $n \rightarrow \pm\infty$.

Как было указано выше, цепно-рекуррентное множество Q содержит неблуждающее множество Ω но, вообще говоря, с ним не совпадает (см. Пример 5.2, гл. 5). В главе 5 описан метод локализации цепно-рекуррентного множества Q динамической системы. Вопрос о конструктивном построении неблуждающего множества Ω остается открытым. В этом смысле исследование цепно-рекуррентного множества системы является предпочтительным и можно ввести понятие Q -устойчивости.

Определение 14.2. Диффеоморфизм f называется Q -устойчивым или цепно-рекуррентно устойчивым, если существует $V(f) — C^1$ -окрестность f такая, что для любого $g \in V(f)$ найдется гомеоморфизм $h : Q(f) \rightarrow Q(g)$, что $hf(x) = gh(x)$ для всех $x \in Q(f)$.

Хотя цепно-рекуррентное множество Q , вообще говоря, шире неблуждающего множества, в случае Q - или Ω -устойчивости неблуждающее множество совпадает с цепно-рекуррентным множеством. (см. теорему 15.1)

14.2. Гиперболичность и отсутствие циклов.

Определение 14.3. Диффеоморфизм f называется гиперболическим на инвариантном множестве $\Lambda \subset M$, если существуют положительные константы d , α и инвариантное разложение

касательного расслоения $TM|_{\Lambda} = E^s \oplus E^u$ такие, что

$$\begin{aligned}|Df^n(x)v| &\leq d|v|\exp(-\alpha n), \quad x \in \Lambda, \quad v \in E^s(x), \quad n > 0, \\ |Df^{-n}(x)v| &\leq d|v|\exp(-\alpha n), \quad x \in \Lambda, \quad v \in E^u(x), \quad n > 0.\end{aligned}$$

Подпространства $E^s|_x$ и $E^u|_x$ называются устойчивым и неустойчивым, соответственно. Прямая сумма $E^s|_x \oplus E^u|_x$ означает, что сумма этих подпространств совпадает с касательным пространством $T|_x M$, а их пересечение состоит из нуля.

Пример 14.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение маятника (см. Приложение B)

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x - \varepsilon y,$$

где малая константа $\varepsilon \geq 0$ связана с трением и сопротивлением воздуха. Обозначим решение системы с начальными данными $(0, x, y)$ через $(F_1(t, x, y), F_2(t, x, y))$. Тогда диффеоморфизм f описывается отображением $(F_1(1, x, y), F_2(1, x, y))$, которое задается оператором сдвига вдоль траекторий на время $t = 1$. Состояния равновесия определяются уравнениями $y = 0$ и $\sin x = 0$, т.е. $(k\pi, 0)$ — состояния равновесия. Если возмущение $\varepsilon > 0$, то других цепно-рекуррентных траекторий нет. Линеаризованная в точке $(k\pi, 0)$ система имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\cos(k\pi)x - \varepsilon y.$$

В состоянии равновесия $(2m\pi, 0)$ матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Собственные числа $\lambda = -\varepsilon/2 \pm ih$, где $i = \sqrt{-1}$. Если возмущение $\varepsilon > 0$, то это состояние равновесия устойчиво по первому приближению, т.е. $E^s = TM(2m\pi, 0) = R^2$, $E^u = 0$. Следовательно, такое состояние равновесия гиперболично. Если возмущение $\varepsilon = 0$, то $\lambda = \pm ih$ и состояние равновесия $(2m\pi, 0)$ является центром по первому приближению и не является гиперболическим. В состоянии равновесия $((2m+1)\pi, 0)$ матрица первого приближения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Собственные числа $\lambda = (\pm\sqrt{4+\varepsilon^2} - \varepsilon)/2$ являются действительными и противоположными по знаку. Следовательно, существуют два одномерных подпространства — устойчивое и неустойчивое, которые пересекаются по нулю и в сумме дают касательное пространство R^2 . Если возмущение $\varepsilon = 0$, то мы имеем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет собственный вектор $(1, 1)$ с собственным числом 1, и собственный вектор $(1, -1)$ с собственным числом -1. Таким образом, $E^s = \{l(1, 1), l \in R\}$, $E^u = \{l(1, -1), l \in R\}$ и мы имеем гиперболичность. Если возмущение $\varepsilon > 0$ мало, то устойчивые и неустойчивые подпространства мало изменятся и гиперболичность сохранится. Отметим, что, если возмущение $\varepsilon = 0$, то существуют еще негиперболические нетривиальные цепно-рекуррентные траектории. Таким образом, множество цепно-рекуррентных траекторий гиперболично при $\varepsilon > 0$ и негиперболично при $\varepsilon = 0$.

Основным предположением теоремы об Ω -устойчивости является следующая

Аксиома А. Неблуждающее множество Ω гиперболично и периодические точки плотны в нем, т.е. $\Omega = \overline{Per}$.

Известно [105], что, если f удовлетворяет аксиоме А, то неблуждающее множество распадается на конечное число инвариантных изолированных транзитивных множеств $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_m$, которые называются базисными множествами. Транзитивность означает наличие плотной орбиты в каждом Ω_i , т. е. такой орбиты γ , замыкание $\bar{\gamma}$ которой совпадает с Ω_i . Будем говорить, что существует связь $\Omega_i \rightarrow \Omega_j$, если найдется точка x вне $\Omega_i \cup \Omega_j$ такая, что ее α -предельное множество $\alpha(x)$ лежит в Ω_i , а ω -предельное множество $\omega(x)$ лежит в Ω_j . Циклом множества Ω называется последовательность связей $\Omega_{i_1} \rightarrow \Omega_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{i_s} = \Omega_{i_1}$. Следующая теорема является следствием результатов полученных С.Смейлом [106], Р.Мане [74], М.Шубом [107], Дж.Палисом [91], Дж.Франком и Дж.Селгейдом [58, 59].

Теорема 14.1. Следующие условия эквивалентны:

- диффеоморфизм f Ω -устойчив;
- диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме А и не имеет циклов;
- диффеоморфизм f цепно-рекуррентно устойчив;
- диффеоморфизм f гиперболичен на цепно-рекуррентном множестве Q .

Замечание. В условиях теоремы неблуждающее множество совпадает как с цепно-рекуррентным множеством, так и с замыканием множества периодических точек, т.е.

$$\Omega = Q = \overline{Per}.$$

Таким образом, теорема 14.1 описывает необходимое и достаточное условие Ω -устойчивости и цепно-рекуррентной устойчивости. Однако применение этого классического результата ограничено трудностями проверки условий теоремы. Особые трудности возникают при проверки гиперболичности на нетривиальных базисных множествах, т. е. на множествах содержащих бесконечно много периодических траекторий, наименьший период которых стремится к бесконечности [29]. Наша цель состоит в том, чтобы найти конструктивные условия, которые можно проверить с помощью численных методов. Следующая теорема сводит проверку гиперболичности к вычислению спектра Морса.

Теорема 14.2. [53, 88] Диффеоморфизм f является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве Q тогда и только тогда, когда ноль не лежит в спектре Морса.

В предыдущей главе было показано, что, используя символический образ динамической системы на проективном расслоении P , мы можем оценить сверху спектр Морса. Для этого надо найти спектр символического образа и построить его расширение. Построенное расширение будет содержать спектр Морса. При этом если максимальный диаметр ячеек покрытия выбрать достаточно малым, то построенная оценка будет достаточно хорошей. Следующая теорема гарантирует, что для проверки гиперболичности найдется искомый максимальный диаметр.

Теорема 14.3. [88] Диффеоморфизм f является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве Q тогда и только тогда, когда существует $d_0 \geq 0$ такое, что расширенный спектр символического образа дифференциала не содержит нуля для покрытия $C(P)$ диаметра $d < d_0$.

Таким образом, данная теорема является теоретической основой для компьютерно-ориентированного алгоритма проверки гиперболичности на цепно-рекуррентном множестве.

14.3. Алгоритм проверки цепно-рекуррентной устойчивости

Согласно теоремам 14.1 и 14.2 Ω -устойчивость совпадает с цепно-рекуррентной устойчивостью и сводится к проверке отсутствия нуля в спектре Морса. Для проверки этого условия применим алгоритм вычисления спектра Морса, описанный в предыдущей главе. Этот алгоритм использует метод последовательного адаптивного подразбиения покрытия проективного расслоения. Согласно теореме 14.3, если диффеоморфизм f является Ω - (цепно-рекуррентно) устойчивым, то через конечное число подразбиений расширенный спектр дифференциала не будет содержать нуля. Таким образом, Ω - и цепно-рекуррентная устойчивость проверяются следующим алгоритмом:

- 1) строится покрытие C проективного расслоения P , и полагается $\Sigma_0 = R$;
- 2) строится оснащенный символический образ G для отображения, индуцированного дифференциалом на проективном расслоении $PDf : P \rightarrow P$;
- 3) определяются классы эквивалентных возвратных вершин $\{H_k\}$;
- 4) находятся простые периодические пути и определяются интервалы

$$I_k = [\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)];$$

- 5) определяется расширенный спектр Σ и строится пересечение $\Sigma_m = \Sigma_{m-1} \cap \Sigma$;
- 6) проверяется включение $0 \in \Sigma_m$. Если включение не выполнено, то проверка закончена, иначе
- 7) строится подразбиение ячеек, соответствующих возвратным вершинам, строится новое покрытие C и осуществляется возврат ко второму шагу.

Описанный алгоритм осуществляет искомую проверку за конечное число шагов. Однако число этих шагов невозможно оценить без дополнительной информации. Ясно, что число шагов определяется максимальным диаметром d_0 из теоремы 14.3. В общем случае это число может быть сколь угодно малым и, следовательно, число шагов может быть сколь угодно велико. Действительно, угол между устойчивым и неустойчивым подпространствами может быть сколь угодно мал, в общем случае. Угол между подпространствами эквивалентен расстоянию на проективном расслоении. Для разделения устойчивого и неустойчивого подпространства диаметр d_0 должен быть меньше половины данного угла. Отсюда следует, что искомый диаметр может быть сколь угодно малым. Таким образом, без предварительной информации мы не можем оценить число шагов, необходимых для проверки гиперболичности.

Пример 14.2. Отображение Икеда.

Рассмотрим отображение :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0.9(x \cos \tau(x, y) - y \sin \tau(x, y)) \\ y_1 &= 0.9(x \sin \tau(x, y) + y \cos \tau(x, y)), \end{aligned} \tag{14.1}$$

где

$$\tau(x, y) = 0.4 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}.$$

Отображение (14.1) обладает свойством сжатия площадей и имеет глобальный аттрактор A_g . Существует единственная гиперболическая неподвижная точка $H(1.3815, -2.4746)$, инвариантные многообразия которой $W^s(H), W^u(H)$ пересекаются. Кроме того, отображение имеет единственную периодическую орбиту $P_2(0.2338, -0.7031), (1.9995, 0.6681)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекают многообразия $W^s(H), W^u(H)$ и образуют гетероклинический цикл. Эта ситуация показана на рисунке 14.2,а). Замыкание неустойчивого многообразия точки H образует глобальный аттрактор A_g (см. рис.14.2,б).

В целом аттрактор A_g не является гиперболическим. Рассмотрим часть этого аттрактора, а именно, максимальное цепно-рекуррентное множество Ω_0 в области $[-1.1, 3.5] \times [-1.5, 1.8]$. (см. рис.14.3,а) При начальном разбиении базы 10×10 стартовые размеры ячейки были 0.46×0.33 . После нескольких итераций (при размерах ячейки 0.0071×0.0051) множество Ω_0 распадается

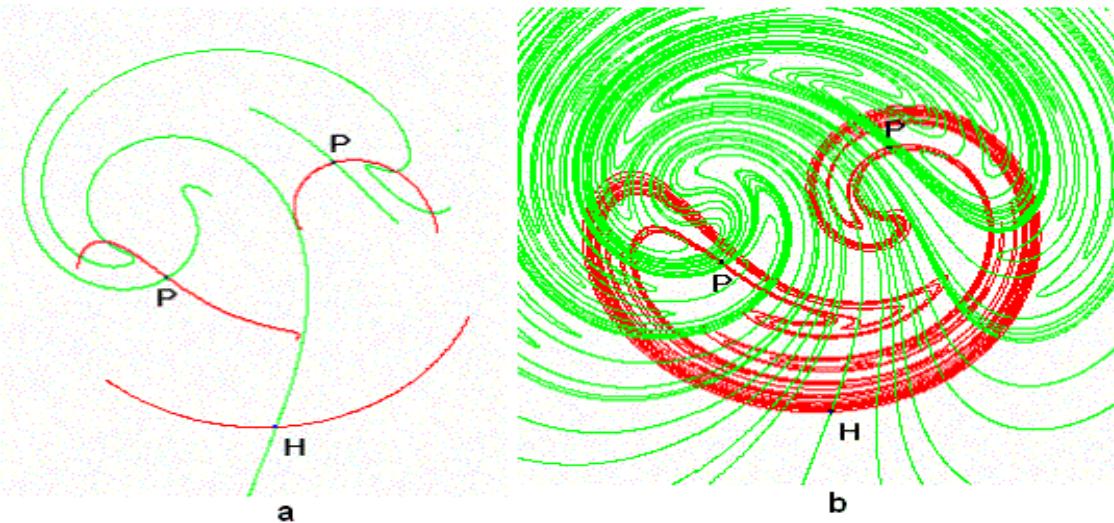


Рис. 14.2. а) существование гетероклинического цикла; б) глобальный аттрактор A_g .

на две компоненты Ω_1 и Ω_2 , соответствующие двум компонентам сильной связности на символическом образе.

Множество Ω_1 (отмечено знаками '+' на рис.14.3,б) представляет собой периодическую орбиту периода 6, а Ω_2 является инвариантным множеством с нетривиальной фрактальной структурой (рис.14.3,б).

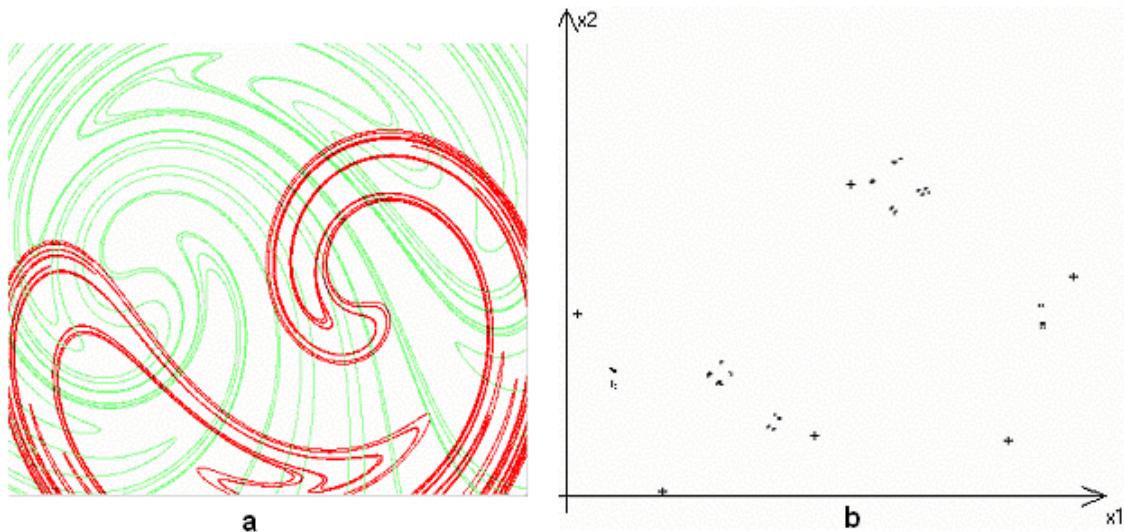


Рис. 14.3. Исследуемая область и компоненты Ω_1 и Ω_2

Дальнейшее построение для множества Ω_1 дает следующие результаты. Для лучшей локализации в базе проведено ещё несколько итераций до момента, когда размеры ячейки составили 0.00045×0.00032 . Построение оснащенного символического образа проводилось до момента, пока размер ячейки в проективном пространстве не стал равен 0.0003. При таких данных расстояние между спектром Морса исходной системы и спектром символического образа не превосходит 0.01. В результате вычислений на проективном расслоении получены две компоненты и спектр Морса над множеством Ω_1 содержит в об'единении интервалов $[0.522, 0.523]$ и $[-0.734, -0.733]$. Подробные результаты приведены в таблице 1.

Для множества Ω_2 итерации в базе проводились до размера ячейки 0.00089×0.00058 . Затем строились итерации оснащенного символического образа до размера ячейки по углу 0.00038.

Таблица 1 . Оценка спектра Морса для компоненты Ω_1 .

Компонента 1	Компонента 2	Размер ячейки по "углу"
[0.359, 0.587]	[-0.829, -0.535]	0.31
[0.488, 0.565]	[-0.698, -0.659]	0.15
[0.508, 0.544]	[-0.762, -0.687]	0.078
[0.520, 0.528]	[-0.741, -0.723]	0.0196
[0.522, 0.523]	[-0.735, -0.733]	0.00122
[0.522, 0.523]	[-0.734, -0.733]	0.00030

(Аналогично вычислениям для первой компоненты, при таких данных спектр Морса исходной системы отличается от спектра символического образа на 0.01.) В результате получены два интервала [0.632, 0.793] и [-1.004, -0.843]. Таблица 2 показывает последовательность итераций.

Таблица 2 . Оценка спектра Морса для компоненты Ω_2 .

Компонента 1	Компонента 2	Размер ячейки по "углу"
[-0.327, -0.177]	[0.454, 0.755]	0.78
[-0.908, -0.558]	[0.574, 0.756]	0.39
[-1.011, -0.653]	[0.652, 0.796]	0.19
[-1.071, -0.779]	[0.621, 0.812]	0.098
[-1.054, -0.820]	[0.624, 0.787]	0.049
[-1.034, -0.838]	[0.627, 0.792]	0.0254
[-1.019, -0.842]	[0.630, 0.794]	0.0122
[-1.007, -0.840]	[0.631, 0.794]	0.00613
[-1.006, -0.842]	[0.632, 0.793]	0.00306
[-1.005, -0.842]	[0.632, 0.793]	0.00153
[-1.004, -0.843]	[0.632, 0.793]	0.00076
[-1.004, -0.843]	[0.632, 0.793]	0.00038

Поскольку спектр Морса не содержит нуля, то, согласно теореме 12.8, цепно-рекуррентное множество системы Ω_0 гиперболично и, следовательно, Ω -устойчиво.

Так как спектр Морса представляет собой предельное множество для характеристических показателей периодических ε -траекторий, то показатели Ляпунова последних должны содержаться в спектре. Для проверки полученных результатов вычислим характеристические показатели периодических орбит с помощью прямых вычислений.

Рассмотрим компоненту Ω_1 , которая является 6-периодической траекторией с координатами

$$\begin{aligned} p_1 &:= (-1.0847332164, -1.0732442772) \\ p_2 &:= (2.7888747371, -1.1241713335) \\ p_3 &:= (-0.26264589595, -1.4846266107) \\ p_4 &:= (3.3559617363, 0.050773931677) \\ p_5 &:= (-1.0124294773, -0.22352840955) \\ p_6 &:= (1.3963652407, 0.71158806791). \end{aligned}$$

Как известно, для вычисления показателей Ляпунова периодической орбиты нужно вычислить матрицу Якоби в точках орбиты, полученные матрицы перемножить (от p_6 к p_1), затем вычислить собственные значения полученной матрицы, вычислить логарифмы от их абсолютных величин и результат поделить на 6. В нашем случае произведение матриц дает

$$R := \begin{bmatrix} -19.68242136 & 8.613693553 \\ 7.799783660 & -3.427798570 \end{bmatrix}.$$

Тогда показатели Ляпунова равны 0.5232909513 и -0.7340119658 и содержатся в интервалах, полученных для спектра Морса.

В компоненте Ω_2 есть циклы периода 4 и 6.

Точки 4-периодической ε -траектории:

$$\begin{aligned} p_1 &:= (-0.683565, -0.631866) \\ p_2 &:= (0.731164, -0.938922) \\ p_3 &:= (1.600343, 0.7279226) \\ p_4 &:= (3.061305, -0.171281). \end{aligned} \quad (14.2)$$

Вычисления, аналогичные проведенным выше, дают

$$R := \begin{bmatrix} -0.2014558988 & -0.2854578977 \\ -7.237036518 & -12.39147850 \end{bmatrix}.$$

Показатели Ляпунова равны -0.8433236065 и 0.6326025745 . Нетрудно заметить, что они лежат в отрезках .

Точки 6-периодической ε -траектории:

$$\begin{aligned} p_1 &:= (-0.711552, -0.704784) \\ p_2 &:= (1.830623, 0.893818) \\ p_3 &:= (0.254905, -0.561399) \\ p_4 &:= (1.765484, 0.550342) \\ p_5 &:= (0.713620, -1.055211) \\ p_6 &:= (3.100370, -0.320601). \end{aligned} \quad (14.3)$$

Результат умножения

$$R := \begin{bmatrix} -4.611668105 & -7.953620379 \\ 36.30611993 & 62.55494961 \end{bmatrix}.$$

Показатели Ляпунова равны -0.8872845094 и 0.6765634160 , эти результаты содержатся в полученных оценках $[-1.004, 0.843]$ и $[0.632, 0.793]$, которые оценивают спектр Морса.

Вычисления спектра Морса проводились с помощью пакета Tay, в разработке которого участвовали И.Романовский, Г.С. Осипенко и Е.Петренко.

Глава 15

Проверка структурной устойчивости

Структурная устойчивость системы означает неизменность динамики при малых возмущениях, что полезно для практического использования результатов исследования, так как математическая модель всегда является лишь приближением реальной системы. Поэтому очень важно иметь условия, которые позволяют конструктивно проверить структурную устойчивость. При этом желательно, чтобы, с одной стороны, эти достаточные условия были близки к необходимым, а с другой стороны, желательно, чтобы они были конструктивны и реализуемы в виде компьютерных программ. Первый классический результат А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [10] 1937 года описывает условия структурной устойчивости систем дифференциальных уравнений на плоскости, но эти условия не являются конструктивными. В 80-х годах прошлого века усилиями Робина, Робинсона и Мане (см. формулировки ниже) были найдены необходимые и достаточные условия структурной устойчивости. Однако эти условия носят абстрактный характер и мало пригодны к практическому применению.

Наша цель состоит в том, чтобы трансформировать данные условия в эквивалентные, но алгоритмически проверяемые условия.

15.1. Условие трансверсальности.

Пусть f — диффеоморфизм компактного многообразия M . Для описания условий структурной устойчивости f в каждой точке x определим устойчивое $S(x)$ и неустойчивое $U(x)$ подпространства следующим образом:

$$\begin{aligned} S(x) &= \{v \in TM(x) : |Df^n(x)v| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty\}, \\ U(x) &= \{v \in TM(x) : |Df^n(x)v| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow -\infty\}, \end{aligned}$$

где $TM(x)$ — касательное пространство к M в точке x .

Определение 15.1. Будем говорить, что условие трансверсальности выполнено на многообразии M , если

$$TM(x) = S(x) + U(x)$$

в любой точке $x \in M$.

Пример 15.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на сфере S^2 . Сферу покроем двумя дисками — верхней и нижней полусферами. На верхнем диске D_1 система задается уравнениями

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y.$$

Система имеет одно состояние равновесия $P = (0, 0)$, которое является неустойчивым по первому приближению, т. е. $U(0, 0) = R^2$, $S(0, 0) = 0$ (рис.15.1).

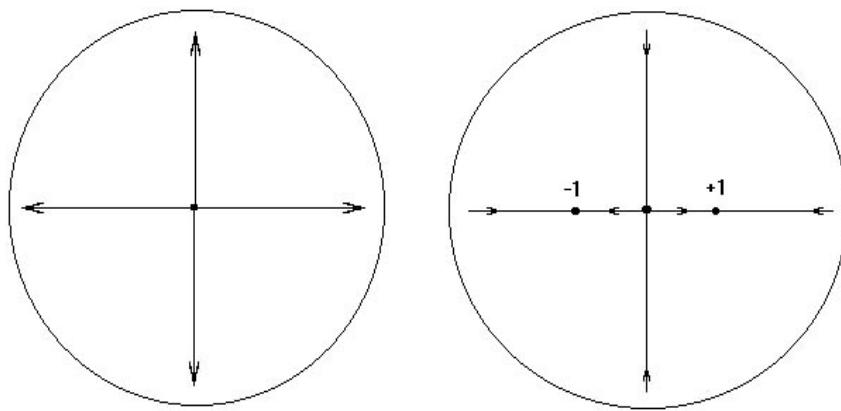


Рис. 15.1. Система дифференциальных уравнений на сфере

На нижнем диске D_2 система задается уравнениями

$$\dot{x} = x(x+1)(1-x), \quad \dot{y} = -y.$$

Эта система имеет три состояния равновесия $Q_1 = (-1, 0)$, $Q_0 = (0, 0)$ и $Q_{-1} = (1, 0)$. Точка $(0, 0)$ является гиперболическим состоянием равновесия с устойчивым подпространством $S(0, 0) = \{(0, y)\}$ и неустойчивым $U(0, 0) = \{(x, 0)\}$. Точки $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ являются устойчивыми по первому приближению, т. е. $S(\cdot) = R^2$, $U(\cdot) = 0$. Между дисками траектории переходят из верхнего диска в нижний.

Из определения динамической системы следует, что все состояния равновесия удовлетворяют условию трансверсальности. Рассмотрим траекторию γ отличную от состояния равновесия, проходящую через точку A в верхнем диске. Построим неустойчивое подпространство $U(A)$. По определению неустойчивое подпространство определяется при $n \rightarrow -\infty$, т. е. α -предельным множеством траектории γ , которое совпадает с неустойчивым состоянием P . Поэтому $U(A) = TS^2(A) = R^2$. Отсюда следует, что при любом устойчивом подпространстве $S(A)$ сумма $U(A) + S(A) = TS^2(A)$, т. е. условие трансверсальности выполнено в точке A . Для полноты исследования опишем устойчивое подпространство $S(A)$. Если точка A лежит на устойчивой сепаратрисе $W^s(Q_0)$ состояния равновесия Q_0 , то $S(A)$ является касательным пространством к $W^s(Q_0)$. Если точка A не лежит на $W^s(Q_0)$, то ее ω -предельным множеством является устойчивое состояние равновесия Q_1 или Q_{-1} . В любом случае $S(A) = TS^2(A)$. По определению условие трансверсальности выполняется или не выполняется для всех точек траектории. Следовательно, условие трансверсальности выполняется для всех траекторий, имеющих α -предельным множеством неустойчивое состояние равновесия на верхнем диске D_1 . Эти траектории заполняют весь верхний диск и нижний диск D_2 кроме отрезка $R = \{(x, 0), -1 \leq x \leq +1\}$. На этом отрезке лежат три состояния равновесия и неустойчивые сепаратрисы гиперболического состояния равновесия Q_0 . Как показано выше, на состояниях равновесия выполнено условие трансверсальности. Рассмотрим правую неустойчивую сепаратрису $W = \{(x, 0), x \in (0, 1)\} = R^+$. Траектория, лежащая на W начинается (имеет α -предельное множество) в Q_0 и заканчивается (имеет ω -предельное множество) в Q_1 . В состоянии равновесия Q_1 устойчивое подпространство $S(Q_1) = R^2$, следовательно, $S(x, 0) = R^2$, $x \in (0, 1)$. Отсюда следует, что при любом неустойчивом подпространстве $U(x, 0)$ сумма $U(x, 0) + S(x, 0) = R^2$, т. е. условие трансверсальности выполнено на R^+ . Отметим, что неустойчивое подпространство $U(x, 0)$ совпадает с осью ОХ. Выполнение условия трансверсальности на левой сепаратрисе проверяется аналогично.

Таким образом, условие трансверсальности выполнено на всей сфере S^2 . Этот пример показывает, что устойчивые и неустойчивые подпространства не меняются непрерывно и, более того, размерность этих подпространств принимает значения 0, 1 и 2 на сфере S^2 .

Суммируя результаты Дж.Роббина [96], К.Робинсона [97] и Р.Мане [74, 73] мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 15.1. Диффеоморфизм f является структурно устойчивым тогда и только тогда, когда условие трансверсальности выполнено на многообразии M .

Таким образом, теорема 15.1 описывает необходимое и достаточное условие. Однако применение этого результата ограничено трудностями проверки условия трансверсальности. В этой главе мы рассмотрим эквивалентные условия, которые проверяются конечным алгоритмом.

Связь между условием трансверсальности и гиперболичностью.

Пусть условие трансверсальности выполнено и диффеоморфизм f гиперболичен на инвариантном множестве Λ . Тогда инвариантные подпространства $E^s(x)$ и $E^u(x)$ непрерывно зависят от $x \in \Lambda$ и $\dim E^s + \dim E^u = \dim M$. Следовательно, на каждой компоненте связности множества Λ размерность этих подпространств постоянна. Дифференциал экспоненциально сжимает на E^s и экспоненциально растягивает на E^u . Ясно, что $E^s(x) \subset S(x)$ и $E^u(x) \subset U(x)$. Следующая теорема показывает, что эти подпространства совпадают над цепно-рекуррентным множеством, т.е. $E^s(x) = S(x)$ и $E^u(x) = U(x)$ $x \in Q$.

Теорема 15.2. [23, 74] Если выполнено условие трансверсальности, то

- i) множество $\Lambda = \{x \in M : TM(x) = S(x) \oplus U(x)\}$ является замкнутым и инвариантным;
- ii) диффеоморфизм f является гиперболическим на Λ и $S(x) = E^s(x)$, $U(x) = E^u(x)$, $x \in \Lambda$;
- iii) цепно-рекуррентное множество Q лежит в Λ .

В предыдущем примере цепно-рекуррентное множество Q состояло из состояний равновесия. Эти состояния равновесия гиперболичны, но размерность устойчивого (неустойчивого) подпространства изменяется. Более того, вне цепно-рекуррентного множества сумма $TM(x) = S(x) + U(x)$ не является прямой и, следовательно, $\Lambda = Q$.

15.2. Двойственный дифференциал

Как было указано выше, проверка условия трансверсальности сопряжена с большими трудностями и в общем случае не существует алгоритма проверки этого условия. Дифференциал $Df : TM \rightarrow TM$ является естественным примером линейного расширения отображения f . Рассмотрим другой пример линейного расширения — двойственный дифференциал $\widehat{D}f$, который определяется по формуле

$$\widehat{D}f(x) = ((Df(x))^*)^{-1} : TM(x) \rightarrow TM(f(x)).$$

Здесь A^* обозначает оператор сопряженный к A , который определяется равенством

$$\langle Av, u \rangle = \langle v, A^*u \rangle,$$

где $\langle v, u \rangle$ обозначает скалярное произведение. В рассматриваемом случае, когда A является матрицей, A^* является транспонированной матрицей, а матрица $(A^*)^{-1}$ является обратной к транспонированной. При этом операции транспонирования и обращения матрицы можно менять местами:

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Главное свойство двойственного дифференциала

$$\langle Dfv, \widehat{D}fu \rangle = \langle v, u \rangle,$$

т.е. скалярное произведение не меняется под действием дифференциала и двойственного дифференциала [23].

Определение 15.2. [23, 102] Двойственный дифференциал имеет только тривиальную ограниченную орбиту, если любая ограниченная орбита $\{(x_{n+1}, v_{n+1}) = (f(x_n), \hat{D}f(x_n)v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ является нулевой, т.е. $v_n = 0$.

Следующая теорема описывает условие трансверсальности в терминах двойственного дифференциала.

Теорема 15.3. [22] Условие трансверсальности выполняется тогда и только тогда, когда двойственный дифференциал имеет только тривиальную ограниченную орбиту.

На первый взгляд кажется, что проверить описанное свойство двойственного дифференциала так же трудно, как и условие трансверсальности. Однако мы покажем, что используя спектр Морса двойственного дифференциала, можно проверить отсутствие нетривиальных ограниченных орбит.

Для дальнейшего нам понадобится следующее свойство цепно-рекуррентных множеств на проективных расслоениях. Рассмотрим линейное расширение $F : E \rightarrow E$. Индуцированное отображение PF действует на проективном расслоении P над базой $f : M \rightarrow M$. Обозначим Q и CR цепно-рекуррентные множества отображений f и PF соответственно. Тогда цепно-рекуррентное множество CR отображения PF проектируется на цепно-рекуррентное множество базы Q , т.е. имеет место равенство

$$pCR = Q.$$

15.3. Эквивалентные условия

Теорема 15.4. Следующие условия эквивалентны:

- (i) f является гиперболичным на цепно-рекуррентном множестве Q ;
- (ii) двойственный дифференциал гиперболичен на Q ;
- (iii) спектр Морса дифференциала не содержит нуля;
- (iv) спектр Морса двойственного дифференциала не содержит нуля.

Пусть выполнено одно из условий предыдущей теоремы. Тогда спектр Морса двойственного дифференциала состоит из двух частей, положительной Σ^+ и отрицательной Σ^- . Цепно-рекуррентное множество $CR \subset P$ для двойственного дифференциала $P\hat{D}f$ на проективном расслоении делится на две части CR^+ и CR^- так, что $CR^+ + CR^- = CR$ и спектр Морса ограничения $\hat{D}f|_{E(CR^+)}$ является положительным, $\Sigma(\hat{D}f|_{E(CR^+)}) = \Sigma^+$ и спектр Морса $\Sigma(\hat{D}f|_{E(CR^-)}) = \Sigma^-$ является отрицательным.

Множества CR^+ and CR^- назовем соответственно положительным и отрицательным цепно-рекуррентными множествами двойственного дифференциала $P\hat{D}f$ на проективном расслоении P .

Теорема 15.5. [23, 100] Двойственный дифференциал имеет только тривиальную ограниченную орбиту тогда и только тогда, когда на проективном расслоении P неустойчивое многообразие $W^u(CR^+)$ является аттрактором, а устойчивое многообразие $W^s(CR^-)$ — его двойственным репеллером.

Будем говорить, что существует связь $CR^+ \rightarrow CR^-$, если найдется орбита ξ двойственного дифференциала $P\hat{D}f$ такая, что ее α -предельное множество $\alpha(\xi)$ лежит в CR^+ , а ω -предельное множество $\omega(\xi)$ в CR^- .

Теорема 15.6. Дiffeоморфизм f структурно устойчив тогда и только тогда, когда

- 1) спектр Морса двойственного дифференциала не содержит нуля;
- 2) неустойчивое многообразие $W^u(CR^+)$ является аттрактором и устойчивое многообразие $W^s(CR^-)$ является его двойственным репеллером.

Условие 2) в теореме можно заменить на условие 2*) не существует связь $CR^+ \rightarrow CR^-$.

Теперь рассмотрим методы проверки приведенных условий. Пусть отображение $F(x, v) = (f(x), A(x)v)$ является расширением f на линейном расслоении (E, M, π) . В нашем случае $A(x) = \hat{D}f(x)$. Пусть $G(f)$ символический образ отображения f для покрытия $C(M) = \{m(1), \dots, m(q)\}$. Для построения символического образа индуцированного отображения $PF : P \rightarrow P$ удобно выбрать покрытие $C(P) = \{M(z)\}$ проективного расслоения P согласованным с покрытием $C(M)$ так, чтобы проекция ячейки на P являлась бы ячейкой на M : $P\pi(M(z)) = m(j)$. В этом случае согласованные покрытия порождают естественное отображение h из $G(PF)$ на $G(f)$: $h(z) = j$. Так как из $PF(M(z_1)) \cap M(z_2) \neq \emptyset$ следует $f(m(j_1)) \cap m(j_2) \neq \emptyset$, то ребро $z_1 \rightarrow z_2$ на $G(PF)$ отображается на ребро $j_1 \rightarrow j_2$ на $G(f)$. Следовательно, отображение h переводит ориентированный граф $G(PF)$ на ориентированный граф $G(f)$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Ver} & \xrightarrow{G(PF)} & \text{Ver} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \text{ver} & \xrightarrow{G(f)} & \text{ver} \end{array}$$

коммутативна, где Ver и ver обозначены вершины $G(PF)$ и $G(f)$, соответственно. Из теоремы 12.8 следует

Теорема 15.7. Диффеоморфизм f является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве Q тогда и только тогда, когда существует $d_0 \geq 0$ такое, что расширенный спектр символического образа для покрытия $C(P)$ с максимальным диаметром $d < d_0$ не содержит нуля.

Эта теорема позволяет проверить гиперболичность дифференциала или двойственного дифференциала на цепно-рекуррентном множестве Q .

15.4. Алгоритм проверки

Рассмотрим символический образ G двойственного дифференциала на проективном расслоении $P\hat{D}f : P \rightarrow P$. Пусть расширенный спектр символического образа не содержит нуля. Каждый класс H_k получает спектральный интервал

$$[a_k, b_k] = [\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)],$$

который или положительный при $a_k > 0$, или отрицательный при $a_k < 0$. Обозначим H^+ объединение классов с положительными интервалами $H^+ = \{\bigcup H_m, a_m > 0\}$ и $H^- = \{\bigcup H_m, a_m < 0\}$ с отрицательными. Множества H^+ и H^- естественно назвать положительными и отрицательными множествами цепно-рекуррентных вершин. Известно, что множество

$$P = \{\bigcup M(i) : i \text{ — возвратная}\} = \{\bigcup M(i) : i \in H^+ \cup H^-\}$$

является замкнутой окрестностью цепно-рекуррентного множества. В частности, множество

$$P^+ = \{\bigcup M(i) : i \in H^+\}$$

является окрестностью CR^+ и множество

$$P^- = \{\bigcup M(j) : j \in H^-\}$$

является окрестностью CR^- .

Определение 15.3. Будем говорить, что существует связь $H^+ \rightarrow H^-$, если существует путь из H^+ в H^- .

Теорема 15.8. Если расширенный спектр символического образа G отображения $P\widehat{D}f$ не содержит нуля и связь $H^+ \rightarrow H^-$ отсутствует, то диффеоморфизм f структурно устойчив.

Таким образом, структурная устойчивость может быть проверена следующим методом:

- 1) строится двойственный дифференциал $\widehat{D}f : TM \rightarrow TM$;
- 2) выбирается покрытие C проективного расслоения P ;
- 3) строится оснащенный символический образ G для отображения $P\widehat{D}f : P \rightarrow P$;
- 4) определяется расширенный спектр символического образа G ;
- 5) если расширенный спектр не содержит нуля, то определяются положительное и отрицательное множества возвратных вершин H^+ and H^- ;
- 6) проверяется наличие связи $H^+ \rightarrow H^-$. Если такая связь отсутствует, то диффеоморфизм f структурно устойчив.

Теорема 15.9. Если диффеоморфизм f структурно устойчив, то существует $d_0 > 0$ такое, что для любого символического образа G с максимальным диаметром $d < d_0$ расширенный спектр не содержит нуля и связь $H^+ \rightarrow H^-$ отсутствует.

Из этой теоремы следует, что если применить метод последовательного подразбиения так, чтобы максимальный диаметр $d_n \rightarrow 0$, то через конечное число подразбиений выполнится неравенство $d_n < d_0$ и описанный алгоритм осуществит проверку структурной устойчивости.

Приложение А

Системы дифференциальных уравнений

A.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений в векторной форме, которая имеет вид равенства

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (\text{A.1})$$

где $t \in R$, $x \in R^n$, а f является вектор-функцией, отображающей некоторую область G пространства R^{n+1} в R^n .

Напомним, что *решением* такой системы называется дифференцируемая вектор-функция $x = \varphi(t)$, которая при подстановке в равенство (A.1) обращает его в тождество. Эта функция определена на некотором промежутке, а ее график лежит в области G .

Задачей Коши для системы (A.1) называется задача нахождения частного решения, графика которого проходит через заданную точку $(t_0, x_0) \in G$, т.е. такого решения φ , что $\varphi(t_0) = x_0$. Пару (t_0, x_0) называют *начальными данными* задачи Коши.

Теорема A.1. (Пeanо) ([32], § 29). Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна в некоторой области пространства R^{n+1} . Тогда существует решение задачи Коши для системы (A.1) с любыми начальными данными (t_0, x_0) из этой области.

Если не накладывать дополнительных ограничений на правую часть $f(t, x)$ системы (A.1), то решение задачи Коши может оказаться не единственным. Единственность обеспечивает следующая теорема.

Теорема A.2. ([14], § 7, п. 2, следствие 3; [32], § 29; [36], § 3, теорема 2). Если функция $f(t, x)$ является непрерывной и имеет непрерывные частные производные по всем компонентам вектора x в некоторой области пространства R^{n+1} , то любые два решения задачи Коши для системы (A.1) с начальными данными (t_0, x_0) из этой области совпадают на общей части промежутков, на которых они определены.

В дальнейшем будем рассматривать системы дифференциальных уравнений вида (A.1), правые части которых определены на всем пространстве R^{n+1} , а решение задачи Коши с любыми начальными данными существует и единственno. Более того, будем считать, что каждое решение определено при всех $t \in R$. При этих предположениях определим вектор-функцию $U(t, t_0, x_0)$ следующим образом: при фиксированных t_0 и x_0 функция $\varphi(t) = U(t, t_0, x_0)$ — решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) . Эта функция U называется *общим решением* системы (A.1), а $\varphi(t)$ называется *частным решением*. Заметим, что $\varphi(t_0) = U(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

В систему дифференциальных уравнений могут входить параметры, при этом она принимает вид

$$\dot{x} = f(t, x, \alpha), \quad (\text{A.2})$$

где $t \in R$, $x \in R^n$, $\alpha \in R^d$. Общее решение U также будет зависеть от этих параметров. В такой ситуации справедлива следующая теорема.

Теорема А.3. ([14], § 7, п. 5, следствие 6; [32], § 29; [36], § 24, теорема 16). Если функция $f(t, x, \alpha)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по компонентам векторов x и α , то общее решение $U(t, t_0, x_0, \alpha)$ системы (A.2) имеет непрерывные частные производные по всем переменным.

A.2. Динамические системы

Пусть правая часть системы (A.1) не зависит от времени, т. е. система имеет вид

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{A.3})$$

где $x \in R^n$, а f отображает R^n в R^n и обеспечивает единственность решения задачи Коши. Такие системы называются *автономными*, или *динамическими*.

Решение системы (A.3) $x = \varphi(t)$ можно интерпретировать как движение точки в пространстве R^n , при этом R^n называется *фазовым пространством*. Траектория движения представляет собой, вообще говоря, некоторую кривую в фазовом пространстве, а \dot{x} является скоростью движения по этой кривой. Из (A.3) следует, что в точке x фазового пространства скорость равна $f(x)$, т. е. не зависит от времени.

Покажем, что если $\varphi(t)$ — решение системы (A.3), то для любого вещественного C $\varphi_1(t) = \varphi(t + C)$ — тоже решение этой системы. Действительно, $\varphi'(t) \equiv f(\varphi(t))$, поэтому $\varphi'(t + C) \equiv f(\varphi(t + C))$. Но $\varphi'_1(t) = \varphi'(t + C) \frac{d}{dt}(t + C) = \varphi'(t + C)$, откуда $\varphi'_1(t) \equiv f(\varphi_1(t))$. Заметим, что решениям φ и φ_1 соответствует одна и та же траектория в фазовом пространстве, причем движение по ней по закону $x = \varphi_1(t)$ при $C > 0$ опережает движение по закону $x = \varphi(t)$ на время C .

Допустим, что решениям φ_1 и φ_2 системы (A.3) соответствуют фазовые траектории, имеющие общую точку: $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Покажем, что эти траектории совпадают. Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(t) = \varphi_2(t + C)$, где $C = t_2 - t_1$. Тогда φ — решение системы (A.3), а $\varphi(t_1) = \varphi_2(t_1 + C) = \varphi_2(t_2) = \varphi_1(t_1)$. Следовательно, φ и φ_1 — решения одной и той же задачи Коши для системы (A.3), поэтому для всех t $\varphi_1(t) = \varphi(t) = \varphi_2(t + C)$, откуда следует совпадение траекторий.

Таким образом, для динамической системы (A.3) фазовые траектории либо совпадают, либо не пересекаются. При этом через каждую точку фазового пространства проходит единственная траектория. Можно условно считать, что фазовое пространство заполнено движущейся "жидкостью", а правая часть системы (A.3) задает стационарное поле скоростей этой "жидкости". Поток такой воображаемой жидкости называется *фазовым потоком*.

Пусть U — общее решение системы (A.3). Тогда частица фазового потока, которая в момент времени t_0 находилась в точке x_0 , в момент t окажется в точке $x = U(t, t_0, x_0)$. Поскольку поле скоростей фазового потока не зависит от времени, в той же точке в момент $(t - t_0)$ окажется та частица, которая находилась в точке x_0 в нулевой момент времени, т.е. $U(t, t_0, x_0) = U(t - t_0, 0, x_0)$, причем это верно для любых t, t_0, x_0 . Таким образом, общее решение динамической системы фактически зависит от разности $t - t_0$, поэтому в дальнейшем будем писать $U(t - t_0, x_0)$ вместо $U(t, t_0, x_0)$.

Положим

$$\gamma_t(x) = U(t, x), \quad (\text{A.4})$$

тогда при фиксированном t γ_t представляет собой отображение R^n в R^n , которое сопоставляет каждой точке x фазового пространства ту точку, в которую переместится частица фазового потока из точки x за время t . Отображение γ_t называется *оператором эволюции* или *оператором сдвига вдоль траекторий системы*.

Разумеется, при $t > 0$ $\gamma_{-t}(x)$ — это точка фазового пространства, где находилась та частица фазового потока, которая через промежуток времени t оказалась в точке x . Поэтому

$$\gamma_t^{-1} = \gamma_{-t}, \quad (\text{A.5})$$

где γ_t^{-1} — отображение, обратное к γ_t . Как нетрудно убедиться, равенство (A.5) справедливо при всех t , а не только при $t > 0$.

Кроме того,

$$\gamma_{t+s} = \gamma_t \circ \gamma_s = \gamma_s \circ \gamma_t, \quad (\text{A.6})$$

так как все отображения, входящие в (A.6), переводят точку x в ту точку фазового пространства, где окажется соответствующая частица фазового потока через промежуток времени $t+s$. Из теоремы A.3 и равенств (A.4), (A.5) следует, что γ_t и γ_t^{-1} имеют непрерывные частные производные. Такие отображения γ_t называются *диффеоморфизмами*. Свойства (A.5) и (A.6) показывают, что семейство операторов эволюции $\{\gamma_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ представляет собой *однопараметрическую группу диффеоморфизмов* ([14], § 4, п. 3).

Используя оператор эволюции, можно определить фазовую траекторию как образ прямой R при отображении $\varphi : t \mapsto \gamma_t(x_0)$. Заметим, что φ — решение задачи Коши $\varphi(0) = x_0$ для системы (A.3). Графическое изображение траекторий в фазовом пространстве с указанием направления движения называется *фазовым портретом* динамической системы.

Пусть $\varphi(t)$ — частное решение динамической системы (A.3). Возможны следующие случаи:

1. Если $t_1 \neq t_2$, то $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.
2. Существуют t_1, t_2 такие, что $t_1 \neq t_2$, а $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

Ясно, что в первом случае траектория, соответствующая решению $\varphi(t)$, является незамкнутой. Покажем, что во втором случае решение является периодическим, и ему соответствует замкнутая траектория.

Действительно, пусть $t_1 < t_2$ — два момента времени, для которых $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Положим $T = t_2 - t_1$ и рассмотрим решение $\varphi_1(t) = \varphi(t + T)$ системы (A.3). Тогда $\varphi_1(t_1) = \varphi(t_1 + T) = \varphi(t_2) = \varphi(t_1)$. Поэтому φ_1 и φ — решения одной и той же задачи Коши, откуда для всех t $\varphi_1(t) = \varphi(t)$. Но $\varphi_1(t) = \varphi(t + T)$, т.е. $\varphi(t + T) = \varphi(t)$, а это означает, что T — период функции φ .

Поскольку φ — непрерывная (и даже дифференцируемая) вектор-функция, либо она имеет наименьший положительный период, либо она постоянна ([36], § 15, п. В). В первом случае траектория представляет собой замкнутую кривую, а во втором — сводится к одной точке x_0 : $\varphi(t) \equiv x_0$, $\varphi'(t) \equiv 0$ и $f(x_0) = 0$.

Отсюда следует, что постоянная функция $\varphi(t) \equiv x_0$ является решением системы (A.3) тогда и только тогда, когда x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$. Поэтому точки фазового пространства, которые являются корнями правой части равенства (A.3), называются *точками покоя*. Говорят также, что система (A.3) имеет *состояние равновесия* в точке x_0 .

A.3. Локальные фазовые портреты динамических систем

Локальным фазовым портретом системы (A.3) называется сужение полного, или глобального, портрета на окрестность некоторой точки фазового пространства. Вид локального портрета в окрестности точки, которая не является точкой покоя, устанавливает следующая теорема.

Теорема A.4. ([14], § 7, п. 7, следствие 10). Пусть $x_0 \in R^n$ и $f(x_0) \neq 0$. Тогда существует диффеоморфизм некоторой окрестности точки x_0 на открытое подмножество пространства R^n , при котором фазовые кривые системы (A.3) переходят в параллельные прямые.

Следовательно, локальный фазовый портрет в этом случае представляет собой образ семейства параллельных прямых при диффеоморфном отображении.

Пусть теперь x_0 — точка покоя для системы (A.3), т.е. $f(x_0) = 0$. Если вектор-функция f дифференцируема в точке x_0 и $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$ — ее матрица Якоби в этой точке, то

$$f(x) = A(x - x_0) + \alpha(x - x_0),$$

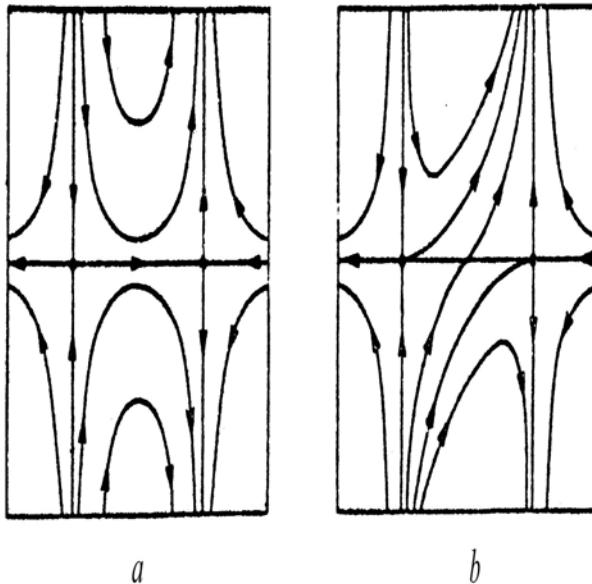


Рис. А.1. Два качественно различных фазовых портрета с одинаковым набором локальных портретов.

где $\alpha(x - x_0) = o(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$. Перенесем начало координат в фазовом пространстве в точку x_0 : положим $y = x - x_0$. Тогда система (А.3) запишется в виде

$$\dot{y} = Ay + \alpha(y), \quad (\text{A.7})$$

где $\alpha(y) = o(y)$ при $y \rightarrow 0$.

Рассмотрим систему

$$\dot{y} = Ay, \quad (\text{A.8})$$

которая называется *системой линейного приближения* для системы (А.3) в точке x_0 . Как будет показано в разделе А.10, системы (А.7) и (А.8) при определенных условиях имеют одинаковые локальные фазовые портреты. В этом случае говорят, что системы (А.7) и (А.8) *топологически эквивалентны* в окрестности нуля (точное определение будет дано ниже). Таким образом, для того чтобы исследовать поведение фазовых траекторий системы (А.3) вблизи точки x_0 , часто достаточно исследовать поведение фазовых траекторий линейной однородной системы (А.8). Такое исследование для фазовых пространств размерности 1 и 2 проводится в следующих разделах.

После построения локальных фазовых портретов системы (А.3) вблизи всех точек покоя можно перейти к построению глобального портрета. Однако следует иметь в виду, что одинаковые наборы локальных портретов могут давать качественно различные глобальные портреты (рис. А.1).

A.4. Устойчивость по Ляпунову. Классификация одномерных линейных однородных систем

Классификацию локальных фазовых портретов динамической системы (А.3) можно осуществить с помощью понятий устойчивости и асимптотической устойчивости. Пусть x_0 — точка покоя системы (А.3). Она называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любой окрестности $V(x_0) \subset R^n$ найдется такая окрестность $V_1(x_0) \subset V(x_0)$, что для каждого решения φ системы (А.3), у которого начальное значение $\varphi(0)$ принадлежит $V_1(x_0)$, все значения $\varphi(t)$ при $t \geq 0$ принадлежат $V(x_0)$.

Устойчивая по Ляпунову точка покоя x_0 называется *асимптотически устойчивой*, если найдется такая окрестность $W(x_0)$, что каждое решение φ системы (А.3) с начальным значением

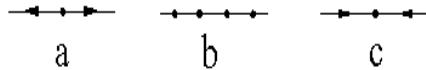


Рис. А.2. Фазовые портреты одномерных линейных однородных систем.

$\varphi(0) \in W(x_0)$ стремится к x_0 при $t \rightarrow +\infty$. Окрестность $W(x_0)$, обладающая этим свойством, называется *областью асимптотической устойчивости*, или *областью притяжения*.

Рассмотрим линейную однородную динамическую систему с одномерным фазовым пространством, т. е. линейное однородное уравнение первого порядка с постоянным коэффициентом $a \in R$

$$\dot{x} = ax. \quad (\text{A.9})$$

Общее решение этого уравнения задается формулой $U(t, x_0) = e^{at}x_0$.

Если $a = 0$, то все точки фазовой прямой будут точками покоя; все они устойчивы, но не асимптотически. При $a \neq 0$ единственной точкой покоя будет нулевая. Если $a < 0$, она асимптотически устойчива, а если $a > 0$ — неустойчива, так как в этом случае все решения, кроме $x \equiv 0$, стремятся к ∞ при $t \rightarrow +\infty$. Фазовые портреты динамической системы (A.9) при $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$ изображены соответственно на рис. А.2,а), А.2,б) и А.2,в).

A.5. Решение линейных однородных динамических систем второго порядка

Рассмотрим линейную однородную динамическую систему с двумерным фазовым пространством

$$\dot{x} = Ax. \quad (\text{A.10})$$

Здесь A — квадратная матрица второго порядка с постоянными вещественными элементами. Перейдем в фазовом пространстве R^2 от канонического базиса $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ к другому базису $\{s_1, s_2\}$. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$, а $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ — столбец координат вектора x в новом базисе. Если S — матрица со столбцами s_1, s_2 , то

$$x = Sy. \quad (\text{A.11})$$

Матрица S называется *матрицей перехода* к новому базису. Она имеет обратную S^{-1} , так как ее столбцы линейно независимы.

Из (A.11) следует, что $\dot{x} = S\dot{y}$, тогда систему (A.10) можно переписать в виде $S\dot{y} = ASy$, или

$$\dot{y} = By, \quad (\text{A.12})$$

где $B = S^{-1}AS$. Таким образом, при переходе к другому базису в фазовом пространстве матрица системы (A.10) преобразуется по тому же закону, что и матрица линейного оператора.

Пусть теперь $\{s_1, s_2\}$ — базис, в котором матрица B представляет собой жорданову форму матрицы A . Возможны два случая:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

или

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

В первом случае λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы A , а s_1 и s_2 — соответствующие собственные векторы: $As_1 = \lambda_1 s_1$, $As_2 = \lambda_2 s_2$. Во втором случае λ — вещественное собственное число кратности 2, s_1 — соответствующий собственный вектор, а s_2 — корневой вектор

высоты 2: $As_1 = \lambda s_1$, $As_2 = \lambda s_2 + s_1$. Напомним, что собственные числа являются корнями характеристического многочлена

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E), \quad (\text{A.15})$$

где E — единичная матрица.

Если матрица B имеет вид (A.13), то система (A.12) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2, \end{aligned}$$

все решения которых содержатся в формулах

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y_2 &= C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

или в векторной форме:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

С учетом того, что столбцы матрицы S — это векторы s_1 , s_2 , используя (A.11), получаем:

$$x = Sy = C_1 s_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 s_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (\text{A.17})$$

Формула (A.17) содержит все решения системы (A.10) в случае, когда жорданова форма матрицы A имеет вид (A.13).

Если λ_1 , λ_2 — комплексные числа, то решения (A.17) — тоже комплексные. Построим для этого случая вещественные решения. Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$, так как элементы матрицы A вещественные, и λ_1 , λ_2 — это корни многочлена (A.15) с вещественными коэффициентами. Кроме того, если s — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу λ_1 , т.е. $As = \lambda_1 s$, то $A\bar{s} = \overline{\lambda_1}\bar{s}$. Поэтому \bar{s} — собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Таким образом, формулу (A.17) можно представить в виде

$$x = e^{\alpha t} \left(C_1 s e^{i\beta t} + C_2 \bar{s} e^{-i\beta t} \right). \quad (\text{A.18})$$

Ясно, что если $C_2 = \overline{C_1}$, то решение (A.18) — вещественное, так как выражение в скобках является суммой двух сопряженных комплексных векторов. Покажем, что решение (A.18) является вещественным только в этом случае. Действительно, пусть $x \in R$. Тогда $\bar{x} = x$, т.е.

$$e^{\alpha t} \left(\overline{C_1} \bar{s} e^{-i\beta t} + \overline{C_2} s e^{i\beta t} \right) = e^{\alpha t} \left(C_1 s e^{i\beta t} + C_2 \bar{s} e^{-i\beta t} \right),$$

откуда

$$(C_1 - \overline{C_2}) e^{i\beta t} s + (C_2 - \overline{C_1}) e^{-i\beta t} \bar{s} = 0.$$

Но s и \bar{s} линейно независимы, так как это собственные векторы матрицы A , соответствующие разным собственным числам. Поэтому, учитывая, что $e^{i\beta t} \neq 0$ и $e^{-i\beta t} \neq 0$, получаем $C_1 = \overline{C_2}$ и $C_2 = \overline{C_1}$, что и требовалось.

Положим теперь $s = s_1^* - is_2^*$, где s_1^* и s_2^* — вещественные векторы (знак минус здесь поставлен, чтобы получить плюс в итоговой формуле). Пусть $C_1 = C$, $C_2 = \overline{C}$, тогда (A.18) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= e^{\alpha t} \left(C e^{i\beta t} (s_1^* - is_2^*) + \overline{C} e^{-i\beta t} (s_1^* + is_2^*) \right) = \\ &= e^{\alpha t} \left(\left(C e^{i\beta t} + \overline{C} e^{-i\beta t} \right) s_1^* - i \left(C e^{i\beta t} - \overline{C} e^{-i\beta t} \right) s_2^* \right) = \\ &= 2e^{\alpha t} \left(\operatorname{Re}(C e^{i\beta t}) s_1^* + \operatorname{Im}(C e^{i\beta t}) s_2^* \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если в качестве базиса в фазовом пространстве взять $s_1^* = \operatorname{Res}$ и $s_2^* = -\operatorname{Im}s$, а через y^* обозначить столбец координат вектора x в этом базисе, то $y_1^* = 2e^{\alpha t} \operatorname{Re}(C e^{i\beta t})$, $y_2^* =$

$2e^{\alpha t} \operatorname{Im}(Ce^{i\beta t})$. Переайдем от y_1^* , y_2^* к полярным координатам r , ϕ по формулам $y_1^* = r \cos \phi$, $y_2^* = r \sin \phi$, или $y_1^* + y_2^* i = re^{i\phi}$. Тогда

$$re^{i\phi} = 2e^{\alpha t}(\operatorname{Re}(Ce^{i\beta t}) + i\operatorname{Im}(Ce^{i\beta t})) = 2e^{\alpha t}Ce^{i\beta t}.$$

Представим C в показательной форме: $C = Re^{i\theta}$, $R \geq 0$. Из равенства $re^{i\phi} = 2Re^{\alpha t}e^{i\theta}e^{i\beta t}$ имеем: $r = 2Re^{\alpha t}$, $\phi = \theta + \beta t + 2\pi n$. В последней формуле $2\pi n$ можно опустить, так как θ — произвольная вещественная константа. Окончательно получаем

$$r = 2Re^{\alpha t}, \phi = \theta + \beta t, \quad (\text{A.19})$$

где $\alpha = \operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2$, $\beta = \operatorname{Im}\lambda_1 = -\operatorname{Im}\lambda_2$.

Осталось разобрать случай, когда матрица B имеет вид (A.14). Запишем систему (A.12):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Все решения второго уравнения содержатся в формуле $y_2 = C_2 e^{\lambda t}$. Подставим это выражение в первое уравнение. Тогда оно примет вид

$$\dot{y}_1 - \lambda y_1 = C_2 e^{\lambda t}. \quad (\text{A.21})$$

Будем искать частное решение этого уравнения в виде $y_1 = ate^{\lambda t}$

$$ae^{\lambda t} + a\lambda te^{\lambda t} - a\lambda te^{\lambda t} = C_2 e^{\lambda t},$$

откуда $a = C_2$. Поэтому все решения уравнения (A.21) содержатся в формуле $y_1 = C_1 e^{\lambda t} + C_2 te^{\lambda t}$, а все решения системы (A.20) имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{\lambda t} + C_2 te^{\lambda t}, \\ y_2 &= C_2 e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Параметрические уравнения фазовых траекторий для разных случаев задаются формулами (A.16), (A.19) и (A.22). Чтобы получить явные уравнения, достаточно в каждом случае исключить параметр t .

Пусть сначала λ_1 , λ_2 — вещественные числа, а матрица B имеет вид (A.13). Тогда параметрические уравнения задаются формулами (A.16). Заметим, что это семейство симметрично относительно координатных осей. Действительно, симметричная относительно соответствующей оси кривая получается при смене знака у одной из констант C_1 , C_2 в (A.16). Поэтому достаточно ограничиться случаем $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, т.е. $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, а затем с помощью симметричных отражений получить все семейство.

При $C_1 = C_2 = 0$ формулы (A.16) задают точку покоя:

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv 0, \\ y_2 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то формулы (A.16) принимают вид

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv C_1, \\ y_2 &\equiv C_2, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

т.е. в этом случае все точки будут точками покоя.

Когда хотя бы одно из собственных чисел λ_1 , λ_2 отлично от нуля, можно считать, что это λ_1 , так как случай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ сводится к $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ перенумерацией собственных чисел и собственных векторов.

Если $\lambda_1 \neq 0$, $C_1 > 0$, $C_2 = 0$, то формулы (A.16) задают открытую полуось

$$\{(y_1, y_2) \mid 0 < y_1 < +\infty, y_2 \equiv 0\}, \quad (\text{A.25})$$

движение по которой осуществляется по направлению к началу координат при $\lambda_1 < 0$ и от начала — при $\lambda_1 > 0$. Аналогично при $\lambda_2 \neq 0$, $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ получается другая открытая полуось

$$\{(y_1, y_2) \mid y_1 \equiv 0, 0 < y_2 < +\infty\}. \quad (\text{A.26})$$

Если $\lambda_2 = 0$, то при $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ формулы (A.16) принимают вид

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv 0, \\ y_2 &\equiv C_2, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

т. е. в этом случае все точки полуоси Oy_2 будут точками покоя.

При $\lambda_1 \neq 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, исключая параметр t в (A.16), получаем

$$y_2 = C_2 \left(\frac{y_1}{C_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

или, обозначая $C_2 C_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ через C ,

$$y_2 = C y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (\text{A.28})$$

Заметим, что в (A.28) $C, y_1, y_2 > 0$.

Если λ — вещественное собственное число кратности 2, а матрица B имеет вид (A.14), то параметрические уравнения фазовых траекторий задаются формулами (A.22). Это семейство симметрично относительно начала координат, так как симметричная кривая получается при одновременной смене знака у констант C_1 , C_2 в (A.22). Поэтому достаточно рассмотреть случай $y_2 \geq 0$, т. е. $C_2 \geq 0$, а затем путем симметричного отражения относительно точки O получить все семейство.

При $C_1 = C_2 = 0$, как и выше, получаем точку покоя (A.23). Если $\lambda = 0$, то из (A.22) $y_1 = C_1 + C_2 t$, $y_2 \equiv C_2$. В случае $C_2 = 0$ это дает

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv C_1, \\ y_2 &\equiv 0, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

т. е. все точки оси Oy_1 являются точками покоя. При каждом $C_2 > 0$ получается горизонтальная прямая

$$\{(y_1, y_2) \mid -\infty < y_1 < +\infty, y_2 \equiv C_2\}, \quad (\text{A.30})$$

движение по которой осуществляется равномерно со скоростью C_2 .

Если $\lambda \neq 0$, $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$, то формулы (A.22) задают две открытые полуоси:

$$\begin{aligned} \{(y_1, y_2) \mid -\infty < y_1 < 0, y_2 \equiv 0\}, \\ \{(y_1, y_2) \mid 0 < y_1 < +\infty, y_2 \equiv 0\}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

движение по которым осуществляется по направлению к началу координат при $\lambda < 0$ и от начала — при $\lambda > 0$. При $C_2 > 0$ ($y_2 > 0$) выразим t из второго уравнения в (A.22) и подставим в первое: $t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{C_2}$, $y_1 = y_2 \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{C_2} \right) = y_2 \left(\frac{C_1}{C_2} - \frac{1}{\lambda} \ln C_2 + \frac{1}{\lambda} \ln y_2 \right)$. Полагая $C = \frac{C_1}{C_2} - \frac{1}{\lambda} \ln C_2$, окончательно получаем

$$y_1 = y_2 \left(C + \frac{1}{\lambda} \ln y_2 \right), \quad (\text{A.32})$$

где $y_2 > 0$, а C — произвольная вещественная постоянная.

Пусть теперь λ_1 , λ_2 — комплексные числа, причем $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, а $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$. Тогда в полярных координатах параметрические уравнения фазовых траекторий задаются формулами (A.19). Исключая t , получаем $r = 2Re^{\frac{\alpha}{\beta}(\phi-\theta)}$, или, обозначая $2Re^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}$ через C ,

$$r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\phi}, \quad (\text{A.33})$$

где $C \geq 0$ — произвольная постоянная.

A.6. Фазовые портреты линейных систем на плоскости

Невырожденные линейные системы

Для построения фазовых портретов воспользуемся уравнениями фазовых траекторий из предыдущего раздела. При этом сначала будем строить фазовый портрет системы (A.12), считая y_1 , y_2 или y_1^* , y_2^* декартовыми координатами, а затем переносить его на исходную плоскость, получая фазовый портрет системы (A.10). Чтобы осуществить этот перенос, следует линейно деформировать рисунок так, чтобы векторы канонического базиса $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ перешли, в зависимости от случая, в векторы $\{s_1, s_2\}$ или $\{s_1^*, s_2^*\}$ на исходной плоскости.

Пусть система (A.10) является невырожденной, т.е. $\det A \neq 0$. Тогда оба собственных числа λ_1 , λ_2 матрицы A отличны от нуля. Разберем разные случаи.

- Собственные числа матрицы A вещественны и различны: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Будем считать, что $\lambda_1 > \lambda_2$, так как альтернативный случай $\lambda_1 < \lambda_2$ сводится к этому перенумерацией собственных чисел (и соответствующих собственных векторов). Решения системы (A.12) задаются формулами (A.16), а уравнения фазовых траекторий в первой четверти — формулами (A.23), (A.25), (A.26) и (A.28). Полный фазовый портрет системы (A.12) получается из портрета в первой четверти с помощью симметричных отражений относительно координатных осей. (рис.А.3, А.4)

(a) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Семейство (A.28) состоит из степенных функций с показателем $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ($0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$). Из (A.16) следует, что при увеличении t от $-\infty$ до $+\infty$ y_1, y_2 возрастают от 0 до $+\infty$. Если дополнить график каждой функции семейства (A.28) точкой $(0, 0)$, т.е. рассматривать эти функции на полуоси $y_1 \geq 0$, то все они будут иметь вертикальную касательную в точке 0.

Движение по фазовым траекториям осуществляется в направлении от начала координат. Полный фазовый портрет системы (A.12) изображен на рис. А.3,а), а исходной системы (A.10) — на рис. А.4,а). Он называется *неустойчивым узлом* (точка покоя $(0, 0)$ неустойчива по Ляпунову). Заметим, что на исходной плоскости общей касательной к фазовым траекториям в начале координат является прямая, содержащая вектор s_2 .

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Этот случай подобен предыдущему, кривым (A.28) в точке 0 горизонтальны. Кроме того, так как $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, движение по фазовым кривым осуществляется в направлении к началу координат.

Точка покоя $(0, 0)$ асимптотически устойчива по Ляпунову. Фазовый портрет для системы (A.12) изображен на рис. А.3,б), а для системы (A.10) — на рис. А.4,б). Он называется *устойчивым узлом*. Общей касательной к фазовым траекториям на исходной плоскости в начале координат является прямая, содержащая вектор s_1 .

- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. В этом случае семейство (A.28) состоит из степенных функций с отрицательным показателем $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. При увеличении t от $-\infty$ до $+\infty$ y_1 возрастает от 0 до $+\infty$, а y_2 убывает от $+\infty$ до 0. Фазовыми траекториями в первой четверти являются также точка покоя (A.23) и открытые координатные полуоси (A.25), (A.26), причем движение по Oy_1 осуществляется в направлении от начала координат, а по Oy_2 — к началу координат.

Точка покоя $(0, 0)$ неустойчива. Фазовый портрет для системы (A.12) изображен на рис. А.5, а для системы (A.10) — на рис. А.6. Он называется *седлом*, так как именно такой вид имеют линии уровня для седлообразной поверхности (например, гиперболического параболоида). (См.рис.А.5, А.6).

- Матрица A имеет собственное число λ кратности 2. Тогда оно вещественно, а матрица B может иметь вид (A.13) или (A.14). Напомним, что $\det A \neq 0$, поэтому $\lambda \neq 0$.

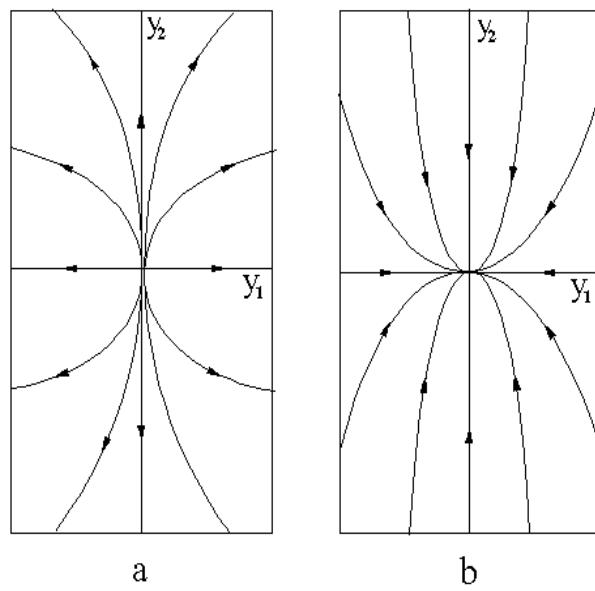


Рис. А.3. Узлы: а) неустойчивый ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$); б) устойчивый ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$)

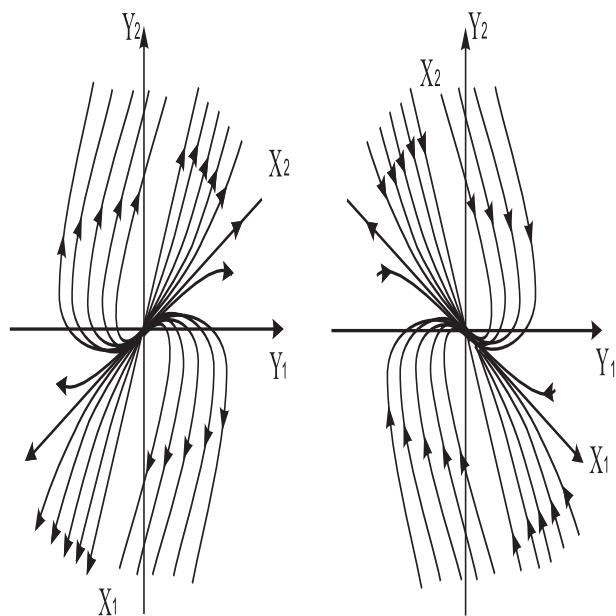


Рис. А.4. Узлы на исходной плоскости: а) неустойчивый; б) устойчивый

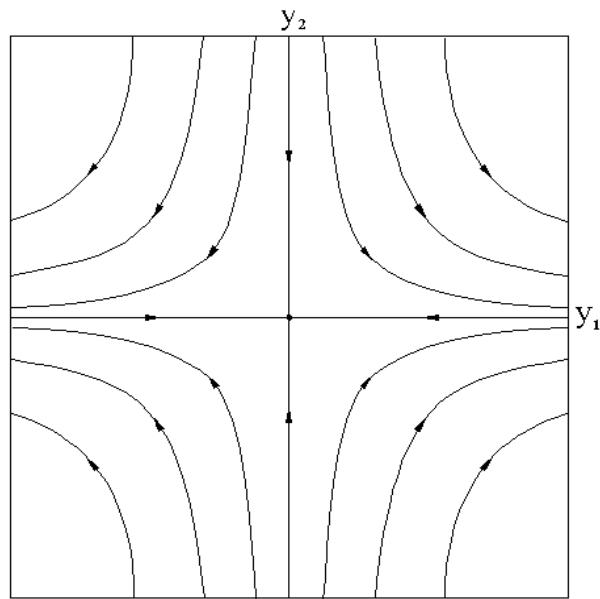
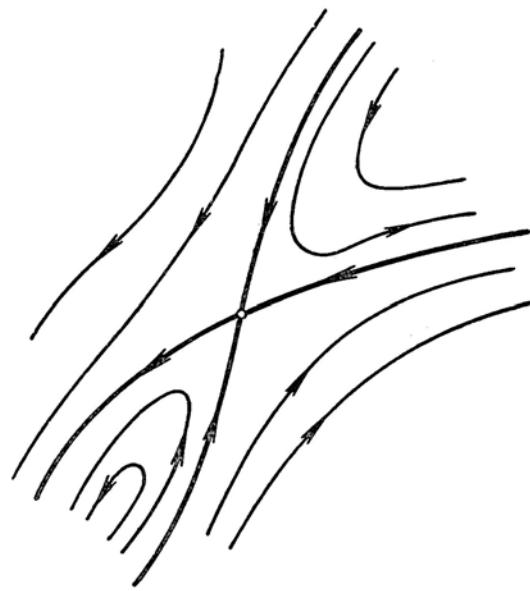
Рис. А.5. Каноническое седло ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$).

Рис. А.6. Седло на исходной плоскости.

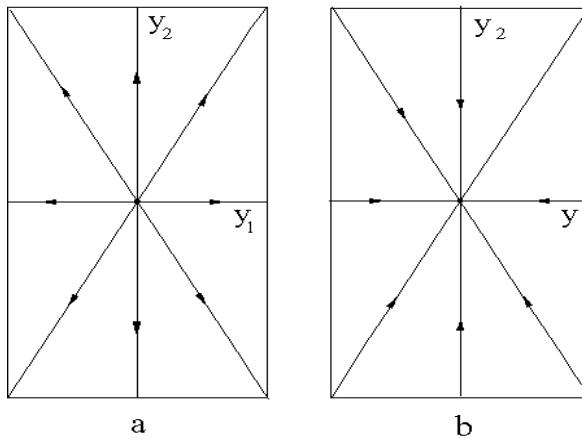


Рис. А.7. Звездные (дикритические) узлы: а) неустойчивый ($\lambda > 0$); б) устойчивый ($\lambda < 0$).

- (а) Жорданова форма матрицы A имеет вид (А.13). Решения системы (А.12), как и в случае различных вещественных собственных чисел, задаются формулами (А.16), а уравнения фазовых траекторий в первой четверти — формулами (А.23), (А.25), (А.26) и (А.28). Семейство (А.28) состоит из открытых лучей $y_2 = Cy_1$, $y_1 > 0$. Из (А.16) следует, что при $\lambda > 0$ движение по всем фазовым траекториям осуществляется от начала координат, и точка покоя $(0, 0)$ неустойчива, а при $\lambda < 0$ — к началу координат, и точка покоя $(0, 0)$ асимптотически устойчива.

Заметим, что в рассматриваемом случае $B = \lambda E$, где E — единичная матрица. Но $B = S^{-1}AS$, откуда следует, что

$$A = SBS^{-1} = S(\lambda E)S^{-1} = \lambda SES^{-1} = \lambda SS^{-1} = \lambda E = B$$

Поэтому фазовые портреты систем (А.12) и (А.10) совпадают. При $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ они изображены соответственно на рис. А.7,а) и А.7,б). Такие портреты называются *звездными (дикритическими) узлами* — неустойчивым и устойчивым.

- (б) Жорданова форма матрицы A имеет вид (А.14). В этом случае решения системы (А.12) задаются формулами (А.22), а фазовые кривые в верхней полуплоскости — формулами (А.23), (А.31) и (А.32). Будем считать в (А.32) переменную y_2 независимой, тогда кривые этого семейства являются графиками функций. Для $y_2 > 0$ из (А.22) следует, что если $\lambda > 0$, то при $t \rightarrow -\infty$ $y_1, y_2 \rightarrow 0$, а при $t \rightarrow +\infty$ $y_1, y_2 \rightarrow +\infty$. Если $\lambda < 0$, то при $t \rightarrow -\infty$ $y_1 \rightarrow -\infty$, $y_2 \rightarrow +\infty$, а при $t \rightarrow +\infty$ $y_1, y_2 \rightarrow 0$.

Графики функций семейства (А.32) можно дополнить точкой $(0, 0)$. Тогда все они будут иметь в начале координат общую касательную $y_2 \equiv 0$. Каждая функция этого семейства принимает экстремальное значение $\tilde{y}_1 = -\frac{1}{\lambda e^{t+\lambda C}}$ при $y_2 = \tilde{y}_2 = \frac{1}{e^{t+\lambda C}}$. Если $\lambda > 0$, то это наименьшее значение, а если $\lambda < 0$, то наибольшее. Для всех C точки $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ лежат на прямой $y_1 = -\frac{1}{\lambda}y_2$.

Полный фазовый портрет получается из фазового портрета в верхней полуплоскости с помощью симметричного отражения относительно начала координат. Для системы (А.12) при $\lambda > 0$ он изображен на рис. А.8,а), а при $\lambda < 0$ — на рис. А.8,б). Пунктиром показаны прямые, на которых лежат экстремальные значения функций семейства (А.32).

Такие портреты называются *вырожденными узлами* — неустойчивым и устойчивым. Соответствующие фазовые портреты для системы (А.10) изображены на рис. А.9. Заметим, что общей касательной для фазовых кривых в точке O исходной плоскости является прямая, содержащая вектор s_1 .

3. Матрица A имеет комплексные собственные числа $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. В полярной системе координат фазовые кривые задаются формулами (А.33). Будем считать

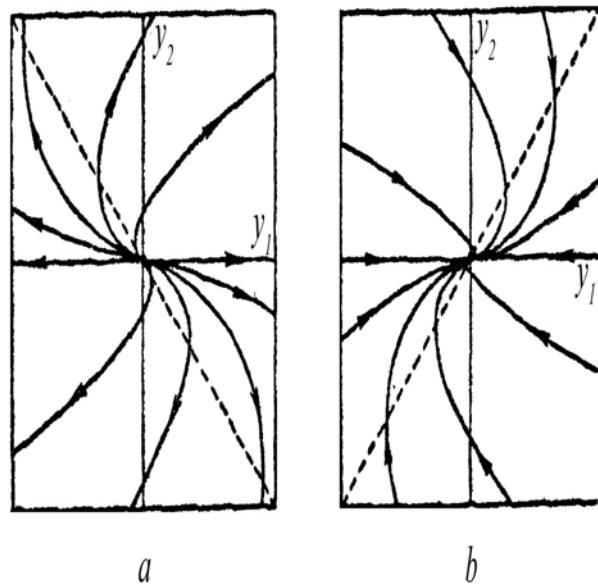


Рис. А.8. Вырожденные узлы: а) неустойчивый ($\lambda > 0$); б) устойчивый ($\lambda < 0$).

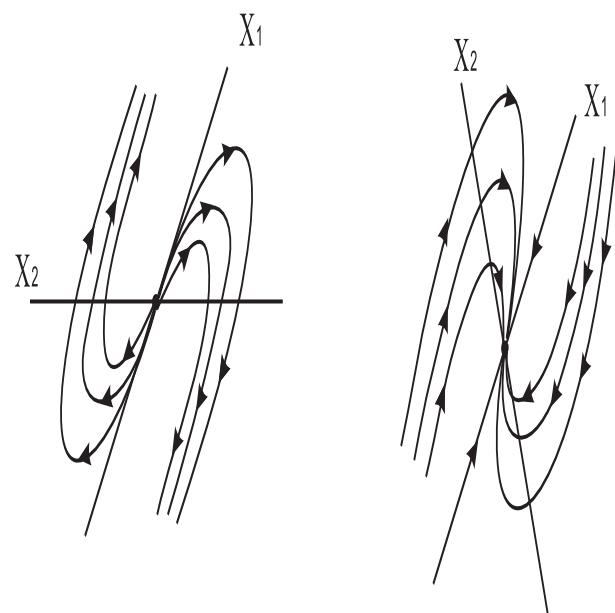


Рис. А.9. Вырожденные узлы на исходной плоскости: а) неустойчивый; б) устойчивый.

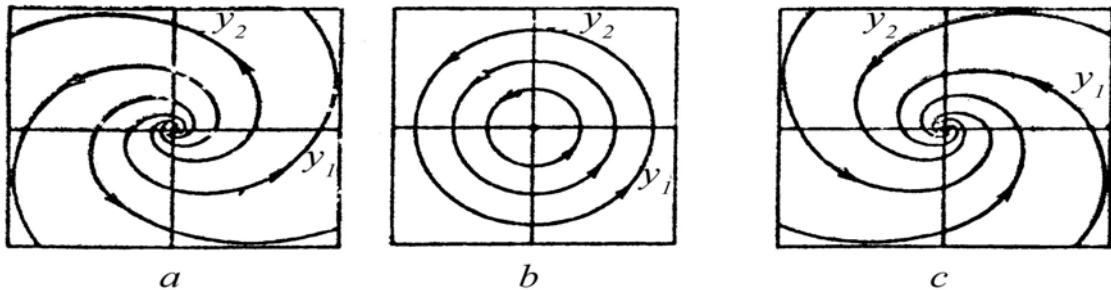
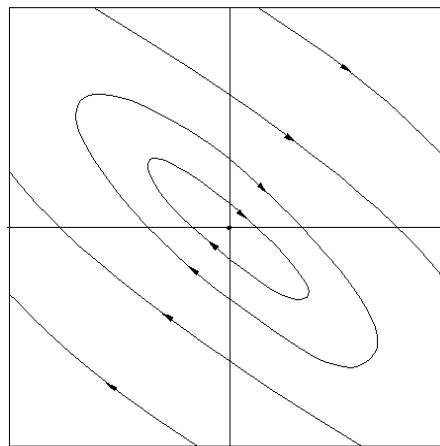
Рис. A.10. а) неустойчивый фокус ($\alpha > 0$); б) центр ($\alpha = 0$); в) устойчивый фокус ($\alpha < 0$).

Рис. A.11. Центр на исходной плоскости.

$\beta > 0$, так как в противном случае достаточно перенумеровать собственные числа и соответствующие собственные векторы. Тогда из (A.19) следует, что при увеличении t от $-\infty$ до $+\infty$ ϕ возрастает в тех же пределах.

- (а) $\alpha = 0$. В этом случае семейство (A.33) состоит из концентрических окружностей с центром в точке O , пробегаемых против часовой стрелки (в положительном направлении). Точка покоя O устойчива, но не асимптотически. Линейное преобразование переводит окружности в эллипсы на исходной плоскости.

Если при этом векторы $s_1^* = \text{Res}$ и $s_2^* = -\text{Im}s$ задают левую систему координат, т.е. кратчайший поворот от s_1^* до s_2^* осуществляется по часовой стрелке (в отрицательном направлении), то движение по эллипсам происходит также по часовой стрелке. Фазовый портрет для системы (A.12) изображен на рис. A.10,б), а для системы (A.10) — на рис. A.11. Он называется *центром*.

- (б) $\alpha \neq 0$. Семейство (A.33) в этом случае состоит из спиралей, пробегаемых против часовой стрелки (в положительном направлении). Если $\alpha > 0$, то при увеличении t (и ϕ) от $-\infty$ до $+\infty$ r возрастает от 0 до $+\infty$, и точка покоя O неустойчива, а если $\alpha < 0$, то r убывает от $+\infty$ до 0, и точка покоя O асимптотически устойчива.

Если векторы $s_1^* = \text{Res}$ и $s_2^* = -\text{Im}s$ задают левую систему координат, то, как и в предыдущем пункте, движение по фазовым траекториям на исходной плоскости осуществляется по часовой стрелке (в отрицательном направлении). Фазовые портреты для системы (A.12) при $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$ изображены на рис. A.10,а) и A.10,в) соответственно, а для системы (A.10) при $\alpha < 0$ — на рис. A.12. Они называются *фокусами* — неустойчивым и устойчивым.

Вырожденные линейные системы Пусть система (A.10) является вырожденной, т.е.

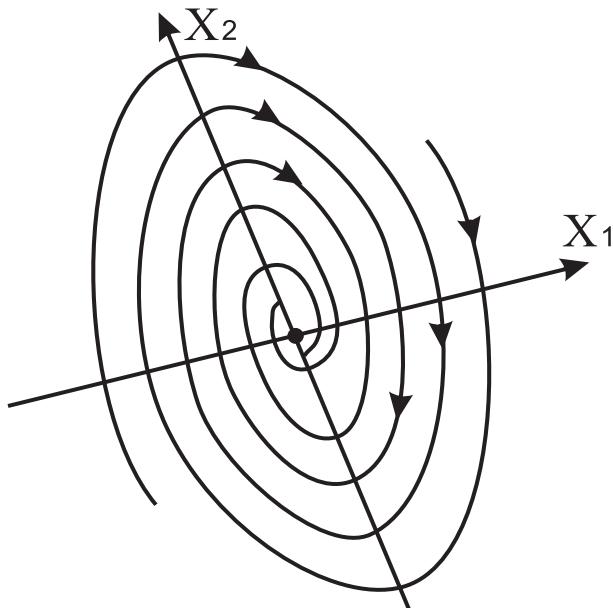


Рис. А.12. Устойчивый фокус на исходной плоскости.

$\det A = 0$. Тогда хотя бы одно из собственных чисел матрицы A равно нулю, а другое, во всяком случае, вещественно. Будем считать, что $\lambda_2 = 0$.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и матрица B имеет вид (А.13), т. е. является нулевой. Семейство фазовых траекторий состоит из точек покоя (А.24). Все они, в том числе и точка O , устойчивы, но не асимптотически.
 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и матрица B имеет вид (А.14). В этом случае семейство фазовых траекторий для $y_2 > 0$ состоит из горизонтальных прямых (А.30). В верхней полуплоскости к ним следует добавить все точки оси Oy_1 (А.29), которые являются точками покоя.
- Полный фазовый портрет получается после добавления траекторий, которые симметричны траекториям из верхней полуплоскости относительно точки O . Для системы (А.12) он изображен на рис. А.13,а), а для системы (А.10) — на рис. А.14,а). Все точки покоя, в том числе и точка O , неустойчивы по Ляпунову.
3. $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, матрица B имеет вид (А.13), а уравнения фазовых траекторий задаются формулами (А.23), (А.25), (А.27) и (А.28), причем (А.25) и (А.28) можно объединить:

$$\{(y_1, y_2) \mid 0 < y_1 < +\infty, y_2 \equiv C, C \geq 0\}. \quad (\text{А.34})$$

Это семейство состоит из открытых горизонтальных полупрямых, лежащих в первой четверти. Для траекторий (А.34) из формул (А.16) следует, что если $\lambda_1 > 0$, то при увеличении t от $-\infty$ до $+\infty$ y_1 возрастает от 0 до $+\infty$, а если $\lambda_1 < 0$, то убывает от $+\infty$ до 0.

Чтобы получить полный фазовый портрет, следует осуществить симметричное отражение этих фазовых траекторий относительно обеих осей. Для системы (А.12) при $\lambda_1 > 0$ он изображен на рис. А.13,б), а для системы (А.10) при $\lambda_1 < 0$ — на рис. А.14,б). Все точки покоя, лежащие на оси Oy_2 , в том числе точка O , при $\lambda_1 > 0$ неустойчивы, а при $\lambda_1 < 0$ — устойчивы по Ляпунову.

Зависимость фазового портрета от следа и определителя матрицы системы

Анализ полученных результатов показывает, что фазовый портрет линейной однородной динамической системы существенно зависит от структуры жордановой формы матрицы A и, в частности, от корней характеристического многочлена (А.15). Его коэффициенты выражаются следу-

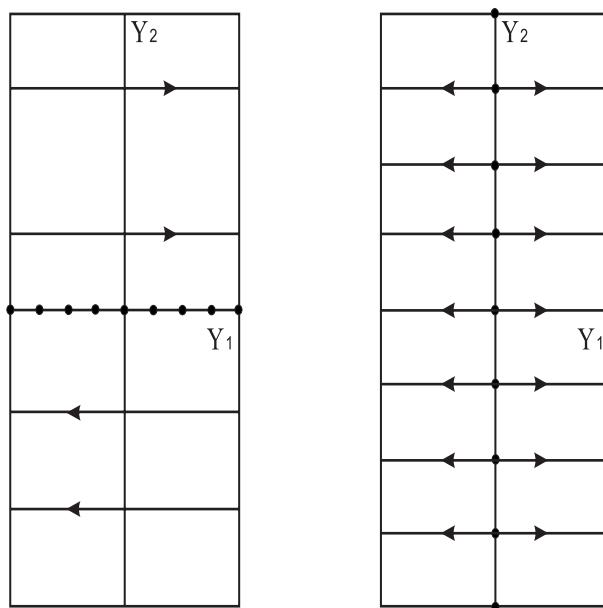


Рис. А.13. Фазовые портреты вырожденных линейных однородных систем.

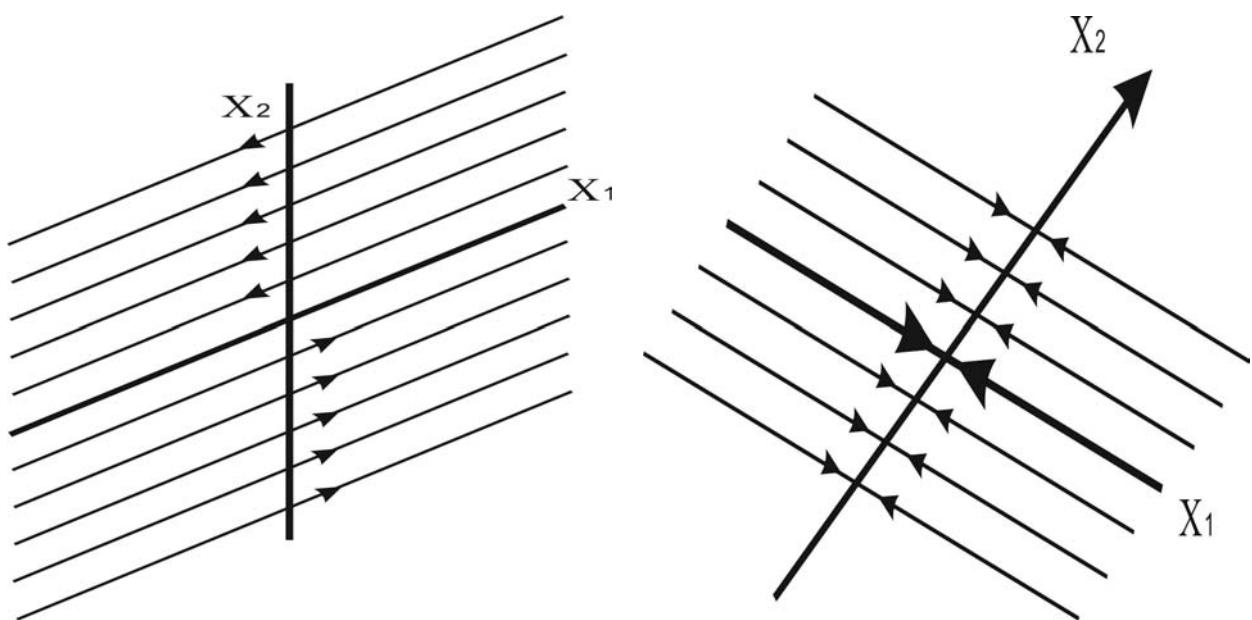


Рис. А.14. Фазовые портреты вырожденных линейных однородных систем на исходной плоскости.

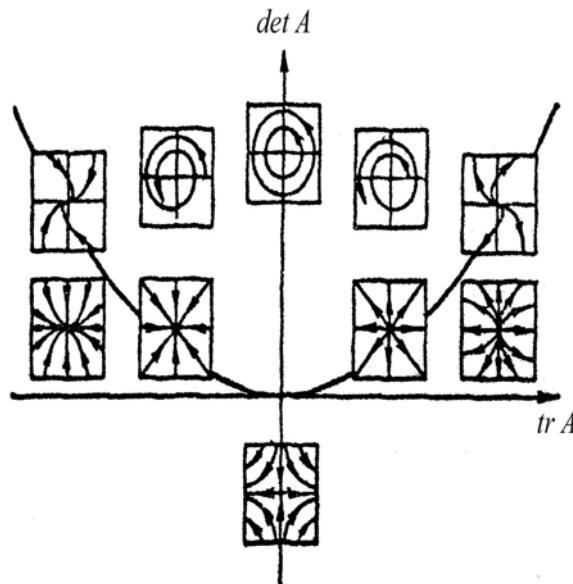


Рис. А.15. Характер зависимости фазовых портретов однородной линейной системы второго порядка от следа и определителя ее матрицы.

ющим образом через коэффициенты матрицы A : если $\chi(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + d$, то $t = \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ — след матрицы A , а $d = \det A$ — ее определитель.

Корни характеристического многочлена выражаются через коэффициенты по формуле $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{\Delta})$, где $\Delta = t^2 - 4d$ — дискриминант. Равенство $\Delta = t^2 - 4d = 0$ определяет на плоскости (t, d) кривую, на которой происходит смена типа фазового портрета, что проиллюстрировано на рис. А.15. Таким образом, зная след и определитель матрицы A , мы можем по этому рисунку определить тип фазового портрета ([42]).

A.7. Примеры исследования динамических систем

Пример А.1. Динамическая система хищник — жертва

Рассмотрим модель, описывающую эволюцию двух видов. Один вид — хищники (щуки), а другой — их жертвы (караси). Пусть x_1, x_2 — численность популяций жертв и хищников соответственно в некоторый момент времени. Предположим, что между особями одного вида нет соперничества.

Если бы хищников не было, то при достаточном количестве ресурсов (пищи) скорость прироста карасей была бы пропорциональна уже имеющемуся количеству, т. е. подчинялась бы дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad a > 0.$$

С другой стороны, при отсутствии добычи (карасей) скорость уменьшения количества щук была бы также пропорциональна уже имеющемуся их количеству, т. е. подчинялась бы дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_2 = -cx_2, \quad c > 0.$$

Но наличие жертв в случае успешной охоты на них компенсирует уменьшение численности хищников, а наличие хищников сдерживает рост популяции жертв. Учитывая сказанное, модель взаимодействия в системе хищники — жертвы может быть взята в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (-c + dx_1)x_2, \end{aligned} \tag{A.35}$$

где $a, b, c, d > 0$.

Найдем точки покоя динамической системы (A.35) из решения системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}(a - bx_2)x_1 &= 0, \\ (-c + dx_1)x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Точки $M_1(0, 0)$, $M_2(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ — точки покоя. Рассмотрим линеаризации динамической системы (A.35) в окрестности каждой из этих точек. Для этого найдем элементы $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ матрицы Якоби:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= a - bx_2, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -bx_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= dx_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -c + dx_1.\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\partial f}{\partial x}(M_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \frac{\partial f}{\partial x}(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

В окрестности точки M_1 в локальных координатах y_1 , y_2 динамическая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= ay_1, \\ \dot{y}_2 &= -cy_2.\end{aligned}$$

Ее фазовый портрет типа *седло* дан на рис. A.5. В разделе A.10 будет показано, что этот тип портрета сохраняется при малом возмущении системы. Поскольку в окрестности точки покоя нелинейные члены можно рассматривать как малое возмущение, для нелинейной динамической системы (A.35) в окрестности точки M_1 локальный фазовый портрет также будет типа *седло*.

В окрестности точки M_2 в локальных координатах z_1 , z_2 динамическая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\frac{bc}{d}z_2, \\ \dot{z}_2 &= \frac{ad}{b}z_1.\end{aligned}$$

Собственные числа матрицы A_2 удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 + ac = 0$$

и равны $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$. Таким образом, фазовый портрет будет типа *центр* (рис. A.11). Он может разрушиться при малом возмущении. Покажем, что в данном случае он сохраняется. Действительно, динамическая система (A.35) имеет интеграл

$$x_1^c e^{-dx_1} x_2^a e^{-bx_2} = g(x_1)h(x_2)$$

(графики функций g, h изображены на рис. A.16).

Функции $g(x_1)$ и $h(x_2)$ принимают максимальные значения при $x_1 = \frac{c}{d}$ и $x_2 = \frac{a}{b}$ соответственно, и, таким образом, функция $g(x_1)h(x_2)$ принимает максимальное значение в точке $M_2(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Следовательно, линии уровня функции двух переменных $g(x_1)h(x_2)$ являются замкнутыми кривыми, т. е. локальный фазовый портрет динамической системы (A.35) в точке M_2 является центром. Глобальный фазовый портрет для системы (A.35) дан на рис. A.17. Из фазового портрета следует, что численности хищников и жертв находятся, как правило, в динамическом равновесии.

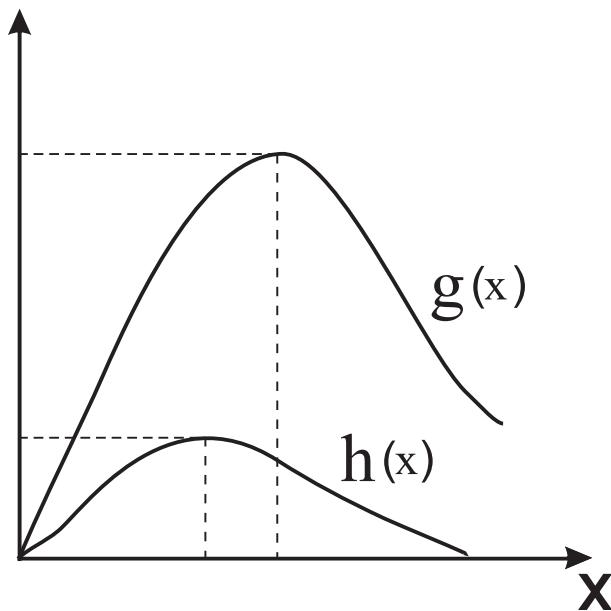
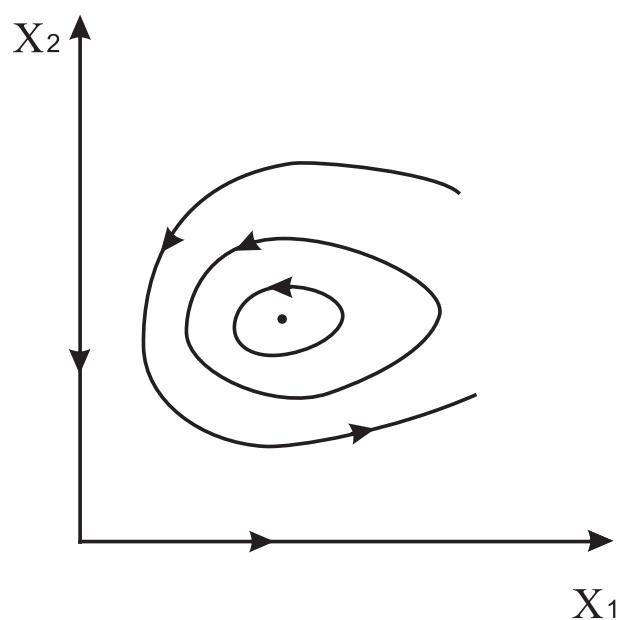
Рис. А.16. Графики функций $g(x)$ и $h(x)$ 

Рис. А.17. Фазовый портрет системы (A.35).

Пример А.2. Бифуркация фазовых портретов одномерной системы

Бифуркацией называется качественное изменение поведения системы при изменении входящих в нее параметров. Например, для системы, имеющей точку покоя типа центр возможно такое изменение параметров, при котором эта точка покоя будет фокусом.

Рассмотрим для различных ε дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = x^2 - \varepsilon.$$

1. $\varepsilon < 0$.

В этом случае $x^2 - \varepsilon \geq -\varepsilon > 0$. Следовательно, система не имеет состояний равновесия, и все решения возрастают. Решение задачи Коши с начальными данными $(0, x_0)$ задается формулой

$$x = \frac{x_0 - \varepsilon \alpha(t, \varepsilon)}{1 - x_0 \alpha(t, \varepsilon)},$$

где $\alpha(t, \varepsilon) = \operatorname{tg}(t\sqrt{-\varepsilon})/\sqrt{-\varepsilon}$. Оно определено при

$$-\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\sqrt{-\varepsilon}} \right) < t < \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\sqrt{-\varepsilon}} \right).$$

2. $\varepsilon = 0$.

Существует единственная точка покоя $x = 0$, которая определяется уравнением $x^2 = 0$. В остальных случаях $\dot{x} > 0$, т.е. решения возрастают. Решение задачи Коши с начальными данными $(0, x_0)$ имеет вид

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

Оно определено при $-\infty < t < \frac{1}{x_0}$, если $x_0 > 0$ и при $\frac{1}{x_0} < t < +\infty$, если $x_0 < 0$.

3. $\varepsilon > 0$.

В этом случае есть две точки покоя $x = \pm\varepsilon$, которые определяются уравнением $x^2 - \varepsilon = 0$. При $|x| > \sqrt{\varepsilon}$ $\dot{x} > 0$, т.е. решение возрастает, а при $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ $\dot{x} < 0$, т.е. решение убывает. Задача Коши с начальными данными $(0, x_0)$ имеет решение

$$x = \sqrt{\varepsilon} \frac{x_0 (1 + e^{2\sqrt{\varepsilon}t}) + \sqrt{\varepsilon} (1 - e^{2\sqrt{\varepsilon}t})}{x_0 (1 - e^{2\sqrt{\varepsilon}t}) + \sqrt{\varepsilon} (1 + e^{2\sqrt{\varepsilon}t})}.$$

При $|x_0| \leq \sqrt{\varepsilon}$ оно определено для всех t , а при $|x_0| > \sqrt{\varepsilon}$ — для

$$t < \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{x_0 + \sqrt{\varepsilon}}{x_0 - \sqrt{\varepsilon}}.$$

В заключение заметим, что рассмотренное уравнение не удовлетворяет предположениям, сделанным в разделе А.1, так как его решения определены не для всех t .

A.8. Предельные циклы

Основные определения

Пусть

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{A.36}$$

— достаточно гладкая динамическая система, т. е. функции P и Q имеют достаточно много производных. Предположим, что у системы (A.36) существует замкнутая фазовая траектория L_0 . Пусть

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(t), \\ x_2 &= \phi_2(t) \end{aligned} \tag{A.37}$$

— соответствующее этой траектории решение. Тогда $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ — периодические функции с общим периодом, который мы обозначим через T ($T > 0$).

Определение A.1. Изолированная замкнутая траектория системы (A.36) называется предельным циклом.

Нас интересует поведение траекторий системы (A.36) в окрестности замкнутой траектории L_0 . Введем сначала некоторую вспомогательную функцию. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ настолько мало, что в окрестности $U_{\varepsilon_0}(L_0)$ (более кратко U) нет ни одной точки покоя системы (A.36). Можно показать, что такое ε_0 существует. Возьмем на траектории L_0 произвольную точку M_0 и проведем через нее *дугу без контакта* (т. е. дугу, не имеющую общей касательной ни с одной траекторией) l , расположенную в окрестности U , причем так, что M_0 есть внутренняя точка дуги l . В качестве l можно взять, например, достаточно малый отрезок, перпендикулярный траектории L_0 .

Введем на дуге l параметр s путем задания ее параметрических уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(s), \\ x_2 &= g_2(s). \end{aligned}$$

Будем считать, что точке M_0 соответствует на дуге l значение параметра $s = s_0$.

В силу теоремы А.3 о непрерывной зависимости общего решения от начальных данных и параметров существует $\eta > 0$ настолько малое, что все траектории, пересекающие при $t = t_0$ часть дуги l , соответствующую значениям s , лежащим в пределах

$$s_0 - \eta \leq s \leq s_0 + \eta, \tag{A.38}$$

пересекают дугу l вторично при значениях t , больших t_0 , не выходя до этого из окрестности U замкнутой траектории.

Рассмотрим на дуге l точку, соответствующую некоторому значению параметра s , удовлетворяющему неравенству (A.38). Пусть фазовая траектория, пересекающая дугу l в этой точке, впервые пересечет ее в следующий раз в точке, соответствующей значению σ параметра на дуге l . Тогда на части дуги l , соответствующей значениям (A.38) параметра s , определена *функция последования*

$$p : s \mapsto \sigma = p(s).$$

Обозначим через M' точку дуги l , соответствующую значению $s_0 - \eta$ параметра s , через L' — траекторию системы (A.36), проходящую через точку M' , а через N' — точку, в которой траектория L' вторично пересекает дугу l при возрастании времени. Точка N' соответствует, очевидно, значению $f(s_0 - \eta)$ параметра s . Она может отличаться от точки M' .

Если $M' = N'$, то L' — замкнутая траектория, и мы обозначим через Γ' кольцевую область, ограниченную траекториями L_0 и L' . Если же точки M' и N' различны, то траектория L' не замкнута, и мы будем под Γ' понимать кольцевую область, ограниченную траекторией L_0 и замкнутой кривой, состоящей из витка $M'N'$ траектории L' и части $N'M'$ дуги l .

Точно так же, обозначив через M'' точку дуги l , соответствующую значению $s_0 + \eta$ параметра s , мы введем траекторию L'' , точку N'' и область Γ'' , аналогичную области Γ' . Можно показать:

- 1) области Γ' и Γ'' вместе со своими границами лежат в окрестности U ;
- 2) каждая траектория, проходящая через некоторую точку области Γ' , пересекает часть M_0N' (или M_0M' , если точка N' лежит на дуге l между M_0 и M') дуги l как при возрастании, так и при убывании времени;

3) каждая траектория, проходящая через некоторую точку области G'' , пересекает часть M_0N'' (или M_0M'') дуги l .

Нетрудно заметить, что замкнутой траектории соответствует неподвижная точка функции последований, и наоборот.

В зависимости от характера поведения функции последований возможны следующие случаи расположения траекторий в окрестности L_0 :

1. Все траектории, отличные от траектории L_0 и достаточно близкие к ней, при возрастании времени стремятся к L_0 , а при убывании времени выходят из окрестности U . При этом предельный цикл L_0 называется *устойчивым* (показан на рис. А.18, и мы будем говорить, что близкие к L_0 траектории *накручиваются на* L_0).
2. Все достаточно близкие к L_0 траектории (отличные от L_0) стремятся к L_0 при убывании времени, а при возрастании времени выходят из окрестности U . В этом случае предельный цикл L_0 называется *неустойчивым*. Мы будем говорить, что все указанные траектории *скручиваются с* L_0 .
3. Все траектории, проходящие через точки окрестности U и лежащие по одну сторону от траектории L_0 , стремятся к L_0 при возрастании времени и выходят из окрестности U при убывании времени; траектории же, лежащие по другую сторону от L_0 , стремятся к L_0 при убывании времени и выходят из окрестности U при неограниченном возрастании времени. В такой ситуации предельный цикл называется *полустойчивым*. Близкие к полуустойчивому циклу L_0 траектории, расположенные по одну его сторону, накручиваются на L_0 , а по другую — скручиваются с L_0 .

В следующих примерах предлагается найти предельные циклы для динамических систем и определить их тип, (r, φ) — полярные координаты.

Пример А.3. Устойчивый предельный цикл Рассмотрим нелинейную динамическую систему второго порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).\end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам по формулам $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. В новых координатах динамическая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r), \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}$$

Фазовый портрет в координатах x_1 , x_2 имеет вид, как на рис. А.18.

Пример А.4. Полустойчивый предельный цикл Система

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r - 1)^2, \\ \dot{\varphi} &= 1\end{aligned}$$

имеет один предельный цикл в виде окружности единичного радиуса. Однако здесь \dot{r} положительно для $0 < r < 1$ и для $r > 1$, так что этот предельный цикл полуустойчивый.

Критерии устойчивости и неустойчивости предельных циклов

Предположим, что система (А.36) является достаточно гладкой. Пусть $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ — координатные функции (А.37) решения с периодом T , соответствующего замкнутой траектории L_0 . Число

$$\chi = \frac{1}{T} \int_0^T [P'_{x_1}(\phi_1(t), \phi_2(t)) + Q'_{x_2}(\phi_1(t), \phi_2(t))] dt \quad (\text{A.39})$$

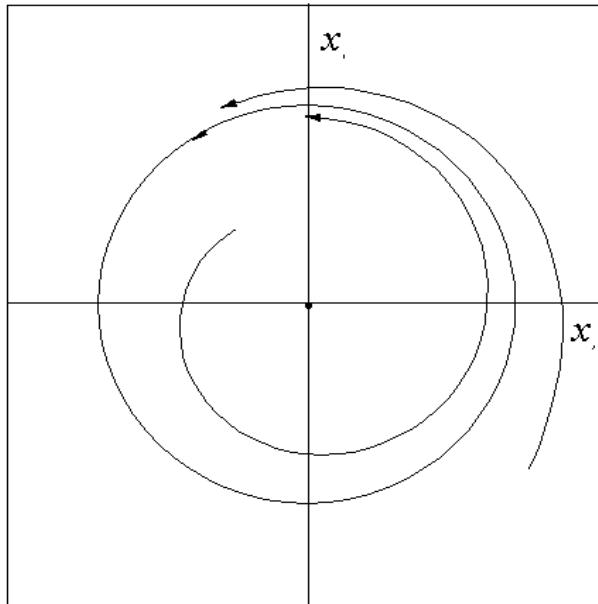


Рис. А.18. Устойчивый предельный цикл.

называется *характеристическим показателем* замкнутой траектории L_0 . Замкнутая траектория называется *простым предельным циклом*, если ее характеристический показатель отличен от нуля. Если замкнутая траектория является предельным циклом, а ее характеристический показатель равен нулю, то она называется *сложным предельным циклом*. Заметим, что если характеристический показатель нулевой, то замкнутая траектория может вообще не быть предельным циклом.

Теорема А.5. ([11], § 13, теорема 17). Простой предельный цикл является устойчивым, если его характеристический показатель отрицателен, и неустойчивым, если показатель положителен.

Пример А.5. Применение критерия устойчивости

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(x_1 + 2) + x_1^2 + x_2^2 - 1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1(x_1 + 2).\end{aligned}\tag{A.40}$$

Используя правило дифференцирования неявной функции, легко убедиться, что замкнутая кривая $x_1^2 + x_2^2 = 1$ является фазовой траекторией. Ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos \theta, \\ x_2 &= \sin \theta.\end{aligned}\tag{A.41}$$

Выясним, при какой зависимости $\theta(t)$ формулы (A.41) дают решение системы (A.40), соответствующее рассматриваемой фазовой траектории. Подстановка выражений (A.41) в систему (A.40) дает

$$\begin{aligned}-\sin \theta d\theta &= \sin \theta(\cos \theta + 2)dt, \\ \cos \theta d\theta &= -\cos \theta(\cos \theta + 2)dt,\end{aligned}$$

откуда решение получается при $dt = -d\theta/(\cos \theta + 2)$. Найдем частные производные от правых частей системы: $P'_{x_1}(x_1, x_2) = x_2 + 2x_1$, $Q'_{x_2}(x_1, x_2) = 0$. Характеристический показатель

$$\chi = \frac{1}{T} \int_0^T [\sin \theta(t) + 2 \cos \theta(t)] dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + 2 \cos \theta}{\cos \theta + 2} d\theta.$$

Посчитав последний интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки или, что проще, с помощью теоремы о вычетах, можно убедиться, что он положителен, а характеристический показатель χ отрицателен, и, следовательно, окружность единичного радиуса с центром в начале координат является устойчивым предельным циклом.

A.9. Возмущение дифференциальных уравнений

Основные определения

Дифференциальные уравнения, описывающие реальные процессы, обычно содержат параметры, которые задаются с некоторой погрешностью. Поэтому, изучая систему таких дифференциальных уравнений, мы должны помнить, что истинные значения параметров, вообще говоря, несколько отличаются от тех, при которых система исследуется. Будем считать, что каждый набор параметров определяет свою систему уравнений. В этом случае *возмущением* некоторой системы называют переход к системе с близким в каком-либо смысле набором параметров.

Чтобы установить какое-нибудь свойство системы, описывающей реальный процесс, необходимо проверить сохранение этого свойства при возмущении. Если такое сохранение имеет место, то реальная система также обладает указанным свойством. Пусть, например, исследуемая система имеет точку покоя (состояние равновесия) A . Возникает вопрос о поведении этой точки при возмущении системы.

Если возмущенная система при всех достаточно малых возмущениях имеет точку покоя A^* , и расстояние между A и A^* мало, то можно утверждать, что реальная система также имеет состояние равновесия, которое близко к A . Если состояние равновесия может исчезнуть при малом возмущении системы, то мы не можем гарантировать наличие состояния равновесия у реальной системы.

Уточним понятие возмущения системы дифференциальных уравнений. Напомним, что вектор-функция

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \quad n \geq 1,$$

является C^1 -гладкой, или просто гладкой, если все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны. Матрица

$$D(x) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}$$

называется *производной матрицей*, или *матрицей Якоби* вектор-функции f .

Говорят, что вектор-функция g является *возмущением* вектор-функции f , если разность $|g - f|$ и все ее частные производные $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ достаточно малы, т. е. существует такое достаточно малое число $\delta > 0$, что для всех x

$$|g(x) - f(x)| < \delta, \quad \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| < \delta.$$

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(x) \tag{A.42}$$

является *возмущением* системы уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{A.43}$$

если вектор-функция g является возмущением вектор-функции f .

Возмущение состояния равновесия

Пусть система дифференциальных уравнений (A.43) имеет состояние равновесия в точке x_0 , т. е. $f(x_0) = 0$. Нашей целью является изучение поведения состояния равновесия при возмущении. Состояние равновесия возмущенной системы (A.42) является решением уравнения $g(x) = 0$. Сначала рассмотрим примеры.

Пример А.6. Исчезновение состояния равновесия при возмущении

Вернемся к примеру А.2 из раздела А.7. Уравнение $\dot{x} = x^2 - \varepsilon$ этого примера для достаточно малых ε можно рассматривать как возмущение уравнения $\dot{x} = x^2$, которое получается при $\varepsilon = 0$. Последнее уравнение имеет единственное состояние равновесия $x = 0$. В то же время у возмущенного уравнения при сколь угодно малых отрицательных ε вообще нет состояний равновесия, так как уравнение $x^2 - \varepsilon = 0$ не имеет вещественных корней, если $\varepsilon < 0$. Таким образом, состояние равновесия уравнения $\dot{x} = x^2$ исчезает при возмущении.

Пример А.7. Сохранение единственного состояния равновесия при возмущении

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = x$ на прямой R . У него есть единственное состояние равновесия $x = 0$. Пусть возмущенное уравнение имеет вид $\dot{x} = x + \alpha(x)$, где функция α и ее производная достаточно малы. Состояния равновесия возмущенного уравнения являются корнями уравнения $x + \alpha(x) = 0$. Покажем, что это уравнение имеет единственное решение при всех достаточно малых функциях α .

Действительно, фиксируем отрезок $[-d, d]$. Убедимся, что при малых α функция $x + \alpha(x)$ принимает на концах этого отрезка значения разных знаков. Если это так, то по непрерывности этой функции найдется точка x_0 на отрезке $[-d, d]$, в которой функция принимает нулевое значение. На левом конце она принимает значение $-d + \alpha(-d)$, и если для всех $x \in [-d, d]$ $|\alpha(x)| < d$, то $-d + \alpha(-d) < -d + |\alpha(-d)| < 0$. Аналогично, на правом конце $d + \alpha(d) > d - |\alpha(d)| > 0$.

Таким образом, решение уравнения $x + \alpha(x) = 0$ при $|\alpha(x)| < d$ существует. Покажем, что оно единственное. Для этого проверим, что функция $x + \alpha(x)$ является строго возрастающей, если для всех $x \in [-d, d]$ $|\alpha'(x)| < 1$. Действительно, в этом случае $(x + \alpha(x))' = 1 + \alpha'(x) \geq 1 - |\alpha'(x)| > 0$. Но строго возрастающая непрерывная функция не может принимать нулевое значение более, чем один раз. Таким образом, мы показали, что возмущенное уравнение $\dot{x} = x + \alpha(x)$ имеет единственное состояние равновесия на отрезке $[-d, d]$, $d > 0$ при условии $|\alpha(x)| < d$ и $|\alpha'(x)| < 1$.

Пример А.8. Увеличение числа состояний равновесия при возмущении

Аналогично предыдущему можно показать, что возмущенное уравнение $\dot{x} = x^3 + \alpha(x)$ имеет хотя бы одно состояние равновесия. Однако в этом случае их может быть много.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = x^3$ на прямой R . Оно имеет единственное состояние равновесия $x = 0$. Рассмотрим возмущенное уравнение вида $\dot{x} = x^3 - \varepsilon x$, где ε — малое положительное число. Оно имеет три состояния равновесия: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\varepsilon}$ и $x_3 = -\sqrt{\varepsilon}$, причем если ε близко к нулю, то все корни будут также близки к нулю. Таким образом, мы имеем случай, когда при возмущении одного состояния равновесия рождаются три состояния равновесия.

Из приведенных примеров видно, что при возмущении состояния равновесия возможны следующие случаи:

- 1) состояние равновесия исчезает;
- 2) состояние равновесия сохраняется, и притом только одно;
- 3) состояние равновесия сохраняется, но возможно, что из одного состояния равновесия возникает несколько.

Второй случай является предпочтительным для практических приложений. В этом случае возмущенная система имеет единственное состояние равновесия, которое непрерывно зависит от возмущения.

Рассмотрим достаточные условия описанного поведения состояния равновесия. Пусть система (A.43)

$$\dot{x} = f(x),$$

где $x \in R^n$, имеет состояние равновесия в точке x_0 , т. е. $f(x_0) = 0$. Оно называется *невырожденным*, если определитель матрицы Якоби отличен от нуля в точке x_0 :

$$\det D(x_0) \neq 0.$$

Из теоремы о неявных функциях ([36], § 33) можно вывести следующую теорему.

Теорема A.6. Если система (A.43) имеет невырожденное состояние равновесия x_0 , то возмущенная система (A.42) в некоторой окрестности точки x_0 имеет единственное состояние равновесия, которое непрерывно зависит от возмущения.

Непрерывная зависимость состояния равновесия от возмущения означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$|f(x) - g(x)| < \delta, \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| < \delta,$$

то возмущенная система (A.42) имеет состояние равновесия x^* и $\|x^* - x_0\| < \varepsilon$.

Пример A.9. Сохранение состояний равновесия для системы

Рассмотрим на плоскости R^2 систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= y \sin x + x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Состояния равновесия этой системы определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ y \sin x + x^2 + 2x &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет два решения: $(0,0)$ и $(-2,0)$. Матрица Якоби имеет вид

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y \cos x + 2x + 2 & \sin x \end{pmatrix}.$$

В точке $(0,0)$ матрица $D(x, y)$ приобретает значение

$$D(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det D(0, 0) = -2 \neq 0$, согласно теореме A.6 возмущенная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \alpha_1(x, y), \\ \dot{y} &= y \sin x + x^2 + x + \alpha_2(x, y) \end{aligned} \tag{A.44}$$

имеет единственное состояние равновесия вблизи точки $(0,0)$.

В точке $(-2,0)$ матрица $D(x, y)$ имеет значение

$$D(-2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\sin 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку, как и выше, $\det D(-2, 0) = 2 \neq 0$, возмущенная система (A.44) имеет единственное состояние равновесия вблизи точки $(-2,0)$.

Возмущение замкнутых траекторий

Пусть кривая L_0 является замкнутой траекторией динамической системы дифференциальных уравнений. В разделе A.2 было показано, что замкнутой траектории соответствуют периодические решения системы. Там же отмечалось, что решения, соответствующие одной и той же траектории, отличаются лишь сдвигом аргумента на константу. Поэтому все решения, соответствующие траектории L_0 , имеют один и тот же главный период T .

В разделе А.8 была описана функция последования p . Известно, что ([11]) для гладких систем эта функция является гладкой. Замкнутой траектории L_0 соответствует неподвижная точка s_0 функции последования: $p(s_0) = s_0$. И наоборот, неподвижной точке функции последования соответствует замкнутая траектория.

Следовательно, вопрос о существовании замкнутой траектории сводится к вопросу о существовании неподвижной точки функции последования. Возмущенной системе дифференциальных уравнений соответствует возмущенная функция последования p , C^1 -близкая к p_0 . Поэтому мы приходим к задаче исследования поведения неподвижной точки функции последования при ее возмущении. Подробно свойства функции последования изложены в [10, 12]. Методы исследования существования замкнутых траекторий описаны в [18].

Теорема А.7. ([11], § 14, теорема 18). Если $p'_0(s_0) \neq 1$, то возмущенная функция последования p имеет близкую к s_0 неподвижную точку s , а возмущенная система дифференциальных уравнений имеет близкую к L_0 замкнутую траекторию L .

В разделе А.8 была введена система (A.36) на плоскости:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2),\end{aligned}$$

которая имеет замкнутую траекторию L_0 . Периодическое решение, соответствующее этой траектории, задается формулами (A.37):

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(t), \\ x_2 &= \varphi_2(t).\end{aligned}$$

В разделе А.8 был определен характеристический показатель замкнутой траектории L_0 (A.39):

$$\chi = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \frac{\partial Q}{\partial x_2}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \right] dt$$

и отмечено, что $p'(s_0) = \exp(\chi T)$ (). Поэтому если $\chi \neq 0$, то возмущенная система имеет замкнутую траекторию, близкую к исходной. При этом слова о близости надо понимать следующим образом: если возмущение достаточно мало, то существует возмущенная замкнутая траектория L , при этом $L \rightarrow L_0$, если параметр возмущения стремится к нулю.

Пример А.10. Возмущение замкнутой траектории

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(x_1 + 2) + x_1^2 + x_2^2 - 1 + \varepsilon_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1(x_1 + 2) + \varepsilon_2(x_1, x_2),\end{aligned}$$

где функции ε_1 и ε_2 малы вместе со своими частными производными. Заметим, что данная система является возмущением системы (A.40) из примера А.5. Там показано, что невозмущенная система имеет замкнутую траекторию, совпадающую с единичной окружностью $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Кроме того, показано, что характеристический показатель $\chi < 0$. Таким образом, если возмущение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ достаточно C^1 -мало, то возмущенная система имеет замкнутую траекторию, близкую к единичной окружности.

A.10. Структурная устойчивость и бифуркации

Качественное изучение системы дифференциальных уравнений состоит в геометрическом описании структуры ее траекторий. Поэтому сначала мы условимся, когда структуры траекторий двух систем дифференциальных уравнений являются эквивалентными. Ниже будет определено отношение эквивалентности, которое улавливает геометрическую структуру траекторий, оно называется топологической эквивалентностью.

Напомним, что непрерывное отображение $h : M_1 \rightarrow M_2$ называется *гомеоморфизмом*, если существует непрерывное обратное отображение $h^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$. Рассмотрим, например, отображение h , задающее на плоскости (x, y) полярные координаты:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Оно непрерывно, а на множестве $M_1 = \{r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$ имеет обратное h^{-1} , которое определено на множестве $M_2 = R^2 \setminus \{(x, 0) | x \leq 0\}$ равенствами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, & \text{если } y > 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{x}{y} - \pi, & \text{если } y < 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, x > 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что отображение h^{-1} непрерывно на M_2 , следовательно, h — гомеоморфизм. Из этого примера видно, что гомеоморфизм вводит новые координаты.

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in M_1 \tag{A.45}$$

и

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in M_2. \tag{A.46}$$

Будем говорить, что системы (A.45) и (A.46) *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $h : M_1 \rightarrow M_2$, $y = h(x)$, который переводит траектории системы (A.45) в траектории системы (A.46), сохраняя их ориентацию. Пример 13.3 показывает топологическую эквивалентность дикритического узла и фокуса.

Система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ называется *структурно устойчивой*, если существует $\delta > 0$ такое, что любая возмущенная система $\dot{x} = g(x)$ при выполнении условий

$$|f(x) - g(x)| < \delta, \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| < \delta$$

топологически эквивалентна невозмущенной системе.

Линейный узел $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ является структурно устойчивым. Центр $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ не является структурно устойчивым, при сколь угодно малом возмущении системы он может перейти в фокус. (см. примеры 13.3, 13.4) В этом случае говорят, что происходит *бифуркация* центра в фокус.

Рассмотрим теперь линейную систему

$$\dot{x} = Ax \tag{A.47}$$

и ее возмущение

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{A.48}$$

где для любых x

$$|f(x)| < \delta, \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| < \delta.$$

Напомним, что согласно теореме Гробмана — Хартмана ([31], гл. 2, теор. 4.1.), если матрица A не имеет собственных чисел на мнимой оси, то динамические системы (A.47) и (A.48) топологически эквивалентны. Если матрица A имеет собственные числа на мнимой оси, то эквивалентность может нарушаться.

Следующий пример иллюстрирует взаимосвязь нелинейной системы и ее линеаризации в окрестности точки покоя.

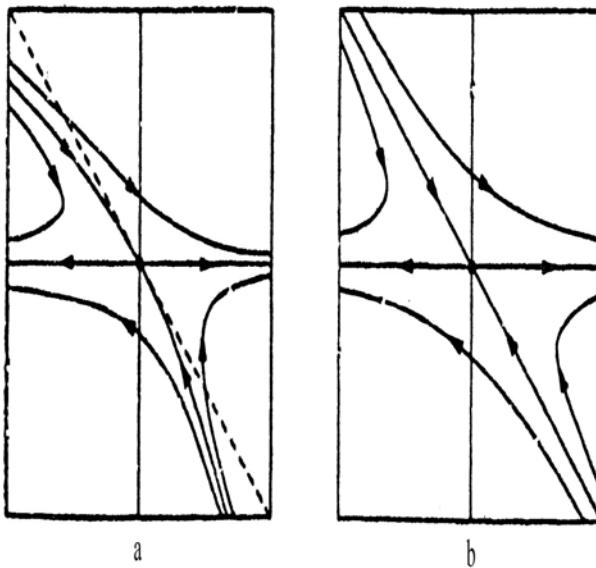


Рис. А.19. Фазовые портреты нелинейной системы и ее линеаризации.

Пример А.11. Топологическая эквивалентность систем

Рассмотрим нелинейную динамическую систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_2 e^{x_1}.\end{aligned}\tag{A.49}$$

Точка $x_1 = 0, x_2 = 0$ является для нее точкой покоя. Найдем локальный фазовый портрет в окрестности этой точки.

Матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + e^{x_1} & 4 \\ -x_2 e^{x_1} & -1 - e^{x_1} \end{pmatrix}.$$

Подставляя в матрицу Якоби значения $x_1 = 0, x_2 = 0$, находим матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Запишем линеаризованную систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 4x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_2.\end{aligned}$$

Ее фазовый портрет, являющийся седлом, приведен на рис. А.19б). Оно имеет две сепаратрисы, направления которых задаются собственными векторами $(1, 0)^T$ и $(1, -1)^T$ матрицы A . Они соответствуют собственным числам $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$. Движение по сепаратрисе первого направления идет от начала координат (сепаратриса неустойчива), а по сепаратрисе второго направления — к началу (сепаратриса устойчива).

Для системы (А.49) фазовый портрет в некоторой окрестности начала координат приведен на рис. А.19а). Он также имеет две сепаратрисы, которые уже не являются прямыми линиями, но в точке $x_1 = 0, x_2 = 0$ имеют своими касательными собственные направления линеаризованной системы. Как следует из теоремы Гробмана-Хартмана, фазовые портреты на рис. А.19а) и А.19б) топологически эквивалентны.

A.11. Фазовые портреты нелинейных динамических систем в окрестности вырожденной точки покоя

Говорят, что точка покоя нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$ является *вырожденной*, если вырожденной является система линейного приближения в этой точке (см. раздел A.3). Вырожденные линейные системы второго порядка имеют целую прямую, а иногда и всю плоскость, состоящую из точек покоя (см. подраздел A.6). В этом случае нелинейные члены правой части системы $f(x)$ могут существенно изменить поведение ее решений. Для иллюстрации рассмотрим два примера.

Пример A.12. Вырожденная точка покоя

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2). \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

Точка $(0, 0)$ является для нее точкой покоя. Матрица Якоби имеет вид

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix}.$$

Ее значение в точке покоя:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому система линейного приближения для нелинейной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{y}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Вся фазовая плоскость линейной системы заполнена ее точками покоя, в то время как нелинейная система имеет фазовый портрет, изображенный на рис. A.20,а).

Пример A.13. Вырожденная точка покоя

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2. \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

Точка $(0, 0)$ является точкой покоя. Матрица Якоби имеет вид

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Ее значение в точке покоя:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому система линейного приближения также имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{y}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ее фазовый портрет такой же, как в предыдущем примере. Нелинейная система имеет фазовый портрет, изображенный на рис. A.20,б).

Таким образом, две нелинейные системы имеют одну и ту же систему линейного приближения, а их качественное поведение вблизи точек покоя различно и отличается от поведения их линеаризации. В случае вырожденной точки покоя существует бесконечно много различных (топологически неэквивалентных) типов локальных фазовых портретов.

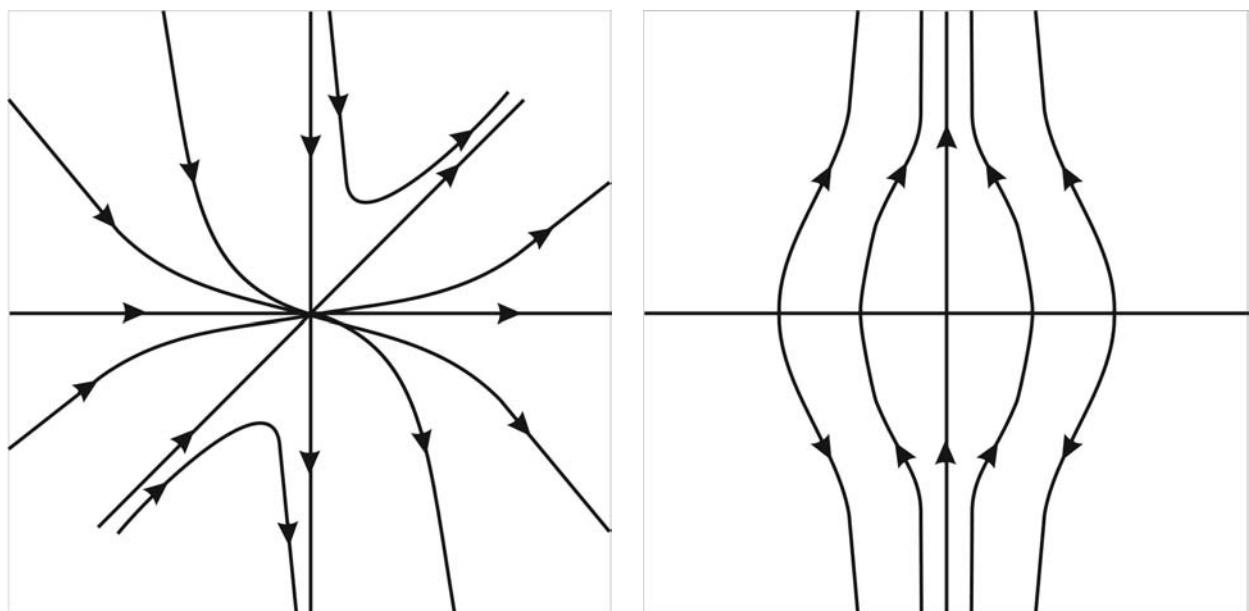


Рис. А.20. Фазовые портреты в окрестности вырожденной точки покоя для систем (A.50) и (A.51).

Приложение В

Маятник

B.1. Маятник без трения.

Закон Ньютона: $\bar{F} = \bar{a}m$, где \bar{F} — сила, \bar{a} ускорение, m масса.

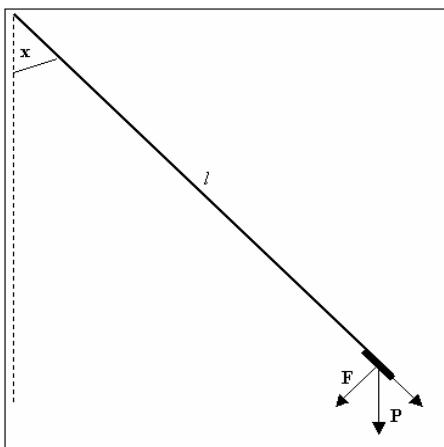


Рис. B.1. Маятник.

Пусть x обозначает угол в радианах, l длина маятника и τ время. Тогда lx это путь, $l\frac{dx}{d\tau}$ скорость, $l\frac{d^2x}{d\tau^2}$ ускорение, и сила $F = -P \sin x$, где P есть вес, так что $P = mg$, где g ускорение свободного падения. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\ddot{x}lm = -P \sin x,$$

где $\ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2}$. Исключая массу m и вводя новое время t : $dt = \sqrt{\frac{q}{l}} d\tau$, мы преобразуем уравнение (B.1) в уравнение вида

$$\ddot{x} = -\sin x,$$

где $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Полученное дифференциальное уравнение второго порядка можно записать как систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Система (B.1) описывает движение маятника без трения (или невозмущенного маятника). Учитывая силы трения и сопротивления воздуха, которые прямо пропорциональны скорости y , мы должны ввести возмущение вида εy . Система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x - \varepsilon y.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Эта система описывает движение маятника с возмущающей силой (возмущенного маятника).

Определение B.1. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y), \\ \dot{y} &= f_2(x, y).\end{aligned}\tag{B.3}$$

Для функции $g(x, y)$ выражение

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \cdot f_2(x, y)$$

называется производной функции g в силу системы (B.3).

Понятие производной некоторой функции в силу системы означает, что производная вычисляется по направлению векторного поля, определяемого системой.

Если $(x(t), y(t))$ — некоторое решение системы, а $g(x, y)$ — заданная функция, то выражение $g(x(t), y(t))$ характеризует изменение функции g вдоль выбранного решения. Нетрудно понять, что если это изменение равно нулю, то по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x, y) это равносильно выполнению условия $y = f(x)$. Последнее уравнение задает кривую, которая может быть инвариантной для рассматриваемой системы, т. е. решение исходной системы, начавшееся на такой кривой, ее не покидает. Из вышеизложенного следует, что для проверки свойства инвариантности достаточно вычислить производную данной функции в силу системы. Если эта производная равна нулю, то кривая, определяемая функцией f является инвариантной.

Изучим сначала поведение невозмущенного маятника, т. е. системы (B.1). Она имеет состояния равновесия в точках $(k\pi, 0)$, $k \in Z$, при этом точки вида $(2n\pi, 0)$, $n \in Z$ являются устойчивыми, а точки вида $((2n+1)\pi, 0)$, $n \in Z$ седловыми.

Рассмотрим функцию $g(x, y) = y - 2 \cos \frac{x}{2}$ и вычислим ее производную в силу системы (B.1). Мы получаем

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot (-\sin x) = -2 \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y - \sin x = \sin \frac{x}{2} (y - 2 \cos \frac{x}{2}).$$

Таким образом, $\dot{g} = 0$ в точках вида $(k\pi, 0)$, $k \in Z$ и на кривой $y = 2 \cos \frac{x}{2}$. Следовательно, эта кривая является инвариантной для системы. Нетрудно проверить, что кривая $y = -2 \cos \frac{x}{2}$ тоже инвариантна.

Кривые $y = \pm 2 \cos \frac{x}{2}$ проходят через состояния равновесия $((2n+1)\pi, 0)$. Изучим поведение решения на кривой $y = 2 \cos \frac{x}{2}$ вблизи состояния равновесия $(\pi, 0)$. Эта точка покоя является седловой для исследуемой системы, так как собственные числа матрицы Якоби в этой точке равны ± 1 . Заметим, что поскольку $\dot{x} = y$, в верхней полуплоскости производная \dot{x} положительна и следовательно решение $x(t)$ возрастает. В нижней полуплоскости решение $x(t)$ убывает. Кривая $y = 2 \cos \frac{x}{2}$ проходит через точку $(\pi, 0)$ из полуплоскости $y > 0$ в полуплоскость $y < 0$. Отсюда следует, что на кривой $y = 2 \cos \frac{x}{2}$ решение стремится к состоянию равновесия $(\pi, 0)$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогично можно проверить, что на кривой $y = -2 \cos \frac{x}{2}$ решение стремится к состоянию равновесия $(\pi, 0)$ при $t \rightarrow -\infty$.

Таким образом, вблизи седловой точки покоя $(\pi, 0)$ существуют две инвариантные кривые, причем на первой кривой $y = 2 \cos \frac{x}{2}$ решение стремится к состоянию равновесия при возрастании времени, а на второй кривой $y = -2 \cos \frac{x}{2}$ — при убывании. Эти кривые называются сепаратрисами седловой точки покоя состояния равновесия. Для систем на плоскости они называются сепаратрисами. Такой тип расположения траекторий характеризует так называемое гиперболическое состояние равновесия и показан на рис. B.2.

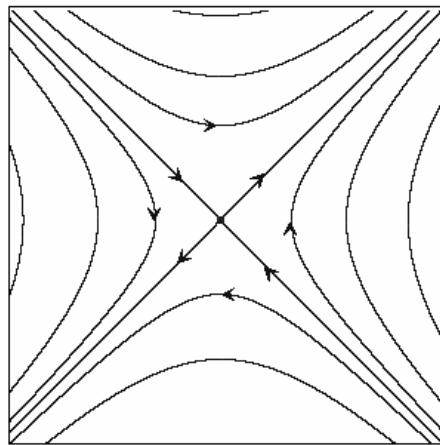


Рис. B.2. Седловое гиперболическое состояние равновесия.

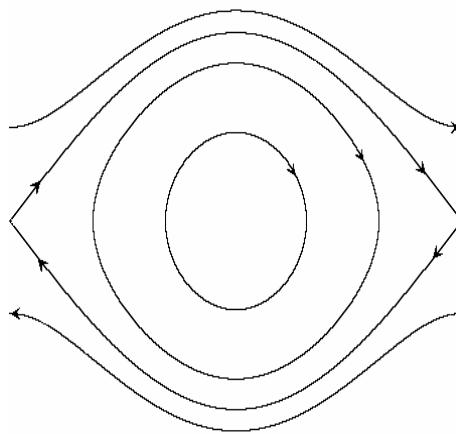


Рис. B.3. Центр.

B.2. Центр

Чтобы изучить поведение системы (B.1) вблизи состояния равновесия $(0,0)$, рассмотрим линеаризованную систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}$$

Система обладает двумя линейно независимыми решениями $u(t) = (\sin t, \cos t)$ и $v(t) = (\cos t, -\sin t)$. Общее решение имеет вид $c_1 u(t) + c_2 v(t)$, где u, v — 2π -периодические функции, описывающие замкнутую кривую на фазовой плоскости $R^2 = \{(x, y)\}$.

Такой расположение траекторий вблизи состояния равновесия называется *центром* и показано на рис. B.3. Оказывается, что исходная система (B.1) вблизи начала имеет тот же тип фазового портрета, который показан на рис. B.4.

B.3. Системы Ньютона

Определение B.2. Пусть $F : D \subset R^2 \rightarrow R$ непрерывно дифференцируемая функция. F называется первым интегралом системы $\dot{x} = X(x)$, где $x \in S \subset R^2$ в области $D \subset S$, если функция $F(x(t))$ постоянна на любом решении $x(t)$ системы.

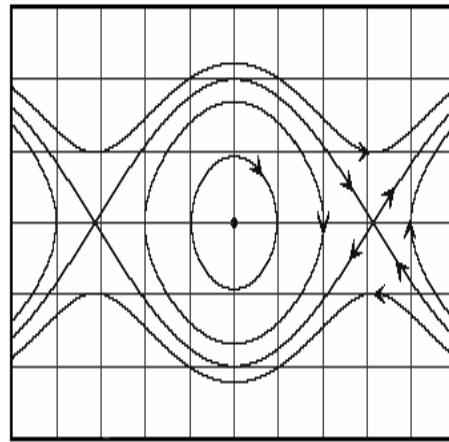


Рис. B.4. Фазовый портрет для невозмущенного маятника.

Если функция F является первым интегралом системы, то это означает, что производная F в силу рассматриваемой системы (т. е. по направлению векторного поля X) равна нулю.

Действительно, по определению первого интеграла $\frac{d}{dt}F(x(t)) = 0$. С другой стороны, если $x = (x_1, x_2)$, то $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 0$, т.е. производная F в силу системы равна нулю. Первые интегралы полезны в силу соотношения, которое существует между их линиями уровня (определяются уравнениями $F(x) = const$) и траекториями системы. А именно: поскольку F постоянна на любой траектории, лежащей в D , следовательно любая траектория является частью некоторой линии уровня функции F . Иногда системы, имеющие первый интеграл, называются системами Ньютона. К ним относится система (B.1), которая является частным случаем системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(x).\end{aligned}$$

Она имеет интеграл энергии $H(x, y) = T(y) + V(x)$, где $T(y) = \frac{1}{2}y^2$ — кинематическая энергия и $V(x) = -\int_{x_0}^x f(s)ds$ потенциальная энергия. В нашем случае

$$H = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x = \frac{1}{2}y^2 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Проверим, что интеграл энергии есть постоянная функция на решении системы (B.1). Производная H в силу системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = y\dot{y} + \sin x \cdot \dot{x} = y(-\sin x) + \sin x \cdot y = 0.$$

Отсюда следует, что энергия постоянна на решении, т.е. $H(x(t), y(t)) = const$ и линия уровня функции H является инвариантной кривой. В частности, уравнение $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2$ есть уравнение сепаратрис для точек $(\pm\pi, 0)$, поскольку они удовлетворяют этому уравнению. Уравнение $\frac{1}{2}y^2 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = a$, $0 < a < 2$ описывает замкнутые кривые периодического решения. Функция энергии имеет минимум в точках $(2n\pi, 0)$.

B.4. Поверхность энергии

Энергия $H = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x$ есть интеграл уравнения невозмущенного маятника, т. е. линия уровня $H = const$ есть инвариант для системы. Рассмотрим поверхности энергии и соответствующие им линии уровня для различных значений H .

1) Поверхность энергии $0 \leq H \leq 1.6$; инвариантная кривая $H = 1.6$ соответствует периодическому решению.(Рис.B.5.)

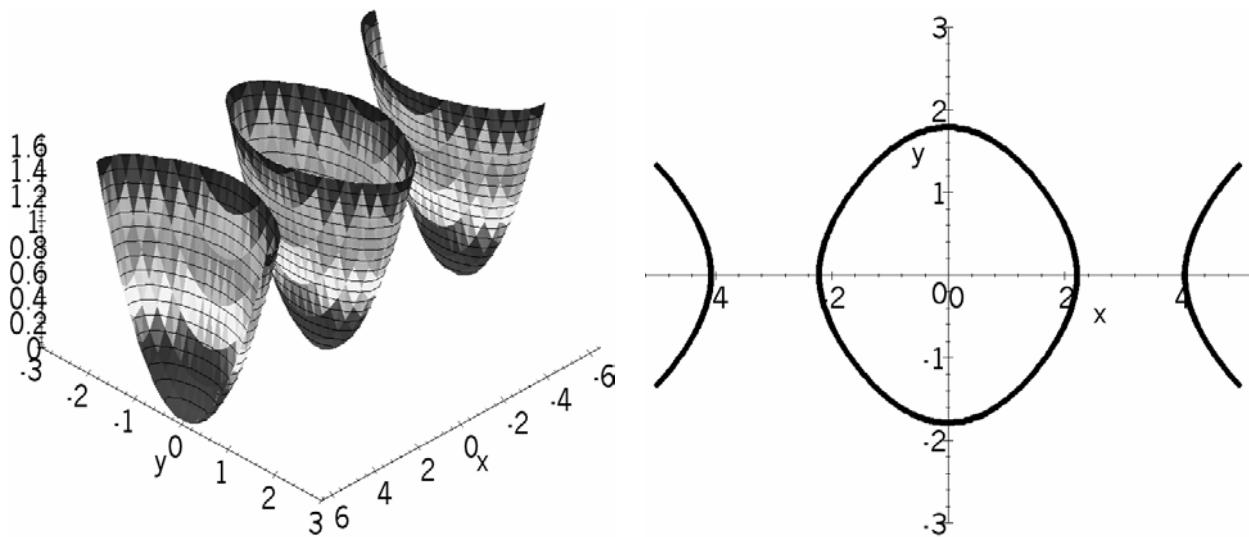


Рис. B.5. Поверхность энергии $0 \leq H \leq 1.6$ и инвариантная кривая $H = 1.6$.

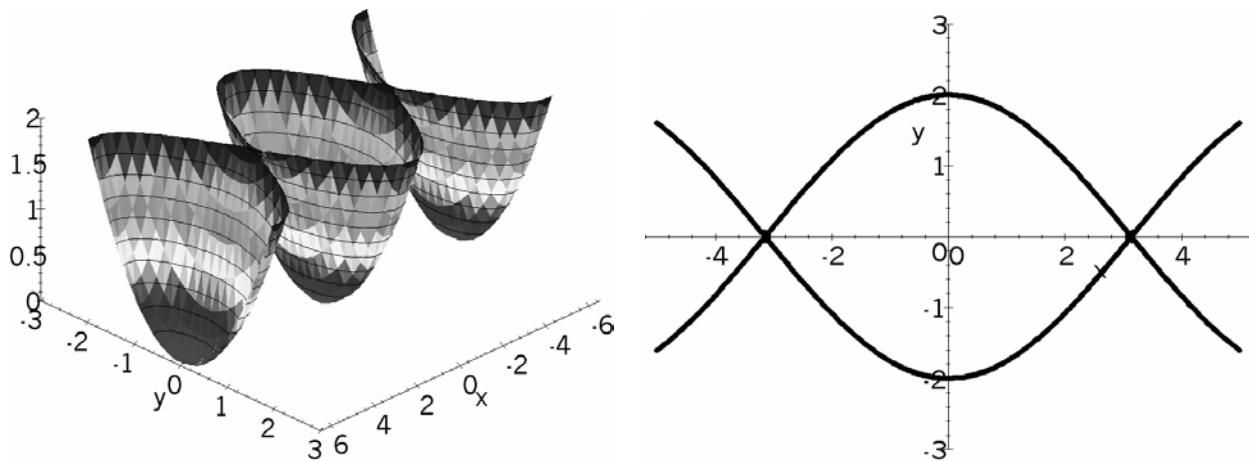


Рис. B.6. Поверхность энергии $0 \leq H \leq 2$ и инвариантная кривая $H = 2$.

2) Энергия $0 \leq H \leq 2$; инвариантная кривая $H = 2$ соответствует сепаратрисам состояний равновесия.(Рис.B.6.)

3) Энергия $0 \leq H \leq 2.3$; инвариантная кривая $H = 2.3$ (Рис.B.7.)

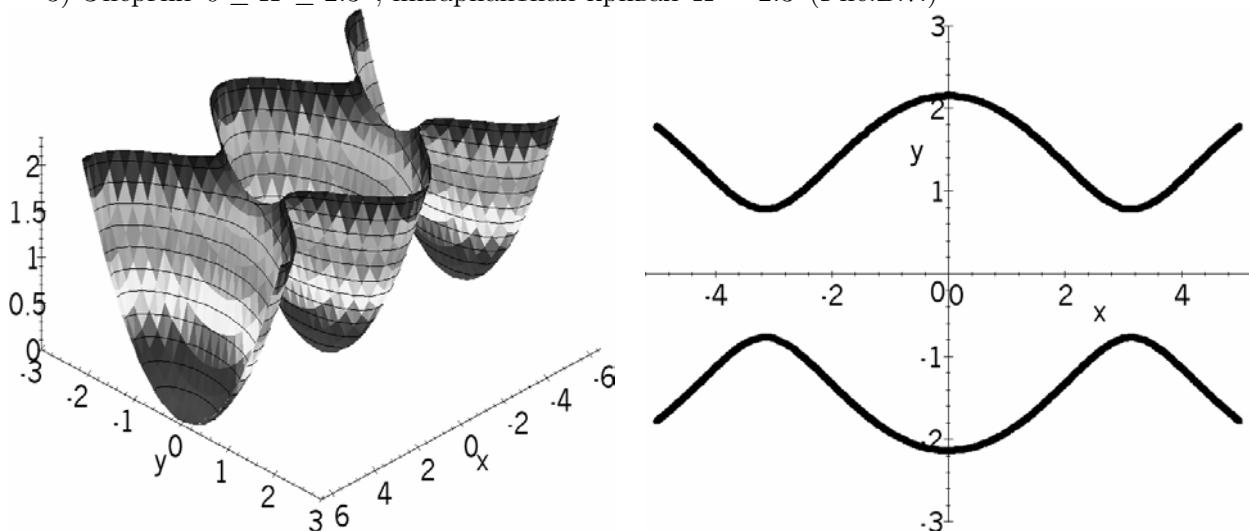


Рис. B.7. Поверхность энергии $0 \leq H \leq 2.3$ и инвариантная кривая $H = 2.3$.

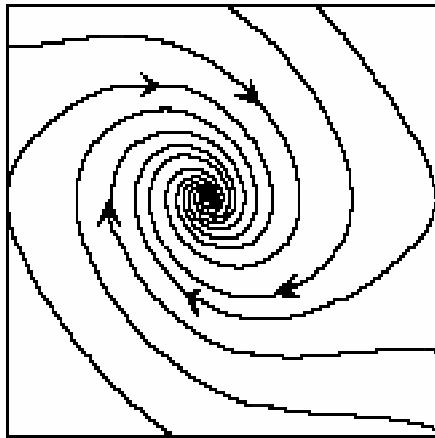


Рис. B.8. Фокус.

B.5. Маятник с трением.

Рассмотрим поведение маятника в случае учета трения. Система имеет "возбуждающую" добавку $-\varepsilon y$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x - \varepsilon y,\end{aligned}\tag{B.4}$$

где $\varepsilon > 0$. Прежде всего заметим, что система (B.4) имеет такие же положения равновесия $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, как и система (B.1). Рассмотрим поведение системы вблизи положения равновесия $(0, 0)$. С этой целью мы линеаризуем систему (B.4) в этой точке. Мы получим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon y.\end{aligned}$$

Матрица линеаризованной системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

с отрицательной вещественной частью $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2}$.

Это значит, что начало $(0, 0)$ является *фокусом*. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. B.8.

Невозмущенная система (B.1) имеет в состояниях равновесия $(\pm\pi, 0)$ собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Возмущенная система (B.4) имеет собственные значения, близкие к ± 1 . Отсюда следует, что фазовый портрет возмущенной системы вблизи положения равновесия $(\pm\pi, 0)$ сохраняет гиперболический тип. Чтобы понять поведение решения $(x(t), y(t))$ в целом, мы вычислим функцию H на этом решении и найдем ее производную в силу рассматриваемой системы $\dot{H} = y \cdot \dot{y} + \sin x \cdot \dot{x} = y(-\sin x - \varepsilon y) + \sin x \cdot y = -\varepsilon y^2$. Итак, $H' < 0$, если $y \neq 0$, т. е. значение H уменьшается вдоль траекторий когда $y \neq 0$. Мы получаем фазовый портрет, показанный на рис. B.9.

B.6. Цилиндрическое фазовое пространство.

Рассмотрим систему маятника на плоскости $R^2 = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$, где координата x описывает положение маятника. Таким образом, мы считаем, что x определяет угол

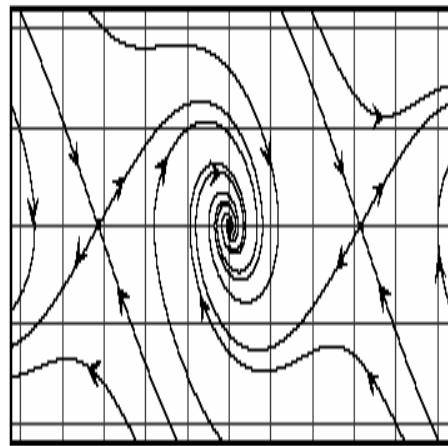


Рис. B.9. Фазовый портрет для маятника с трением.

отклонения от положения равновесия φ . Значение $\varphi = 0$ соответствует нижнему положению маятника, а значения углов $\varphi = \pm\pi$ — верхнему. Поэтому мы должны отождествить значения $\varphi = +\pi$ и $\varphi = -\pi$. Значения φ лежат в окружности S^1 длины 2π , и мы получаем фазовое пространство вида $S^1 \times R$. Система невозмущенного маятника имеет периодические решения вблизи состояния равновесия $(0, 0)$, которое является центром. Эти решения не меняются при отождествлении. Область центра лежит между сепаратрисами $y = \pm 2 \cos \frac{\varphi}{2}$. Решения, лежащие вне этой области достигают состояний $\varphi = \pm\pi$, и, следовательно, меняются. Решение, начинающееся в точке $(-\pi, y_0)$, достигает точки $(+\pi, y_0)$ при том же значении $y = y_0$. Поскольку точки $(-\pi, y_0)$ и $(+\pi, y_0)$ отождествляются, мы получаем периодическое решение на цилиндре $S^1 \times R$. Траектории, соответствующие периодическим решениям, совершают оборот вокруг центральной оси цилиндра. Траектории, лежащие в области центра, не совершают этих оборотов.

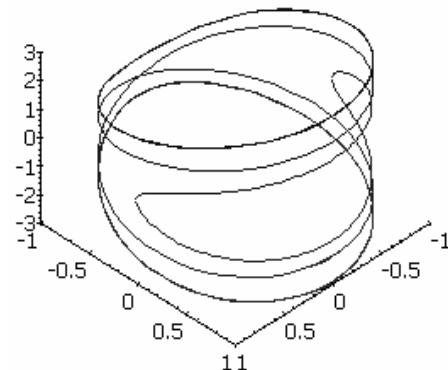


Рис. B.10. Фазовый портрет на цилиндре.

На рис. B.10 окружность S^1 лежит в горизонтальной плоскости, а координата y откладывается на вертикальной оси.

Приложение C

Методы построения инвариантных многообразий и гомоклинических точек

C.1. Инвариантные многообразия

Дискретные системы

Пусть p — неподвижная точка диффеоморфизма $f : R^n \rightarrow R^n$, т. е. $f(p) = p$. Для изучения поведения орбит вблизи p перейдем к линейному отображению $x \rightarrow Ax$, где $A = Df(p) = \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j}$ — матрица Якоби отображения f , вычисленная в точке p . Если A не имеет собственных чисел равных по модулю 1, то неподвижная точка p называется гиперболической. В этом случае ее собственные числа $\{\lambda_i\}, i = 1, \dots, n$ распадаются на две части: устойчивую $\{|\lambda_i| < 1\}, i = 1, \dots, k$ и неустойчивую $\{|\lambda_j| > 1\}, j = k + 1, \dots, n$. Возможны случаи $k = n$ (притягивающая неподвижная точка) или $k = 0$ (отталкивающая). Если $k \neq n$, точка называется седловой. Пусть $\{v_1, \dots, v_k\}$ собственные и присоединенные векторы, соответствующие устойчивой части и $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ — неустойчивой части. Собственное подпространство E^s , натянутое на векторы $\{v_1, \dots, v_k\}$ называется устойчивым, а собственное подпространство E^u , натянутое на векторы $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ называется неустойчивым. Согласно построению $E^s + E^u = R^n$, $E^s \cap E^u = \emptyset$.

Следующая теорема, известная как теорема Перрона, описывает структуру локальных инвариантных многообразий в окрестности гиперболической точки диффеоморфизма.

Теорема C.1. [33]

Пусть p — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма f , тогда существуют окрестность U точки p , локально устойчивое и локально неустойчивое многообразия

$$W_{loc}^s(p) = \{x \in U : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow +\infty\},$$

$$W_{loc}^u(p) = \{x \in U : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow -\infty\}.$$

Подпространства E^s и E^u являются касательными пространствами для многообразий W_{loc}^s и W_{loc}^u в точке p .

Локальные многообразия W_{loc}^s, W_{loc}^u определяются однозначно в том смысле, что построенные для разных окрестностей V_1, V_2 , они совпадают на пересечении $V_1 \cap V_2$. Можно считать, что окрестность U является шаром достаточно малого радиуса, а локальные многообразия являются дисками размерности k и $n - k$.

Глобальное устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки p определяются следующим образом:

$$W^s(p) = \{x \in R^n : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow +\infty\} = \{\bigcup_k f^k(W_{loc}^s(p)), k \in Z_-\},$$

$$W^u(p) = \{x \in R^n : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow +\infty\} = \{\bigcup_k f^k(W_{loc}^u(p)), k \in Z_+\},$$

где $Z_- = \{0, -1, -2, \dots\}$, $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Иначе говоря, глобальное устойчивое многообразие является образом локального устойчивого многообразия при отрицательных итерациях отображения f , а глобальное неустойчивое многообразие является образом локального неустойчивого многообразия при положительных итерациях. Построенные многообразия являются взаимнооднозначными образами евклидовых пространств R^k и R^{n-k} .

Непрерывные системы

Для непрерывных систем устойчивое и неустойчивое многообразия определяются аналогично. Пусть p — точка покоя (состояние равновесия) системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, где $x \in R^n$, т. е. $f(p) = 0$. Для изучения поведения орбит вблизи p перейдем к линейной системе $\dot{x} = Ax$, где $A = Df(p) = \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j}$ — матрица Якоби системы в точке p . Если A не имеет собственных чисел с нулевой действительной частью, то p называется гиперболической. В этом случае ее собственные числа $\{\lambda_i\}, i = 1, \dots, n$ распадаются на две части: устойчивую $\{\operatorname{Re}\lambda_i < 0\}, i = 1, \dots, k$ и неустойчивую $\{\operatorname{Re}\lambda_j > 0\}, j = k + 1, \dots, n$. Пусть $\{v_1, \dots, v_k\}$ собственные и присоединенные векторы, соответствующие устойчивой части и $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ — собственные векторы, соответствующие неустойчивой части. Собственное подпространство E^s , натянутое на векторы $\{v_1, \dots, v_k\}$ называется устойчивым, а собственное подпространство E^u , натянутое на векторы $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ называется неустойчивым.

Теорема C.2. Пусть p — гиперболическая точка покоя гладкой системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, тогда существуют окрестность U точки p , локально устойчивое и локально неустойчивое многообразия

$$W_{loc}^s(p) = \{x \in U : \phi(t, x) \rightarrow p \text{ при } t \rightarrow +\infty\},$$

$$W_{loc}^u(p) = \{x \in U : \phi(t, x) \rightarrow p \text{ при } t \rightarrow -\infty\}, \text{ где } \phi(t, x) \text{ — решение системы, } \phi(0, x) = x.$$

Подпространства E^s и E^u являются касательными пространствами для многообразий W_{loc}^s и W_{loc}^u в точке p .

Глобальное устойчивое и неустойчивое многообразия точки покоя определяются аналогично:

$$W^s(p) := \{x \in R^n : \phi(t, x) \rightarrow p \text{ при } t \rightarrow +\infty\} = \{\bigcup_t \phi(t, W_{loc}^s(p)), t \in R_-\},$$

$$W^u(p) := \{x \in R^n : \phi(t, x) \rightarrow p \text{ при } t \rightarrow -\infty\} = \{\bigcup_t \phi(t, W_{loc}^u(p)), t \in R_+\},$$

где $R_- = \{t \leq 0\}, R_+ = \{t \geq 0\}$.

Инвариантные многообразия $W^s(p)$ и $W^u(p)$ определяют не только динамику вблизи точки p , но существенно влияют на глобальную структуру траекторий, особенно в случае пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий. Мы будем говорить, что многообразия W_1 и W_2 пересекаются в точке $q \in W_1 \cap W_2$ трансверсально, если сумма касательных пространств $TW_1(q) + TW_2(q)$ в точке q является объемлющим пространством R^n .

Пример C.1. Рассмотрим следующий диффеоморфизм

$$\begin{aligned} f : \quad x_1 &= x + y, \\ &y_1 = y + \cos(x + y). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Это отображение имеет гиперболические неподвижные точки $A(-3/2\pi, 0)$ и $B(1/2\pi, 0)$. Устойчивое многообразие точки A пересекает неустойчивое многообразие точки B в точке q трансверсально. Точки пересечения $W^s(A) \cap W^u(B)$ называются гетероклиническими. Наличие такой точки заставляет устойчивое многообразие $W^s(A)$ пересекать неустойчивое многообразие $W^u(B)$ по отрицательной полутраектории $\{f^k(q), k < 0\}$, которая имеет пределом точку B . Устойчивые многообразия $W^s(A)$ и $W^s(B)$ разных точек не могут пересекаться, поэтому многообразие $W^s(A)$ вынуждено вытягиваться (и колебаться) вдоль $W^s(B)$, как это показано на рис.C.1. Аналогично ведут себя неустойчивые многообразия $W^u(B)$ и $W^u(A)$ вблизи точки B .

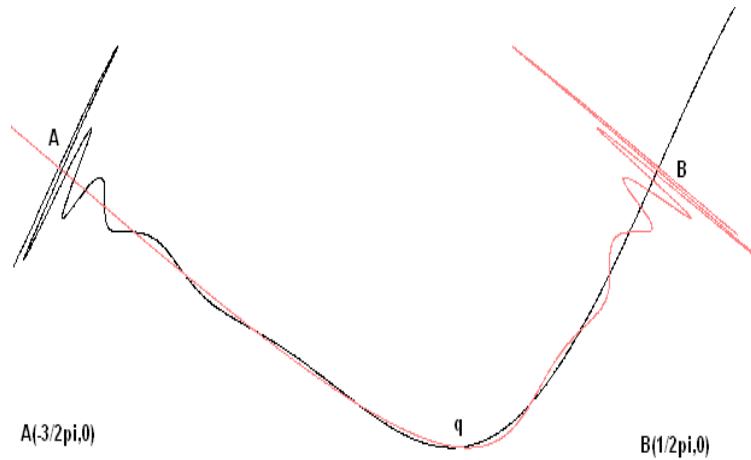


Рис. С.1. Гетероклинические точки для отображения С.1.

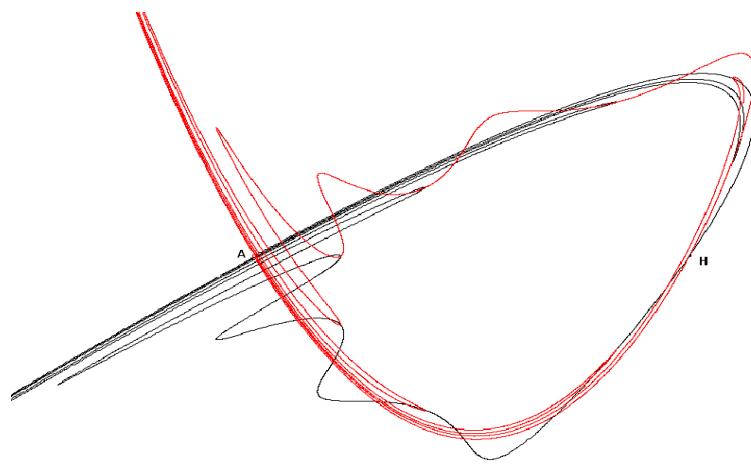


Рис. С.2. Гомоклиническая траектория отображения (С.17).

Исследуя движения трех планет под действием сил притяжения, А.Пуанкаре показал, что возможен случай, когда точки A и B совпадут, т. е. найдется гиперболическая точка A , у которой устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются. А.Пуанкаре называл такие траектории двоякоасимптотическими. В настоящее время точки пересечения $W^s(A) \cap W^u(A)$ называются гомоклиническими.

Динамика системы вблизи гомоклинических траекторий резко усложняется и в этом случае говорят, что имеет место хаос. На рис.С.2 показано поведение траекторий отображения (С.17). Неподвижная точка $A(0,0)$ является гиперболической, устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(A)$ и $W^u(A)$ (точнее, их правые сепаратрисы) пересекаются в точке H с координатами $(1.3837, 0.000)$ под углом 0.099 радиан, т. е. трансверсально.

S.Smale [104] показал, что вблизи трансверсальной гомоклинической траектории имеется инвариантное множество Ω , траектории которого можно закодировать всевозможными последовательностями из двух символов. В частности, периодическим последовательностям соответствуют периодические траектории равного периода. Это означает наличие периодических траекторий любого большего периода, причем множество периодических траекторий плотно в Ω . Инвариантное множество Ω гомеоморфно произведению двух канторовых множеств. Таким образом, наличие трансверсальной гомоклинической точки гарантирует хаотическую динамику.

Пример С.2. Рассмотрим еще один пример, в котором левые и правые сепаратрисы устойчивого и неустойчивого многообразий образуют два гомоклинических цикла. Отображение f имеет

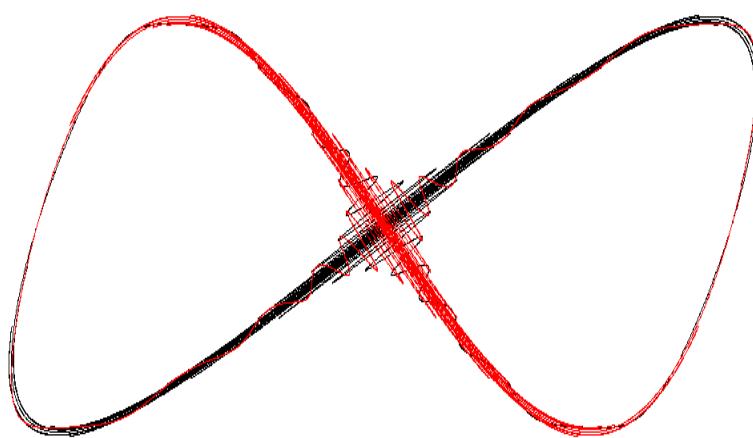


Рис. С.3. Инвариантные многообразия неподвижной точки для отображения (С.2) .

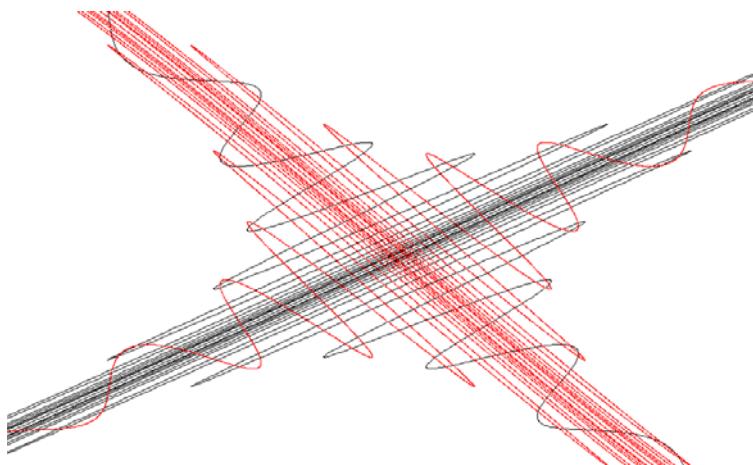


Рис. С.4. Структура многообразий в окрестности неподвижной гиперболической точки для отображения (С.2) .

вид

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + ax(1 - x^2), \\ y_1 &= y + ax(1 - x^2), \end{aligned} \tag{C.2}$$

где $a = 0.4$. Начало координат $(0,0)$ является гиперболической точкой, ее левые (правые) сепаратрисы пересекаются. Такая пара гомоклинических циклов порождает очень сложную динамику вблизи неподвижной точки даже для достаточно простых отображений. Например, отображение (С.2) сохраняет площадь, так как его якобиан $|Df|$ равен 1. На рис.С.3 показаны инвариантные многообразия неподвижной гиперболической точки этого отображения, а рис.С.4 показывает структуру этих многообразий в малой окрестности точки $(0,0)$.

Нашей целью являются методы построения описанных глобальных многообразий, вычисление координат гомоклинических точек, а также оценка угла между устойчивым и неустойчивым многообразиями в точке их пересечения.

C.2. Построение локальных инвариантных многообразий

Прежде всего, отметим, что неустойчивое многообразие обратного отображения f^{-1} является устойчивым многообразием прямого отображения f . Построение устойчивого многообразия аналогично построению неустойчивого многообразия. Различие состоит в том, что для по-

строения неустойчивого многообразия мы используем прямое отображение f , а для построения устойчивого многообразия — обратное отображение f^{-1} . Поэтому мы ограничимся построением неустойчивого многообразия.

Рассмотрим гиперболическую неподвижную точку диффеоморфизма $f : R^n \rightarrow R^n$. Поместим неподвижную точку в начало координат 0, выберем устойчивое и неустойчивое подпространства $E^s(0)$ $E^u(0)$ как координатные плоскости. Пусть $x \in E^u(0)$ и $y \in E^s(0)$.

Заметим, что доказательство теоремы о существовании неустойчивого многообразия проводится с помощью указания конкретного алгоритма, позволяющего строить последовательные приближения, сходящиеся к неустойчивому многообразию. При этом приближения можно построить с достаточно большой точностью. Таким образом, опираясь на это доказательство мы можем сформулировать следующую важную теорему.

Теорема C.3. [81]

Пусть f — диффеоморфизм плоскости, $f : R^n \rightarrow R^n$ и 0 — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма f . Тогда существует окрестность $U = \{|x| < \delta\} \times \{|y| < \delta\}$ точки 0 такая, что локально неустойчивое многообразие $W_{loc}^u(0)$ в U имеет вид

$$W_{loc}^u(0) = \{(x, y) : |x| < \delta, y = h(x)\}$$

и итерации любого многообразия L , заданного в виде

$$L = \{(x, y) : |x| < \delta, y = p(x)\}$$

сходятся к неустойчивому многообразию в C^1 -топологии, т. е.

1. $W_k = f^k(L) \cap U \rightarrow W_{loc}^u(0)$ при $k \rightarrow \infty$;
2. $W_k = \{(x, y) : |x| < \delta, y = p_k(x)\}$;
3. $\|p_k - h\|_{C^1} := \sup_{|x| < \delta} \{|p_k(x) - h(x)|, |Dp_k(x) - Dh(x)|\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

При практических расчетах многообразие L выбирается как гиперплоскость. Например, если неустойчивое многообразие является одномерной кривой, то естественно за многообразие L взять отрезок, трансверсально пересекающий устойчивое многообразие.

Пример C.3. Рассмотрим диффеоморфизм плоскости

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.1x - 0.1y \sin x, \\ y_1 &= 0.7y - 0.5x^2. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Начало координат является неподвижной гиперболической точкой, окрестность $U = [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$, неустойчивое подпространство совпадает с осью x , а устойчивое с осью y . Начальный отрезок L не проходит через начало координат, он на рис.С.5 помечен числом 0, последующие итерации отмечены числами 1, 2, 3, 4; локально неустойчивое многообразие обозначено W^u . Рисунок показывает, что описанная в теореме сходимость является достаточно хорошей и уже десятая итерация является неплохим приближением к неустойчивому многообразию.

C.3. Построение глобальных инвариантных многообразий

Введем координаты в окрестности глобального неустойчивого многообразия и определим расстояние между этим многообразием и последовательными приближениями к нему.

Пусть M — гладкое подмногообразие R^n размерности m . В каждой точке $x \in M$ рассмотрим гиперплоскость $N(x)$ дополнительной размерности $n - m$, при этом $N(x)$ является трансверсальным к M в точке x . Не ограничивая общности, будем считать, что $N(x)$ гладко зависит

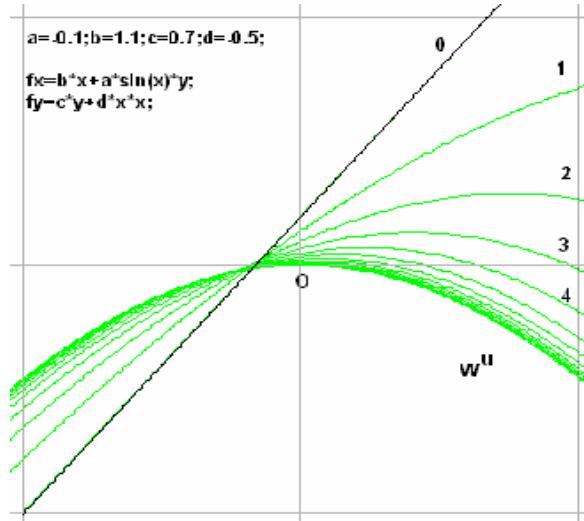


Рис. C.5. Последовательные приближения к неустойчивому многообразию для отображения (C.3).

от x . Ясно, что $N(x)$ выбираются неоднозначно. По построению множество $E = \{N(x), x \in M\}$ имеет структуру векторного расслоения над многообразием M , при этом само многообразие M естественно отождествить с нулевым сечением $\{(x, 0)\}$.

Построим специальную окрестность многообразия M следующим образом. Положим $(x \oplus y) = x + y$, где $x \in M, y \in N(x)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Множество $U_\varepsilon = \{(x \oplus y) : x \in M, y \in N(x), |y| < \varepsilon\}$ называется трубчатой окрестностью многообразия M . Справедливо следующее

Утверждение C.1. [108] Для компактного многообразия M существует $\varepsilon^* > 0$, такое, что для любого $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ отображение $(x, y) \rightarrow (x \oplus y), |y| < \varepsilon$ задает гладкие координаты в трубчатой окрестности многообразия M .

Пусть N_ε — трубчатая окрестность многообразия M . Пусть многообразие $M_1 \subset N_\varepsilon$ задается в виде

$$M_1 = \{(x \oplus h(x)) : x \in M, h(x) \in N(x)\},$$

где $x \oplus h(x) : M \rightarrow R^n$ — гладкое отображение. В этом случае будем говорить, что M_1 лежит в C^1 -окрестности многообразия M . При этом C^1 -расстояние между M и M_1 определяется как C^1 -норма отображения h .

Глобальное неустойчивое многообразие W^u не является компактом, вообще говоря. Однако, не ограничивая общности, можно считать, что локально неустойчивое многообразие W_{loc}^s является замкнутым диском достаточно малого диаметра. Мы будем говорить, что многообразие M является компактной частью глобального неустойчивого многообразия W^u , если M является образом локального многообразия при k -й итерации, т. е. $M = f^k(W_{loc}^s)$. Можно сказать, что компактная часть неустойчивого многообразия является диском конечного диаметра. Следующая теорема является обоснованием алгоритма построения глобального неустойчивого многообразия.

Теорема C.4. Пусть 0 — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма $f : R^n \rightarrow R^n$ и в окрестности точки 0 введены описанные выше координаты. Тогда итерации любого многообразия L заданного в виде $L = \{(x, y) : |x| < \delta, y = p(x)\}$ сходятся к компактной части M неустойчивого многообразия в C^1 -топологии, т. е. $W_m = f^m(L) \cap N_\varepsilon \rightarrow M$ при $m \rightarrow \infty$. При этом эти итерации сходятся к глобальному неустойчивому многообразию поточечно.

Данная теорема является следствием теоремы C.3 и равномерной непрерывности k -й итерации на компакте.

Численная реализация предложенных алгоритмов имеет следующие ограничения:

- 1) многообразие численно задается координатами точек $\{A_p\}$, число которых может быть достаточно большим, но конечным;
- 2) количество итераций также конечно;
- 3) итерации отдельной точки $f^m(A)$, $A \in L$ покидают окрестность точки покоя и трубчатую окрестность любой компактной области M неустойчивого многообразия.

C.4. Первый алгоритм построения глобальных инвариантных многообразий

Построение сепаратрис седловой точки покоя автономной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим седловую точку покоя x^* автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости. Метод приближенного построения неустойчивой сепаратрисы точки x^* состоит в аппроксимации части сепаратрисы отрезком касательной к ней в окрестности данной точки и последующем численном интегрировании системы с начальными данными, взятыми на этом отрезке касательной. Обозначим через l длину выбранного отрезка касательной и через N число точек на нем. Тогда величина $h = l/N$ определяет расстояние между двумя последовательными точками на выбранном отрезке. Обозначим через κ_0 начальное смещение от точки x^* . Пусть k_s, k_u — угловые коэффициенты касательных в точке x^* к устойчивой и неустойчивой сепаратрисам, а $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Для построения части неустойчивой сепаратрисы нужно численно проинтегрировать исходную систему, выбирая в качестве начальных данных точки вида

$$(x_1^* \pm (\kappa_0 + jh), \quad x_2^* \pm k_u(\kappa_0 + jh)), \quad j = 1, \dots, N.$$

Для построения части устойчивой сепаратрисы нужно численно проинтегрировать исходную систему, выбирая в качестве начальных данных точки вида

$$(x_1^* \pm (\kappa_0 + jh), \quad x_2^* \pm k_s(\kappa_0 + jh)), \quad j = 1, \dots, N.$$

и заменяя t на $-t$.

Построение сепаратрис седловой неподвижной точки диффеоморфизма плоскости

Рассмотрим периодическую по времени двумерную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{C.4}$$

где $f(t + \omega, x) \equiv f(t, x)$. Предположим, что $\xi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ — ω -периодическое решение данной системы с начальными данными $t = 0, \xi_0 = (x_1(0), x_2(0))$. Пусть T — соответствующее этой системе преобразование Пуанкаре, $T(x) = \xi(\omega, 0, x)$.

Рассмотрим линеаризацию системы (C.4) на решении $\xi(t)$ (систему в вариациях):

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, \xi(t, 0, \xi_0))}{\partial \xi} y. \tag{C.5}$$

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (C.5) с начальными условиями $\Phi(0) = E$. Тогда, как известно [19],

$$\Phi(t) = \frac{\partial \xi(t, 0, \xi_0)}{\partial \xi_0}.$$

Следовательно,

$$\Phi(\omega) = \frac{\partial \xi(\omega, 0, \xi_0)}{\partial \xi_0}. \tag{C.6}$$

Вместе с тем, по определению преобразования Пуанкаре T справедливо равенство

$$\frac{\partial \xi(\omega, 0, \xi_0)}{\partial \xi_0} = \frac{\partial T(\xi_0)}{\partial \xi_0}. \quad (\text{C.7})$$

Известно, что решение $\xi(t)$ является периодическим решением системы (C.4) тогда и только тогда, когда ξ_0 является неподвижной точкой преобразования T . Из равенств (C.6) и (C.7) следует, что характер неподвижной точки ξ_0 преобразования T определяется собственными числами λ_1, λ_2 матрицы $\Phi(\omega)$. Они называются мультиликаторами периодического решения $\xi(t)$. Если мультиликаторы решения $\xi(t)$ удовлетворяют условию $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$, то оно называется гиперболическим седловым решением. Для точки ξ_0 это условие означает, что она является гиперболической седловой неподвижной точкой преобразования T . Построение устойчивого и неустойчивого многообразий $W^s(\xi_0), W^u(\xi_0)$ позволяет исследовать вопрос о возможности их пересечения и, тем самым, о существовании гомоклинической точки. Мы будем строить эти многообразия методом, аналогичным способу, описанному для автономных систем дифференциальных уравнений.

Пусть λ_1, λ_2 — мультиликаторы периодического решения $\xi(t)$ системы (C.4) и $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$. Обозначим (в целях единства) λ_1, λ_2 через λ_s, λ_u , а соответствующие им собственные векторы через η_s, η_u . Пусть k_s, k_u — угловые коэффициенты (определяемые собственными векторами) касательных к устойчивому и неустойчивому многообразиям $W^s(\xi_0), W^u(\xi_0)$ в точке ξ_0 . Применим метод аппроксимации неустойчивого многообразия отрезком касательной $\{\xi_0 + s\eta_u, |s| < l\}$ длины l в окрестности точки ξ_0 . Выберем на отрезке N точек и численно построим решения исходной системы (C.4) с начальными данными в этих точках. Поскольку период решения $\xi(t)$ равен ω , будем численно интегрировать систему на промежутках длины ω . Таким образом, мы будем получать последовательные образы начального отрезка касательной в гиперплоскостях $t = k\omega, k = 1, 2, \dots$. Проекция этих образов на гиперплоскость $t = 0$ дает нам приближение к искомому неустойчивому многообразию. Для построения приближения к устойчивому многообразию выберем начальный отрезок на векторе η_s и будем строить решения системы (C.4) с соответствующими начальными данными, заменяя t на $-t$.

В обоих случаях мы получаем приближения к искомым многообразиям в виде множества точек, которые определяют вершины некоторой ломаной линии. Как было отмечено в предыдущем разделе, при достаточно большом числе итераций длина звена ломаной значительно увеличивается. Поэтому для построения более точного приближения нужно на каждом шаге итерации уменьшать эту длину. При реализации первого алгоритма (итерации отрезка, трансверсально-го к инвариантному многообразию) это дробление производится по всем звеньям ломаной на каждом шаге. В данном случае приближения строились таким образом, чтобы уточнить любую заданную часть ломаной. Для этого по звену, полученному на k -й итерации, производится поиск соответствующего ему сегмента в начальном отрезке, этот сегмент снова дробится и строится его k итераций. Нужно отметить, что этот метод позволяет находить точки пересечения ломанных методом последовательных уточнений. Более подробное описание приведено в работе [3].

Рассмотрим в качестве примера построение устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловой неподвижной точки преобразования Пуанкаре для уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + x^3 + \delta \dot{x}^3 = b \cos t + c \sin t \dot{x}^2, \quad (\text{C.8})$$

где $\delta = 0.09, c = 0.2, b = 0.2$. Данное уравнение сводится к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^3 - \delta y^3 + b \cos t + c \sin t y^2. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

В этом случае седловая неподвижная точка x^* преобразования T (начальное данное 2π -периодического решения системы (C.9)) на фазовой плоскости (x, \dot{x}) задается координатами $(-1.016546, -0.28177)$ [9].

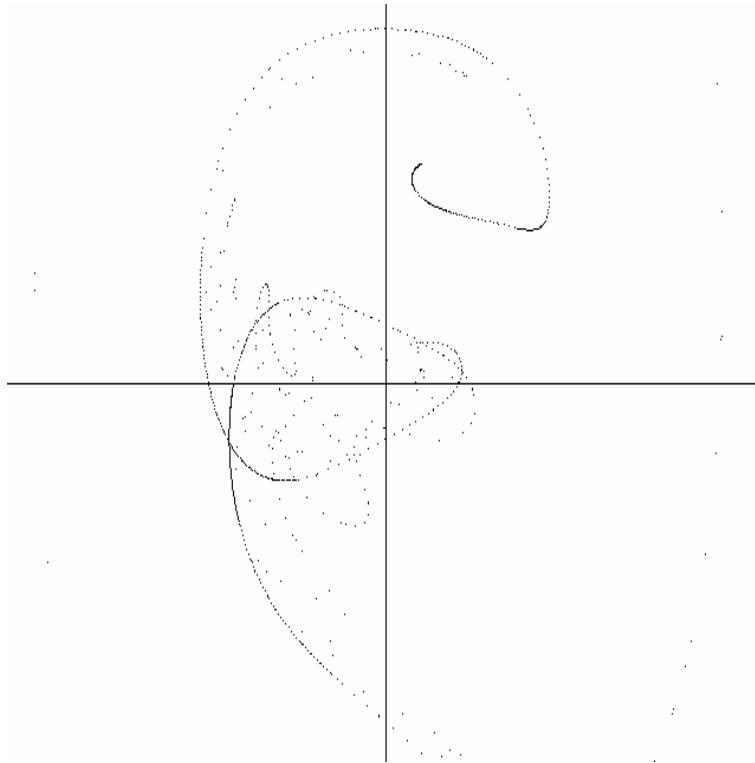


Рис. С.6. Сепаратрисы седловой неподвижной точки преобразования Пуанкаре для уравнения Дуффинга (C.8) при $\delta = 0.09, c = 0.2, b = 0.2$.

На рис. С.6 изображены сепаратрисы седловой неподвижной точки x^* , построенные описанным методом. Точки пересечения последовательно уточнялись до стабилизации 8 знаков после запятой. Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что при данных значениях параметров существуют гомоклинические точки преобразования T .

Оценка погрешности при построении локально неустойчивого многообразия

При использовании описанного метода аппроксимации части сепаратрисы отрезком касательной к ней возникает вопрос об оценке размера окрестности, в которой эта аппроксимация допустима, и оценке величины отклонения части сепаратрисы от рассматриваемого отрезка. В работе [40] были получены следующие результаты.

Теорема С.5. Пусть T — диффеоморфизм плоскости в себя. Предположим, что:

- а) z_0 — гиперболическая седловая неподвижная точка преобразования T , $L = L(z_0) = DT(z_0)$;
- б) λ, μ — собственные числа матрицы L , такие, что $|\mu| \in (0, 1), |\lambda| > 1$;
- в) существует такая постоянная K , что для любых $x, y \in R^2$ справедливо неравенство

$$\|L(x) - L(y)\| \leq K|x - y|, \text{ где } L(z) = DT(z).$$

Введем числа $a = \frac{\lambda^2(\lambda-1)}{4K}$, $c = \frac{2K}{\lambda(\lambda-1)}$. Тогда при $0 \leq s \leq a$ уравнение неустойчивой сепаратрисы точки z_0 имеет вид

$$z(s) = z_0 + s\eta_u + h(s),$$

где η_u — собственный вектор единичной длины, соответствующий собственному числу λ , при этом

$$|h(s)| < \frac{1}{2}cs^2, |h'(s)| < cs.$$

Таким образом, если известны постоянные K, a, c , то величина $h(s)$ дает оценку отклонения части сепаратрисы от аппроксимирующего ее отрезка касательной на интервале $0 \leq s \leq a$. Покажем, как получить значения этих постоянных, если задана периодическая по времени система дифференциальных уравнений на плоскости.

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = f(t, z), \quad (C.10)$$

где $f(t + \omega, z) \equiv f(t, z)$, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f \in C^2(R)$.

Предположим, что система (C.10) обладает седловым ω -периодическим решением $z(t, 0, z_0)$ с начальными данными $t = 0, z = z_0$. Преобразование Пуанкаре для системы (C.10) определяется формулой $T(z_0) = z(\omega, 0, z_0)$, и z_0 — неподвижная точка преобразования T . Введем обозначения:

$$L = DT(z_0), \quad v(t, z_0) = \frac{\partial z(t, 0, z_0)}{\partial z_0}.$$

Для нахождения констант K, a, c нужно найти собственные числа матрицы L и оценить матрицу D^2T . Как известно, функция v является фундаментальной матрицей системы

$$\dot{v} = \frac{\partial f(t, z(t, 0, z_0))}{\partial z} v, \quad (C.11)$$

т. е. $v(t, z_0) = \Phi(t)$, где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (C.11). Для оценки матрицы D^2T нужно вычислить $\frac{\partial \dot{v}}{\partial z_0}$, т. е. решить "систему в вариациях для системы в вариациях". Для упрощения дальнейших выкладок запишем исходную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(t, x, y), \\ \dot{y} &= G(t, x, y), \end{aligned} \quad f(t, z) = \begin{pmatrix} F(t, x, y) \\ G(t, x, y) \end{pmatrix}.$$

Пусть $v(t, z_0) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$, где $v_{ij} = v_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$.

Тогда справедливо соотношение

$$\dot{v} = \frac{d(v(t, z_0))}{dt} = (\dot{v}_1, \dot{v}_2),$$

где $\dot{v}_1 = \begin{pmatrix} \dot{v}_{11} \\ \dot{v}_{21} \end{pmatrix}$, $\dot{v}_2 = \begin{pmatrix} \dot{v}_{12} \\ \dot{v}_{22} \end{pmatrix}$, и система (C.4) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_{11} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial F}{\partial x} v_{11} + \frac{\partial F}{\partial y} v_{21}, \\ \dot{v}_{12} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y_0}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} v_{12} + \frac{\partial F}{\partial y} v_{22}, \\ \dot{v}_{21} &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial G}{\partial x} v_{11} + \frac{\partial G}{\partial y} v_{21}, \\ \dot{v}_{22} &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y_0}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} v_{12} + \frac{\partial G}{\partial y} v_{22}. \end{aligned}$$

Вычисляя покомпонентно $\frac{\partial \dot{v}_{ij}}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial \dot{v}_{ij}}{\partial y_0}$, получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial \dot{v}_1}{\partial z_0} = \left(\frac{\partial \dot{v}_1}{\partial x_0}, \frac{\partial \dot{v}_1}{\partial y_0} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{v}_{11}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{v}_{11}}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \dot{v}_{21}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{v}_{21}}{\partial y_0} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \dot{v}_2}{\partial z_0} = \left(\frac{\partial \dot{v}_2}{\partial x_0}, \frac{\partial \dot{v}_2}{\partial y_0} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{v}_{12}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{v}_{12}}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \dot{v}_{22}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{v}_{22}}{\partial y_0} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \dot{v}_{ij}}{\partial z_0} = \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{d \dot{v}_{ij}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_{ij}}{\partial z_0} \right), \text{ где } i, j = 1, 2.$$

Введем обозначения:

$$u_1 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{11}}{\partial x_0} & \frac{\partial v_{11}}{\partial y_0} \\ \frac{\partial v_{21}}{\partial x_0} & \frac{\partial v_{21}}{\partial y_0} \end{pmatrix}, u_2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{12}}{\partial x_0} & \frac{\partial v_{12}}{\partial y_0} \\ \frac{\partial v_{22}}{\partial x_0} & \frac{\partial v_{22}}{\partial y_0} \end{pmatrix}.$$

Тогда для нахождения u_1, u_2 нужно решить следующие системы:

$$\dot{u}_1 = C(t)u_1 + \tilde{u}_1(t), \dot{u}_2 = C(t)u_2 + \tilde{u}_2(t), \quad (\text{C.12})$$

где

$$C(t) = \frac{\partial f(t, z(t, 0, z_0))}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(t, z(t, 0, z_0))}{\partial x} & \frac{\partial F(t, z(t, 0, z_0))}{\partial y} \\ \frac{\partial G(t, z(t, 0, z_0))}{\partial x} & \frac{\partial G(t, z(t, 0, z_0))}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Функция $\tilde{u}_1(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= (\tilde{u}_{11}(t), \tilde{u}_{12}(t)), \\ \tilde{u}_{11}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} v_{11}^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} v_{11} v_{21} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} v_{21}^2 \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} v_{11}^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} v_{11} v_{21} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} v_{21}^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{u}_{12}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} v_{11} v_{12} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} v_{11} v_{22} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} v_{12} v_{21} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} v_{21} v_{22} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} v_{11} v_{12} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} v_{11} v_{22} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} v_{12} v_{21} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} v_{21} v_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{u}_2(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(t) &= (\tilde{u}_{21}(t), \tilde{u}_{22}(t)), \\ \tilde{u}_{21}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} v_{11} v_{12} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} v_{12}^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} v_{11} v_{22} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} v_{21} v_{22} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} v_{11} v_{12} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} v_{11} v_{22} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} v_{12} v_{21} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} v_{21} v_{22} \end{pmatrix}, \\ \tilde{u}_{22}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} v_{12}^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} v_{12} v_{22} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} v_{22}^2 \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} v_{12}^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} v_{12} v_{22} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} v_{22}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решая полученные неоднородные системы (C.12), получим

$$u_i(t) = \Phi(t)c_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\tilde{u}_i(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2,$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы. Найдем неособую матрицу S , приводящую матрицу $L = DT(z_0)$ к диагональному виду. Сделаем замену переменной $z = Su$. Тогда справедливо равенство

$$S^{-1}LS = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

или

$$(Ls_1, Ls_2) = (\mu s_1, \lambda s_2),$$

где

$$s_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\bar{z} = Tz$. Тогда $S\bar{u} = T(Su)$, или $\bar{u} = S^{-1}T(Su)$. Следовательно

$$D\bar{u} = S^{-1}DT(Su)Dz = S^{-1}DT(Su)S$$

и

$$D^2\bar{u} = S^{-1}D^2T(Su)S^2.$$

Таким образом, значения постоянных K, a, c , полученные в переменных u (т. е. в тех переменных, в которых матрица L диагональна), при переходе к переменным z изменяются следующим образом. Пусть $\bar{a}_u \equiv (a_u, 0)$ — вектор длины a в переменных u . Тогда $\bar{a}_z = S\bar{a}_u = (s_{11}a_u, s_{21}a_u)$ и $|\bar{a}_z| = \sqrt{s_{11}^2 + s_{21}^2}|a_u|$.

Покажем, как реализовать предложенную схему для уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = b \cos \omega t. \quad (\text{C.13})$$

Рассмотрим эквивалентную уравнению (C.13) систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ky - \alpha x - \beta x^3 + b \cos \omega t. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Известно, что при определенных значениях параметров $k, \alpha, \beta, b, \omega$ система (C.14) обладает седловым периодическим решением. Обозначим его $x = \phi_1(t), y = \phi_2(t)$. Система в вариациях на этом решении имеет вид

$$\dot{z} = A(t)z, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta\phi_1^2(t) & -k \end{pmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (C.15). Согласно формулам для $C(t), \tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t)$ получаем

$$C(t) = A(t),$$

$$\tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6\beta\phi_1(t)v_{11}^2 & -6\beta\phi_1(t)v_{11}v_{12} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6\beta\phi_1(t)v_{11}v_{12} & -6\beta\phi_1(t)v_{12}^2 \end{pmatrix},$$

где $v_{ij}(t)$ — компоненты матрицы $\Phi(t)$ и определяются при решении системы (C.15).

Система (C.14) была исследована при значениях параметров $k = 0, \beta = 1, \alpha = 0, \omega = 1, b = 0.22$.

Значения искомых констант a, c при выборе вектора $s_2 = (0.1, 0.1)$ в зависимости от числа точек (N) на выбранном отрезке касательной приведены в табл. 2.

Таблица 1

число точек	a	c	$0.5ca^2$
400	0.005446	42.54	0.0006309
500	0.00561	41.23	0.0006509
600	0.00434	53.29	0.0005036
700	0.00461	49.71	0.000543

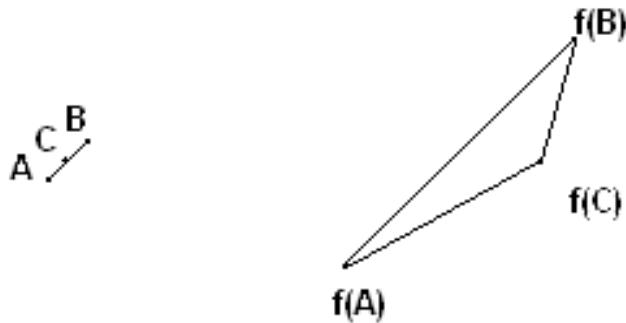


Рис. С.7. Выбор звена ломаной.

C.5. Второй алгоритм построения инвариантных многообразий гиперболической точки

Выше был описан алгоритм приближенного построения инвариантных многообразий седловой гиперболической точки (автономной системы и диффеоморфизма плоскости) с помощью итераций отрезка касательной. Второй способ основан на итерациях отрезка, трансверсального к одному из многообразий. В обоих случаях при компьютерной обработке естественным является представление кривой в виде ломаной, вершины, которой принадлежат кривой. При этом итерация кривой рассматривается как итерация вершин ломаной. Как уже было отмечено, длина звена ломаной растет при итерациях и, следовательно, такая ломаная не может хорошо аппроксимировать сепаратрису.

Другая трудность численного построения связана с тем, что при достаточно большом числе итераций траектория точки покидает трубчатую окрестность компактной части неустойчивого многообразия. При построении локального неустойчивого многообразия мы вынуждены выбирать достаточно малую окрестность неподвижной точки. Тогда большая итерация точки остается в этой окрестности, если начальная точка очень близка к неподвижной точке.

В первом методе для уточнения части инвариантного многообразия выбиралось нужное звено ломаной и итерационный процесс повторялся. Во втором методе вводится следующая модификация. Прежде всего, мы будем следить за теми итерациями точки, которые не покидают выбранную трубчатую окрестность. Далее, фиксируем достаточно малое число $h > 0$, и будем строить ломаную так, чтобы длина звена не превосходила этого числа. Выбор параметра h осуществляется пользователем для достижения необходимой точности. Другими словами, дробление производится для всех звеньев ломаной.

Пусть аппроксимирующая ломаная имеет звено $[AB]$ и расстояние $\rho(f(A), f(B)) > h$, (рис.С.7). В этом случае на отрезке $[AB]$ введем точку C и будем считать, что аппроксимирующая ломаная вместо звена $[AB]$ имеет два звена $[AC]$ и $[CB]$. Если расстояния $\rho(f(A), f(C)) < h$ и $\rho(f(C), f(B)) < h$, то процесс деления прекращается, иначе надо осуществить новое деление каждого звена, длина которого больше h . Таким образом, строится новая аппроксимирующая ломаная, с длиной звена меньше числа h .

Для лучшего графического изображения можно использовать тот факт, что кривая и ломаная будут неразличимы на экране (т. е мы будем получать на экране сплошную линию), если расстояние между узлами ломаной меньше, чем пиксел. Иными словами, при соответствующем выборе масштаба изображение на экране будет создавать достаточно хорошее впечатление "непрерывности". (Таким методом были, например, построены инвариантные многообразия на рис.С.3,С.4) Предположим, что исследуемая прямоугольная область в декартовых координатах имеет вид $[a, b] \times [c, d]$. Допустим, что на экране ей соответствует прямоугольник размера $p_x \times p_y$,

где p_x, p_y заданы в пикселях. Величины $h_x = (b - a)/p_x$, $h_y = (d - c)/p_y$ задают коэффициенты соотношения между единицей измерения в декартовой и экранной системах координат. Тогда кривая и ломаная неразличимы на экране, если для любого звена ломаной A_iA_{i+1} с координатами $A_i(x_i, y_i)$ и $A_i(x_{i+1}, y_{i+1})$ имеет место соотношение

$$|x_i - x_{i+1}| \leq h_x, \quad |y_i - y_{i+1}| \leq h_y. \quad (\text{C.16})$$

Для того, чтобы не производить лишних вычислений, мы исключаем из рассмотрения часть ломаной, образ которой выходит из выбранной окрестности. Кроме того, для приближения к гомоклиническим точкам нужно уточнять только те отрезки ломаной, которые лежат в окрестности этой точки. Пусть A — неподвижная седловая гиперболическая точка диффеоморфизма плоскости f . Допустим мы нашли некоторые приближения к гомоклиническим точкам, строя инвариантные многообразия с помощью отрезков ломаной. Выберем одну из таких точек — H . Таким образом, на аппроксимирующих устойчивой и неустойчивой сепаратрисах определяются два куска $W^s[AH]$ и $W^u[AH]$. Все остальное исключается из рассмотрения. При следующей итерации аппроксимации $f(W^u[AH])$ и $f^{-1}(W^s[AH])$ увеличиваются и образуют почку пересечения, близкую к H . Повторяя этот процесс, мы получаем последовательность точек, сходящихся к гомоклинической точке. При этом на каждом шаге мы можем получить оценку угла пересечения.

Пример C.4. В качестве примера построим таким способом сепаратрисы седловых точек для системы, порожденной отображением вида

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + ax(1 - x), \\ y_1 &= y + ax(1 - x), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

где $a = 1.35$. Неподвижная точка $A(0,0)$ является гиперболической, устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(A)$ и $W^u(A)$ (точнее, их правые сепаратрисы) пересекаются в 8-ми точках. В таблице указаны приближенные значения координат и углов пересечения.

Таблица 2

Приближения к гомоклиническим точкам		
x	y	угол
0.666939952599	0.416901386849	0.587379298048
0.959852011034	0.571550174086	0.401180709137
1.383708506121	0.716775451922	0.442693793725
1.583426354446	0.623572155556	0.459078110142
1.383712323195	0.000001269755	0.099161518436
0.950843544939	-0.623581041515	0.223296974712
0.666938368677	-0.716778322800	0.873901092401
0.388301312760	-0.571550964455	0.695533208837

Расположение инвариантных многообразий отображения (C.17) показано на рис.C.8.

В частности, угол пересечения в точке $H(1.3837, 0.0000)$ оценивается 0.0992 радиан. Для уточнения координат и угла нужно отметить точку H (подвести стрелку на экране в окрестность точки H и мышкой отметить ее). Программа выбирает ближайшую точку пересечения и отрезает лишние куски сепаратрис, так получаются приближения сепаратрис L^s и L^u . Затем стоятся образ $f(L^u)$ и прообраз $f^{-1}L^s$ и снова находятся точки и углы пересечения. Нетрудно понять, что в данном случае будет три точки пересечения, одна из которых является новым приближением к искомой гомоклинической точке.

Описанный метод позволяет найти параметры, при которых происходит касание устойчивой и неустойчивой сепаратрис. Известно ([62],[63],[78]), что гомоклиническая точка касания порождает еще более сложную динамику, чем динамика при трансверсальном пересечении.

В качестве примера рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} x_1 &= bx + y + ax(1 - x), \\ y_1 &= y + ax(1 - x). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

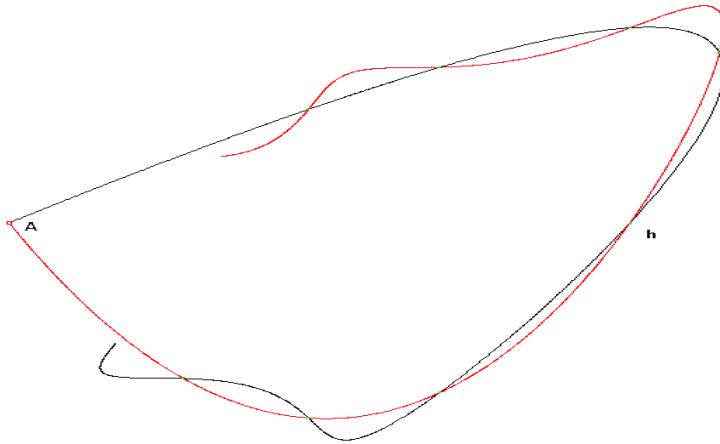


Рис. С.8. Трансверсальное пересечение сепаратрис гиперболической точки A для отображения (C.17).

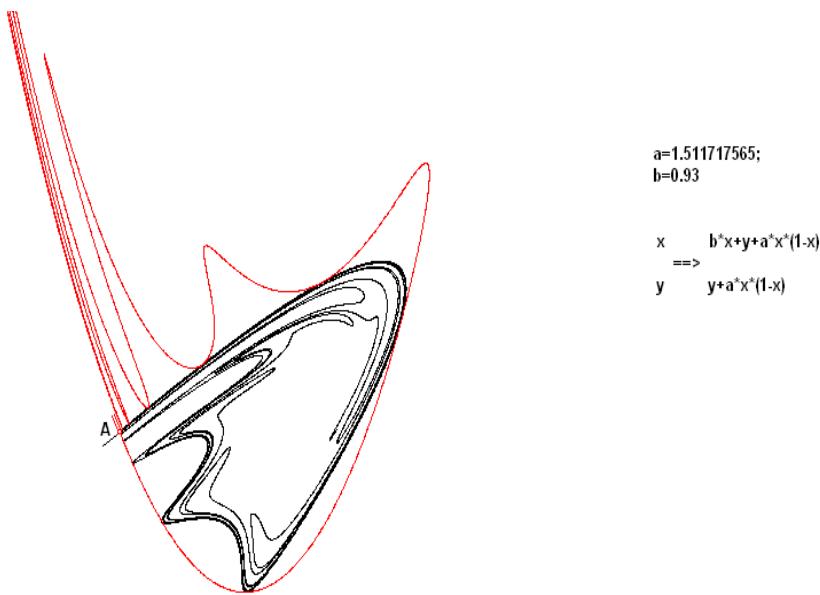


Рис. С.9. Гомоклинические точки касания для отображения (C.17).

Для значений параметров $a = 1.511717565$ и $b = 0.93$ имеет место касание устойчивой и неустойчивой сепаратрис (см. рис.С.9).

Построение инвариантных многообразий в пространстве

Описанный метод построения итераций кривых может быть успешно применен для построения инвариантных многообразий в пространстве. Для примера рассмотрим дискретную систему, описывающую динамику 3-мерной пищевой цепи (жертва-хищник-суперхищник, [72]). Динамическая система порождена отображением

$$\begin{aligned} x_1 &= ax \exp(-y)/(1 + x \max\{\exp(-y), g(z)g(y)\}), \\ y_1 &= bxyg(y) \exp(-z)g(dydz), \\ z_1 &= cyz, \end{aligned} \tag{C.19}$$

где x — численность "жертвы", y — численность "хищника", z — численность "суперхищника" и $g(t) = (1 - \exp(-t))/t$. Следует отметить, что в работе [72] рассматривался только случай $c = d$.

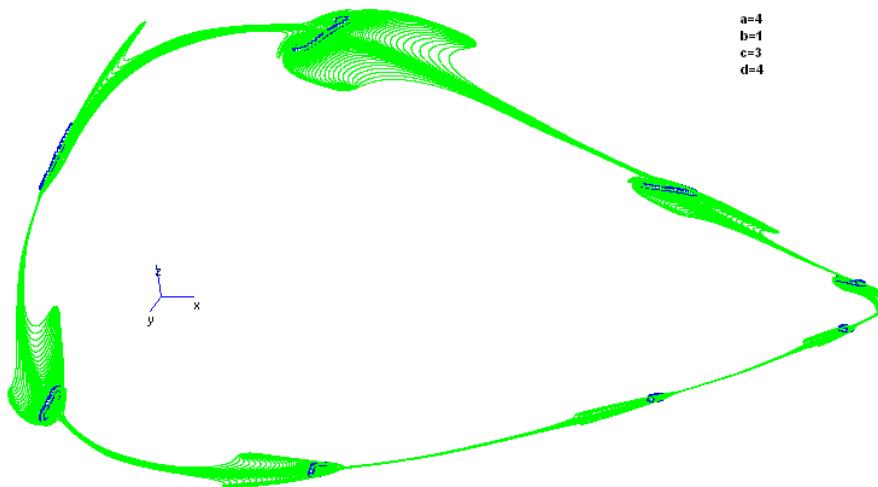


Рис. С.10. Инвариантное многообразие для системы (С.19).

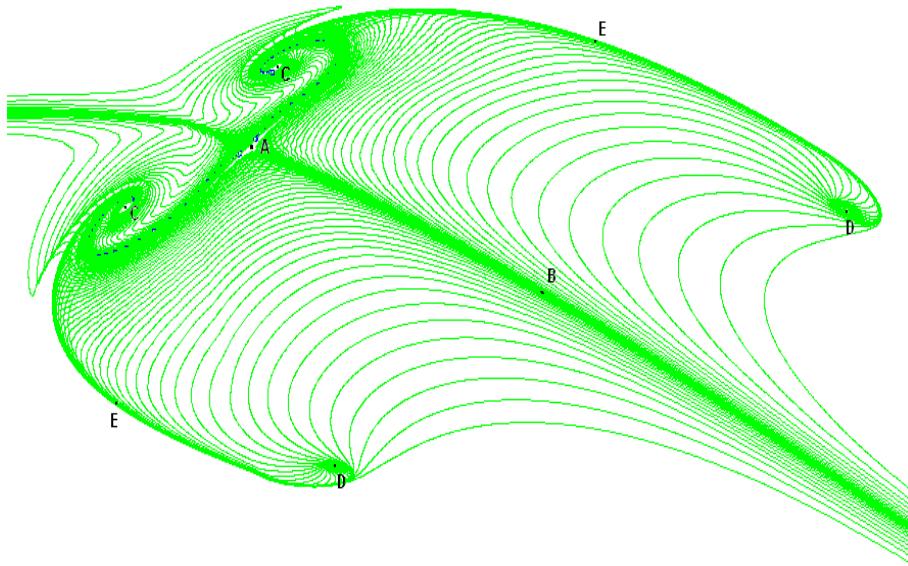


Рис. С.11. Инвариантное многообразие для системы (С.19) в окрестности 8-периодической точки.

Мы выбрали параметры так, что $a = 4$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 4$. При данных параметрах система имеет устойчивое по Ляпунову двумерное инвариантное многообразие M^2 , которое является лентой Мебиуса (рис. С.10). Многообразие M^2 было построено посредством итерации специально выбранной кривой. Этот метод позволяет определить вид многообразия и получить информацию о динамике на нем.

Рассмотрим сужение динамической системы на инвариантное многообразие M^2 . Это многообразие состоит из восьми одинаковых кусков (рис. С.11). Каждый кусок отображается на соседний так, что через восемь итераций он переходит в себя. При этом точка A является 8-периодической гиперболической точкой, неустойчивое многообразие которой заканчивается в 16-периодическом стоке C . Кроме того, имеется 8-периодическая гиперболическая орбита B и 16-периодическая гиперболическая орбита E . Неустойчивое многообразие орбиты B совпадает с устойчивым многообразием орбиты A . Неустойчивое многообразие орбиты E заканчивается в стоках C и D .

Для того чтобы понять, что многообразие M^2 является лентой Мебиуса заметим, что точка A через 8 итераций вернется в исходное положение. При этом точка C перейдет на другую

сторону относительно устойчивой сепаратрисы $W^s(A)$, и при этом вращение вокруг фокуса C сменится на противоположное. Таким образом, двигаясь вдоль многообразия M^2 , мы можем поменять направление вращения или ориентацию. Такое возможно только, если многообразие неориентированное, т. е. M^2 является лентой Мебиуса. Центральная ось этой ленты образована из замыкания устойчивого многообразия орбиты A или замыкания неустойчивого многообразия орбиты B .

Приложение D

Численное моделирование поведения траекторий отображения Икеда

Отображением Икеда называется отображение плоскости C комплексной переменной $z = x + iy$ в себя, определяемое равенством:

$$T : z \rightarrow d + C_2 z e^{i(C_1 - C_3/(1+|z|^2))},$$

где d, C_1, C_2, C_3 — вещественные постоянные (параметры отображения). Отображение Икеда возникает при моделировании оптических носителей (кристаллов) информации [70]. Полученные к настоящему времени численные результаты, описанные в работах Х.Нуссе, Д.Йорке, Р. Деване, С.Уигинса, показывают, что при определенных значениях параметров отображение Икеда может иметь весьма сложное динамическое поведение. В частности, оно имеет бесконечное число гиперболических периодических траекторий, располагающихся в ограниченной части плоскости, и странный аттрактор (аттрактор Икеда). Достаточно подробное исследование этого отображения можно найти в работе [64].

Данный раздел посвящен анализу топологической структуры описанного отображения методами прикладной символьической динамики (пакет программ ASIDS) и методами итерации кривых (пакет программ Line). Исследовано поведение траекторий в окрестности неподвижных точек и периодических орбит, а также проведен анализ бифуркаций, приводящих к появлению хаотических аттракторов при изменении параметров.

D.1. Аналитические результаты

В этом параграфе приведены некоторые аналитические результаты, относящиеся к отображению Икеда. В вещественном представлении отображение имеет вид

$$T : (x, y) \rightarrow (d + C_2(x \cos \tau - y \sin \tau), C_2(x \sin \tau + y \cos \tau)),$$

где $\tau = C_1 - C_3/(1 + x^2 + y^2)$. Отметим некоторые простые свойства отображения Икеда.

1. Отображение T можно рассматривать как суперпозицию трех диффеоморфизмов T_1, T_2, T_3 плоскости на себя:

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1,$$

где $T_1(x, y) = (x \cos \tau - y \sin \tau, x \sin \tau + y \cos \tau)$ — поворот на угол $\tau = \tau(r)$ с $r^2 = x^2 + y^2$; $T_2(u, v) = (C_2 u, C_2 v)$ — линейная гомотетия; $T_3(s, t) = (d + s, t)$ — отображение сдвига вдоль вещественной оси.

2. Если $C_2 > 0$, то отображение T является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом плоскости на себя.

3. Если $|C_2| < 1$, то отображение T является диссипативным, т. е. существует такое $h > 0$, что для любой точки (x, y) выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|T^n(x, y)\| < h.$$

4. Если $|C_2| < 1$, то любой круг с радиусом $r : K_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$, где $r > |R|/(1 - |C_2|)$, отображается строго в себя, т. е. $T(K_r) \subset \text{int}K_r$.

5. Для любой точки (x, y) якобиан отображения T имеет вид $\det DT(x, y) = C_2^2$ и, если $|C_2| < 1$, то отображение обладает свойством сжатия площадей, т.е. для любого ограниченного измеримого множества U выполняется неравенство для лебеговой меры (площади)

$$\text{mes}T(U) \leq \text{mes}U.$$

Если $|C_2| < 1$, то из упомянутых выше свойств отображения T вытекают следующие результаты:

1. Любое ограниченное инвариантное относительно T множество содержится в круге радиуса $r^* = |d|/(1 - |C_2|)$. Пусть A_g есть максимальное ограниченное инвариантное множество диффеоморфизма T :

$$A_g = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(K_{r^*}).$$

Из результатов главы 7 следует, что множество A_g замкнуто, связно и асимптотически устойчиво в целом, т.е. является глобальным аттрактором. В силу свойства 5 отображения T множество A_g имеет нулевую лебегову меру (площадь).

2. Поведение траекторий T полностью определяется поведением траекторий из множества A_g . В частности периодические, неблуждающие, цепно-рекуррентные траектории T содержатся в A_g . Результаты численных экспериментов, упомянутых ранее, показывают, что при некоторых значениях параметров диффеоморфизм T может иметь бесконечное число гиперболических периодических траекторий (орбит) с неограниченными периодами, что приводит к существованию гомоклинических траекторий и, тем самым, к тому, что A_g имеет чрезвычайно сложную топологическую структуру.

D.2. Численные результаты

Численное моделирование динамического поведения диффеоморфизма T проводилось при следующих значениях коэффициентов: $C_1 = 0.4, C_2 = 0.9, C_3 = 6.0$. Параметр d менялся в пределах $[0.1, 1]$ с шагом 0.01. Фазовые портреты индексируются буквами для каждого значения параметра d заново. Результаты численных экспериментов следующие.

При значениях $d \in (0, 0.367)$ притягивающее множество A_g состоит из единственной асимптотически устойчивой неподвижной точки, т. е. диффеоморфизм обладает свойством конвергенции.

1. $d = 0.3$. Отображение T имеет один сток A_g с координатами $(0.1766, 0.2298)$.
2. $d = 0.4$. Отображение T имеет три неподвижные точки: сложный сток A_0 $(0.2280, 0.2568)$, гиперболическое седло $H_0(3.0562, -1.6388)$, фокус $S_0(3.7763, 0.8930)$ (см.рис.D.1,a)). Неустойчивое многообразие $W_u(H_0)$ состоит из двух сепаратрис, левая имеет своим предельным множеством сток A_0 , правая заканчивается в фокусе S_0 .

Однако, если фокус S_0 является стандартным фокусом, то сток A_0 имеет достаточно сложную структуру, что видно из фазового портрета на рисунке D.1,b), где показано, как $W_u(H_0)$ приближается к A_0 . Устойчивое многообразие $W_s(H_0)$ разделяет области притяжения $W_s(A_0)$ и $W_s(S_0)$ описанных стоков.

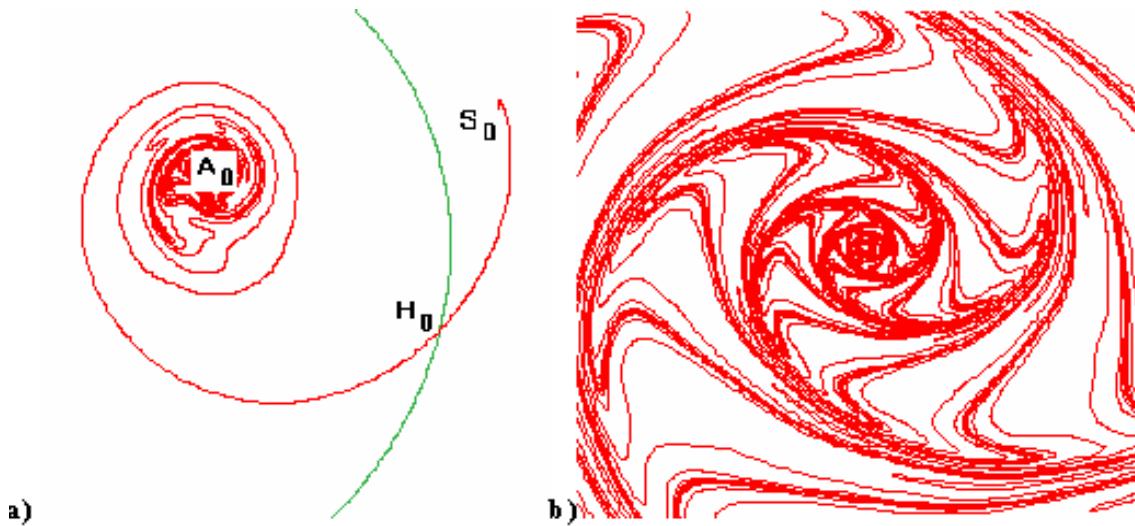


Рис. D.1. $d = 0.4$. а) Фазовый портрет; б) структура $W_u(H_0)$ в окрестности A_0 .

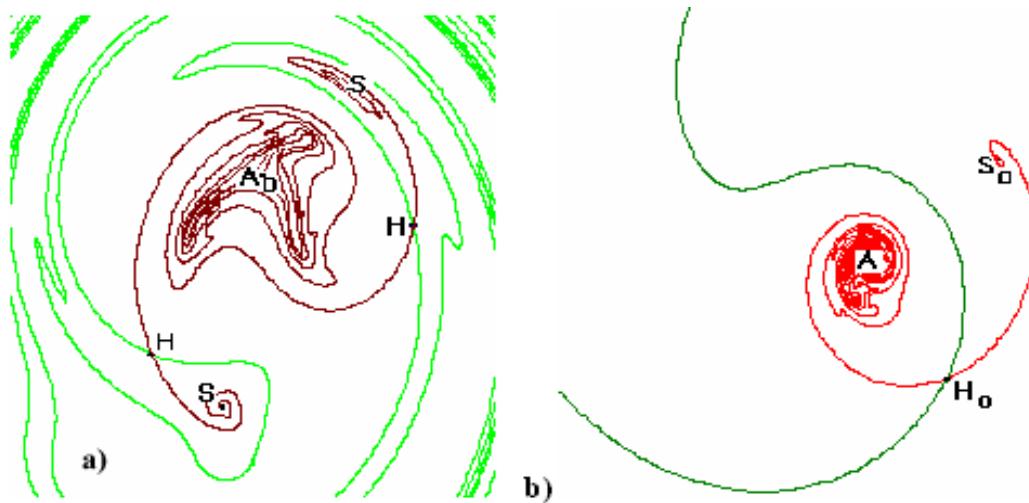


Рис. D.2. $d = 0.5$. а) структура аттрактора A ; б) область притяжения аттрактора A_0 .

3. $d = 0.5$. При переходе от $d=0.4$ к $d=0.5$ на месте сложного стока рождается аттрактор A , который содержит сток A_0 ($0.2784, 0.2734$), 2-периодический сток $S(0.0897, -0.7195); (0.6758, 0.6141)$ и 2-периодическое седло $H(1.0017, 0.0376); (-0.2517, -0.4987)$, см.рис.D.2,а).

Неустойчивые сепаратрисы $W_u(H)$ гиперболической орбиты H заканчиваются в A_0 и S . Замыкание неустойчивого многообразия $W_u(H)$ (отмеченное темным цветом) совпадает с аттрактором $A = W_u(H) + A_0 + S$. Устойчивое многообразие $W_s(H)$ (отмеченное светлым цветом) разделяет области притяжения аттракторов A_0 и S . Аттрактор A имеет область притяжения, ограниченную устойчивым многообразием $W_s(H_0)$ гиперболической неподвижной точки $H_0(2.2330, -2.3346)$ (см. фазовый портрет на рисунке D.2,б)). Неустойчивое многообразие $W_u(H_0)$ состоит из двух сепаратрис, левая заканчивается в A , правая — в стоке $S_0(3.5231, 2.1942)$. Замыкание многообразия $W_u(H_0)$ является глобальным аттрактором $A_g = W_u(H_0) + A + S_0$. Данный вид глобального аттрактора A_g сохраняется до значения параметра $d=1$, при этом структура аттрактора A существенно меняется.

4. $d = 0.6$. Сток $A_0(0.3397, 0.2809)$, гиперболическая 2-периодическая орбита $H(1.0094, -0.1100), (-0.2110, -0.4211)$ и 2-периодический сток

$S(0.5997, 0.6757), (0.2188, -0.7184)$ лежат в аттракторе A . Неустойчивое многообразие $W_u(H)$ каждой точки орбиты H состоит из двух сепаратрис, одна из которых имеет пределом сток A_0 (см. фазовый портрет на рис.D.3,а)). Другая сепаратриса пересекает устойчивое многообразие $W_s(H)$, образуя последовательность гомоклинических точек (некоторые из которых приведены в табл.1). Фазовый портрет на рисунке D.3,б) показывает трансверсальное пересечение многообразий $W_u(H)$ и $W_s(H)$ вблизи точки Р.

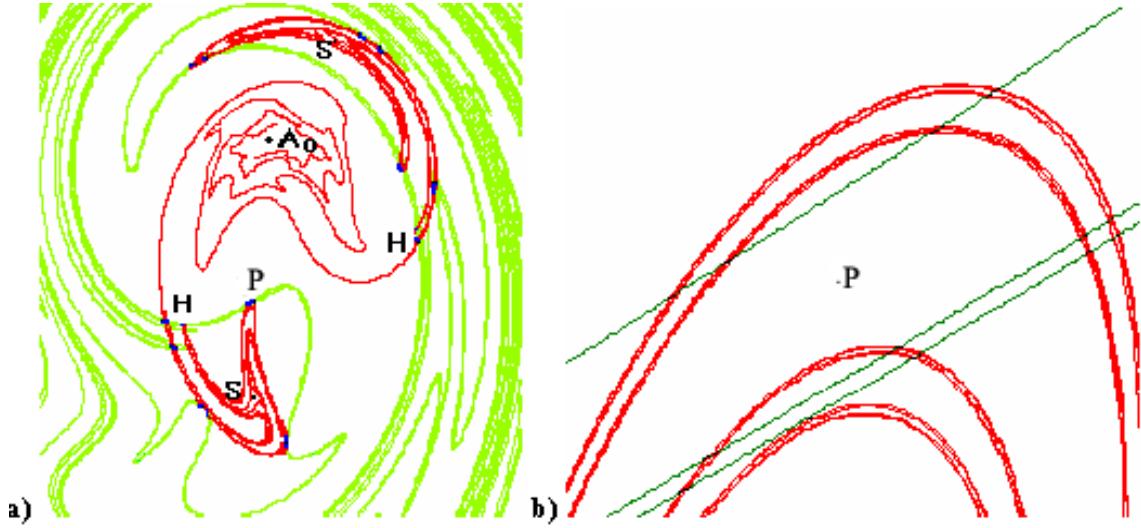


Рис. D.3. $d = 0.6$. а) структура аттрактора A ; б) пересечение $W_s(H)$ с $W_u(H)$.

Таблица 1

Координаты			
x	y	x	y
0.192905826389669	-0.358028018397777	-0.208911816509205	-0.421623780692357
0.193456448047365	-0.357745670013854	-0.210681163029174	-0.421222552373025
-0.196432241709742	-0.424266323727918	-0.210709120147399	-0.421216212638308
-0.197692405445688	-0.424013205506925	-0.210990459344049	-0.421152414364900
-0.211047882342357	-0.421139392758990	-0.210997356625448	-0.421150850293311
-0.208703862544441	-0.421670937661803	-0.211034703506723	-0.421142381275944

Так как при $d=0.5$ многообразия $W_u(H)$ и $W_s(H)$ не пересекаются, то существует значение параметра d^* , $0.5 < d^* < 0.6$, при котором $W_u(H)$ и $W_s(H)$ касаются. Устойчивое многообразие $W_s(H)$ гиперболической орбиты H является границей областей притяжения стока A_0 и 2-периодического аттрактора A_2 , который содержит 2-периодический сток S . На фазовом портрете D.4,а) показана область притяжения аттрактора A_2 , а его (нижняя) компонента, содержащая точку $(0.2188, -0.7184)$ стока S , показана на фазовом портрете D.4,б).

Аттрактор A_2 является замыканием неустойчивого многообразия $W_u(P)$ 6-периодической гиперболической орбиты $P(0.1869, -0.5785), (0.3556, 0.7053), (0.2818, -0.7800), (0.6249, 0.6969), (0.1343, -0.7635), (0.8751, 0.4730)$. Каждая компонента связности многообразия $W_u(P)$ имеет две сепаратрисы. Одна сепаратриса заканчивается в стоке S , другая в хаотическом аттракторе A_3 (см. фазовый портрет D.5,а). A_3 содержит аттрактор A_4 , порожденный неустойчивым многообразием $W_u(Q)$ 6-периодической орбиты Q . На фазовом портрете D.5,б) показано расположение точки $(0.2056, -0.4874)$ орбиты Q и ее устойчивое и неустойчивое многообразия. Аттрактор A_4 является замыканием неустойчивого многообразия $W_u(Q)$, ко-

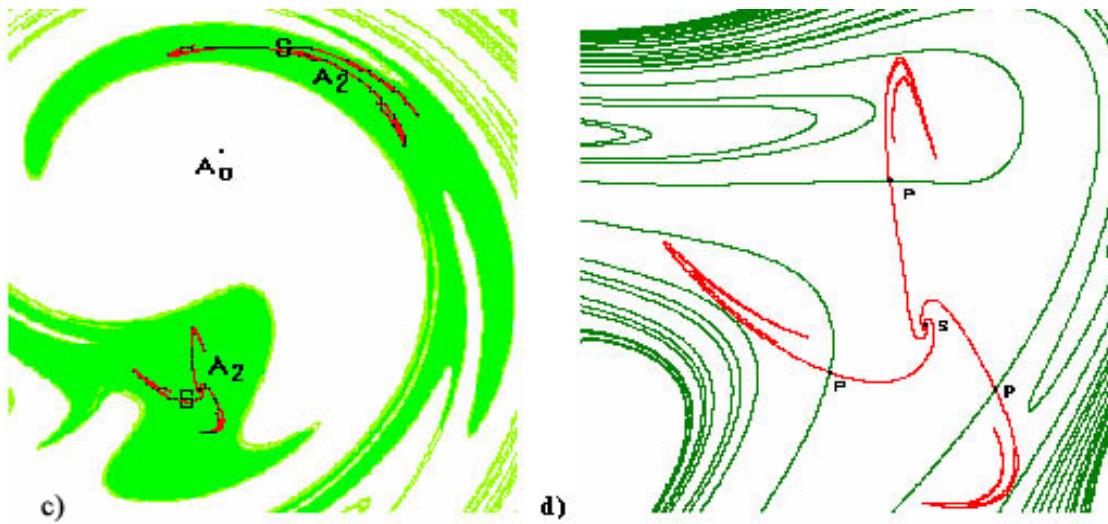


Рис. D.4. $d = 0.6$. а) область притяжения аттрактора A_2 ; б) компонента аттрактора, содержащая точку S .

торое заканчивается 12-периодическим стоком G . На рис. D.5,б) показано расположение точек $(0.2022, -0.4816)$ и $(0.2095, 0.4953)$ орбиты G . Отметим, что в точке Q устойчивое и неустойчивое многообразия касаются, образуя сток.

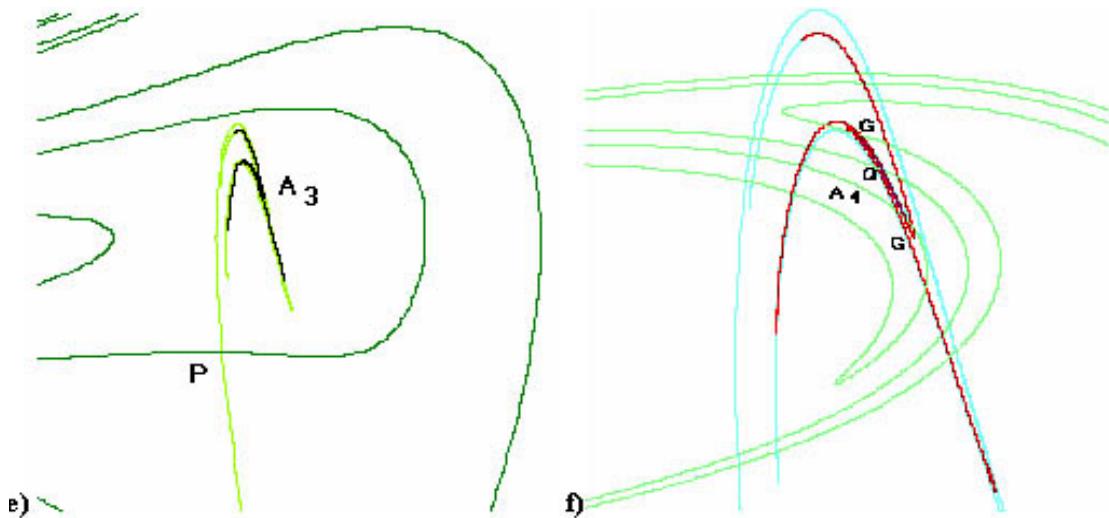


Рис. D.5. $d = 0.6$. а) хаотический аттрактор A_3 ; б) инвариантные многообразия точки орбиты Q .

Глобальный аттрактор A является замыканием неустойчивого многообразия орбиты H : $A = W_u(H) + A_2 + A_0$. Устойчивое многообразие $W_s(H_0)$ гиперболической точки $H_0(1.7660, -2.4891)$ является границей между областями притяжения аттрактора A и стока $S_0(3.3064, 2.8382)$. Расположение A , H_0 и S_0 аналогично случаю $d = 0.5$ или $d = 0.7$.

5. $d = 0.7$. Отображение Икеда Т имеет обратное седло $A_0(0.3804, 0.02817)$. Неустойчивое многообразие $W_u(A_0)$ заканчивается в стоке, состоящем из пары 2-периодических точек $S(0.1548, 0.2030), (0.6110, 0.2118)$, который является минимальным аттрактором. Обратное седло A_0 и 2-периодический сток S рождаются из стока A_0 при изменении параметра d от 0.6 до 0.7. Замыкание неустойчивого многообразия $W_u(A_0)$ образует аттрактор $A_1 = W_u(A_0) + S$. На $W_u(A_0)$ отображение Т меняет ориентацию и, следо-

вательно, на устойчивом многообразии $W_s(A_0)$ ориентация должна тоже меняться, так как в целом ориентация сохраняется. Существует гиперболическая 2-периодическая орбита $H_1(0.5772, 0.6788), (0.3102, -0.7009)$, устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, образуя хаотический аттрактор $A_2 = W_u(H_1)$. Аттрактор A_2 имеет две компоненты связности, которые формируются компонентами неустойчивого многообразия $W_u(H_1)$ для точек орбиты H_1 . Можно сказать, что аттрактор A_2 является 2-периодическим, так как образом одной компоненты является другая.(см. рис. D.6а),б))

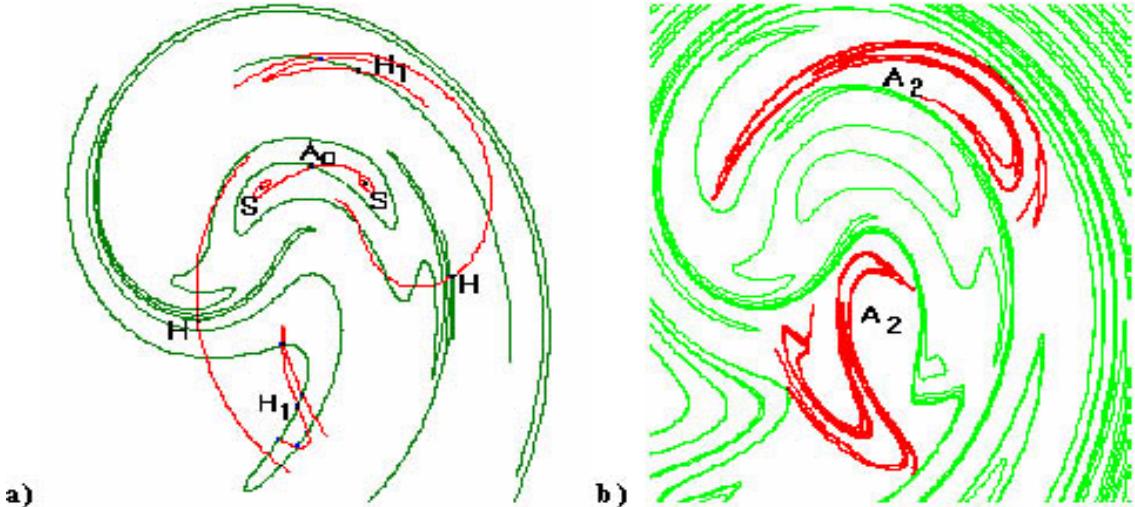


Рис. D.6. $d = 0.7$. Существование 2-периодического аттрактора A_2 .

Существует гиперболическая 2-периодическая орбита $H(-0.1364, -0.3495), (0.9931, -0.1676)$, неустойчивое многообразие $W_u(H)$ которой состоит из двух сепаратрис $W_u(H)_1$ и $W_u(H)_2$. Первая сепаратриса $W_u(H)_1$ заканчивается в аттракторе A_1 , вторая $W_u(H)_2$ в аттракторе A_2 . Таким образом, замыкание неустойчивого многообразия $W_u(H)$ образует аттрактор $A = A_1 + W_u(H) + A_2$, который состоит из $S + W_u(A_0) + W_u(H) + W_u(H)_1$.

Существует гиперболическая неподвижная точка $H_0(1.5062, -2.5002)$, устойчивое многообразие $W_s(H_0)$ которой делит области притяжения аттрактора A и стока $S_0(3.1580, 3.2738)$. Неустойчивое многообразие $W_u(H_0)$ имеет две сепаратрисы, левая имеет своим пределом аттрактор A , правая заканчивается в стоке S_0 . Замыкание неустойчивого многообразия $W_u(H_0)$ образует глобальный аттрактор $A_g = A + W_u(H_0) + S_0$ (см.рис.D.7а),б).)

6. $d = 0.8$. Обратное седло A_0 имеет координаты $(0.4311, 0.2761)$. В 2-периодическом стоке $S(0.0387, -0.0345); (0.8467, -0.0013)$ заканчиваются две неустойчивые сепаратрисы $W_u(H)_S$ 2-периодической орбиты $H(0.9429, -0.1339), (-0.0296, -0.2155)$. Две другие сепаратрисы $W_u(H)$ пересекают устойчивые многообразия (закрашены светлым цветом) $W_s(A_0)$ и $W_s(H_1)$ седла A_0 и гиперболической 2-периодической орбиты $H_1(0.3844, -0.6761), (0.5798, 0.6644)$. Неустойчивые многообразия (закрашены темным цветом) $W_u(A_0)$ и $W_u(H_1)$ пересекают, в свою очередь, устойчивое многообразие $W_s(H)$, образуя гетероклинический цикл $A_0 \rightarrow H_1 \rightarrow H \rightarrow A_0$, см. фазовый портрет на рис.D.8,а). Замыкание неустойчивых многообразий данного цикла порождает аттрактор A , см. фазовый портрет D.8,б).

Аттрактор A содержит сток S и, следовательно, не является минимальным аттрактором. Область притяжения $W_s(A)$ ограничена устойчивым многообразием $W_s(H_0)$ седла $H_0(1.3219, -2.4527)$. При этом дополнение к описанному множеству является областью притяжения фокуса $S_0(3.0614, 1.6110)$. Как и ранее, левая неустойчивая сепаратриса $W_u(H_0)_l$

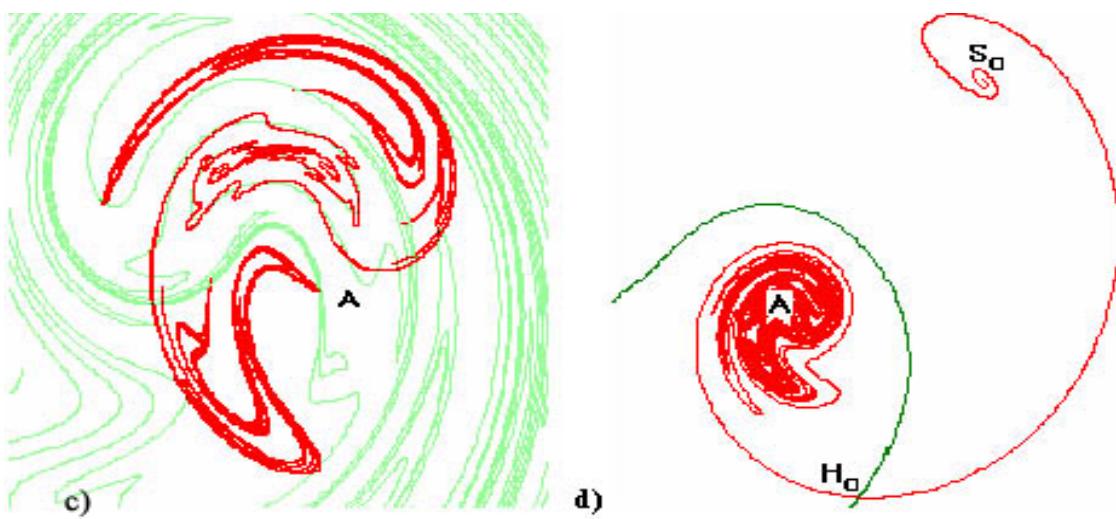


Рис. D.7. $d = 0.7$. а) структура аттрактора A ; б) существование глобального аттрактора $A_g = A + W_u(H_0) + S_0$.

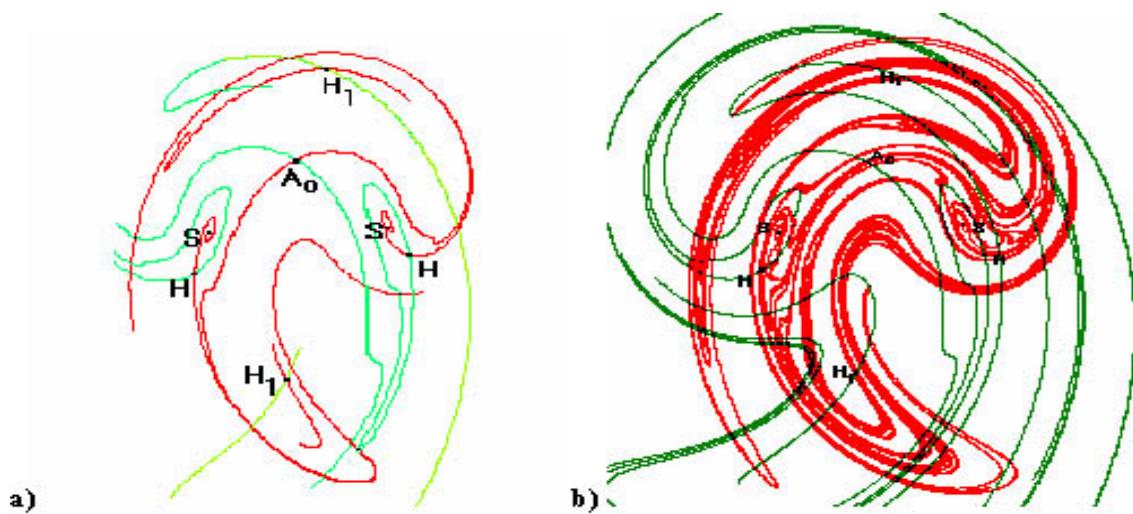


Рис. D.8. $d = 0.8$. а) гетероклинический цикл $A_0 \rightarrow H_1 \rightarrow H \rightarrow A_0$; б) замыкание неустойчивых многообразий цикла.

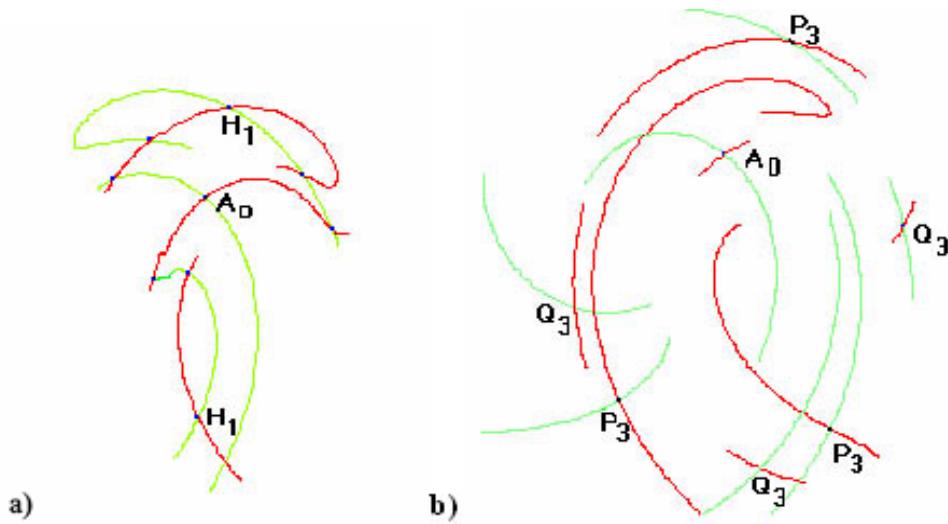


Рис. D.9. $d = 0.9$. а) гетероклинический цикл $A_0 \rightarrow H_1 \rightarrow A_0$; б) гиперболические 3-периодические орбиты P_3 и Q_3 .

заканчивается аттрактором A , правая неустойчивая сепаратриса $W_u(H_0)_r$ заканчивается стоком S_0 . Глобальный аттрактор является замыканием неустойчивого многообразия $W_u(H_0)$ седла H_0 : $A_g = W_u(H_0) + A + S_0$. Заметим, что при $d=0.7$ неустойчивое многообразие $W_u(A_0)$ заканчивалось в стоке S , при $d=0.8$ неустойчивая сепаратриса $W_u(H)$ имеет своим пределом S , т. е. произошла бифуркация (см. рис. D.8).

7. $d = 0.9$. Отображение Икеда с параметрами $d=0.9$, $a=b=0.9$ имеет хаотический минимальный аттрактор A , который получил название "аттрактор Икеда". При переходе от $d=0.8$ к $d=0.9$ произошла следующая бифуркация: исчез 2-периодический сток S и 2-периодическая гиперболическая орбита H . Аттрактор A содержит обратное седло $A_0(0.4819, 0.2645)$ и 2-периодическую гиперболическую орбиту $H_1(0.5964, 0.6394); (0.4497, -0.6453)$. Устойчивые $W_s(A_0)$, $W_s(H_1)$ и неустойчивые многообразия $W_u(A_0)$, $W_u(H_1)$ (сепаратрисы) этих седел пересекаются и образуют гетероклинический цикл $A_0 \rightarrow H_1 \rightarrow A_0$ (см. фазовый портрет D.9,а)), порождающий хаотический аттрактор A , который является замыканием неустойчивых многообразий $W_u(A_0)$ или $W_u(H_1)$. Существует пара гиперболических 3-периодических орбит: $P_3(0.8091, 0.7834), (0.9960, -1.0090), (-0.0280, -0.8758)$ и $Q_3(1.3512, -0.0707), (0.6568, -1.1932), (-0.2418, -0.4462)$, см. фазовый портрет D.9,б). Устойчивые и неустойчивые многообразия орбит P_3 и Q_3 пересекаются, образуя гетероклинический цикл, который также порождает аттрактор A .

Замыкание неустойчивого многообразия любой из орбит A_0, H_1, P_3 или Q_3 является аттрактором A , см. фазовый портрет D.10,а). Вне аттрактора A имеется седло $H_0(1.1987, -2.3769)$, левая неустойчивая сепаратриса $W_u(H_0)_l$, которого заканчивается аттрактором A . Правая неустойчивая сепаратриса $W_u(H_0)_r$ заканчивается стоком $S_0(3.0027, 3.8945)$, см. фазовый портрет D.10,б). Устойчивое многообразие $W_s(H_0)$ седла H_0 является границей между областью притяжения $W_s(A)$ аттрактора A и областью притяжения $W_s(S_0)$ стока S_0 . Замыкание неустойчивого многообразия $W_u(H_0)$ образует глобальный аттрактор $A_g = A + W_u(H_0) + S_0$. Данное отображение не имеет других 2- и 3-периодических орбит.

8. $d = 1$. При переходе от $d = 0.9$ к $d = 1$ продолжают существовать 1-, 2- и 3-периодические орбиты, однако их координаты меняются (см. фазовый портрет D.11,а)). Так, обратное седло A_0 имеет координаты $(0.5228, 0.2469)$, 2-периодическая гиперболическая орбита $H_1 = (0.6216, 0.6059), (0.5098, -0.6084)$, 3-периодическая гиперболическая орбита $P_3 = (0.7795, 0.7672), (1.0140, -0.9832), (0.0858, -0.8832)$, 3-периодическая гиперболическая

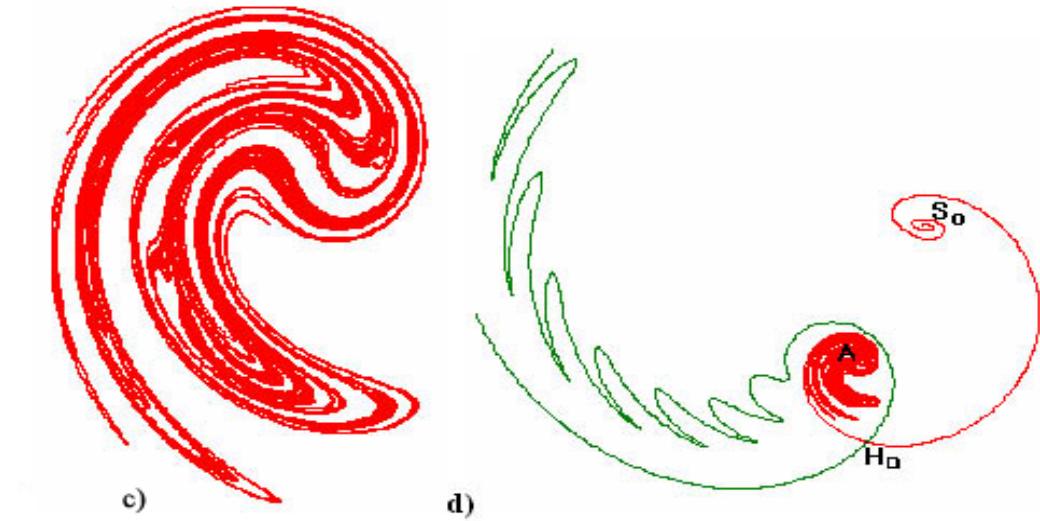


Рис. D.10. $d = 0.9$. а) аттрактор Икеда; б) неустойчивое многообразие седловой точки H_0 и сток S_0 .

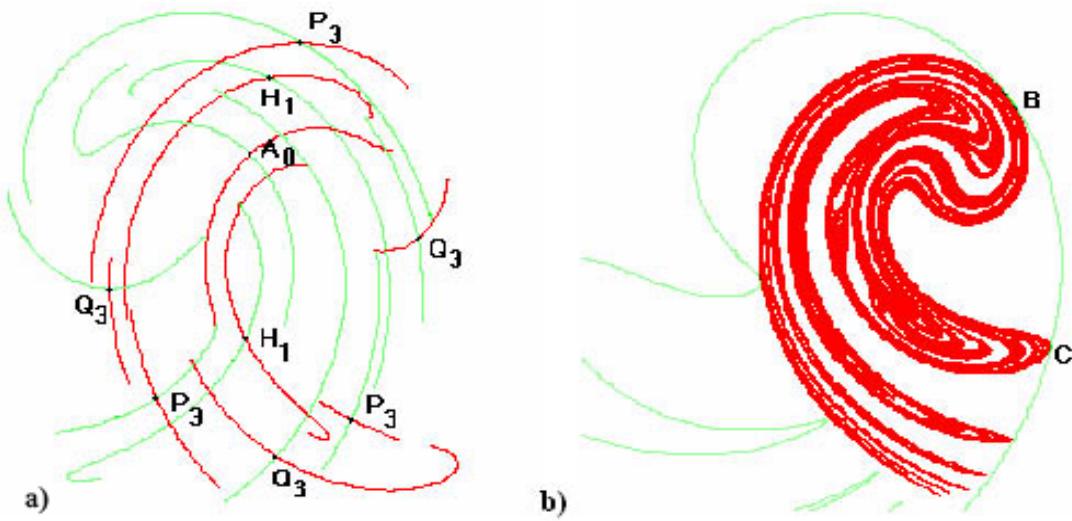


Рис. D.11. $d = 1$. а) существование 1-,2-,3-периодических орбит; б) замыкание неустойчивого многообразия любой из периодических орбит дает аттрактор A .

орбита $Q_3 = (0.6583, -1.1541), (1.3297, -0.1427), (-0.1353, -0.3756)$. Замыкание неустойчивого многообразия любой из орбит A_0, H_1, P_3 или Q_3 является аттрактором A , см. фазовый портрет D.11,б).

Область притяжения аттрактора A ограничена устойчивым многообразием гиперболической точки $H_0(1.1142, -2.2857)$, см. фазовый портрет D.11,б), которое почти касается A . Детальные фазовые портреты D.12,а),б) показывают, что A и $W_s(H_0)$ расположены вблизи точек В и С на положительном расстоянии.

Устойчивое многообразие $W_s(H_0)$ седла H_0 является границей между областями притяжения аттрактора A и стока $S_0(2.9721, 4.1459)$. Устойчивое и неустойчивое многообразия седла H_0 почти касаются, образуя достаточно тонкую область притяжения вблизи точек почти касания. Правая сепаратриса $W_u(H_0)_r$ заканчивается в стоке $S_0(2.9721, 4.1459)$, левая сепаратриса $W_u(H_0)_l$ приближается к хаотическому аттрактору A (см.рис. D.12,в)).

9. $d = 1.1$. Отображение T сохраняет периодические орбиты: обратное седло $A_0(0.5837, 0.2232)$,

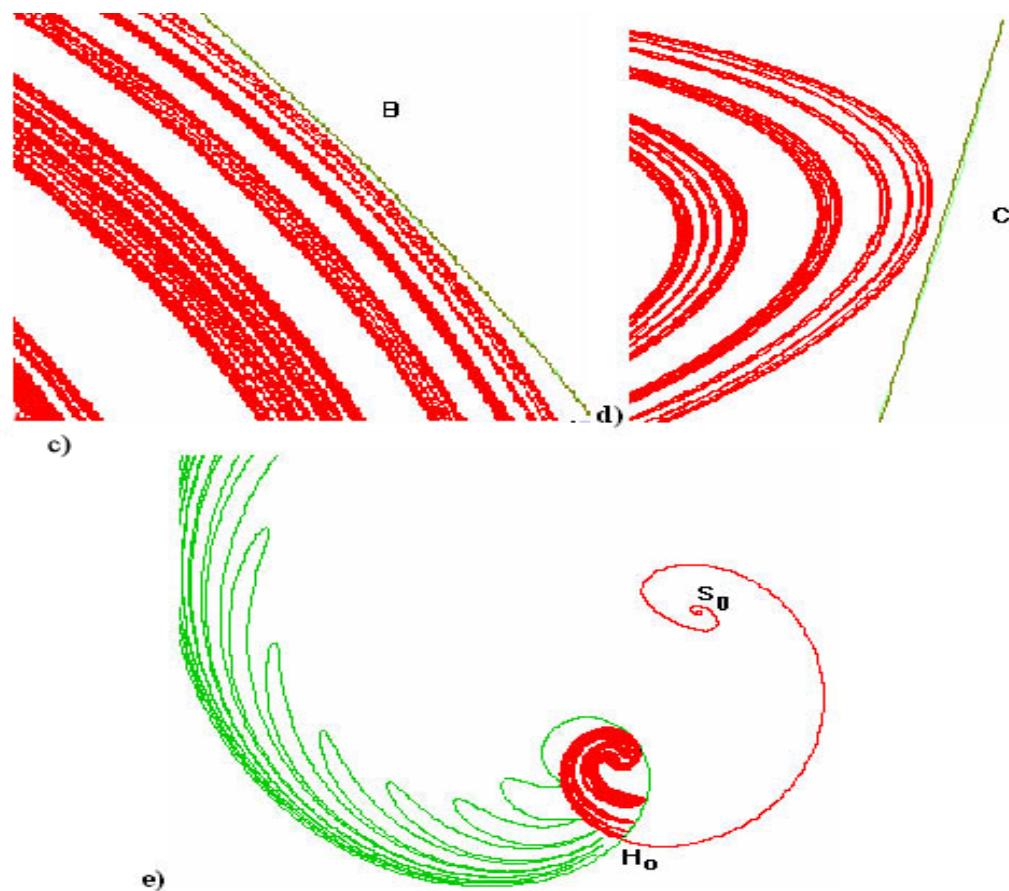


Рис. D.12. $d = 1$. Детальные фазовые портреты.

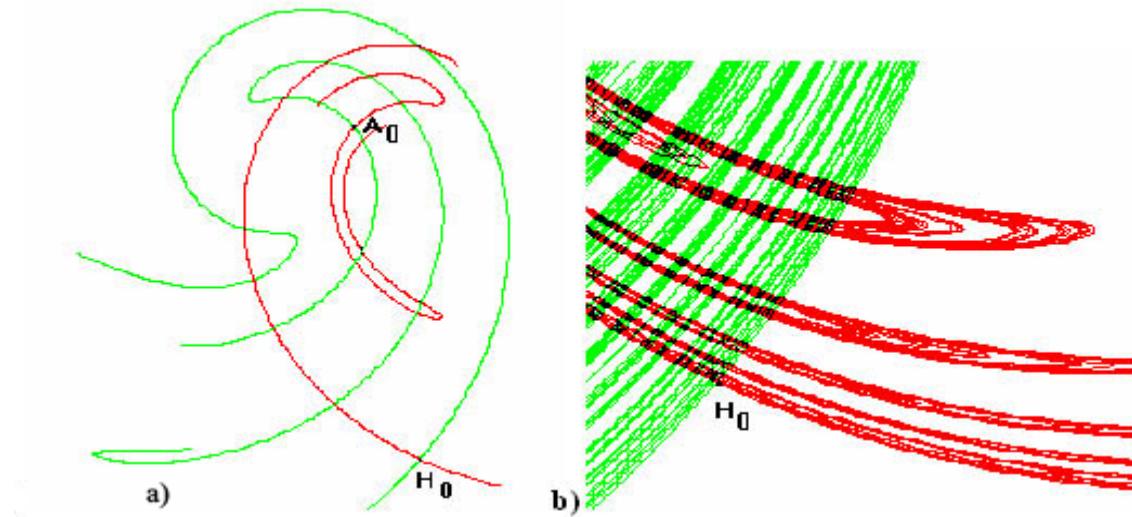


Рис. D.13. $d = 1.1$. а) пересечение инвариантных многообразий точки H_0 ; б) пересечение вблизи H_0 .

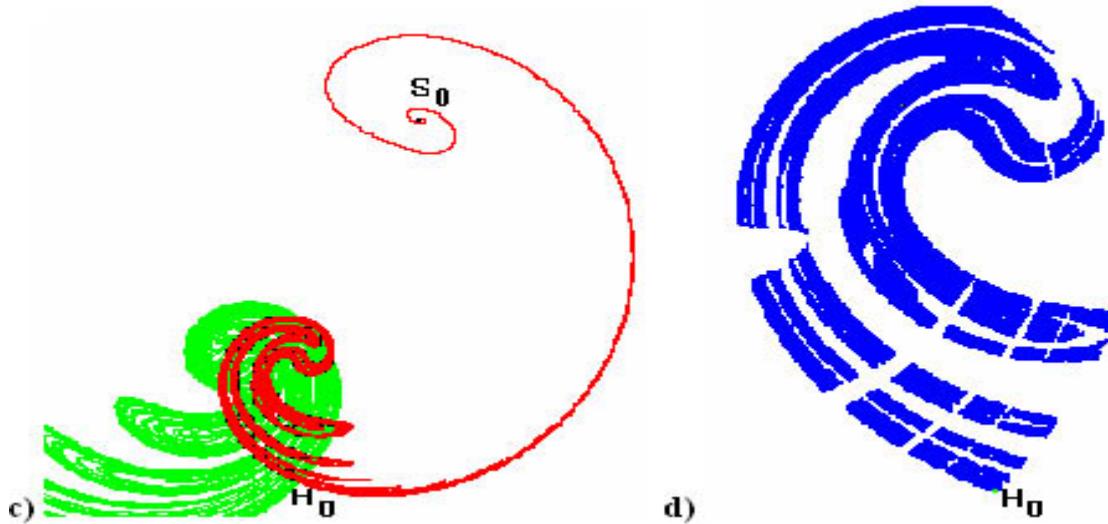


Рис. D.14. $d = 1.1$. а) неустойчивая сепаратриса точки H_0 ; б) замыкание пересечения инвариантных многообразий точки H_0 .

2-периодическую орбиту $H_2(0.6525, 0.5641), (0.5670, -0.5643)$, 3-периодическую орбиту $P_3(0.1906, -0.8730), (1.0240, -0.9557), (0.7718, 0.7342)$ и 3-периодическую орбиту $Q_3(0.6660, -1.0738), (-0.0110, -0.2430), (1.2810, -0.1232)$. Взаимное расположение перечисленных орбит аналогично случаю $d = 1$. Гиперболическая точка H_0 имеет координаты $(1.0592, -2.1850)$. Ее устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, образуя гомоклинический контур, см. D.13,а). Фазовый портрет D.13,б) показывает, как многообразия $W_s(H_0)$ и $W_u(H_0)$ пересекаются вблизи точки H_0 . Кроме того, фазовый портрет D.13,а) показывает, что устойчивые и неустойчивые многообразия точек A_0 и H_0 пересекаются, образуя гетероклинический контур. Таким образом, аттрактор A перестает существовать при переходе от $d = 1$ к $d = 1.1$. Глобальный аттрактор A_g является замыканием неустойчивого многообразия точки H_0 или A_0 .

Правая неустойчивая сепаратриса $W_u(H_0)_r$ заканчивается в фокусе $S_0(2.9630, 4.3773)$. Более того, все остальные неустойчивые многообразия также приближаются к S_0 , вытягиваясь вдоль $W_u(H_0)_r$. Множество цепно-рекуррентных точек (кроме стока S_0) является

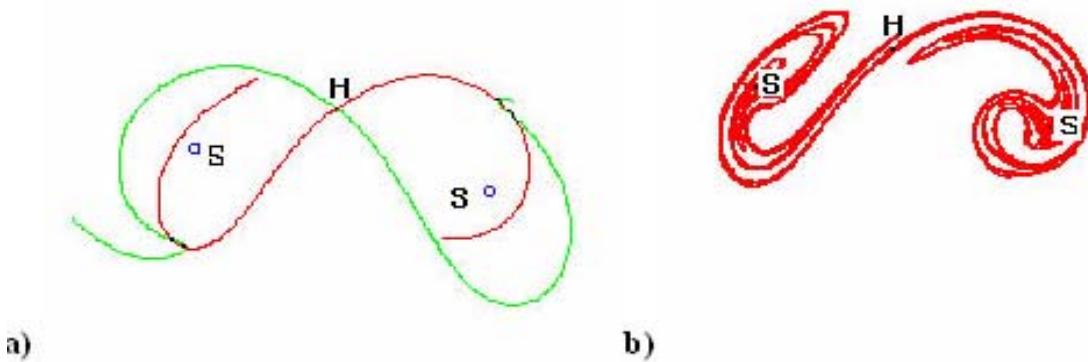


Рис. D.15. $d = 3, a = b = -0.9$. а) пересечение инвариантных многообразий неподвижной гиперболической точки H ; б)замыкание $W_u(H)$ образует глобальный аттрактор A_g .

замыканием пересечения $W_s(H_0)$ и $W_u(H_0)$, окрестность которого показана на D.14d).

D.3. Модификация отображения Икеда

Рассмотрим некоторые модификации отображения Икеда. Для этого перепишем это отображение в виде

$$T : (x, y) \rightarrow (d + a(x \cos \tau - y \sin \tau), b(x \sin \tau + y \cos \tau)),$$

где $\tau = 0.4 - 6/(1+x^2+y^2)$. Параметры классического отображения Икеда таковы, что $a = b = C_2$ лежит в интервале $(0,1)$, т.е. отображение в первом приближении является сжатием. Сейчас мы будем выбирать a и b разными, в том числе и по знаку.

Ориентированные модификации отображения Икеда.

1. Обратное сжатие: $d = 3, a = b = -0.9$. Отображение T имеет гиперболическую неподвижную точку $H(1.6030, 0.8268)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются $W_s(H) \cap W_u(H) \neq \emptyset$. Это пересечение близко к касанию, см.рис.D.15,а). На инвариантных многообразиях $W_s(H)$ и $W_u(H)$ отображение T меняет ориентацию, так как $a=b<0$. Таким образом, H является обратным седлом. Имеется 2-периодический сток $S(0.0320, 0.3637); (3.3216, -0.0835)$, который лежит в предельном множестве неустойчивого многообразия $W_u(H)$. Замыкание многообразия $W_u(H)$ образует глобальный аттрактор A_g , см.D.15,б).

В глобальном аттракторе лежит цепно-рекуррентное множество Q , которое содержит орбиты H , S и точки пересечения $W_s(H)$ и $W_u(H)$ (гомоклинические точки). Окрестность цепно-рекуррентного множества Q , полученная методами символьической динамики, изображена на рис.D.16,а). Окрестность стока S отмечена темным, эта окрестность является оценкой снизу области притяжения стока S . Многообразия $W_s(H)$ и $W_u(H)$, а также их точки пересечения можно видеть на фазовом портрете D.16,б). Множество гомоклинических точек $W_s(H) \cap W_u(H)$ является оценкой снизу для цепно-рекуррентного множества Q .

2. Гиперболическое отображение: $d = 1, a = 0.9, b = 1.2$.

Существует неподвижная гиперболическая точка $H(-0.1824, -2.3536)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются, образуя гомоклиническую точку F



Рис. D.16. $d = 3, a = b = -0.9$. а) окрестность цепно-рекуррентного множества Q ; б) инвариантные многообразия точки H .

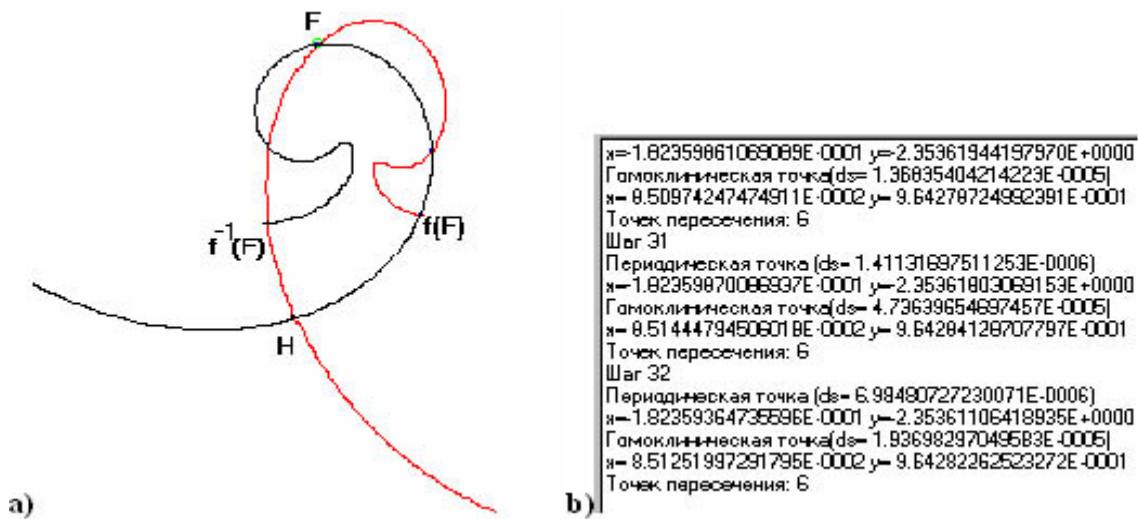


Рис. D.17. $d = 1, a = 0.9, b = 1.2$. а) гомоклиническая точка F ; б) результаты вычисления координат точек H и F .

(0.0851, 0.9643), см. D.17,а). Табл. D.17,б) показывает результаты вычислений координат точек H и F .

Отображение имеет гиперболическую неподвижную точку $H_1(0.5153, 0.2835)$ и 2-периодическую гиперболическую орбиту $P(0.3708, 0.6824), (0.5505, -0.7136)$. Устойчивые и неустойчивые многообразия орбит H, H_1 и P пересекаются, образуя гетероклинические циклы, см. D.18,а). Фазовый портрет D.18,б) показывает расположение устойчивого и неустойчивого многообразий периодической орбиты P .

Множество гомоклинических точек, которое строится как пересечение $W_s(H)$ и $W_u(H)$, является оценкой снизу цепно-рекуррентного множества Q , см. D.19,а). Окрестность цепно-рекуррентного множества Q (оценка сверху), полученная локализацией методами символьической динамики, изображена на рис. D.19,б).

Устойчивое многообразие $W_s(H)$ гиперболической точки H (и всех других орбит из Q) начинается в источнике $S(-2.9622, 5.8918)$, см. фазовый портрет D.20.

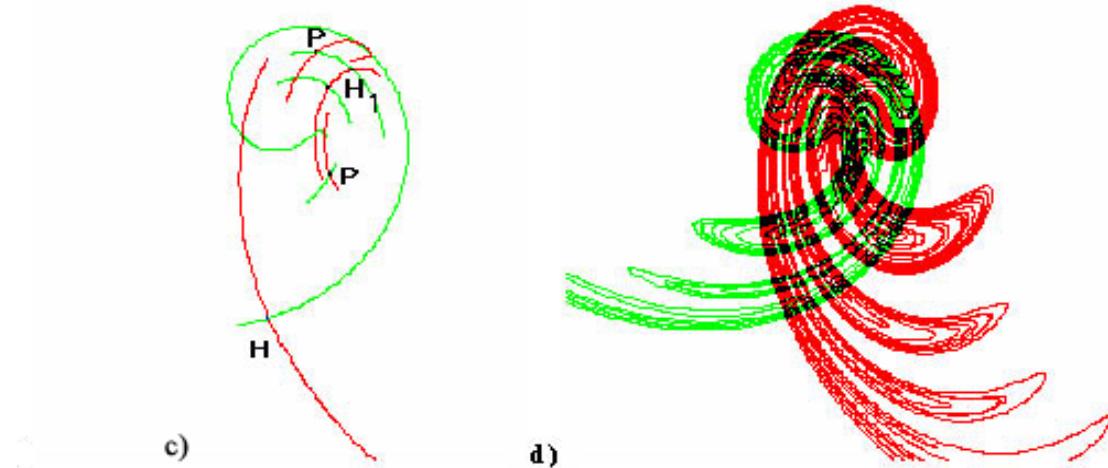


Рис. D.18. $d = 1, a = 0.9, b = 1.2$. а) инвариантные многообразия орбит H, H_1, P ; б) инвариантные многообразия периодической орбиты P .

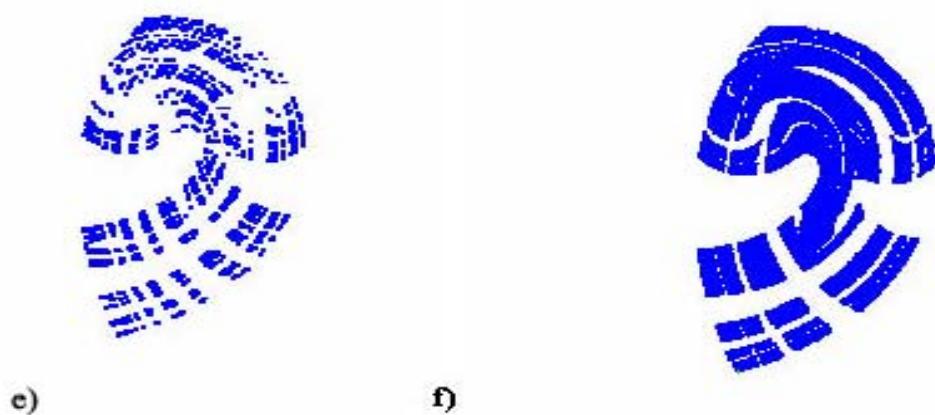


Рис. D.19. $d = 1, a = 0.9, b = 1.2$. а) построение множества гомоклинических точек; б) окрестность цепно-рекуррентного множества Q .

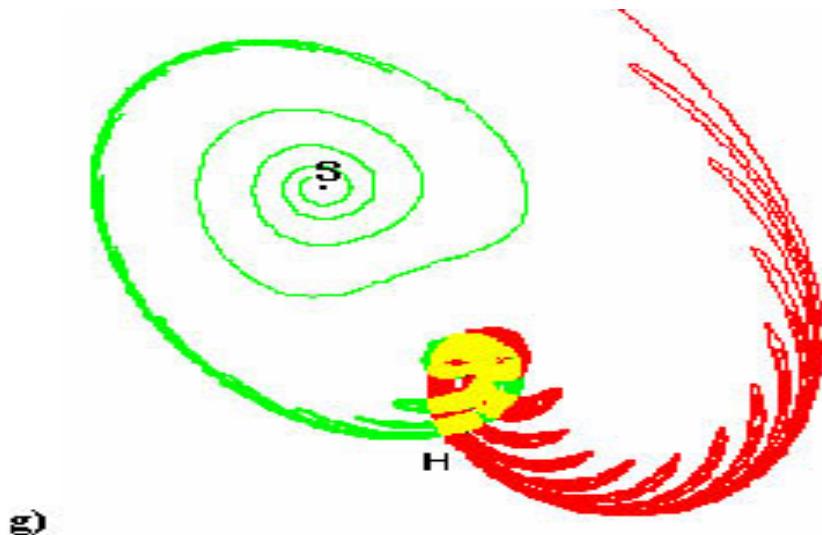


Рис. D.20. $d = 1, a = 0.9, b = 1.2$. Устойчивое многообразие гиперболической точки H начинается в источнике S .

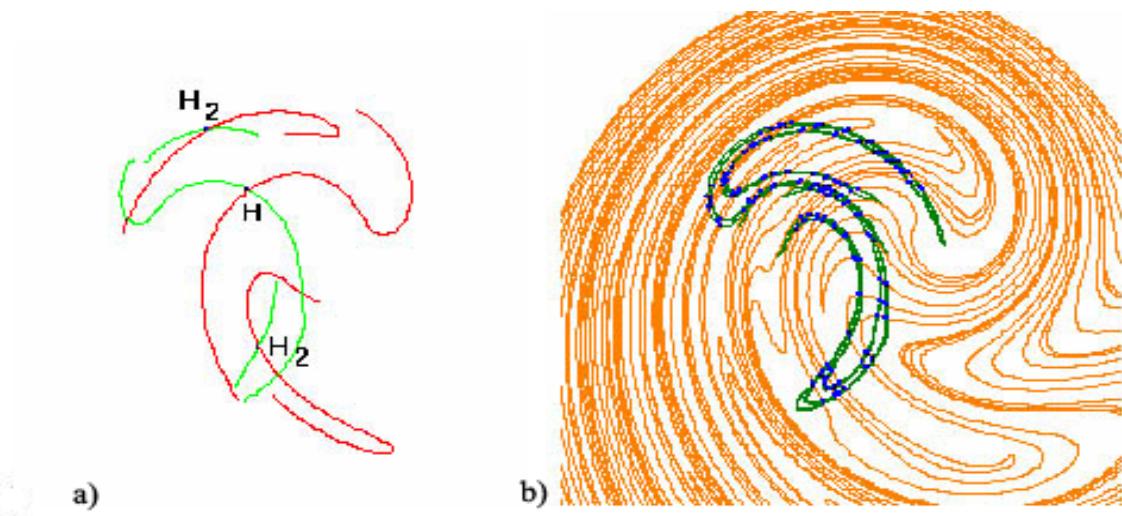


Рис. D.21. $d = 1, a = b = 1.2$. а) 2-периодическая гиперболическая орбита H_1 и гиперболическая неподвижная точка H ; б) инвариантные многообразия точки H и репеллер U .

3. Растворение: $d = 1, a = b = 1.2$. Отображение T растворяет площадь с коэффициентом $a^2 = 1.44$ и имеет глобальный репеллер R_g . Этот репеллер содержит гиперболическую неподвижную точку $H(0.4368, 0.3100)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются, порождая гомоклинический контур. Неподвижная точка H является обратным седлом, т. е. отображение T меняет ориентацию на $W_s(H)$ и на $W_u(H)$. Кроме того, имеется 2-периодическая гиперболическая орбита $H_1(0.5132, -0.7463), (0.1850, 0.7191)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются как между собой, так и с $W_s(H)$ и $W_u(H)$, порождая гетероклинический контур, см. рис. D.21, а). Замыкание устойчивых многообразий $W_s(H)$ или $W_s(H_1)$ образует репеллер U . Фазовый портрет D.21, б) показывает расположение репеллера U и многообразий $W_s(H)$ и $W_u(H)$.

Методами символьической динамики построена окрестность (оценка сверху) цепно-рекуррентного множества Q , которая содержит U , см. D.22, а). Множество точек пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий является оценкой снизу множества Q , см. D.21, б). По-видимому, имеет место равенство $U = Q$. Вне U существует гиперболическая неподвижная точка

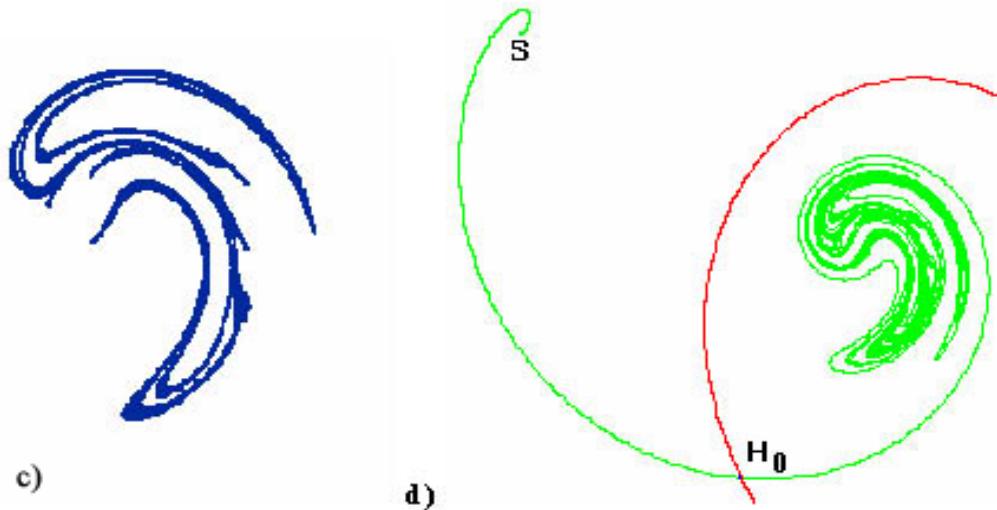


Рис. D.22. $d = 1, a = b = 1.2$. а) окрестность цепно-рекуррентного множества Q , содержащая репеллер U ; б) гиперболическая неподвижная точка H_0 и окрестность множества Q .

$H_0(-1.2588, -2.5318)$, см. D.22,б). Правая устойчивая сепаратриса $W_s(H_0)_r$ начинается в U , а левая сепаратриса в источнике $S(-3.7022, 2.3228)$.

D.4. Неориентированные модификации отображения Икеда

- Сжатие: $d = 1, a = 0.9, b = -0.9$. Отображение T обладает свойством сжатия площадей и имеет глобальный аттрактор A_g . T имеет две неподвижные гиперболические точки $H_0(0.5726, 0.6602)$ и $H_1(0.5606, -0.5692)$. Устойчивые и неустойчивые многообразия этих точек пересекаются, образуя гетероклинический цикл. Кроме того, существует 2-периодическая гиперболическая орбита $P(0.9391, -0.2036), (0.1539, 0.1791)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются с $W_u(H_0), W_u(H_1)$ и $W_s(H_0), W_s(H_1)$, образуя гетероклинический цикл, см. D.23,а). Множество точек пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий перечисленных орбит является оценкой снизу для цепно-рекуррентного множества Q , см. D.23,б).

Окрестность множества Q , построенная методами символической динамики, является оценкой сверху, см. D.24,а). Вблизи точки H_0 многообразие $W_s(H_0)$ ограничивает область Q , одна неустойчивая сепаратриса $W_u(H_0)_l$ (левая) входит в Q , а другая $W_u(H_0)_r$ уходит направо, см. D.23а),б) и D.24,б). Вблизи точки H_1 многообразие $W_u(H_1)$ ограничивает область Q , одна устойчивая сепаратриса $W_u(H_1)_r$ (правая) входит в Q , а другая $W_u(H_1)_l$ уходит налево на бесконечность, см. D.23а),б) и D.24,б).

Неустойчивые многообразия выходят из Q , и, вытягиваясь вдоль правой сепаратрисы $W_u(H_0)_r$, достигают стока $S(9.7301, -1.5751)$. Устойчивые многообразия выходят из Q , и вдоль левой сепаратрисы $W_s(H_0)_l$, достигают бесконечности в виде «заячьих ушек». Глобальный аттрактор A_g является замыканием неустойчивого многообразия $W_u(H_0)$, см. D.25.

- Сжатие: $d = 2, a = -0.9, b = 0.9$. Отображение T обладает свойством сжатия площадей и имеет глобальный аттрактор A_g . Существует единственная неподвижная гиперболическая точка $H(1.3815, -2.4746)$, см. D.26,а). Устойчивое и неустойчивое многообразия $W_s(H)$ и $W_u(H)$ пересекаются (см. D.26,б). Кроме того, существует единственная 2-периодическая орбита $P(0.2338, -0.7031), (1.9995, 0.6681)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются с $W_s(H)$ и $W_u(H)$, образуя гетероклинический цикл.

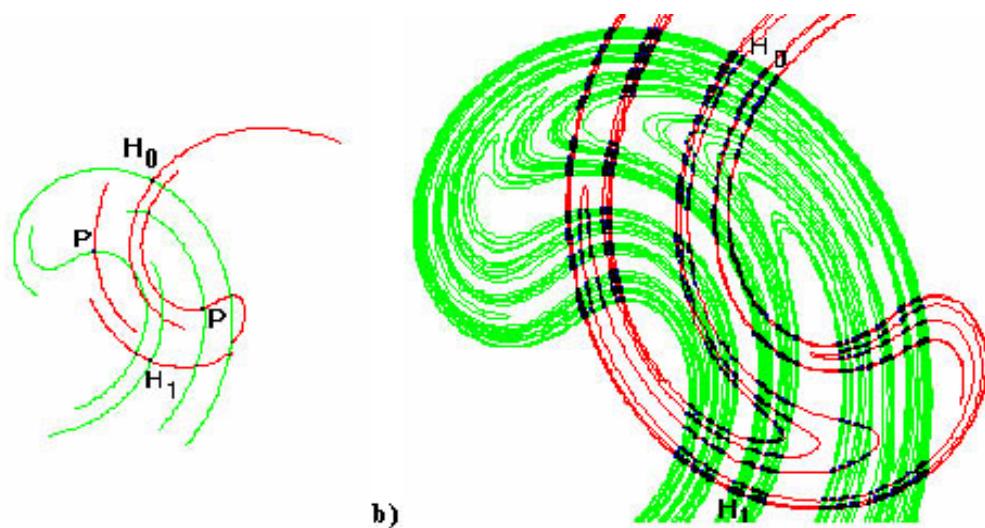


Рис. D.23. $d = 1, a = 0.9, b = -0.9$. а) гетероклинический цикл, образованный инвариантными многообразиями точек H_0 и H_1 ; б) точки пересечения инвариантных многообразий орбит P, H_0, H_1 .

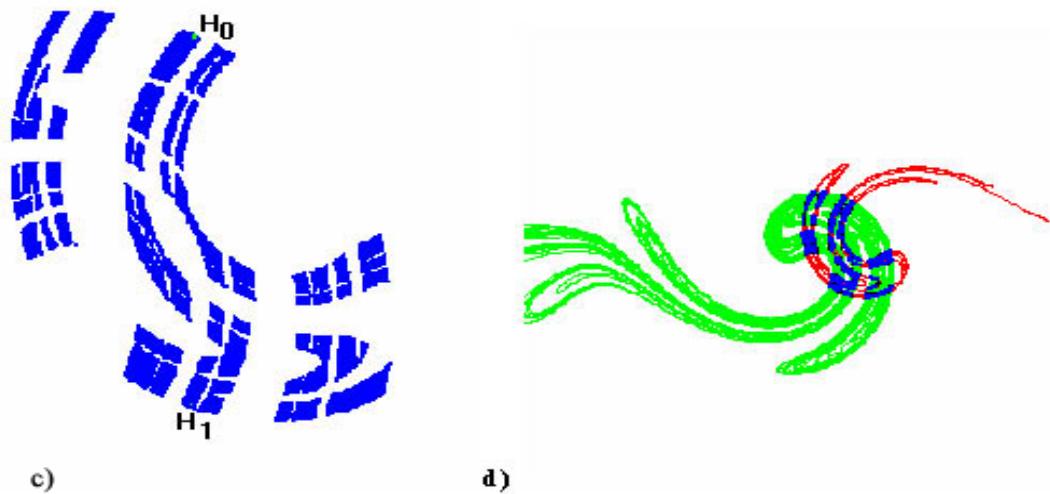


Рис. D.24. $d = 1, a = 0.9, b = -0.9$. а) окрестность множества Q ; б) инвариантные многообразия точки H_1 и множество Q .

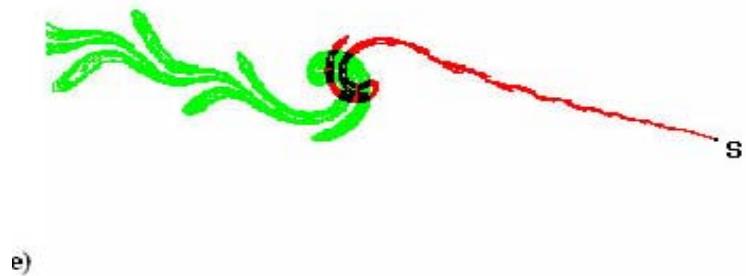


Рис. D.25. $d = 1, a = 0.9, b = -0.9$. Глобальный аттрактор A_g .

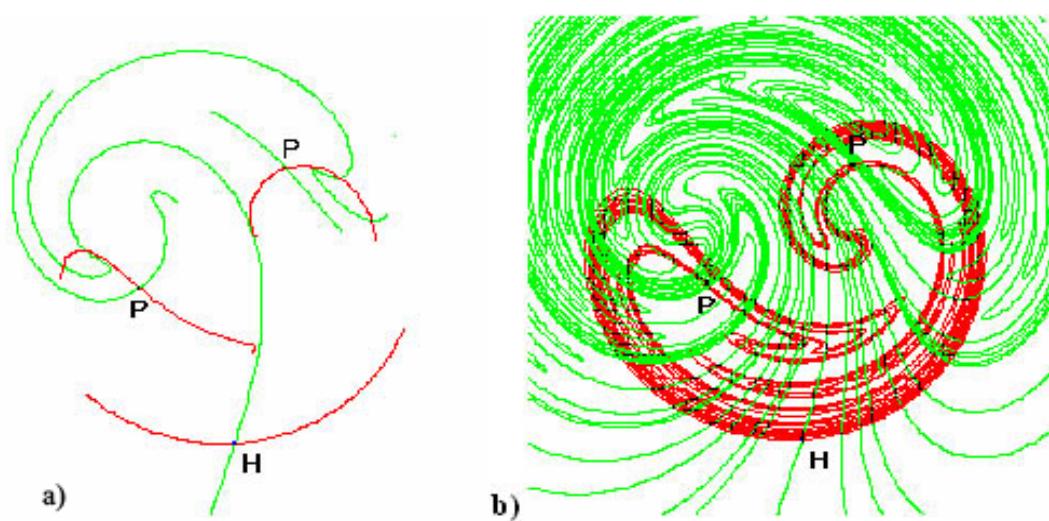


Рис. D.26. $d = 2, a = -0.9, b = 0.9$. а) неподвижная точка H и 2-периодическая орбита P ;
б) пересечение инвариантных многообразий P и H .

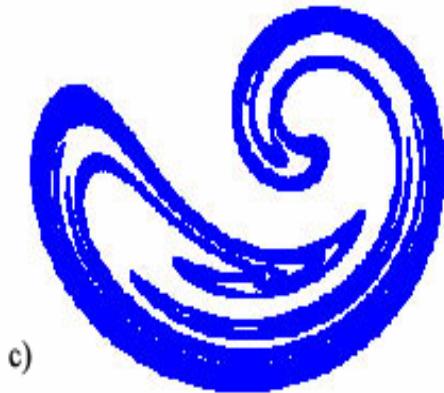


Рис. D.27. $d = 2, a = -0.9, b = 0.9$. Окрестность цепно-рекуррентного множества Q .

Глобальный аттрактор A_g является замыканием неустойчивого многообразия $W_u(H)$ (или $W_u(P)$), см. D.26,б). Множество точек пересечения $W_s(H) \cap W_u(H)$ является оценкой снизу для цепно-рекуррентного множества Q . Методами символьической динамики построена окрестность множества Q , см. D.27. Так как глобальный аттрактор A_g содержит все ω -предельные точки, то устойчивые многообразия орбит из A_g покрывают плоскость R^2 .

Методами символьической динамики получена локализация гиперболической орбиты периода 6: $P_6(1.0847, -1.0732)$,

$(2.7889, -1.1242), (-0.2626, -1.4846), (3.3560, 0.0508)$,

$(-1.0124, -0.2235), (1.3964, 0.7116)$. Получена оценка характеристических показателей этой орбиты $\lambda_1 = -11.3100$ и $\lambda_2 = 0.0250$.

3. Гиперболическое отображение: $d = 1, a = -0.9, b = 1.2$. Отображение имеет гиперболическую неподвижную точку $H(-0.0950, 2.1937)$, устойчивое многообразие $W_s(H)$ которой взаимно однозначно проектируется на горизонтальную прямую. Отображение меняет ориентацию на $W_s(H)$. Неустойчивое многообразие $W_u(H)$ проектируется взаимно однозначно на вертикальную ось вблизи точки H , но нижняя сепаратриса имеет весьма сложную структуру, см. фазовый портрет D.28,а). Такое поведение обусловлено тем, что $W_u(H)$ пересекает устойчивое многообразие $W_s(Q_2)$ 2-периодической гиперболической орбиты $Q_2(-1.5584, -1.9046), (3.0088, -1.2438)$, которая имеет гомоклиническую точку трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий $W_u(Q_2)$ и $W_s(Q_2)$, см. D.28,б).

Фазовый портрет D.29,а) показывает структуру пересечения $W_u(Q_2)$ и $W_s(Q_2)$ вблизи точки $Q_2(-1.5584, -1.9046)$. Кроме Q_2 существует другая 2-периодическая гиперболическая орбита $P_2(-0.2554, -0.9207), (1.1152, 1.1362)$, которая имеет гомоклиническую точку пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий $W_u(P_2)$ и $W_s(P_2)$. Фазовый портрет D.29,б) показывает структуру пересечения $W_u(P_2)$ и $W_s(P_2)$ вблизи точки $P_2(-0.2554, -0.9207)$.

Устойчивые и неустойчивые многообразия орбит Q_2 и P_2 пересекаются, образуя гетероклинический контур, что порождает хаотическое инвариантное цепно-рекуррентное множество Q . Фазовый портрет D.29,б) показывает окрестность (оценка сверху) множества Q . Фазовый портрет D.29,а) показывает расположение многообразий $W_u(Q_2)$ и $W_s(Q_2)$, а также их точек пересечения. Это множество является оценкой снизу для Q . Устойчивое многообразие $W_s(H)$ лежит в замыкании $W_s(Q_2)$. Замыкание устойчивого многообразия $W_s(Q_2)$ образует множество, которое можно назвать «шляпой Наполеона», см. D.29,а).

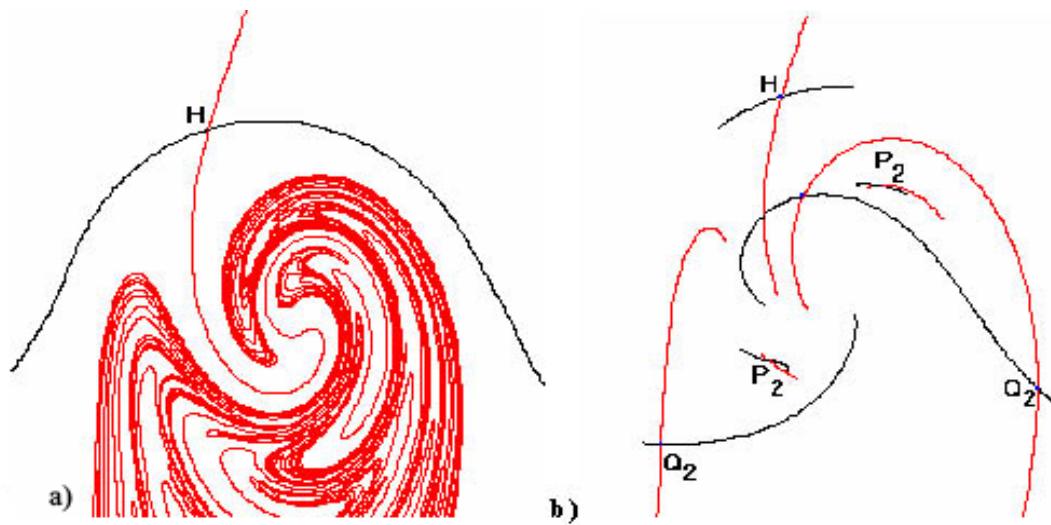


Рис. D.28. $d = 1, a = -0.9, b = 1.2$. а) неустойчивое многообразие точки H ; б) пересечение инвариантных многообразий орбиты H и Q_2 .

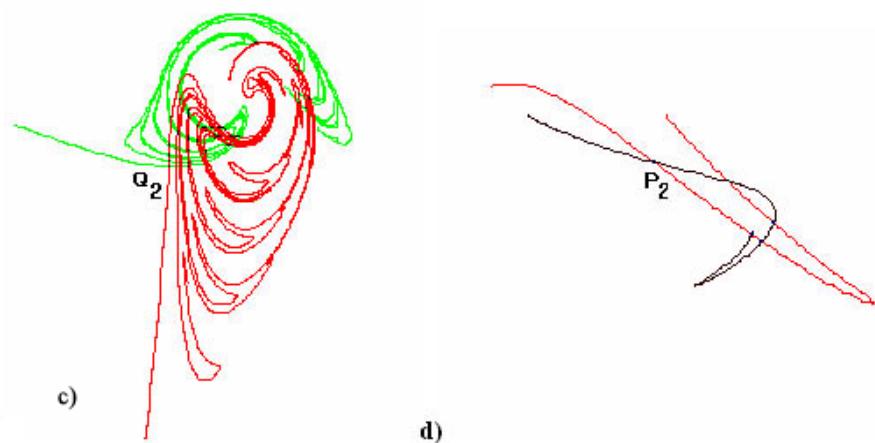


Рис. D.29. $d = 1, a = -0.9, b = 1.2$. а) пересечение инвариантных многообразий орбиты Q_2 ; б) пересечение инвариантных многообразий орбиты P_2 .

Оглавление

1 Динамика	3
1.1. Хаос и порядок	4
1.2. Динамика системы и кодирование траекторий	6
1.3. Динамические системы. Определения и примеры	8
2 Символический образ динамической системы	13
2.1. Построение символического образа	13
2.2. Псевдотраектории и допустимые пути	14
2.3. Матрица переходов	16
2.4. Компьютерное построение символического образа	16
3 Локализация периодических траекторий	19
3.1. Периодические ε -траектории	19
3.2. Процедура подразбиения	21
3.3. Алгоритм локализации	21
4 Метод Ньютона	24
4.1. Основные результаты	24
4.2. Существование периодической траектории в компоненте периодических ε -траекторий	26
4.3. Существование периодической траектории (орбиты) в компоненте периодических вершин	26
4.4. Пример построения периодической орбиты	27
5 Локализация множества цепно-рекуррентных траекторий	33
5.1. Определения и примеры	33
5.2. Цепно-рекуррентные траектории и символический образ	36
5.3. Реализация алгоритма	37
6 Локализация инвариантных множеств	40
6.1. Инвариантные множества	40
6.2. Символический образ и инвариантные множества	42
6.3. Построение неуходящих вершин	44
7 Аттракторы	46
7.1. Определения и примеры	46
7.2. Аттрактор на символическом образе	50
7.3. Аттракторы системы и символического образа	52
7.4. Матрица перехода и аттракторы.	53
7.5. Построение пары аттрактор-репеллер	54

8 Фильтрации	58
8.1. Определение и свойства фильтрации	58
8.2. Фильтрация на символическом образе	62
8.3. Построение фильтрации динамической системы	63
9 Структурный граф динамической системы	65
9.1. Символический образ и структурный граф	65
9.2. Последовательность символьических образов	68
9.3. Истинный структурный граф символического образа	69
9.4. Построение структурного графа динамической системы	71
10 Энтропия	74
10.1. Определения и свойства	74
10.2. Оценка топологической энтропии	76
10.3. Элементы символьической динамики	77
10.4. Энтропия пространства оснащений	78
10.5. Вычисление энтропии пространства оснащений	78
10.6. Оценка энтропии с помощью символьического образа	79
10.7. Энтропия отображения Хенона	82
10.8. Энтропия логистического отображения.	84
11 Проективное пространство и характеристический показатель Ляпунова	85
11.1. Определения и примеры	85
11.2. Координаты в проективном пространстве	86
11.3. Действие линейного отображения в проективном пространстве	88
11.4. Базисные множества на проективном пространстве P^1	89
11.5. Характеристический показатель Ляпунова	90
12 Спектр Морса	97
12.1. Гладкие отображения и многообразия.	97
12.2. Линейное расширение гомеоморфизма	98
12.3. Проективное расслоение ассоциированное с векторным	98
12.4. Определение спектра Морса	99
12.5. Символический образ проективного отображения	102
12.6. Оснащенный символьический образ и его спектр	102
12.7. Оценка спектра Морса сверху	103
12.8. Локализация спектра динамической системы	105
12.9. Экспоненциальные оценки	106
12.10. Цепно-рекуррентные компоненты на проективном расслоении	106
12.11. Проверка гиперболичности	107
12.12. Вычисление спектра Морса	108
13 Эквивалентность динамических систем	114
13.1. Топологическая эквивалентность	114
13.2. Эквивалентность на цепно-рекуррентном множестве.	117
13.3. Структурная устойчивость	118
14 Цепно-рекуррентная и Ω-устойчивость	120
14.1. Неблуждающее множество.	120
14.2. Гиперболичность и отсутствие циклов.	121
14.3. Алгоритм проверки цепно-рекуррентной устойчивости	124

15 Проверка структурной устойчивости	128
15.1. Условие трансверсальности	128
15.2. Двойственный дифференциал	130
15.3. Эквивалентные условия	131
15.4. Алгоритм проверки	132
A Системы дифференциальных уравнений	134
A.1. Основные понятия и определения	134
A.2. Динамические системы	135
A.3. Локальные фазовые портреты динамических систем	136
A.4. Устойчивость по Ляпунову. Классификация одномерных линейных однородных систем	137
A.5. Решение линейных однородных динамических систем второго порядка	138
A.6. Фазовые портреты линейных систем на плоскости	142
A.7. Примеры исследования динамических систем	150
A.8. Предельные циклы	153
A.9. Возмущение дифференциальных уравнений	157
A.10.Структурная устойчивость и бифуркации	160
A.11.Фазовые портреты нелинейных динамических систем в окрестности вырожденной точки покоя	163
B Маятник	165
B.1. Маятник без трения	165
B.2. Центр	167
B.3. Системы Ньютона	167
B.4. Поверхность энергии	168
B.5. Маятник с трением	170
B.6. Цилиндрическое фазовое пространство	170
C Методы построения инвариантных многообразий и гомоклинических точек	172
C.1. Инвариантные многообразия	172
C.2. Построение локальных инвариантных многообразий	175
C.3. Построение глобальных инвариантных многообразий	176
C.4. Первый алгоритм построения глобальных инвариантных многообразий	178
C.5. Второй алгоритм построения инвариантных многообразий гиперболической точки	184
D Численное моделирование поведения траекторий отображения Икеда	189
D.1. Аналитические результаты	189
D.2. Численные результаты	190
D.3. Модификация отображения Икеда	200
D.4. Неориентированные модификации отображения Икеда	204

Литература

1. Алексеев В.М. Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики, Девятая летняя математическая школа, изд. инст. математики АН УССР, 1972.
2. Алексеев В.М. Символическая динамика, 11 математическая школа, Киев, 1976.
3. Ампилова Н.Б. Численно-аналитические методы исследования бифуркаций гомоклинических точек. Диссерт. Л., 1991
4. Ампилова Н.Б. Бифуркация базисного множества в уравнении Дуффинга с переключениями. 1990, ВИНИТИ , N 4237-B90.
5. Ампилова Н.Б. Численное исследование поведения инвариантных кривых в окрестности неподвижных точек отображения Гардини. Нелинейные динамические системы. вып.1. сб. статей под редакцией Г.А. Леонова, С.-Петербург,изд. СПб университета, 1997, стр.5-13.
6. Ампилова Н.Б. Численные методы построения периодических орбит в окрестности инвариантной кривой бифуркации Хопфа. Нелинейные динамические системы. вып.2, изд. С.-Петербургского университета, 2000,стр.71-80.
7. Ампилова Н.Б., Ершов Е.К., Осипенко Г.С. Метод Ньютона для приближенного построения периодических орбит. Труды 2 Межд.Конференции "Tools for mathematical modelling"June 14-19,1999,S.-Petersburg,p.108-117.
8. Ампилова Н.Б., Осипов А.В. Локальные бифуркации для полного отображения Гардини. ВИНИТИ,14.06.96,N 1969-B96.
9. Ампилова Н.Б., Семенова Н.Н. Гомоклинические решения уравнения Дуффинга с малым параметром. 1987. Деп. ВИНИТИ. N 8928-B87.
10. Андронов А.А., Понtryагин Л.С. Доклады Академии Наук СССР, т.14(1937),N.5, стр. 247-250.
11. Андронов А.А., Леонович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука, 1966.
12. Андронов А.А., Леонович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., Наука, 1967.
13. Анносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды математического института им. В.А. Стеклова, 90(1967).
14. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.М., Наука, 1984.
15. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.

16. Афраймович В.С. Некоторые свойства топологической энтропии. Труды V межд.конф. по нелинейным колебаниям, т.2. Качественные методы. Из-во ин-та матем. АНУССР, 1970, с. 62-68.
17. Axo A.B., Хопкрофт Д.Э., Ульман Д.Д. Структуры данных и алгоритмы. М., 2000.
18. Баутин Н.Н., Леонович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., Наука, 1990.
19. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.
20. Боузен Р. Методы символьической динамики, Математика, N13, Москва, 1979.
21. Брин М.И. О включении диффеоморфизма в поток. Изв. ВУЗов, № 8(123), 1972, с. 19-25.
22. Бронштейн И.У. Теорема о структурной устойчивости гладкого расширения каскада. //Алгебраические инварианты динамических систем, Мат.исследования, т. 67, Кишинев, Штиница, с.12-29 (1980).
23. Бронштейн И.У. Неавтономные динамические системы, Кишинев, 1984.
24. Былов Б.Ф., Виноград Р.Е., Гробман Д.М., Немышкий В.В. Теория показателей Ляпунова, Москва, 1966.
25. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., Наука, 1967.
26. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
27. Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. Нелинейные сетевые транспортные задачи. — М., Транспорт, 1972 г.
28. Осипенко Г.С. О символическом образе динамической системы, сб. Граничные задачи, Пермь, 1983, с.101-105.
29. Осипенко Г.С. Проверка условия трансверсальности методами символьической динамики, Дифференциальные уравнения, т.26, N9, 1990, с.1126-1132.
30. Осипенко Г.С. Оценка характеристических показателей методами символьической динамики, Дифференциальные уравнения, т.38, N4, 1-11, (2002).
31. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. М., Мир, 1986.
32. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., МГУ, 1984.
33. Пиллогин С.Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Л., ЛГУ, 1988.
34. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М., Мир, 1988.
35. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М.,1977.
36. Понtryagin Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1982.
37. Романовский И. В. Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом. Кибернетика, N. 2, 1967, с.66-78.

38. Рюэль Д., Таженс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы. М., Мир, 1981, с. 117-151.
39. Смейл С. Структурно устойчивый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев 1963, т.2, с.365-366.
40. Ченцов Н.Н. Проверка трансверсального пересечения сепаратрис с помощью ЭВМ. Препринт N 8. М. Ин-т прикладной математики, 1979.
41. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.
42. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. М., Мир, 1986.
43. Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация, М., 1973.
44. Aronson D.G., Chory M.A., Hall G.R. et.all Bifurcation from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: A computer-assisted study. Commun.Math.Phys.83,3(1982), p.303-354.
45. Aston P.J. and Dellnitz M. The computation of Lyapunov Exponents via Spatial Integration Using Vector Norms. International Conference on Differential equations, v.2, (2000), p.1015-1020.
46. Auslender L. and MacKenzie R. Introduction to Differentiable Manifolds, N.Y., 1963.
47. Bhatia N.P., Szego G.P. Stability theory of dynamical systems, New-York, Springer, 1970.
48. Birkhoff G.D. Nouvelles recherches sur les systemes dynamiques, Mem. Pont. Acad. Novi Lyncae 1, 1935, p.85-216.
49. Bowen R. Symbolic Dynamics. Am.Math.Soc.Providence, R.I., vol.8, 1982.
50. Cartwright M.L. and Littlewood J.E. On non-linear differential equations of the second order. III, IV, v. 97, no.3-4, 1957, p.267-308; v. 98, no.1-2, 1957, p.1-110.
51. Colonius F. and Klieman W. The Morse spectrum of linear flows on vector bundles, report 503 Inst.of Math. Ausburg univ., 1994.
52. Colonius F. and Klieman W. The Lyapunov spectrum of families of time varying matrices, report 504 Inst.of Math. Ausburg univ., 1994.
53. Colonius F., Kliemann W. The Dynamics of Control, Burkhauser, Boston, 2000.
54. Conley C. Isolated Invariant set and the Morse Index, CBMS Regional Conference Series, v.38, Amer.Math.Soc., Providence, 1978.
55. Dellnitz M. and Hohmann A. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors, Numerische Mathematik, 75 (1997), p.293-317.
56. Dellnitz M. and Junge O. An adaptive subdivision technique for the approximation of attractors and invariant measures, Comput. Visual. Sci., 1 (1998), p.63-68.
57. Dijkstra E. W. A note on two problems in connection with graphs // Numerische Math., 1959, 1, p. 269-271.
58. Franke J. and Selgrade J. Hyperbolicity and chain recurrence, J. Differential Equations, 26(1977), p.27-36.

59. *Franke J. and Selgrade J.* Hyperbolicity and cycles, Trans. Amer. Math. Sci. 245(1978), p.251-262.
60. *Froyland G., Junge O., Ochs G.* Rigorous computation of topological entropy with respect to finite partition//Physica D,2000, V.154.N.1-2, p.68-84.
61. *Gardini L., Abraham R., Record R.J., Fournier-Prunaret D.* A double logistic map. Int.J.Bif.and Chaos,4,1(1994), p.145-176.
62. *Gavrilov N.K., Shilnikov L.P.* On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve I,Math.USSR.sb.,1972, 88(4), p.467-485.
63. *Gavrilov N.K., Shilnikov L.P.* On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve II,Math.USSR.sb.,1973, 90(1), p.139-156.
64. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscilations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, N.Y., 1983.
65. *Guckenheimer J., Moser J. and Newhouse S.* Dynamical Systems, Birkhauser-Verlag, 1980.
66. *Hadamar J.* Les surfaces a courbures opposees et leur ligues geodesiques, Journal de mathematiques pure et appliquees, 5 ser., 4 (1898), p.27-73.
67. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. N.Y., 1964.
68. *Hirsh M., Smale S.* Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, London, Academic Press, 1970.
69. *Hsu C.S.* Cell-to-Cell Mapping.A method of Global Analysis for Nonlinear Systems, Springer-Verlag, N.Y., 1987.
70. *Ikeda K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system, Opt. Commun. 30 (1979), p.257-261.
71. *Lind D., Marcus B.* An introduction to symbolic dynamics and coding, New York, 1995.
72. *Linstrom T.* On the dynamics of discrete food chains: low- and high-frequency behavior and optimality of chaos. Journal of Mathematical Biology, 45(2002),p.396-418.
73. *Mane R.* A proof of the C^1 stability conjecture, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 66(1988), p.161-210.
74. *Mane R.* Characterizations of AS diffeomorphisms, Lect. Notes Math., v. 597(1977), p.389-394.
75. *Mizin D.A., Osipenko G.S., Kobyakov S.Yu.* The estimates for the topological entropy of a dynamical system.// Proceedings of the third international conference "Tools for mathematical modelling", SpbSTU, 2001, p.85-105.
76. *Morse H.M.* A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature, Amer.J. of Math., 43,1(1921), p.33-51.
77. *Morse H.M., Hedlung G.A.* Symbolic dynamics I, II, Amer. J. of Math., 60,4(1938), p.815-866; 62,1(1940), p.1-42.
78. *Newhouse S.E.* Diffeomprphisms with infinitely many sinks, Topology,13(1974), p.9-18.
79. *Nitecki Z.* Differentiable Dynamics. London, 1971.
80. *Nitecki Z. and Shub M.* Filtrations, decompositions, and explosions, Amer.J.of Math., 97,4(1975), p.1029-1047.

81. *Osipenko G., Ershov E., Kim J.H.* Lectures on invariant manifolds of perturbed differential equations and linearization, S.Petersburg, 1996.
82. *Osipenko G.S., Komarchev I.* Applied symbolic dynamics: construction of periodic trajectories. WSSIAA 4(1995), p.573-587.
83. *Osipenko G.S., Ilyin I.V.* Methods of Applied Symbolic Dynamics, Proceedings of Dynamical Systems and Applications, v.2, 1996, p.451-460.
84. *Osipenko G.S.* The periodic points and symbolic dynamics, in Seminar on Dynamical Systems. Euler International Mathematical Institute, St.Petersburg, Russia, October and November, 1991, Birkhauser Verlag, Basel, Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 12(1994), p.261-267.
85. *Osipenko G.S.* Morse Spectrum of Dynamical Systems and Symbolic Dynamics, Proceedings of 15th IMACS World Congress, v.1,1997, p.25-30 .
86. *Osipenko G.S. and Campbell S.* Applied Symbolic Dynamics: Attractors and Filtrations, Discrete and Continuous Dynamical Systems, v.5, no.1-2(1999), p.43-60.
87. *Osipenko G.S.* Construction of Attractors and filtrations, Conley Index Theory, Banach Center Publications, Warszawa, v.47, 1999, p.173-197.
88. *Osipenko G.S.* Spectrum of a Dynamical System and Applied Symbolic Dynamics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.252, no.2,2000, p.587-616.
89. *Osipenko G.* Symbolic Image, Hyperbolicity and Structural Stability, Journal of Dynamics and Differential Equations, v.15, no.2-3, 2003, p.427-450.
90. *Osipenko G., Matiyasevich D., Kobiakov S.* Localization of invariant sets. Tools for Mathematical Modelling. Mathematical Research, v.10, ed. G.Osipenko. St. Petersburg, 2003, p.300.
91. *Palis J.* On the C^1 Ω -stability conjecture, IHES Publ. Math., 66 (1988), p.211-215.
92. *Palis J.* On Morse-Smale dynamical systems, Topology 8(1969), p.385-404.
93. *Pilugin S. Yu.* The Space of Dynamical Systems with C^0 Topology, Lecture Notes in Math., 1571, Springer-Verlag, N.Y., 1994.
94. *Poincare H.* Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique, Acta Math. 13, 1890, p.1-271.
95. *Pugh C.* The closing lemma, Amer. J.Math., 84, no.4 (1967).
96. *Robin J.* A structural stability theorem, Annals of Math., v.94, no.3, p.447-493 (1971).
97. *Robinson C.* Structural stability of C^1 -diffeomorphism, J. Diff. Eq., v.22, no.1,1976, p.28-73.
98. *Sacker R. and Sell G.* Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I-III, J. Diff. Eq. v.15, no.3(1974), p.429-458, v.22, no.2(1976) p.476-522.
99. *Sacker R. and Sell G.* A spectral theory for linear differential systems, J. Diff. Eq., v. 27, no. 3(1978), p.320-358.
100. *Salamon D. and Zehnder E.* Flows on vector bundles and hyperbolic sets, Trans. AMS, v.306, no.2(1988), p.623-649.
101. *Selgrade J.* Isolated invariant sets for flows on vector bundles, Trans. AMS, v.203(1975), p.359-390.
102. *Sell G.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics, Trans. AMS, v.127 (1967), p.241-283.

103. *Sharkovsky A.N.* Structure theory of differentiable dynamical systems and weak nonwandering points, Abh. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math. Naturwiss. Techn., v.4 (1977), p.193-200.
104. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points, in Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ., 1965, p.63-80.
105. *Smale S.* Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73, 1967.
106. *Smale S.* The Ω -stability theorem, in Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., v. XIV, AMS, 1970.
107. *Shub M.* Stabilite globale de systems denamiques, Asterisque, v. 56(1978), p.1-21.
108. *Whitney H.* Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets, Trans.AMS 36(1934), p.63-89.