Matemática

1) Conjunto dos números reais, seus subconjuntos, relação de inclusão e intervalos.
2) Funções: noção, domínio, imagem, representação gráfica.
3) Função afim, casos particulares da função afim, função afim crescente e decrescente, estudo do sinal da função afim, inequações, função linear e proporcionalidade.
4) Função quadrática: definição, representação gráfica, raízes, coordenadas do vértice, estudo do sinal, inequações do 2º grau, taxa de variação da função quadrática.
5) Função Exponencial, equações e inequações exponenciais.
6) Função logarítmica: Definição e consequências da definição de logaritmo. Propriedades operatórias dos logaritmos, Mudança de base e cálculo de logaritmos, Função logarítmica, equações e
inequações logarítmicas.
7) Progressões aritméticas e geométricas. Fórmula do termo geral de uma PA e de uma PG. Soma dos termos de uma PA e de uma PG.
8) Geometria plana: Semelhança de triângulos. Teorema de Tales. Relações métricas no triângulo retângulo. Área e perímetro de figuras planas. Área de um polígono regular Comprimento da circunferência e área do círculo.
9) Geometria Espacial: Volume de figuras geométricas tridimensionais. Área da superfície de figuras geométricas tridimensionais
10) Trigonometria: relações que envolvem seno, cosseno e tangente de ângulos agudos.
11) Matrizes e determinantes.
12) Análise combinatória: Princípio da multiplicação ou fundamental da contagem. Permutações simples e fatorial de um número. Arranjos e combinações simples.
13) Noções de Matemática Financeira: Números proporcionais, porcentagem, termos importantes da Matemática financeira (taxa, tempo, montante, capital ,etc.) Juros simples, juros compostos.
14) Probabilidade: Experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade em espaços amostrais equiprováveis, probabilidade da união de dois eventos, probabilidade condicional, probabilidade de
dois eventos simultâneos (ou sucessivos).

TEORIA DOS CONJUNTOS

CONJUNTO

Em matemática, um **conjunto** é uma coleção de elementos. Não interessa a ordem e quantas vezes os elementos estão listados na coleção. Em contraste, uma coleção de elementos na qual a multiplicidade, mas não a ordem, é relevante, é chamada multiconjunto.

Conjuntos são um dos conceitos básicos da matemática. Um conjunto é apenas uma coleção de entidades, chamadas de **elementos**. A notação padrão lista os elementos separados por vírgulas entre chaves (o uso de "parênteses" ou "colchetes" é incomum) como os seguintes exemplos:

{1, 2, 3}

{1, 2, 2, 1, 3, 2}

{*x* : *x* é um número inteiro tal que 0<x<4}

Os três exemplos acima são maneiras diferentes de representar o mesmo conjunto.

É possível descrever o mesmo conjunto de diferentes maneiras: listando os seus elementos (ideal para conjuntos pequenos e finitos) ou definindo uma propriedade de seus elementos. Dizemos que dois conjuntos são iguais se e somente se cada elemento de um é também elemento do outro, não importando a quantidade e nem a ordem das ocorrências dos elementos.

Conceitos essenciais

- **Conjunto**: representa uma coleção de objetos, geralmente representado por letras *maiúsculas*;

- **Elemento**: qualquer um dos componentes de um conjunto, geralmente representado por letras *minúsculas*;

- **Pertinência**: é a característica associada a um elemento que faz parte de um conjunto;

Pertence ou não pertence

Se a é um elemento de A, nós podemos dizer que o elemento a pertence ao conjunto A e podemos escrever $a \in A$. Se a **não** é um elemento de A, nós podemos dizer que o elemento a **não** pertence ao conjunto A e podemos escrever $a \notin A$.

1. Conceitos primitivos

Antes de mais nada devemos saber que conceitos primitivos são noções que adotamos sem definição.

Adotaremos aqui três conceitos primitivos: o de conjunto, o de elemento e o de pertinência de um elemento a um conjunto. Assim, devemos entender perfeitamente a frase*: determinado elemento pertence a um conjunto,* sem que tenhamos definido o que é conjunto, o que é elemento e o que significa dizer que um elemento pertence ou não a um conjunto.

2 Notação

Normalmente adotamos, na teoria dos conjuntos, a seguinte notação:

- os conjuntos são indicados por letras maiúsculas: A, B, C, ... ;
- os elementos são indicados por letras minúsculas: a, b, c, x, y, ... ;
- o fato de um elemento x pertencer a um conjunto C é indicado com $x \in C$;

• o fato de um elemento y não pertencer a um conjunto C é indicado $y \notin C$.

3. Representação dos conjuntos

Um conjunto pode ser representado de três maneiras:

- por enumeração de seus elementos;
- por descrição de uma propriedade característica do conjunto;
- através de uma representação gráfica.

Um conjunto é representado por enumeração quando todos os seus elementos são indicados e colocados dentro de um par de chaves.

Exemplo:

a) A = (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9) indica o conjunto formado pelos algarismos do nosso sistema de numeração.
b) B = (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, z) indica o conjunto formado pelas letras do nosso alfabeto.
c) Quando um conjunto possui número elevado de elementos, porém apresenta lei de formação bem clara, podemos representa-lo, por enumeração, indicando os primeiros e os últimos elementos, intercalados por reticências. Assim: C = (2; 4; 6;... ; 98) indica o conjunto dos números pares positivos, menores do que100.
d) Ainda usando reticências, podemos representar, por enumeração, conjuntos com infinitas elementos que tenham uma lei de formação bem clara, como os seguintes:

D = (0; 1; 2; 3; .. .) indica o conjunto dos números inteiros não negativos;
E = (... ; -2; -1; 0; 1; 2; . ..) indica o conjunto dos números inteiros;
F = (1; 3; 5; 7; . . .) indica o conjunto dos números ímpares positivos.

A representação de um conjunto por meio da descrição de uma propriedade característica é mais sintética que sua representação por enumeração. Neste caso, um conjunto C, de elementos x, será representado da seguinte maneira:

C = { x | x possui uma determinada propriedade }

que se lê: C é o conjunto dos elementos x tal que possui uma determinada propriedade:

Exemplos

O conjunto A = { 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 } pode ser representado por descrição da seguinte maneira: A = { x | x é algarismo do nosso sistema de numeração }

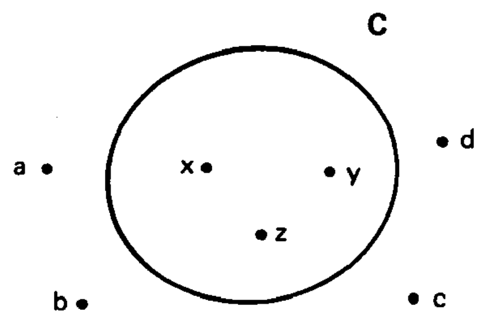
O conjunto G = { a; e; i; o, u } pode ser representado por descrição da seguinte maneira G = { x | x é vogal do nosso alfabeto }

O conjunto H = { 2; 4; 6; 8; . . . } pode ser representado por descrição da seguinte maneira:

H = { x | x é par positivo }

A representação gráfica de um conjunto é bastante cômoda. Através dela, os elementos de um conjunto são representados por pontos interiores a uma linha fechada que não se entrelaça. Os pontos exteriores a esta linha representam os elementos que não pertencem ao conjunto.

Exemplo



Por esse tipo de representação gráfica, chamada diagrama de Euler-Venn, percebemos que $x \in C$, $y \in C$, $z \in C$; e que $a \notin C$, $b \notin C$, $c \notin C$, $d \notin C$.

4 Número de elementos de um conjunto

Consideremos um conjunto C. Chamamos de número de elementos deste conjunto, e indicamos com n(C), ao número de elementos diferentes entre si, que pertencem ao conjunto.
Exemplos

a) O conjunto A = { a; e; i; o; u } é tal que n(A) = 5.
b) O conjunto B = { 0; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 } é tal que n(B) = 10.
c) O conjunto C = (1; 2; 3; 4;... ; 99) é tal que n (C) = 99.

5 Conjunto unitário e conjunto vazio

Chamamos de conjunto unitário a todo conjunto C, tal que n (C) = 1.

Exemplo: C = (3)

E chamamos de conjunto vazio a todo conjunto c, tal que n(C) = 0.

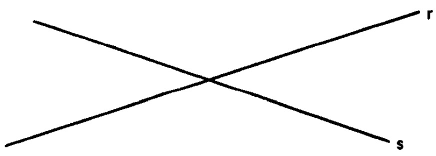
Exemplo: M = { x | $x^2 = -25$}

O conjunto vazio é representado por { } ou por $\varnothing$.

Exercício resolvido

Determine o número de elementos dos seguintes com juntos :

a) A = { x | x é letra da palavra *amor* }
b) B = { x | x é letra da palavra *alegria* }
c) c é o conjunto esquematizado a seguir
d) D = (2; 4; 6; . . . ; 98)
e) E é o conjunto dos pontos comuns às relas r e s, esquematizadas a seguir :



Resolução

a) n(A) = 4
b) n(B) = 6,'pois a palavra alegria, apesar de possuir dote letras, possui apenas seis letras distintas entre si.
c) n(C) = 2, pois há dois elementos que pertencem a C: c e C e d e C
d) observe que:
2 = 2 . 1 é o 1º par positivo
4 = 2 . 2 é o 2° par positivo
6 = 2 . 3 é o 3º par positivo
8 = 2 . 4 é o 4º par positivo
. .
. .
. .
98 = 2 . 49 é o 49º par positivo

logo: n(D) = 49

e) As duas retas, esquematizadas na figura, possuem apenas um ponto comum.
Logo, n(E) = 1, e o conjunto E é, portanto, unitário.

6 igualdade de conjuntos

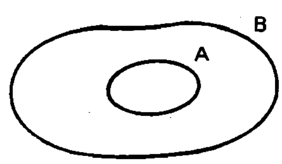
Vamos dizer que dois conjuntos A e 8 são iguais, e indicaremos com A = 8, se ambos possuírem os mesmos elementos. Quando isto não ocorrer, diremos que os conjuntos são diferentes e indicaremos com A $\neq$ B. Exemplos .

a) {a;e;i;o;u} = {a;e;i;o;u}
b) {a;e;i;o,u} = {i;u;o,e;a}
c) {a;e;i;o;u} = {a;a;e;i;i;i;o;u;u}
d) {a;e;i;o;u} $\neq$ {a;e;i;o}
e) { x | x^2 = 100} = {10; -10}
f) { x | x^2 = 400} $\neq$ {20}

7 Subconjuntos de um conjunto

Dizemos que um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B se todo elemento, que pertencer a A, também pertencer a B.

Neste caso, usando os diagramas de Euler-Venn, o conjunto A estará "totalmente dentro" do conjunto B :



Indicamos que A é um subconjunto de B de duas maneiras:

a) A $\subset$ B; que deve ser lido : A é subconjunto de B ou A está contido em B ou A é parte de B;
b) B $\supset$ A; que deve ser lido: B contém A ou B inclui A.

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {x | x é mineiro} e B = { x | x é brasileiro} ; temos então que A $\subset$ B e que B $\supset$ A.

Observações:

- Quando A não é subconjunto de B, indicamos com A $\not\subset$ B ou B $\not\supset$ A.
- Admitiremos que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

8 Número de subconjuntos de um conjunto dado

Pode-se mostrar que, se um conjunto possui n elementos, então este conjunto terá 2^n subconjuntos.
Exemplo

O conjunto C = {1; 2 } possui dois elementos; logo, ele terá 2^2 = 4 subconjuntos.

Exercício resolvido:

1. Determine o número de subconjuntos do conjunto C = (a; e; i; o; u) .

Resolução: Como o conjunto C possui cinco elementos, o número dos seus subconjuntos será 2^5 = 32.

Exercícios propostas:

2. Determine o número de subconjuntos do conjunto C = { 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 }

Resposta: 1024

3. Determine o número de subconjuntos do conjunto

$$C = \left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{2}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{5}\right\}$$

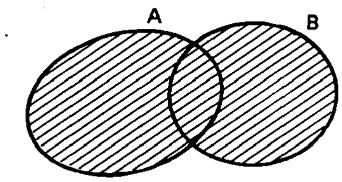
Resposta: 32

B) OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

1 União de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chamamos união ou reunião de A com B, e indicamos com A $\cap$ B, ao conjunto constituído por todos os elementos que pertencem a A ou a B.

Usando os diagramas de Euler-Venn, e representando com hachuras a interseção dos conjuntos, temos:



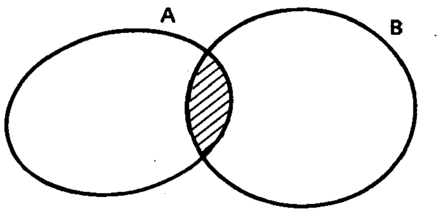
Exemplos

a) {a;b;c} U {d;e}= {a;b;c;d;e}
b) {a;b;c} U {b;c;d}={a;b;c;d}
c) {a;b;c} U {a;c}={a;b;c}

2 Intersecção de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chamamos de interseção de A com B, e indicamos com A $\cap$ B, ao conjunto constituído por todos os elementos que pertencem a A e a B.

Usando os diagramas de Euler-Venn, e representando com hachuras a intersecção dos conjuntos, temos:



Exemplos
a) {a;b;c} $\cap$ {d;e} = $\varnothing$
b) {a;b;c} $\cap$ {b;c,d} = {b;c}
c) {a;b;c} $\cap$ {a;c} = {a;c}

Quando a intersecção de dois conjuntos é vazia, como no exemplo a, dizemos que os conjuntos são disjuntos.

Exercícios resolvidos

1. Sendo A = (x; y; z); B = (x; w; v) e C = (y; u; t), determinar os seguintes conjuntos:

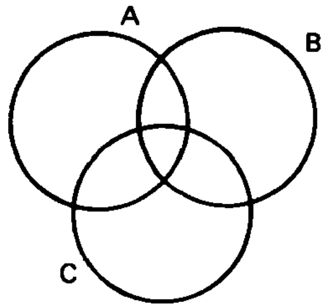
a) A $\cup$ B
b) A $\cap$ B
c) A $\cup$ C
d) A $\cap$ C
e) B $\cup$ C
f) B $\cap$ C
g) A $\cup$ B $\cup$ C
h) A $\cap$ B $\cap$ C
i) (A $\cap$ B) U (A $\cap$ C)

Resolução

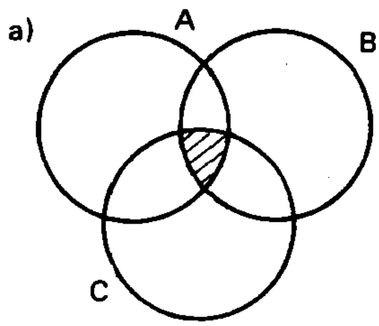
a) A $\cup$ B = {x; y; z; w; v }
b) A $\cap$ B = {x }
c) A $\cup$ C = {x; y;z; u; t }
d) A $\cap$ C = {y }
e) B $\cup$ C={x;w;v;y;u;t}
f) B $\cap$ C= $\varnothing$
g) A $\cup$ B $\cup$ C= {x;y;z;w;v;u;t}
h) A $\cap$ B $\cap$ C= $\varnothing$
i) (A $\cap$ B) $\cup$u (A $\cap$ C)={x} $\cup$ {y}={x;y}

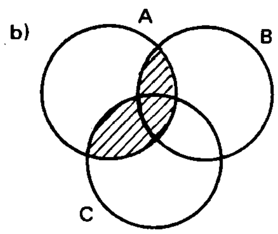
2. Dado o diagrama seguinte, represente com hachuras os conjuntos: :

a) A $\cap$ B $\cap$ C
b) (A $\cap$ B) $\cup$ (A $\cap$ C)



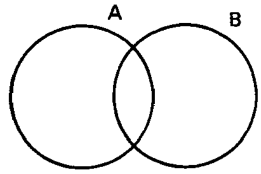
.Resolução





3. No diagrama seguinte temos:
n(A) = 20
n(B) = 30
n(A $\cap$ B) = 5

Determine n(A $\cup$ B).
Resolução



Se juntarmos, aos 20 elementos de A, os 30 elementos de B, estaremos considerando os 5 elementos de A n B duas vezes; o que, evidentemente, é incorreto; e, para corrigir este erro, devemos subtrair uma vez os 5 elementos de A n B; teremos então:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ou seja:

$n(A \cup B) = 20 + 30 – 5$ e então:

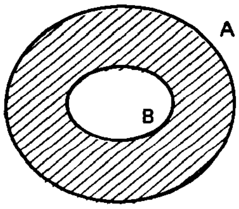
$n(A \cup B) = 45$.

4 Conjunto complementar

Dados dois conjuntos A e B, com $B \subset A$, chamamos de conjunto complementar de B em relação a A, e indicamos com $C_A B$, ao conjunto A - B.

Observação: O complementar é um caso particular de diferença em que o segundo conjunto é subconjunto do primeiro.

Usando os diagramas de Euler-Venn, e representando com hachuras o complementar de B em relação a A, temos:



Exemplo: {a;b;c;d;e;f} - {b;d;e}= {a;c;f}

Observação: O conjunto complementar de B em relação a A é formado pelos elementos que faltam para "B chegar a A"; isto é, para B se igualar a A.

Exercícios resolvidos:

4. Sendo A = { x; y; z } , B = { x; w; v } e C = { y; u; t }, determinar os seguintes conjuntos:

A – B	C - A
B – A	B – C
A – C	C – B

Resolução

a) A - B = { y; z }
b) B - A= {w;v}
c) A - C= {x;z}
d) C – A = {u;t}
e) B – C = {x;w;v}
f) C – B = {y;u;t}

Exemplos de conjuntos compostos por números

Nota: Nesta seção, *a*, *b* e *c* são números naturais, enquanto *r* e *s* são números reais.

1. Números naturais são usados para contar. O símbolo $\mathbb{N}$ usualmente representa este conjunto.

2. Números inteiros aparecem como soluções de equações como $x + a = b$. O símbolo $\mathbb{Z}$ usualmente representa este conjunto (do termo alemão *Zahlen* que significa *números*).

3. Números racionais aparecem como soluções de equações como $a + bx = c$. O símbolo $\mathbb{Q}$ usualmente representa este conjunto (da palavra quociente).

4. Números algébricos aparecem como soluções de equações polinomiais (com coeficientes inteiros) e envolvem raízes e alguns outros números irracionais. O símbolo $\mathbb{A}$ ou $\overline{\mathbb{Q}}$ usualmente representa este conjunto.

5. Números reais incluem os números algébricos e os números transcendentais. O símbolo $\mathbb{R}$ usualmente representa este conjunto.

6. Números imaginários aparecem como soluções de equações como $x^2 + r = 0$ onde $r > 0$. O símbolo $\mathbb{I}$ usualmente representa este conjunto.

7. Números complexos é a soma dos números reais e dos imaginários: $r + si$. Aqui tanto *r* quanto *s* podem ser iguais a zero; então os conjuntos dos números reais e o dos imaginários são subconjuntos do conjunto dos números complexos. O símbolo $\mathbb{C}$ usualmente representa este conjunto.

NÚMEROS NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS, IRRACIONAIS E REAIS.

Conjuntos numéricos podem ser representados de diversas formas. A forma mais simples é dar um nome ao conjunto e expor todos os seus elementos, um ao lado do outro, entre os sinais de chaves. Veja o exemplo abaixo:

A = {51, 27, -3}

Esse conjunto se chama "A" e possui três termos, que estão listados entre chaves.

Os nomes dos conjuntos são sempre letras maiúsculas. Quando criamos um conjunto, podemos utilizar qualquer letra.

Vamos começar nos primórdios da matemática.

- Se eu pedisse para você contar até 10, o que você me diria?

- Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez.

Pois é, estes números que saem *naturalmente* de sua boca quando solicitado, são chamados de números NATURAIS, o qual é representado pela letra $\mathbb{N}$.

Foi o primeiro conjunto inventado pelos homens, e tinha como intenção mostrar quantidades.

***Obs.:** Originalmente, o zero não estava incluído neste conjunto, mas pela necessidade de representar uma quantia nula, definiu-se este número como sendo pertencente ao conjunto dos Naturais. Portanto:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

Obs.2: Como o zero originou-se depois dos outros números e possui algumas propriedades próprias, algumas vezes teremos a necessidade de representar o conjunto dos números naturais sem incluir o zero. Para isso foi definido que o símbolo * (asterisco) empregado ao lado do símbolo do conjunto, iria representar a ausência do zero. Veja o exemplo abaixo:

N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

Estes números foram suficientes para a sociedade durante algum tempo. Com o passar dos anos, e o aumento das "trocas" de mercadorias entre os homens, foi necessário criar uma representação numérica para as dívidas.

Com isso inventou-se os chamados *"números negativos"*, e junto com estes números, um novo conjunto: o conjunto dos números inteiros, representado pela letra $\mathbb{Z}$.

O conjunto dos números inteiros é formado por todos os números NATURAIS mais todos os seus representantes negativos.

Note que este conjunto não possui início nem fim (ao contrário dos naturais, que possui um início e não possui fim).

Assim como no conjunto dos naturais, podemos representar todos os inteiros sem o ZERO com a mesma notação usada para os NATURAIS.

Z* = {..., -2, -1, 1, 2, ...}

Em algumas situações, teremos a necessidade de representar o conjunto dos números inteiros que ***NÃO SÃO NEGATIVOS***.

Para isso emprega-se o sinal "+" ao lado do símbolo do conjunto (vale a pena lembrar que esta simbologia representa os números NÃO NEGATIVOS, e não os números POSITIVOS, como muita gente diz). Veja o exemplo abaixo:

Z_+ = {0,1, 2, 3, 4, 5, ...}

Obs.1: Note que agora sim este conjunto possui um início. E você pode estar pensando "*mas o zero não é positivo*". O zero não é positivo nem negativo, zero é NULO.

Ele está contido neste conjunto, pois a simbologia do sinalzinho positivo representa todos os números *NÃO NEGATIVOS*, e o zero se enquadra nisto.

Se quisermos representar somente os positivos (ou seja, os não negativos sem o zero), escrevemos:

Z^*_+ = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

Pois assim teremos apenas os positivos, já que o zero não é positivo.

Ou também podemos representar somente os inteiros NÃO POSITIVOS com:

Z_- ={...,- 4, - 3, - 2, -1 , 0}

Obs.: Este conjunto possui final, mas não possui início.

E também os inteiros negativos (ou seja, os não positivos sem o zero):

Z^*_- ={...,- 4, - 3, - 2, -1}

Assim:

Conjunto dos Números Naturais

São todos os números inteiros positivos, incluindo o zero. É representado pela letra maiúscula N. Caso queira representar o conjunto dos números naturais não-nulos (excluindo o zero), deve-se colocar um * ao lado do N:

N = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, ...}
N* = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, ...}

Conjunto dos Números Inteiros

São todos os números que pertencem ao conjunto dos Naturais mais os seus respectivos opostos (negativos).

São representados pela letra Z:

Z = {... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

O conjunto dos inteiros possui alguns subconjuntos, eles são:

- Inteiros não negativos

São todos os números inteiros que não são negativos. Logo percebemos que este conjunto é igual ao conjunto dos números naturais.

É representado por Z_+:

Z_+ = {0,1,2,3,4,5,6, ...}

- Inteiros não positivos

São todos os números inteiros que não são positivos. É representado por Z_-:

Z_- = {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0}

- Inteiros não negativos e não-nulos

É o conjunto Z_+ excluindo o zero. Representa-se esse subconjunto por Z^*_+:

Z^*_+ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}
Z^*_+ = N*

- Inteiros não positivos e não nulos

São todos os números do conjunto Z_- excluindo o zero. Representa-se por Z^*_-.

Z^*_- = {... -4, -3, -2, -1}

Conjunto dos Números Racionais

Os números racionais é um conjunto que engloba os números inteiros (Z), números decimais finitos (por exemplo, 743,8432) e os números decimais infinitos **periódicos** (que repete uma sequência de algarismos da parte decimal infinitamente), como "12,050505...", são também conhecidas como **dízimas periódicas**.

Os racionais são representados pela letra Q.

Conjunto dos Números Irracionais

É formado pelos números decimais infinitos não-periódicos. Um bom exemplo de número irracional é o número PI (resultado da divisão do perímetro de uma circunferência pelo seu diâmetro), que vale 3,14159265 .... Atualmente, supercomputadores já conseguiram calcular bilhões de casas decimais para o PI.

Também são irracionais todas as raízes não exatas, como a raiz quadrada de 2 (1,4142135 ...)

Conjunto dos Números Reais

É formado por todos os conjuntos citados anteriormente (união do conjunto dos racionais com os irracionais).

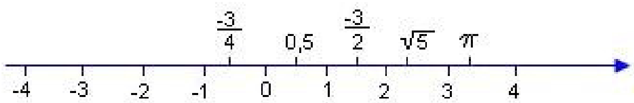
Representado pela letra R.

Representação geométrica de $\mathbb{R}$

A cada ponto de uma reta podemos associar um único número real, e a cada número real podemos associar um único ponto na reta.

Dizemos que o conjunto $\mathbb{R}$ é denso, pois entre dois números reais existem infinitos números reais (ou seja, na reta, entre dois pontos associados a dois números reais, existem infinitos pontos).

Veja a representação na reta de $\mathbb{R}$:



Fonte:
http://www.infoescola.com/matematica/conjuntos-numericos/

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS (N)

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Veja a operação: **2 + 3 = 5 .**

A operação efetuada chama-se adição e é indicada escrevendo-se o sinal + (lê-se: “mais") entre os números.

Os números 2 e 3 são chamados parcelas. 0 número 5, resultado da operação, é chamado soma.

2 → parcela
+ 3 → parcela
5 → soma

A adição de três ou mais parcelas pode ser efetuada adicionando-se o terceiro número à soma dos dois primeiros ; o quarto número à soma dos três primeiros e assim por diante.

3 + 2 + 6 =
5 + 6 = 11

Veja agora outra operação: **7 – 3 = 4**

Quando tiramos um subconjunto de um conjunto, realizamos a operação de subtração, que indicamos pelo sinal **- .**

7 → minuendo
– 3 → subtraendo
4 → resto ou diferença

0 minuendo é o conjunto maior, o subtraendo o subconjunto que se tira e o resto ou diferença o conjunto que sobra.

Somando a diferença com o subtraendo obtemos o minuendo. Dessa forma tiramos a prova da subtração.

4 + 3 = 7

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Para calcular o valor de uma expressão numérica envolvendo adição e subtração, efetuamos essas operações na ordem em que elas aparecem na expressão.

Exemplos: 35 – 18 + 13 =
17 + 13 = 30

Veja outro exemplo: 47 + 35 – 42 – 15 =
82 – 42 – 15=
40 – 15 = 25

Quando uma expressão numérica contiver os sinais de parênteses ( ), colchetes [ ] e chaves { }, procederemos do seguinte modo:

1º Efetuamos as operações indicadas dentro dos parênteses;
2º efetuamos as operações indicadas dentro dos colchetes;
3º efetuamos as operações indicadas dentro das chaves.

1) 35 +[80 – (42 + 11)] =
= 35 + [80 – 53] =
= 35 + 27 = 62

2) 18 + { 72 – [43 + (35 – 28 + 13)] } =
= 18 + { 72 – [43 + 20] } =
= 18 + { 72 – 63} =
= 18 + 9 = 27

CÁLCULO DO VALOR DESCONHECIDO

Quando pretendemos determinar um número natural em certos tipos de problemas, procedemos do seguinte modo:

- chamamos o número (desconhecido) de x ou qualquer outra incógnita (letra)
- escrevemos a igualdade correspondente
- calculamos o seu valor

Exemplos:
1) Qual o número que, adicionado a 15, é igual a 31?

Solução:
Seja x o número desconhecido. A igualdade correspondente será:
x + 15 = 31

Calculando o valor de x temos:

x + 15 = 31
x + 15 – 15 = 31 – 15
x = 31 – 15
x = 16

Na prática , quando um número passa de um lado para outro da igualdade ele muda de sinal.

2) Subtraindo 25 de um certo número obtemos 11. Qual é esse número?

Solução:
Seja x o número desconhecido. A igualdade correspondente será:

x – 25 = 11
x = 11 + 25
x = 36

Passamos o número 25 para o outro lado da igualdade e com isso ele mudou de sinal.

3) Qual o número natural que, adicionado a 8, é igual a 20?

Solução:
x + 8 = 20
x = 20 – 8
x = 12

4) Determine o número natural do qual, subtraindo 62, obtemos 43.

Solução:
x – 62 = 43
x = 43 + 62
x = 105

Para sabermos se o problema está correto é simples, basta substituir o *x* pelo valor encontrado e realizarmos a operação. No último exemplo temos:

x = 105
105 – 62 = 43

MULTIPLICAÇÃO

Observe: **4 X 3 =12**

A operação efetuada chama-se multiplicação e é indicada escrevendo-se um ponto ou o sinal x entre os números.

Os números 3 e 4 são chamados fatores. O número 12, resultado da operação, é chamado produto.

3 X 4 = 12

$$\begin{array}{r l} 3 & \\ \underline{\times\ 4} & \text{fatores} \\ 12 & \text{produto} \end{array}$$

Por convenção, dizemos que a multiplicação de qualquer número por 1 é igual ao próprio número.

A multiplicação de qualquer número por 0 é igual a 0.

A multiplicação de três ou mais fatores pode ser efetuada multiplicando-se o terceiro número pelo produto dos dois primeiros; o quarto numero pelo produto dos três primeiros; e assim por diante.

3 x 4 x 2 x 5 =
12 x 2 x 5
24 x 5 = 120

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Sinais de associação

O valor das expressões numéricas envolvendo as operações de adição, subtração e multiplicação é obtido do seguinte modo:

- efetuamos as multiplicações
- efetuamos as adições e subtrações, na ordem em que aparecem.

1) 3 . 4 + 5 . 8 – 2 . 9 =
=12 + 40 – 18
= 34

2) 9 . 6 – 4 . 12 + 7 . 2 =
= 54 – 48 + 14 =
= 20

Não se esqueça:

Se na expressão ocorrem sinais de parênteses colchetes e chaves, efetuamos as operações na ordem em que aparecem:

1º) as que estão dentro dos parênteses
2º) as que estão dentro dos colchetes
3º) as que estão dentro das chaves.

Exemplo:
22 + {12 +[(6 . 8 + 4 . 9) – 3 . 7] – 8 . 9 }
= 22 + { 12 + [(48 + 36) – 21] – 72 } =
= 22 + { 12 + [84 – 21] – 72 } =
= 22 + { 12 + 63 – 72 } =
= 22 + 3 =
= 25

DIVISÃO

Observe a operação: **30 : 6 = 5**

Também podemos representar a divisão das seguintes maneiras:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 6 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{30}{6} = 5$$

O dividendo (D) é o número de elementos do conjunto que dividimos o divisor (d) é o número de elementos do subconjunto pelo qual dividimos o dividendo e o quociente (c) é o número de subconjuntos obtidos com a divisão.

Essa divisão é exata e é considerada a operação inversa da multiplicação.

SE 30 : 6 = 5, ENTÃO 5 x 6 = 30

observe agora esta outra divisão:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 6 \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array}$$

32 = dividendo
6 = divisor
5 = quociente
2 = resto

Essa divisão não é exata e é chamada divisão aproximada.

ATENÇÃO:
1) Na divisão de números naturais, o quociente é sempre menor ou igual ao dividendo.
2) O resto é sempre menor que o divisor.
3) O resto não pode ser igual ou maior que o divisor.
4) O resto é sempre da mesma espécie do dividendo. Exemplo: dividindo-se laranjas por certo número, o resto será laranjas.
5) É impossível dividir um número por 0 (zero), porque não existe um número que multiplicado por 0 dê o quociente da divisão.

PROBLEMAS

1) Determine um número natural que, multiplicado por 17, resulte 238.
X . 17 = 238
X = 238 : 17
X = 14
Prova: 14 . 17 = 238

2) Determine um número natural que, dividido por 62, resulte 49.
x : 62 = 49
x = 49 . 62
x = 3038

3) Determine um número natural que, adicionado a 15, dê como resultado 32
x + 15 = 32
x = 32 – 15
x =17

4) Quanto devemos adicionar a 112, a fim de obtermos 186?
x + 112 = 186
x = 186 – 112
x = 74

5) Quanto devemos subtrair de 134 para obtermos 81?
134 – x = 81
– x = 81 – 134
– x = – 53 (multiplicando por –1)
x = 53
Prova: 134 – 53 = 81

6) Ricardo pensou em um número natural, adicionou-lhe 35, subtraiu 18 e obteve 40 no resultado. Qual o número pensado?
x + 35 – 18 = 40
x= 40 – 35 + 18
x = 23
Prova: 23 + 35 – 18 = 40

7) Adicionando 1 ao dobro de certo número obtemos 7. Qual é esse numero?
2 . x +1 = 7
2x = 7 – 1
2x = 6
x = 6 : 2
x = 3
O número procurado é 3.
Prova: 2. 3 +1 = 7

8) Subtraindo 12 do triplo de certo número obtemos 18. Determinar esse número.
3 . x -12 = 18
3 x = 18 + 12
3 x = 30
x = 30 : 3
x = 10

9) Dividindo 1736 por um número natural, encontramos 56. Qual o valor deste numero natural?
1736 : x = 56
1736 = 56 . x
56 . x = 1736
x. 56 = 1736
x = 1736 : 56
x = 31

10) O dobro de um número é igual a 30. Qual é o número?
2 . x = 30
2x = 30
x = 30 : 2
x = 15

11) O dobro de um número mais 4 é igual a 20. Qual é o número ?
2 . x + 4 = 20
2 x = 20 – 4
2 x = 16
x = 16 : 2
x = 8

12) Paulo e José têm juntos 12 lápis. Paulo tem o dobro dos lápis de José. Quantos lápis tem cada menino?
José: x
Paulo: 2x
Paulo e José: x + x + x = 12
3x = 12
x = 12 : 3
x = 4
José: 4 - Paulo: 8

13) A soma de dois números é 28. Um é o triplo do outro. Quais são esses números?
um número: x
o outro número: 3x
x + x + x + x = 28 (os dois números)
4 x = 28
x = 28 : 4
x = 7 (um número)

3x = 3 . 7 = 21 (o outro número).

Resposta: 7 e 21

14) Pedro e Marcelo possuem juntos 30 bolinhas. Marcelo tem 6 bolinhas a mais que Pedro. Quantas bolinhas tem cada um?
Pedro: x
Marcelo: x + 6
x + x + 6 = 30 (Marcelo e Pedro)
2 x + 6 = 30
2 x = 30 – 6
2 x = 24
x = 24 : 2
x = 12 (Pedro)
Marcelo: x + 6 =12 + 6 =18

EXPRESSÕES NUMÉRICAS ENVOLVENDO AS QUATRO OPERAÇÕES

Sinais de associação:

O valor das expressões numéricas envolvendo as quatro operações é obtido do seguinte modo:

- efetuamos as multiplicações e as divisões, na ordem em que aparecem;
- efetuamos as adições e as subtrações, na ordem em que aparecem;

Exemplo 1) 3 **.**15 + 36 **:** 9 =
= 45 + 4
= 49

Exemplo 2) 18 **:** 3 **.** 2 + 8 – 6 **.** 5 **:** 10 =
= 6 . 2 + 8 – 30 : 10 =
= 12 + 8 – 3 =
= 20 – 3
= 17

POTENCIAÇÃO

Considere a multiplicação: 2 **.** 2 **.** 2 em que os três fatores são todos iguais a 2.

Esse produto pode ser escrito ou indicado na forma 2^3 (lê-se: dois elevado à terceira potência), em que o 2 é o fator que se repete e o 3 corresponde à quantidade desses fatores.

Assim, escrevemos: **$2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$ (3 fatores)**

A operação realizada chama-se potenciação.
O número que se repete chama-se base.
O número que indica a quantidade de fatores iguais a base chama-se expoente.
O resultado da operação chama-se potência.

$2^3 = 8$

2 → base; 8 → potência; 3 → expoente

Observações:

1) os expoentes 2 e 3 recebem os nomes especiais de quadrado e cubo, respectivamente.

2) As potências de base 0 são iguais a zero. **$0^2 = 0 . 0 = 0$**

3) As potências de base um são iguais a um.
Exemplos: **$1^3 = 1 . 1 . 1 = 1$**
$1^5 = 1 . 1 . 1 . 1 . 1 = 1$

4) Por convenção, tem-se que:
- a potência de expoente zero é igual a 1 **($a^0 = 1$, $a \neq 0$)**
  $3^0 = 1$; $5^0 = 1$; $12^0 = 1$
- a potência de expoente um é igual à base ($a^1 = a$)
  $2^1 = 2$; $7^1 = 7$; $100^1 = 100$

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

1ª) para multiplicar potências de mesma base, conserva-se a base e adicionam-se os expoentes.
$a^m . a^n = a^{m+n}$
Exemplos: **$3^2 . 3^8 = 3^{2+8} = 3^{10}$**
$5 . 5^6 = 5^{1+6} = 5^7$

2ª) para dividir potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.
$a^m : a^n = a^{m-n}$
Exemplos:
$3^7 : 3^3 = 3^{7-3} = 3^4$
$5^{10} : 5^8 = 5^{10-8} = 5^2$

3ª) para elevar uma potência a um outro expoente, conserva-se base e multiplicam-se os expoentes.
Exemplo: **$(3^2)^4 = 3^{2 . 4} = 3^8$**

4ª) para elevar um produto a um expoente, eleva-se cada fator a esse expoente.
$(a. b)^m = a^m . b^m$

Exemplos: **$(4 . 7)^3 = 4^3 . 7^3$; $(3. 5)^2 = 3^2 . 5^2$**

RADICIAÇÃO

Suponha que desejemos determinar um número que, elevado ao quadrado, seja igual a 9. Sendo x esse número, escrevemos: **$X^2 = 9$**

De acordo com a potenciação, temos que x = 3, ou seja: **$3^2 = 9$**

A operação que se realiza para determinar esse número 3 é chamada radiciação, que é a operação inversa da potenciação.

Indica-se por:
$\sqrt[2]{9} = 3$ (lê-se: raiz quadrada de 9 é igual a 3)

Daí , escrevemos:
$\sqrt[2]{9} = 3 \Leftrightarrow 3^2 = 9$

Na expressão acima, temos que:
- o símbolo chama-se sinal da raiz
- o número 2 chama-se índice
- o número 9 chama-se radicando
- o número 3 chama-se raiz,
- o símbolo $\sqrt[2]{9}$ chama-se radical

As raízes recebem denominações de acordo com o índice. Por exemplo:

$\sqrt[2]{36}$ raiz quadrada de 36
$\sqrt[3]{125}$ raiz cúbica de 125
$\sqrt[4]{81}$ raiz quarta de 81
$\sqrt[5]{32}$ raiz quinta de 32 e assim por diante

No caso da raiz quadrada, convencionou-se não escrever o índice 2.

Exemplo : $\sqrt[2]{49} = \sqrt{49} = 7$, pois $7^2 = 49$

EXERCÍCIOS

01) Calcule:

a) 10 – 10 : 5 =	b) 45 : 9 + 6 =
c) 20 + 40 : 10 =	d) 9. 7 – 3 =
e) 30 : 5 + 5 =	f) 6 . 15 – 56 : 4 =
g) 63 : 9 . 2 – 2 =	h) 56 – 34 : 17 . 19 =
i) 3 . 15 : 9 + 54 :18 =	j) 24 –12 : 4+1. 0 =

Respostas:

a) 8	b) 11
c) 24	d) 60
e) 11	f) 76
g) 12	h) 18
i) 8	j) 21

02) Calcule o valor das expressões:
a) $2^3 + 3^2 =$
b) $3 . 5^2 – 7^2 =$
c) $2 . 3^3 – 4. 2^3 =$
d) $5^3 – 3 . 6^2 + 2^2 – 1 =$
e) $(2 + 3)^2 + 2 . 3^4 – 15^2 : 5 =$
f) $1 + 7^2 – 3 . 2^4 + (12 : 4)^2 =$

Respostas:

a) 17	b) 26
c) 22	d) 20
e) 142	f) 11

03) Uma indústria de automóveis produz, por dia, 1270 unidades. Se cada veículo comporta 5 pneus, quantos pneus serão utilizados ao final de 30 dias? (Resposta: 190.500)

04) Numa divisão, o divisor é 9,o quociente é 12 e o resto é 5. Qual é o dividendo? (113)

05) Numa divisão, o dividendo é 227, o divisor é 15 e o resto é 2. Qual é o quociente? (15)

06) Numa divisão, o dividendo é 320, o quociente é 45 e o resto é 5. Qual é o divisor? (7)

07) Num divisão, o dividendo é 625, o divisor é 25 e o quociente é 25. Qual ê o resto? (0)

08) Numa chácara havia galinhas e cabras em igual quantidade. Sabendo-se que o total de pés desses animais era 90, qual o número de galinhas? Resposta: 15 (2 pés + 4 pés = 6 pés ; 90 : 6 = 15).

09) O dobro de um número adicionado a 3 é igual a 13. Calcule o número.(5)

10) Subtraindo 12 do quádruplo de um número obtemos 60. Qual é esse número (Resp: 18)

11) Num joguinho de "pega-varetas", André e Renato fizeram 235 pontos no total. Renato fez 51 pontos a mais que André. Quantos pontos fez cada um? (André-92 e Renato-143)

12) Subtraindo 15 do triplo de um número obtemos 39. Qual é o número? (18)

13) Distribuo 50 balas, em iguais quantidades, a 3 amigos. No final sobraram 2. Quantas balas coube a cada um? (16)

14) A diferença entre dois números naturais é zero e a sua soma é 30. Quais são esses números? (15)

15) Um aluno ganha 5 pontos por exercício que acerta e perde 3 pontos por exercício que erra. Ao final de 50 exercícios tinha 130 pontos. Quantos exercícios acertou? (35)

16) Um edifício tem 15 andares; cada andar, 30 salas; cada sala, 3 mesas; cada mesa, 2 gavetas; cada gaveta, 1 chave. Quantas chaves diferentes serão necessárias para abrir todas as gavetas? (2700).

17) Se eu tivesse 3 dúzias de balas a mais do que tenho, daria 5 e ficaria com 100. Quantas balas tenho realmente? (69)

18) A soma de dois números é 428 e a diferença entre eles é 34. Qual é o número maior? (231)

19) Pensei num número e juntei a ele 5, obtendo 31. Qual é o número? (26)

20) Qual o número que multiplicado por 7 resulta 56? (8)

21) O dobro das balas que possuo mais 10 é 36. Quantas balas possuo? (13).

22) Raul e Luís pescaram 18 peixinhos. Raul pescou o dobro de Luís. Quanto pescou cada um? (Raul-12 e Luís-6)

PROBLEMAS

Vamos calcular o valor de x nos mais diversos casos:

1) x + 4 = 10

Obtêm-se o valor de x, aplicando a operação inversa da adição:

x = 10 – 4
x = 6

2) 5x = 20

Aplicando a operação inversa da multiplicação, temos:

x = 20 : 5
x = 4

3) x – 5 = 10
Obtêm-se o valor de x, aplicando a operação inversa da subtração:

x = 10 + 5
x =15

4) x : 2 = 4
Aplicando a operação inversa da divisão, temos:

x = 4 . 2
x = 8

COMO ACHAR O VALOR DESCONHECIDO EM UM PROBLEMA

Usando a letra x para representar um número, podemos expressar, em linguagem matemática, fatos e sentenças da linguagem corrente referentes a esse número, observe:

- duas vezes o número 2 . x
- o número mais 2 x + 2
- a metade do número $\frac{x}{2}$
- a soma do dobro com a metade do número $2 \cdot x + \frac{x}{2}$
- a quarta parte do número $\frac{x}{4}$

PROBLEMA 1
Vera e Paula têm juntas R$ 1.080,00. Vera tem o triplo do que tem Paula. Quanto tem cada uma?
Solução:

x + 3x = 1080
4x= 1080
x =1080 : 4
x= 270
3 . 270 = 810

Resposta: Vera – R$ 810,00 e Paula – R$ 270,00

PROBLEMA 2
Paulo foi comprar um computador e uma bicicleta. Pagou por tudo R$ 5.600,00. Quanto custou cada um, sabendo-se que a computador é seis vezes mais caro que a bicicleta?
Solução:

x + 6x = 5600
7x = 5600
x = 5600 : 7
x = 800
6 . 800= 4800

R: computador – R$ 4.800,00 e bicicleta R$ 800,00

PROBLEMA 3
Repartir 21 cadernos entre José e suas duas irmãs, de modo que cada menina receba o triplo do que recebe José. Quantos cadernos receberá José?
Solução:

x + 3x + 3x = 21
7x = 21
x = 21 : 7
x = 3

Resposta: 3 cadernos

PROBLEMA 4
Repartir R$ 2.100,00 entre três irmãos de modo que o 2º receba o dobro do que recebe o 1º , e o 3º o dobro do que recebe o 2º. Quanto receberá cada um?
Solução:

x + 2x + 4x = 2100
7x = 2100
x = 2100 : 7
x = 300

300 . 2 = 600
300 . 4 =1200
Resposta: R$ 300,00; R$ 600,00; R$ 1200,00

PROBLEMA 5
A soma das idades de duas pessoas é 40 anos. A idade de uma é o triplo da idade da outra. Qual a idade de cada uma?
Solução:

3x + x = 40
4x = 40
x = 40 : 4
x = 10
3 . 10 = 30

Resposta: 10 e 30 anos.

PROBLEMA 6
A soma das nossas idades é 45 anos. Eu sou 5 anos mais velho que você. Quantos anos eu tenho?

x + x + 5 = 45
x + x= 45 – 5
2x = 40
x = 20

20 + 5 = 25
Resposta: 25 anos

PROBLEMA 7
Sua bola custou R$ 10,00 menos que a minha. Quanto pagamos por elas, se ambas custaram R$ 150,00?
Solução:

x + x – 10= 150
2x = 150 + 10
2x = 160
x = 160 : 2
x = 80

80 – 10 = 70
Resposta: R$ 70,00 e R$ 80,00

PROBLEMA 8
José tem o dobro do que tem Sérgio, e Paulo tanto quanto os dois anteriores juntos. Quanto tem cada um, se os três juntos possuem R$ 624,00?
Solução: **x + 2x + x + 2x = 624**

6x = 624
x = 624 : 6
x = 104

Resposta:S-R$ 104,00; J-R$ 208,00; P- R$ 312,00

PROBLEMA 9

Se eu tivesse 4 rosas a mais do que tenho, poderia dar a você 7 rosas e ainda ficaria com 2. Quantas rosas tenho?

Solução: **x + 4 – 7 = 2**
x + 4 = 7 + 2
x + 4 = 9
x = 9 – 4
x = 5

Resposta: 5

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS (Z)

Conhecemos o conjunto N dos números naturais: **N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...,}**

Assim, os números precedidos do sinal **+** chamam-se positivos, e os precedidos de **-** são negativos.

Exemplos:
Números inteiros positivos: **{+1, +2, +3, +4, ...}**
Números inteiros negativos: **{-1, -2, -3, -4, ...}**

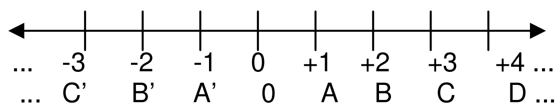
O conjunto dos números inteiros relativos é formado pelos números inteiros positivos, pelo zero e pelos números inteiros negativos. Também o chamamos de CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS e o representamos pela letra Z, isto é: **Z = {..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ... }**

O zero não é um número positivo nem negativo. Todo número positivo é escrito sem o seu sinal positivo.

Exemplo: **+ 3 = 3 ; +10 = 10**
Então, podemos escrever: **Z = {..., -3, -2, -1, 0 , 1, 2, 3, ...}**

N é um subconjunto de Z.

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA
Cada número inteiro pode ser representado por um ponto sobre uma reta. Por exemplo:



Ao ponto zero, chamamos origem, corresponde o número zero.

Nas representações geométricas, temos à direita do zero os números inteiros positivos, e à esquerda do zero, os números inteiros negativos.

Observando a figura anterior, vemos que cada ponto é a representação geométrica de um número inteiro.

Exemplos:
- ponto C é a representação geométrica do número +3
- ponto B' é a representação geométrica do número -2

ADIÇÃO DE DOIS NÚMEROS INTEIROS
1) A soma de zero com um número inteiro é o próprio número inteiro: **0 + (-2) = -2**
2) A soma de dois números inteiros positivos é um número inteiro positivo igual à soma dos módulos dos números dados: **(+700) + (+200) = +900**
3) A soma de dois números inteiros negativos é um número inteiro negativo igual à soma dos módulos dos números dados: **(-2) + (-4) = -6**
4) A soma de dois números inteiros de sinais contrários é igual à diferença dos módulos, e o sinal é o da parcela de maior módulo: **(-800) + (+300) = -500**

ADIÇÃO DE TRÊS OU MAIS NÚMEROS INTEIROS
A soma de três ou mais números inteiros é efetuada adicionando-se todos os números positivos e todos os negativos e, em seguida, efetuando-se a soma do número negativo.

Exemplos: **1) (+6) + (+3) + (-6) + (-5) + (+8) =**
(+17) + (-11) = +6

2) (+3) + (-4) + (+2) + (-8) =
(+5) + (-12) = -7

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO
A adição de números inteiros possui as seguintes propriedades:

1ª) FECHAMENTO
A soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro: **(-3) + (+6) = + 3 ∈ Z**

2ª) ASSOCIATIVA
Se a, b, c são números inteiros quaisquer, então: **a + (b + c) = (a + b) + c**

Exemplo:**(+3) +[(-4) + (+2)] = [(+3) + (-4)] + (+2)**
(+3) + (-2) = (-1) + (+2)
+1 = +1

3ª) ELEMENTO NEUTRO
Se a é um número inteiro qualquer, temos: **a+ 0 = a e 0 + a = a**

Isto significa que o zero é elemento neutro para a adição.

Exemplo: **(+2) + 0 = +2 e 0 + (+2) = +2**

4ª) OPOSTO OU SIMÉTRICO
Se a é um número inteiro qualquer, existe um único número oposto ou simétrico representado por (-a), tal que: **(+a) + (-a) = 0 = (-a) + (+a)**

Exemplos: **(+5) + (-5) = 0 (-5) + (+5) = 0**

5ª) COMUTATIVA
Se a e b são números inteiros, então:
a + b = b + a

Exemplo**: (+4) + (-6) = (-6) + (+4)**
-2 = -2

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Em certo local, a temperatura passou de -3ºC para 5ºC, sofrendo, portanto, um aumento de 8ºC, aumento esse que pode ser representado por: **(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = +8**

Portanto:

A diferença entre dois números dados numa certa ordem é a soma do primeiro com o oposto do segundo.

Exemplos: **1) (+6) - (+2) = (+6) + (-2) = +4**
2) (-8) - (-1) = (-8) + (+1) = -7
3) (-5) - (+2) = (-5) + (-2) = -7

Na prática, efetuamos diretamente a subtração, eliminando os parênteses

- (+4) = -4
- (-4) = +4

Observação:

Permitindo a eliminação dos parênteses, os sinais podem ser resumidos do seguinte modo:

(+) = + **+ (-) = -**
- (+) = - **- (-) = +**

Exemplos: **- (-2) = +2** **+(-6) = -6**
- (+3) = -3 **+(+1) = +1**

PROPRIEDADE DA SUBTRAÇÃO

A subtração possui uma propriedade.

FECHAMENTO: A diferença de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

1º CASO: OS DOIS FATORES SÃO NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS

Lembremos que: **3 . 2 = 2 + 2 + 2 = 6**

Exemplo:

(+3) . (+2) = 3 . (+2) = (+2) + (+2) + (+2) = +6

Logo: **(+3) . (+2) = +6**

Observando essa igualdade, concluímos: na multiplicação de números inteiros, temos:

(+) . (+) =+

2º CASO: UM FATOR É POSITIVO E O OUTRO É NEGATIVO

Exemplos:

1) (+3) . (-4) = 3 . (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12

ou seja: **(+3) . (-4) = -12**

2) Lembremos que: -(+2) = -2

(-3) . (+5) = - (+3) . (+5) = -(+15) = - 15

ou seja: **(-3) . (+5) = -15**

Conclusão: na multiplicação de números inteiros, temos: **(+) . (-) = -** **(-) . (+) = -**

Exemplos :

(+5) . (-10) = -50
(+1) . (-8) = -8
(-2) . (+6) = -12
(-7) . (+1) = -7

3º CASO: OS DOIS FATORES SÃO NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

Exemplo: **(-3) . (-6) = -(+3) . (-6) = -(-18) = +18**

isto é: **(-3) . (-6) = +18**

Conclusão: na multiplicação de números inteiros, temos: **(-) . (-) = +**

Exemplos: **(-4) . (-2) = +8** **(-5) . (-4) = +20**

As regras dos sinais anteriormente vistas podem ser resumidas na seguinte:

(+) . (+) = + **(+) . (-) = -**
(-) . (-) = + **(-) . (+) = -**

Quando um dos fatores é o 0 (zero), o produto é igual a 0: **(+5) . 0 = 0**

PRODUTO DE TRÊS OU MAIS NÚMEROS INTEIROS

Exemplos: 1) **(+5) . (-4) . (-2) . (+3) =**
(-20) . (-2) . (+3) =
(+40) . (+3) = +120

2) **(-2) . (-1) . (+3) . (-2) =**
(+2) . (+3) . (-2) =
(+6) . (-2) = -12

Podemos concluir que:

- Quando o número de fatores negativos é par, o produto sempre é positivo.
- Quando o número de fatores negativos é ímpar, o produto sempre é negativo.

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

No conjunto Z dos números inteiros são válidas as seguintes propriedades:

1ª) FECHAMENTO

Exemplo: **(+4) . (-2) = - 8 ∈ Z**

Então o produto de dois números inteiros é inteiro.

2ª) ASSOCIATIVA

Exemplo: **(+2) . (-3) . (+4)**

Este cálculo pode ser feito diretamente, mas também podemos fazê-lo, agrupando os fatores de duas maneiras:

(+2) . [(-3) . (+4)] = [(+2) . (-3)]. (+4)
(+2) . (-12) = (-6) . (+4)
-24 = -24

De modo geral, temos o seguinte:

Se a, b, c representam números inteiros quaisquer, então: **a . (b . c) = (a . b) . c**

3ª) ELEMENTO NEUTRO

Observe que:

(+4) . (+1) = +4 e (+1) . (+4) = +4

Qualquer que seja o número inteiro a, temos:

a . (+1) = a e (+1) . a = a

O número inteiro +1 chama-se neutro para a multiplicação.

4ª) COMUTATIVA

Observemos que: (+2). (-4) = - 8

e (-4) . (+2) = - 8

Portanto: **(+2) . (-4) = (-4) . (+2)**

Se a e b são números inteiros quaisquer, então: **a . b = b . a,** isto é, a ordem dos fatores não altera o produto.

5ª) DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À ADIÇÃO E À SUBTRAÇÃO

Observe os exemplos:

(+3) . [(-5) + (+2)] = (+3) . (-5) + (+3) . (+2)

(+4) . [(-2) - (+8)] = (+4) . (-2) - (+4) . (+8)

Conclusão:

Se a, b, c representam números inteiros quaisquer, temos:

a) **a . [b + c] = a . b + a . c**
   A igualdade acima é conhecida como propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
b) **a . [b – c] = a . b - a . c**
   A igualdade acima é conhecida como propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

CONCEITO

Dividir (+16) por 2 é achar um número que, multiplicado por 2, dê 16.

16 : 2 = ? ⇔ 2 . (?) = 16

O número procurado é **8**. Analogamente, temos:

1) (+12) : (+3) = +4 porque (+4) . (+3) = +12
2) (+12) : (-3) = - 4 porque (- 4) . (-3) = +12
3) (-12) : (+3) = - 4 porque (- 4) . (+3) = -12
4) (-12) : (-3) = +4 porque (+4) . (-3) = -12

A divisão de números inteiros só pode ser realizada quando o quociente é um número inteiro, ou seja, quando o dividendo é múltiplo do divisor.

Portanto, o quociente deve ser um número inteiro.

Exemplos:

(-8) **:** (+2) = -4

(-4) **:** (+3) = não é um número inteiro

Lembramos que a regra dos sinais para a divisão é a mesma que vimos para a multiplicação**:**

(+) : (+) = + (+) : (-) = -

(-) : (-) = + (-) : (+) = -

Exemplos**:**

(+8) : (-2) = -4 (-10) : (-5) = +2

(+1) : (-1) = -1 (-12) : (+3) = -4

PROPRIEDADE

Como vimos: (+4) : (+3) $\notin$ Z

Portanto, não vale em Z a propriedade do fechamento para a divisão. Alem disso, também não são válidas as proposições associativa, comutativa e do elemento neutro.

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

CONCEITO

A notação

$(+2)^3$ = (+2) . (+2) . (+2)

↓

é um produto de três fatores iguais

Analogamente:

$(-2)^4$ = (-2) . (-2) . (-2) . (-2)

↓

é um produto de quatro fatores iguais

Portanto potência é um produto de fatores iguais.

Na potência **$(+5)^2$ = +25**, temos:

+5 ---------- base
2 ---------- expoente
+25 ---------- potência

Observacões :

$(+2)^1$ significa +2, isto é, $(+2)^1$ = +2

$(-3)^1$ significa -3, isto é, $(-3)^1$ = -3

CÁLCULOS

O EXPOENTE É PAR

Calcular as potências

1) $(+2)^4$ = (+2) . (+2) . (+2) . (+2) = +16 isto é, $(+2)^4$ = +16
2) $(-2)^4$ = (-2) . (-2) . (-2) . (-2) = +16 isto é, $(-2)^4$ = +16

Observamos que: **$(+2)^4$ = +16 e $(-2)^4$ = +16**

Então, de modo geral, temos a regra:

Quando o expoente é par, a potência é sempre um número positivo.

Outros exemplos: **$(-1)^6$ = +1** **$(+3)^2$ = +9**

O EXPOENTE É ÍMPAR

Calcular as potências:

1) $(+2)^3$ = (+2) . (+2) . (+2) = +8
   isto é, $(+2)^3$ = + 8
2) $(-2)^3$ = (-2) . (-2) . (-2) = -8
   ou seja, $(-2)^3$ = -8

Observamos que: **$(+2)^3$ = +8 e $(-2)^3$ = -8**

Daí, a regra:

Quando o expoente é ímpar, a potência tem o mesmo sinal da base.

Outros exemplos: **$(-3)^3$ = - 27** **$(+2)^4$ = +16**

PROPRIEDADES

PRODUTO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE

Exemplos: **$(+2)^3 \cdot (+2)^2 = (+2)^{3+2^2} = (+2)^5$**

$(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+3+5} = (-2)^{10}$

Para multiplicar potências de mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes.

QUOCIENTE DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE

$(+2)^5 : (+2)^2 = (+2)^{5-2} = (+2)^3$

$(-2)^7 : (-2)^3 = (-2)^{7-3} = (-2)^4$

Para dividir potências de mesma base em que o expoente do dividendo é maior que o expoente do divisor, mantemos a base e subtraímos os expoentes.

POTÊNCIA DE POTÊNCIA

$[(-4)^3]^5 = (-4)^{3 \cdot 5} = (-4)^{15}$

Para calcular uma potência de potência, conservamos a base da primeira potência e multiplicamos os expoentes .

POTÊNCIA DE UM PRODUTO

$[(-2) \cdot (+3) \cdot (-5)]^4 = (-2)^4 \cdot (+3)^4 \cdot (-5)^4$

Para calcular a potência de um produto, sendo n o expoente, elevamos cada fator ao expoente n.

POTÊNCIA DE EXPOENTE ZERO

$(+2)^5 : (+2)^5 = (+2)^{5-5} = (+2)^0$

e $(+2)^5 : (+2)^5 = 1$

Consequentemente: $(+2)^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$

Qualquer potência de expoente zero é igual a 1.

Observação:

Não confundir -3^2 com $(-3)^2$, porque -3^2 significa $-(3)^2$ e portanto

$-3^2 = -(3)^2 = -9$

enquanto que: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

Logo: $-3^2 \neq (-3)^2$

CÁLCULOS

O EXPOENTE É PAR

Calcular as potências

$(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$ **isto é,** $(+2)^4 = +16$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$ **isto é,** $(-2)^4 = +16$

Observamos que: $(+2)^4 = +16$ **e** $(-2)^4 = +16$

Então, de modo geral, temos a regra:

Quando o expoente é par, a potência é sempre um número positivo.

Outros exemplos: $(-1)^6 = +1$ $(+3)^2 = +9$

O EXPOENTE É ÍMPAR

Exemplos:

Calcular as potências:

1) $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$
   isto é, $(+2)^3 = +8$
2) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
   ou seja, $(-2)^3 = -8$

Observamos que: $(+2)^3 = +8$ **e** $(-2)^3 = -8$

Daí, a regra:

Quando o expoente é ímpar, a potência tem o mesmo sinal da base.

Outros exemplos: $(-3)^3 = -27$ $(+2)^4 = +16$

PROPRIEDADES

PRODUTO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE

Exemplos: $(+2)^3 \cdot (+2)^2 = (+2)^{3+2} = (+2)^5$

$(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+3+5} = (-2)^{10}$

Para multiplicar potências de mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes.

QUOCIENTE DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE

$(+2)^5 : (+2)^2 = (+2)^{5-2} = (+2)^3$

$(-2)^7 : (-2)^3 = (-2)^{7-3} = (-2)^4$

Para dividir potências de mesma base em que o expoente do dividendo é maior que o expoente do divisor, mantemos a base e subtraímos os expoentes.

POTÊNCIA DE POTÊNCIA

$[(-4)^3]^5 = (-4)^{3 \cdot 5} = (-4)^{15}$

Para calcular uma potência de potência, conservamos a base da primeira potência e multiplicamos os expoentes .

POTÊNCIA DE UM PRODUTO

$[(-2) \cdot (+3) \cdot (-5)]^4 = (-2)^4 \cdot (+3)^4 \cdot (-5)^4$

Para calcular a potência de um produto, sendo n o expoente, elevamos cada fator ao expoente n.

POTÊNCIA DE EXPOENTE ZERO

$(+2)^5 : (+2)^5 = (+2)^{5-5} = (+2)^0$

e $(+2)^5 : (+2)^5 = 1$

Consequentemente: $(+2)^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$

Qualquer potência de expoente zero é igual a 1.

Observação: Não confundir -3^2 com $(-3)^2$, porque -3^2 significa $-(3)^2$ e portanto: $-3^2 = -(3)^2 = -9$

enquanto que: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

Logo: $-3^2 \neq (-3)^2$

NÚMEROS PARES E ÍMPARES

Os pitagóricos estudavam à natureza dos números, e baseado nesta natureza criaram sua filosofia e modo de vida. Vamos definir números pares e ímpares de acordo com a concepção pitagórica:

- par é o número que pode ser dividido em duas partes iguais, sem que uma unidade fique no meio, e ímpar é aquele que não pode ser dividido em duas partes iguais, porque sempre há uma unidade no meio

Uma outra caracterização, nos mostra a preocupação com à natureza dos números:

- número par é aquele que tanto pode ser dividido em duas partes iguais como em partes desiguais, mas de forma tal que em nenhuma destas divisões haja uma mistura da natureza par com a natureza ímpar, nem da ímpar com a par. Isto tem uma única exceção, que é o princípio do par, o número 2, que não admite a divisão em partes desiguais, porque ele é formado por duas unidades e, se isto pode ser dito, do primeiro número par, 2.

Para exemplificar o texto acima, considere o número 10, que é par, pode ser dividido como a soma de 5 e 5, mas também como a soma de 7 e 3 (que são ambos ímpares) ou como a soma de 6 e 4 (ambos são pares); mas nunca como a soma de um número par e outro ímpar. Já o número 11, que é ímpar pode ser escrito como soma de 8 e 3, um par e um ímpar. Atualmente, definimos números pares como sendo o número que ao ser dividido por dois têm resto zero e números ímpares aqueles que ao serem divididos por dois têm resto diferente de zero. Por exemplo, 12 dividido por 2 têm resto zero, portanto 12 é par. Já o número 13 ao ser dividido por 2 deixa resto 1, portanto 13 é ímpar.

MÚLTIPLOS E DIVISORES

DIVISIBILIDADE

Um número é divisível por 2 quando termina em 0, 2, 4, 6 ou 8. Ex.: O número 74 é divisível por 2, pois termina em 4.

Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos é um número divisível por 3. Ex.: 123 é divisível por 3, pois 1+2+3 = 6 e 6 é divisível por 3

Um número é divisível por 5 quando o algarismo das unidades é 0 ou 5 (ou quando termina em o ou 5). Ex.: O número 320 é divisível por 5, pois termina em 0.

Um número é divisível por 10 quando o algarismo das unidades é 0 (ou quando termina em 0). Ex.: O número 500 é divisível por 10, pois termina em 0.

NÚMEROS PRIMOS

Um número natural é primo quando é divisível apenas por dois números distintos: ele próprio e o 1.

Exemplos:

- O número 2 é primo, pois é divisível apenas por dois números diferentes: ele próprio e o 1.
- O número 5 é primo, pois é divisível apenas por dois números distintos: ele próprio e o 1.
- O número natural que é divisível por mais de dois números diferentes é chamado composto.
- O número 4 é composto, pois é divisível por 1, 2, 4.
- O número 1 não é primo nem composto, pois é divisível apenas por um número (ele mesmo).
- O número 2 é o único número par primo.

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS (FATORAÇÃO)

Um número composto pode ser escrito sob a forma de um produto de fatores primos.

Por exemplo, o número 60 pode ser escrito na forma: **60 = 2 . 2 . 3 . 5 =** $\mathbf{2^2 . 3 . 5}$ que é chamada de forma fatorada.

Para escrever um número na forma fatorada, devemos decompor esse número em fatores primos, procedendo do seguinte modo:

Dividimos o número considerado pelo menor número primo possível de modo que a divisão seja exata.

Dividimos o quociente obtido pelo menor número primo possível.

Dividimos, sucessivamente, cada novo quociente pelo menor número primo possível, até que se obtenha o quociente 1.

Exemplo:

```
60 | 2
   -----
 0  30 | 2
       -----
    0   15 | 3
           -----
         5    0 | 5
                |
                  1
```

Portanto**: 60 = 2 . 2 . 3 . 5**

Na prática, costuma-se traçar uma barra vertical à direita do número e, à direita dessa barra, escrever os divisores primos; abaixo do número escrevem-se os quocientes obtidos. A decomposição em fatores primos estará terminada quando o último quociente for igual a 1.

Exemplo:

60	**2**
30	**2**
15	**3**
5	**5**
1	

Logo: 60 = 2 . 2 . 3 . 5

DIVISORES DE UM NÚMERO

Consideremos o número 12 e vamos determinar todos os seus divisores Uma maneira de obter esse resultado é escrever os números naturais de 1 a 12 e verificar se cada um é ou não divisor de 12, assinalando os divisores.

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12
= = = = = ==

Indicando por D(12) (lê-se: "D de 12”) o conjunto dos divisores do número 12, temos:

D (12) = { 1, 2, 3, 4, 6, 12}

Na prática, a maneira mais usada é a seguinte:

1º) Decompomos em fatores primos o número considerado.

12	**2**
6	**2**
3	**3**
1	

2º) Colocamos um traço vertical ao lado os fatores primos e, à sua direita e acima, escrevemos o numero 1 que é divisor de todos os números.

		1
12	**2**	
6	**2**	
3	**3**	

1		

3º) Multiplicamos o fator primo 2 pelo divisor 1 e escrevemos o produto obtido na linha correspondente.

		x1
12	**2**	**2**
6	**2**	
3	**3**	
1		

4º) Multiplicamos, a seguir, cada fator primo pelos divisores já obtidos, escrevendo os produtos nas linhas correspondentes, sem repeti-los.

		x1
12	**2**	**2**
6	**2**	**4**
3	**3**	
1		

		x1
12	**2**	**2**
6	**2**	**4**
3	**3**	**3, 6, 12**
1		

Os números obtidos à direita dos fatores primos são os divisores do número considerado. Portanto:

D(12) = { 1, 2, 4, 3, 6, 12}

Exemplos:

1)

		1	
18	**2**	**2**	
9	**3**	**3, 6**	**D(18) = {1, 2 , 3, 6, 9, 18}**
3	**3**	**9, 18**	
1			

2)

		1
30	**2**	**2**
15	**3**	**3, 6**
5	**5**	**5, 10, 15, 30**
1		

D(30) = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Recebe o nome de máximo divisor comum de dois ou mais números o maior dos divisores comuns a esses números.

Um método prático para o cálculo do M.D.C. de dois números é o chamado método das divisões sucessivas (ou algoritmo de Euclides), que consiste das etapas seguintes:

1ª) Divide-se o maior dos números pelo menor. Se a divisão for exata, o M.D.C. entre esses números é o menor deles.

2ª) Se a divisão não for exata, divide-se o divisor (o menor dos dois números) pelo resto obtido na divisão anterior, e, assim, sucessivamente, até se obter resto zero. 0 ultimo divisor, assim determinado, será o M.D.C. dos números considerados.

Exemplo:

Calcular o M.D.C. (24, 32)

32	24
8	1

24	8
0	3

Resposta: M.D.C. (24, 32) = 8

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Recebe o nome de mínimo múltiplo comum de dois ou mais números o menor dos múltiplos (diferente de zero) comuns a esses números.

O processo prático para o cálculo do M.M.C de dois ou mais números, chamado de decomposição em fatores primos, consiste das seguintes etapas:

1º) Decompõem-se em fatores primos os números apresentados.

2º) Determina-se o produto entre os fatores primos comuns e não-comuns com seus maiores expoentes. Esse produto é o M.M.C procurado.

Exemplos: Calcular o M.M.C (12, 18)

Decompondo em fatores primos esses números, temos:

12	**2**	**18**	**2**
6	**2**	**9**	**3**
3	**3**	**3**	**3**
1		**1**	

$12 = 2^2 . 3$ $18 = 2 . 3^2$

Resposta: M.M.C (12, 18) = $2^2 . 3^2 = 36$

Observação: Esse processo prático costuma ser simplificado fazendo-se uma decomposição simultânea dos números. Para isso, escrevem-se os números, um ao lado do outro, separando-os por vírgula, e, à direita da barra vertical, colocada após o último número, escrevem-se os fatores primos comuns e não-comuns. 0 calculo estará terminado quando a última linha do dispositivo for composta somente pelo número 1. O M.M.C dos números apresentados será o produto dos fatores.

Exemplo:

Calcular o M.M.C (36, 48, 60)

36, 48, 60	**2**
18, 24, 30	**2**
9, 12, 15	**2**
9, 6, 15	**2**
9, 3, 15	**3**
3, 1, 5	**3**
1, 1 5	**5**
1, 1, 1	

Resposta: M.M.C (36, 48, 60) = $2^4 . 3^2 . 5 = 720$

RAÍZ QUADRADA EXATA DE NÚMEROS INTEIROS

CONCEITO

Consideremos o seguinte problema:

Descobrir os números inteiros cujo quadrado é +25.
Solução: **$(+5)^2 = +25$ e $(-5)^2 = +25$**
Resposta: +5 e -5

Os números +5 e -5 chamam-se raízes quadradas de +25.

Outros exemplos:

Número	Raízes quadradas
+9	+ 3 e -3
+16	+ 4 e -4
+1	+ 1 e -1
+64	+ 8 e -8
+81	+ 9 e -9
+49	+ 7 e -7
+36	+6 e -6

O símbolo $\sqrt{25}$ significa a raiz quadrada de 25, isto é $\sqrt{25} = +5$

Como $\sqrt{25} = +5$, então: $-\sqrt{25} = -5$
Agora, consideremos este problema.

Qual ou quais os números inteiros cujo quadrado é -25?
Solução**: $(+5)^2 = +25$ e $(-5)^2 = +25$**
Resposta: não existe número inteiro cujo quadrado seja -25, isto é, $\sqrt{-25}$ não existe no conjunto Z dos números inteiros.

Conclusão: os números inteiros positivos têm, como raiz quadrada, um número positivo, os números inteiros negativos não têm raiz quadrada no conjunto Z dos números inteiros.

RADICIAÇÃO

A raiz n-ésima de um número b é um número a tal que **$a^n = b$.**

$$\boxed{\sqrt[n]{b} = a \Rightarrow a^n = b}$$

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

5 ⟶ índice
32 ⟶ radicando pois $2^5 = 32$
$\sqrt{\ }$ ⟶ raiz
2 ⟶ radical

Outros exemplos : $\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$
$\sqrt[3]{-8}$ **= - 2 pois $(-2)^3 = -8$**

PROPRIEDADES (para a $\geq$ 0, b $\geq$ 0)

1ª) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}$ $\sqrt[15]{3^{10}} = \sqrt[3]{3^2}$

2ª) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

3ª) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[4]{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{16}}$

4ª) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$ $\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 = \sqrt[3]{x^5}$

5ª) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ $\sqrt[6]{\sqrt{3}} = \sqrt[12]{3}$

EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM NÚMEROS INTEIROS ENVOLVENDO AS QUATRO OPERAÇÕES

Para calcular o valor de uma expressão numérica com números inteiros, procedemos por etapas.

1ª ETAPA:
a) efetuamos o que está entre parênteses ( )
b) eliminamos os parênteses

2ª ETAPA:
a) efetuamos o que está entre colchetes [ ]
b) eliminamos os colchetes

3º ETAPA:
a) efetuamos o que está entre chaves { }
b) eliminamos as chaves

Em cada etapa, as operações devem ser efetuadas na seguinte ordem:
1ª) Potenciação e radiciação na ordem em que aparecem.
2ª) Multiplicação e divisão na ordem em que aparecem.
3ª) Adição e subtração na ordem em que aparecem.

Exemplos:

1) **$2 + 7 \,.\, (-3 + 4) =$**
$2 + 7 \,.\, (+1) = 2 + 7 = 9$

2) **$(-1)^3 + (-2)^2 : (+2) =$**
$-1 + (+4) : (+2) =$
$-1 + (+2) =$
$-1 + 2 = +1$

3) **$-(-4 + 1) - [-(3 + 1)] =$**
$-(-3) - [-4] =$
$+3 + 4 = 7$

4) **$-2(-3 - 1)^2 + 3 \,.\, (-1 - 3)^3 + 4$**
$-2 \,.\, (-4)^2 + 3 \,.\, (-4)^3 + 4 =$
$-2 \,.\, (+16) + 3 \,.\, (-64) + 4 =$
$-32 - 192 + 4 =$
$-212 + 4 = -208$

5) **$(-288) : (-12)^2 - (-125) : (-5)^2 =$**
$(-288) : (+144) - (-125) : (+25) =$
$(-2) - (-5) = -2 + 5 = +3$

6) **$(-10 - 8) : (+6) - (-25) : (-2 + 7) =$**
$(-18) : (+6) - (-25) : (+5) =$
$-3 - (-5) =$
$-3 + 5 = +2$

7) **$-5^2 : (+25) - (-4)^2 : 2^4 - 1^2 =$**
$-25 : (+25) - (+16) : 16 - 1 =$
$-1 - (+1) - 1 = -1 - 1 - 1 = -3$

8) **$2 \,.\, (-3)^2 + (-40) : (+2)^3 - 2^2 =$**
$2 \,.\, (+9) + (-40) : (+8) - 4 =$
$+18 + (-5) - 4 =$
$+18 - 9 = +9$

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS (Q)

Os números racionais são representados por um numeral em forma de fração ou razão, $\frac{a}{b}$, sendo a e b números naturais, com a condição de b ser diferente de zero.

1. NÚMERO FRACIONARIO. A todo par ordenado (a, b) de números naturais, sendo b $\neq 0$, corresponde um número fracionário $\frac{a}{b}$ .O termo a chama-se numerador e o termo b denominador.

2. TODO NÚMERO NATURAL pode ser representado por uma fração de denominador 1. Logo, é possível reunir tanto os números naturais como os fracionários num único conjunto, denominado conjunto dos números racionais absolutos, ou simplesmente conjunto dos números racionais Q.

Qual seria a definição de um número racional absoluto ou simplesmente racional? A definição depende das seguintes considerações:

a) O número representado por uma fração não muda de valor quando multiplicamos ou dividimos tanto o numerador como o denominador por um mesmo número natural, diferente de zero.
Exemplos: usando um novo símbolo: $\approx$
$\approx$ é o símbolo de equivalência para frações
$$\frac{2}{3} \approx \frac{2\times5}{3\times5} \approx \frac{10}{15} \approx \frac{10\times2}{15\times2} \approx \frac{20}{30} \approx \cdots$$

b) Classe de equivalência. É o conjunto de todas as frações equivalentes a uma fração dada.
$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \cdots$ (classe de equivalência da fração: $\frac{3}{1}$)

Agora já podemos definir número racional : número racional é aquele definido por uma classe de equivalência da qual cada fração é um representante.

NÚMERO RACIONAL NATURAL ou NÚMERO NATURAL:

$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \cdots$ (definido pela classe de equivalência que representa o mesmo número racional 0)

$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \cdots$ (definido pela classe de equivalência que representa o mesmo número racional 1)

e assim por diante.

NÚMERO RACIONAL FRACIONÁRIO ou NÚMERO FRACIONÁRIO:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$ (definido pela classe de equivalência que representa o mesmo número racional 1/2).

NOMES DADOS ÀS FRAÇÕES DIVERSAS

Decimais: quando têm como denominador 10 ou uma potência de 10

$\frac{5}{10}, \frac{7}{100}, \cdots$ etc.

b) próprias: aquelas que representam quantidades menores do que 1.

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \cdots$ etc.

c) impróprias: as que indicam quantidades iguais ou maiores que 1.

$\frac{5}{5}, \frac{8}{1}, \frac{9}{5}, \cdots$ etc.

d) aparentes: todas as que simbolizam um número natural.

$\frac{20}{4} = 5, \quad \frac{8}{2} = 4$, etc.

e) ordinárias: é o nome geral dado a todas as frações, com exceção daquelas que possuem como denominador 10, 10^2, 10^3 ...

f) frações iguais: são as que possuem os termos iguais $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{8}{5} = \frac{8}{5}$, etc.

g) forma mista de uma fração: é o nome dado ao numeral formado por uma parte natural e uma parte fracionária; $\left(2\frac{4}{7}\right)$ A parte natural é 2 e a parte fracionária $\frac{4}{7}$.

h) irredutível: é aquela que não pode ser mais simplificada, por ter seus termos primos entre si.

$\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{3}{7}$, etc.

4. PARA SIMPLIFICAR UMA FRAÇÃO, desde que não possua termos primos entre si, basta dividir os dois ternos pelo seu divisor comum.

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$$

5. COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES.

Para comparar duas ou mais frações quaisquer primeiramente convertemos em frações equivalentes de mesmo denominador. De duas frações que têm o mesmo denominador, a maior é a que tem maior numerador. Logo:

$$\frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{9}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$
(ordem crescente)

De duas frações que têm o mesmo numerador, a maior é a que tem menor denominador.

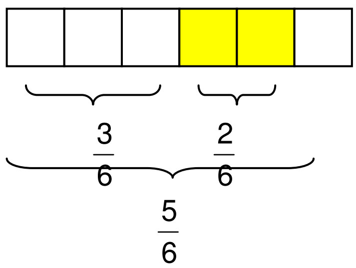
Exemplo: $\frac{7}{2} > \frac{7}{5}$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

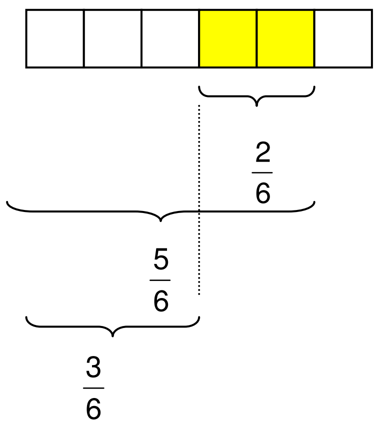
ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

A soma ou a diferença de duas frações é uma outra fração, cujo calculo recai em um dos dois casos seguintes:

1º CASO: Frações com mesmo denominador. Observemos as figuras seguintes:



Indicamos por: $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$



Indicamos por: $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$

Assim, para adicionar ou subtrair frações de mesmo denominador, procedemos do seguinte modo:

- adicionamos ou subtraímos os numeradores e mantemos o denominador comum.
- simplificamos o resultado, sempre que possível.

Exemplos:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=\frac{4+8}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{7}{6}-\frac{3}{6}=\frac{7-3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{7}-\frac{2}{7}=\frac{2-2}{7}=\frac{0}{7}=0$$

Observação: A subtração só pode ser efetuada quando o minuendo é maior que o subtraendo, ou igual a ele.

2º CASO: Frações com denominadores diferentes:

Neste caso, para adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes, procedemos do seguinte modo:

- Reduzimos as frações ao mesmo denominador.
- Efetuamos a operação indicada, de acordo com o caso anterior.
- Simplificamos o resultado (quando possível).

Exemplos:

1) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}=$

$=\frac{4}{12}+\frac{6}{12}=$

$=\frac{4+6}{12}=$

$=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

2) $\frac{5}{8}+\frac{3}{6}=$

$=\frac{15}{24}+\frac{12}{24}=$

$=\frac{15+12}{24}=$

$=\frac{27}{24}=\frac{9}{8}$

Observações:

Para adicionar mais de duas frações, reduzimos todas ao mesmo denominador e, em seguida, efetuamos a operação.

Exemplos.

a) $\frac{2}{15}+\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=$

$=\frac{2+7+3}{15}=$

$=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{18}{24}+\frac{20}{24}+\frac{3}{24}+\frac{12}{24}=$

$=\frac{18+20+3+12}{24}=$

$=\frac{53}{24}$

Havendo número misto, devemos transformá-lo em fração imprópria:

Exemplo:

$$2\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+3\frac{1}{6}=$$

$$\frac{7}{3}+\frac{5}{12}+\frac{19}{6}=$$

$$\frac{28}{12}+\frac{5}{12}+\frac{38}{12}=$$

$$\frac{28+5+38}{12}=\frac{71}{12}$$

Se a expressão apresenta os sinais de parênteses ( ), colchetes [ ] e chaves { }, observamos a mesma ordem:

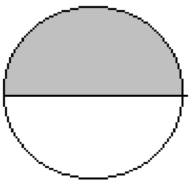
1º) efetuamos as operações no interior dos parênteses;
2º) as operações no interior dos colchetes;
3º) as operações no interior das chaves.

Exemplos:

$$1)\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{4}{2}\right)=$$
$$=\left(\frac{8}{12}+\frac{9}{12}\right)-\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{17}{12}-\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{17}{12}-\frac{6}{12}=$$
$$=\frac{11}{12}$$

$$2)\left[5-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]-\left(1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)=$$
$$=\left[5-\left(\frac{9}{6}-\frac{2}{6}\right)\right]-\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)=$$
$$=\left[5-\frac{7}{6}\right]-\left(\frac{20}{12}+\frac{9}{12}\right)=$$
$$=\left[\frac{30}{6}-\frac{7}{6}\right]-\frac{29}{12}=$$
$$=\frac{23}{6}-\frac{29}{12}=$$
$$=\frac{46}{12}-\frac{29}{12}=$$
$$=\frac{17}{12}$$

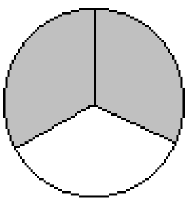
NÚMEROS RACIONAIS



$\frac{1}{2}$

Um círculo foi dividido em duas partes iguais. Dizemos que uma unidade dividida em duas partes iguais e indicamos 1/2.

onde: 1 = numerador e 2 = denominador

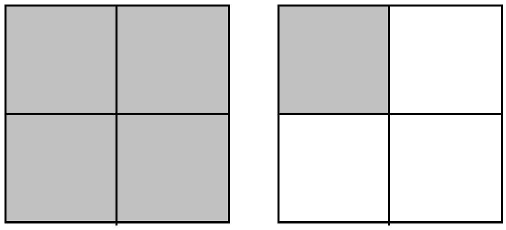


$\frac{2}{3}$

Um círculo dividido em 3 partes iguais indicamos (das três partes hachuramos 2).

Quando o numerador é menor que o denominador temos uma fração própria. Observe:

Observe:

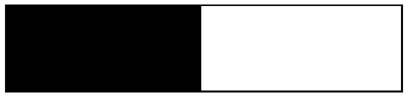


$\frac{5}{4}$

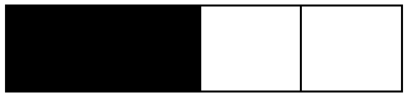
Quando o numerador é maior que o denominador temos uma fração imprópria.

FRAÇÕES EQUIVALENTES

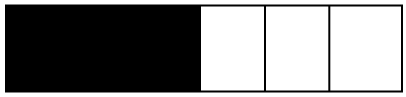
Duas ou mais frações são equivalentes, quando representam a mesma quantidade.



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$



$\frac{3}{6}$

Dizemos que: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

- Para obter frações equivalentes, devemos multiplicar ou dividir o numerador por mesmo número diferente de zero.

Ex: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$

Para simplificar frações devemos dividir o numerador e o denominador, por um mesmo número diferente de zero.

Quando não for mais possível efetuar as divisões dizemos que a fração é irredutível.

Exemplo:

$\frac{18}{12} : \frac{2}{2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow$ **Fração Irredutível ou Simplificada**

Exemplo: $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$

Calcular o M.M.C. (3,4): M.M.C.(3,4) = 12

$\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4} = \frac{(12:3)\cdot 1}{12}$ e $\frac{(12:4)\cdot 3}{12}$ temos: $\frac{4}{12}$ e $\frac{9}{12}$

A fração $\frac{1}{3}$ é equivalente a $\frac{4}{12}$.

A fração $\frac{3}{4}$ equivalente $\frac{9}{12}$.

Exercícios:

1) Achar três frações equivalentes às seguintes frações:

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{2}{3}$

Respostas: 1) $\frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}$ 2) $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

a) Frações de denominadores iguais.

Se duas frações tem denominadores iguais a maior será aquela: que tiver maior numerador.

Ex.: $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$

b) Frações com numeradores iguais

Se duas frações tiverem numeradores iguais, a menor será aquela que tiver maior denominador.

Ex.: $\frac{7}{4} > \frac{7}{5}$ ou $\frac{7}{5} < \frac{7}{4}$

c) Frações com numeradores e denominadores receptivamente diferentes.

Reduzimos ao mesmo denominador e depois comparamos. Exemplos:

$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ denominadores iguais (ordem decrescente)

$\frac{4}{5} > \frac{4}{3}$ numeradores iguais (ordem crescente)

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Para simplificar frações devemos dividir o numerador e o denominador por um número diferente de zero.

Quando não for mais possível efetuar as divisões, dizemos que a fração é irredutível. Exemplo:

$\frac{18:}{12:}\ \frac{2}{2} = \frac{9:}{6:}\ \frac{3}{3} = \frac{3}{2}$

Fração irredutível ou simplificada.

Exercícios: Simplificar 1) $\frac{9}{12}$ 2) $\frac{36}{45}$

Respostas: 1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{4}{5}$

REDUÇÃO DE FRAÇÕES AO MENOR DENOMINADOR COMUM

Ex.: $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$

Calcular o M.M.C. (3,4) = 12

$\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$ $= \frac{(12:3)\cdot 1}{12}$ e $\frac{(12:4)\cdot 3}{12}$ temos:

$\frac{4}{12}$ e $\frac{9}{12}$

A fração $\frac{1}{3}$ é equivalente a $\frac{4}{12}$. A fração $\frac{3}{4}$ equivalente $\frac{9}{12}$.

Exemplo:

$\frac{2}{3}\ ?\ \frac{4}{5} \Rightarrow$ numeradores diferentes e denominadores diferentes m.m.c.(3, 5) = 15

$\frac{(15:3).2}{15}\ ?\ \frac{(15.5).4}{15} = \frac{10}{15} < \frac{12}{15}$ (ordem crescente)

Exercícios: Colocar em ordem crescente:

1) $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{5}{3}$ e $\frac{4}{3}$ 3) $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$

Respostas: 1) $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ 2) $\frac{4}{3} < \frac{5}{3}$

3) $\frac{4}{3} < \frac{5}{6} < \frac{3}{2}$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

1) Adição e Subtração

a) Com denominadores iguais somam-se ou subtraem-se os numeradores e conserva-se o denominador comum.

Ex: $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+5+1}{3} = \frac{8}{3}$

$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$

b) Com denominadores diferentes reduz ao mesmo denominador depois soma ou subtrai.

Ex:

1) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} =$ M.M.C.. (2, 4, 3) = 12

$\frac{(12:2).1+(12:4).3+(12.3).2}{12} = \frac{6+9+8}{12} = \frac{23}{12}$

2) $\frac{4}{3} - \frac{2}{9}$ = M.M.C.. (3,9) = 9

$\frac{(9:3).4-(9:9).2}{9} = \frac{12-2}{9} = \frac{10}{9}$

Exercícios. Calcular:

1) $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{1}{7}$ 2) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$ 3) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$

Respostas: 1) $\frac{8}{7}$ 2) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 3) $\frac{7}{12}$

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Para multiplicar duas ou mais frações devemos multiplicar os numeradores das frações entre si, assim como os seus denominadores.

Exemplo:

$$\frac{2}{5}.\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

Exercícios: Calcular:

1) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}$ 2) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$ 3) $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$

Respostas: 1) $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ 2) $\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$ 3) $\frac{4}{15}$

DIVISÃO DE FRAÇÕES

Para dividir duas frações conserva-se a primeira e multiplica-se pelo inverso da Segunda.

Exemplo: $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}.\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

Exercícios. Calcular:

1) $\frac{4}{3}:\frac{2}{9}$ 2) $\frac{8}{15}:\frac{6}{25}$ 3) $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right):\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)$

Respostas: 1) 6 2) $\frac{20}{9}$ 3) 1

POTENCIAÇÃO DE FRAÇÕES

Eleva o numerador e o denominador ao expoente dado. Exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$$

Exercícios. Efetuar:

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ 3) $\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Respostas: 1) $\frac{9}{16}$ 2) $\frac{1}{16}$ 3) $\frac{119}{72}$

RADICIAÇÃO DE FRAÇÕES

Extrai raiz do numerador e do denominador.

Exemplo: $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

Exercícios. Efetuar:

1) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ 2) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ 3) $\sqrt{\frac{9}{16}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Respostas: 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{4}{5}$ 3) 1

NÚMEROS DECIMAIS

Toda fração com denominador 10, 100, 1000,...etc, chama-se fração decimal.

Ex: $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{100}$, etc

Escrevendo estas frações na forma decimal temos:

$\frac{3}{10}$ = três décimos,

$\frac{4}{100}$ = quatro centésimos

$\frac{7}{1000}$ = sete milésimos

Escrevendo estas frações na forma decimal temos:

$\frac{3}{10}$ =0,3 $\frac{4}{100}$ = 0,04 $\frac{7}{1000}$ = 0,007

Outros exemplos:

1) $\frac{34}{10}$ = 3,4 2) $\frac{635}{100}$ = 6,35 3) $\frac{2187}{10}$ =218,7

Note que a vírgula "caminha" da direita para a esquerda, a quantidade de casas deslocadas é a mesma quantidade de zeros do denominador.

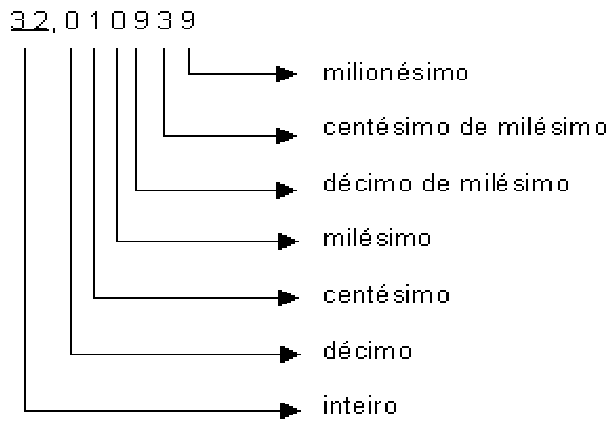
Exercícios. Representar em números decimais:

1) $\frac{35}{10}$ 2) $\frac{473}{100}$ 3) $\frac{430}{1000}$

Respostas: 1) 3,5 2) 4,73 3) 0,430

LEITURA DE UM NÚMERO DECIMAL

Ex.:



OPERAÇÕES COM NÚMEROS DECIMAIS

Adição e Subtração

Coloca-se vírgula sob virgula e somam-se ou subtraem-se unidades de mesma ordem. Exemplo 1:

10 + 0,453 + 2,832

```
     10,000
+     0,453
      2,832
   ________
     13,285
```

Exemplo 2:
47,3 - 9,35

```
 47,30
  9,35
______
 37,95
```

Exercícios. Efetuar as operações:
1) 0,357 + 4,321 + 31,45
2) 114,37 - 93,4
3) 83,7 + 0,53 - 15, 3

Respostas: 1) 36,128 2) 20,97 3) 68,93

MULTIPLICAÇÃO COM NÚMEROS DECIMAIS

Multiplicam-se dois números decimais como se fossem inteiros e separam-se os resultados a partir da direita, tantas casas decimais quantos forem os algarismos decimais dos números dados.

Exemplo: 5,32 x 3,8
5,32 → 2 casas,
x 3,8→ 1 casa após a virgula

```
______
  4256
1596 +
______
20,216 → 3 casas após a vírgula
```

Exercícios. Efetuar as operações:
1) 2,41 . 6,3 2) 173,4 . 3,5 + 5 . 4,6
3) 31,2 . 0,753

Respostas: 1) 15,183 2) 629,9
3) 23,4936

DIVISÃO DE NÚMEROS DECIMAIS

Igualamos as casas decimais entre o dividendo e o divisor e quando o dividendo for menor que o divisor acrescentamos um zero antes da vírgula no quociente.

Ex.:
a) 3:4

```
3 |_4_
30 0,75
20
0
```

b) 4,6:2

```
4,6 |2,0   =   46 | 20
               60 2,3
               0
```

Obs.: Para transformar qualquer fração em número decimal basta dividir o numerador pelo denominador.
Ex.: 2/5 = 2 |5 , então 2/5=0,4
20 0,4

Exercícios
1) Transformar as frações em números decimais.

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{4}{5}$ 3) $\frac{1}{4}$

Respostas: 1) 0,2 2) 0,8 3) 0,25

2) Efetuar as operações:
1) 1,6 : 0,4 2) 25,8 : 0,2
3) 45,6 : 1,23 4) 178 : 4,5-3,4.1/2
5) 235,6 : 1,2 + 5 . 3/4

Respostas: 1) 4 2) 129 3) 35,07
4) 37,855 5) 200,0833....

Multiplicação de um número decimal por 10, 100, 1000

Para tornar um número decimal 10, 100, 1000..... vezes maior, desloca-se a vírgula para a direita, respectivamente, uma, duas, três, . . . casas decimais.

2,75 x 10 = 27,5 6,50 x 100 = 650
0,125 x 100 = 12,5 2,780 x 1.000 = 2.780
0,060 x 1.000 = 60 0,825 x 1.000 = 825

DIVISÃO

Para dividir os números decimais, procede-se assim:
1) iguala-se o número de casas decimais;
2) suprimem-se as vírgulas;
3) efetua-se a divisão como se fossem números inteiros.

Exemplos:
♦ 6 : 0,15 = 6,00 0,15

000 40

Igualam – se as casas decimais.
Cortam-se as vírgulas.

➢ 7,85 : 5 = 7,85 : 5,00 785 : 500 = 1,57

Dividindo 785 por 500 obtém-se quociente 1 e resto 285

Como 285 é menor que 500, acrescenta-se uma vírgula ao quociente e zeros ao resto

♦ 2 : 4 0,5

Como 2 não é divisível por 4, coloca-se zero e vírgula no quociente e zero no dividendo

♦ 0,35 : 7 = 0,350 7,00 350 : 700 = 0,05

Como 35 não divisível por 700, coloca-se zero e vírgula no quociente e um zero no dividendo. Como 350 não é divisível por 700, acrescenta-se outro zero ao quociente e outro ao dividendo

Divisão de um número decimal por 10, 100, 1000

Para tornar um número decimal 10, 100, 1000, ... vezes menor, desloca-se a vírgula para a esquerda, respectivamente, uma, duas, três, ... casas decimais.

Exemplos:
25,6 **:** 10 = 2,56
04 **:** 10 = 0,4
315,2 **:** 100 = 3,152
018 **:** 100 = 0,18
0042,5 **:** 1.000 = 0,0425
0015 **:** 1.000 = 0,015

milhar	centena	dezena	Unidade simples	décimo	centésimo	milésimo
1 000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

LEITURA DE UM NÚMERO DECIMAL
Procedemos do seguinte modo:
1º) Lemos a parte inteira (como um número natural).
2º) Lemos a parte decimal (como um número natural), acompanhada de uma das palavras:
- décimos, se houver uma ordem (ou casa) decimal
- centésimos, se houver duas ordens decimais;
- milésimos, se houver três ordens decimais.

Exemplos:
1) 1,2 → Lê-se: "um inteiro e dois décimos".

2) 12,75 → Lê-se: "doze inteiros e setenta e cinco centésimos".

3) 8,309 → Lê-se: "oito inteiros e trezentos e nove milésimos".

Observações:
1) Quando a parte inteira é zero, apenas a parte decimal é lida.
Exemplos:

a) 0,5 → - Lê-se: "cinco décimos".

b) 0,38 → - Lê-se: "trinta e oito centésimos".

c) 0,421 → - Lê-se: "quatrocentos e vinte e um milésimos".

2) Um número decimal não muda o seu valor se acrescentarmos ou suprimirmos zeros â direita do último algarismo.
Exemplo: 0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000 " ....

3) Todo número natural pode ser escrito na forma de número decimal, colocando-se a vírgula após o último algarismo e zero (ou zeros) a sua direita.
Exemplos: 34 = 34,00... 176 = 176,00...

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS (R)

CORRESPONDÊNCIA ENTRE NÚMEROS E PONTOS DA RETA, ORDEM, VALOR ABSOLUTO

Há números que não admitem representação decimal finita nem representação decimal infinita e periódico, como, por exemplo:

π = 3,14159265...

$\sqrt{2}$ = 1,4142135...

$\sqrt{3}$ = 1,7320508...

$\sqrt{5}$ = 2,2360679...

Estes números não são racionais: $\pi \in$ Q, $\sqrt{2} \in$ Q, $\sqrt{3} \in$ Q, $\sqrt{5} \in$ Q; e, por isso mesmo, são chamados de irracionais.

Podemos então definir os irracionais como sendo aqueles números que possuem uma representação decimal infinita e não periódico.

Chamamos então de conjunto dos números reais, e indicamos com R, o seguinte conjunto:

R= { x I x é racional ou x é irracional}

Como vemos, o conjunto R é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Usaremos o símbolo *estrela* (*) quando quisermos indicar que o número zero foi excluído de um conjunto.

Exemplo: N* = { 1; 2; 3; 4; ... }; o zero foi excluído de N.

Usaremos o símbolo *mais* (+) quando quisermos indicar que os números negativos foram excluídos de um conjunto.

Exemplo: Z_+ = { 0; 1; 2; ... } ; os negativos foram excluídos de Z.

Usaremos o símbolo *menos* (-) quando quisermos indicar que os números positivos foram excluídos de um conjunto.

Exemplo: Z_- = { . .. ; - 2; - 1; 0 } ; os positivos foram excluídos de Z.

Algumas vezes combinamos o símbolo (*) com o símbolo (+) ou com o símbolo (-).

Exemplos
a) Z_-^* = (1; 2; 3; ...) ; o zero e os negativos foram excluídos de Z.
b) Z_+^* = { ... ; - 3; - 2; - 1 } ; o zero e os positivos foram excluídos de Z.

Exercícios resolvidos
1. Completar com ∈ ou ∉ :

a) 5 Z
b) 5 Z_-^*
c) 3,2 Z_+^*
d) $\frac{1}{4}$ Z
e) $\frac{4}{1}$ Z
f) $\sqrt{2}$ Q
g) $\sqrt{3}$ Q^*
h) $\sqrt{4}$ Q
i) $\sqrt{(-2)^2}$ Q_-
j) $\sqrt{2}$ R
k) $\sqrt{4}$ R_-

Resolução

a) $\in$, pois 5 é positivo.

b) $\notin$, pois 5 é positivo e os positivos foram excluídos de Z_-^*

c) $\notin$ 3,2 não é inteiro.

d) $\notin$, pois $\frac{1}{4}$ não é inteiro.

e) $\in$, pois $\frac{4}{1} = 4$ é inteiro.

f) $\notin$, pois $\sqrt{2}$ não é racional.

g) $\notin$, pois $\sqrt{3}$ não é racional

h) $\in$, pois $\sqrt{4} = 2$ é racional

i) $\notin$, pois $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ é positivo, e os positivos foram excluídos de Q_-.

j) $\in$, pois $\sqrt{2}$ é real.

k) $\notin$, pois $\sqrt{4} = 2$ é positivo, e os positivos foram excluídos de R_-

2. Completar com $\subset$ ou $\not\subset$:

a) $N \quad Z^*$

b) $N \quad Z_+$

c) $N \quad Q$

d) $Q \quad Z$

e) $Q_+^* \quad R_+^*$

Resolução:

a) $\not\subset$, pois $0 \in N$ e $0 \notin Z^*$.

b) $\subset$, pois $N = Z_+$

c) $\subset$, pois todo número natural é também racional.

d) $\not\subset$, pois há números racionais que não são inteiros como por exemplo, $\frac{2}{3}$.

e) $\subset$, pois todo racional positivo é também real positivo.

Exercícios propostos:

1. Completar com $\in$ ou $\notin$

a) 0 $\quad N$

b) 0 $\quad N^*$

c) 7 $\quad Z$

d) - 7 $\quad Z_+$

e) – 7 $\quad Q_-$

f) $\frac{1}{7} \quad Q$

g) $\frac{7}{1} \quad Q_+^*$

h) $\sqrt{7} \quad Q$

i) $\sqrt{7^2} \quad Q$

j) $\sqrt{7} \quad R^*$

2. Completar com $\in$ ou $\notin$

a) 3 $\quad Q$

b) 3,1 $\quad Q$

c) 3,14 $\quad Q$

d) $\pi \quad Q$

e) 3,141414... $\quad Q$

3. Completar com $\subset$ ou $\not\subset$:

a) $Z_+^* \quad N^*$

b) $Z_- \quad N$

c) $R_+ \quad Q$

d) $Z_-^* \quad R$

e) $Z_- \quad R_+$

4. Usando diagramas de Euler-Venn, represente os conjuntos N, Z, Q e R .

Respostas:

1.

a) $\in$ b) $\notin$ c) $\in$ d) $\notin$

e) $\in$ f) $\in$ g) $\in$ h) $\notin$

i) $\in$ j) $\in$

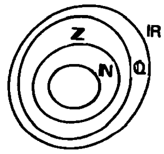
2.

a) $\in$ b) $\in$ c) $\in$ d) $\notin$ e) $\in$

3.

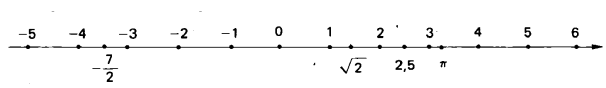
a) $\subset$ b) $\not\subset$ c) $\not\subset$ d) $\subset$ e) $\not\subset$

4.



Reta numérica

Uma maneira prática de representar os números reais é através da reta real. Para construí-la, desenhamos uma reta e, sobre ela, escolhemos, a nosso gosto, um *ponto origem* que representará o *número zero;* a seguir escolhemos, também a nosso gosto, porém à direita da origem, um ponto para representar a unidade, ou seja, *o número um.* Então, a distância entre os pontos mencionados será a unidade de medida e, com base nela, marcamos, ordenadamente, os números positivos à direita da origem e os números negativos à sua esquerda.



EXERCÍCIOS

1) Dos conjuntos a seguir, o único cujos elementos são todos números racionais é:

a) $\left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 3, 5, 4\sqrt{2} \right\}$

c) $\left\{ -1, \frac{2}{7}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{3} \right\}$

b) $\left\{ -3, -2, -\sqrt{2}, 0 \right\}$

d) $\left\{ 0, \sqrt{9}, \sqrt{4}, 5, 7 \right\}$

2) Se $\sqrt{5}$ é irracional, então:

a) $\sqrt{5}$ escreve-se na forma $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$ e $m, n \in N$.

b) $\sqrt{5}$ pode ser racional

c) $\sqrt{5}$ jamais se escreve sob a forma $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$ e m, n $\in$ N.

d) $2\sqrt{5}$ é racional

3) Sendo N, Z, Q e R, respectivamente, os conjuntos dos naturais, inteiros, racionais e reais, podemos escrever:

a) $\forall x \in N \Rightarrow x \in R$ c) $Z \supset Q$

b) $\forall x \in Q \Rightarrow x \in Z$ d) $R \subset Z$

4) Dado o conjunto A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, podemos afirmar que:

a) $\forall x \in A \Rightarrow$ x é primo

b) $\exists x \in A \mid$ x é maior que 7

c) $\forall x \in A \Rightarrow$ x é múltiplo de 3

d) $\exists x \in A \mid$ x é par

e) nenhuma das anteriores

5) Assinale a alternativa correta:

a) Os números decimais periódicos são irracionais

b) Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta numerada, e o conjunto Q.

c) Entre dois números racional existem infinitos números racionais.

d) O conjunto dos números irracionais é finito

6) Podemos afirmar que:

a) todo real é racional.

b) todo real é irracional.

c) nenhum irracional é racional.

d) algum racional é irracional.

7) Podemos afirmar que:

a) entre dois inteiros existe um inteiro.

b) entre dois racionais existe sempre um racional.

c) entre dois inteiros existe um único inteiro.

d) entre dois racionais existe apenas um racional.

8) Podemos afirmar que:

a) $\forall a, \forall b \in N \Rightarrow a - b \in N$

b) $\forall a, \forall b \in N \Rightarrow a : b \in N$

c) $\forall a, \forall b \in R \Rightarrow a + b \in R$

d) $\forall a, \forall b \in Z \Rightarrow a : b \in Z$

9) Considere as seguintes sentenças:

I) $\sqrt{7}$ é irracional.

II) 0,777... é irracional.

III) $2\sqrt{2}$ é racional.

Podemos afirmar que:

a) I é falsa e II e III são verdadeiros.

b) I é verdadeiro e II e III são falsas.

c) I e II são verdadeiras e III é falsa.

d) I e II são falsas e III é verdadeira.

10) Considere as seguintes sentenças:

I) A soma de dois números naturais é sempre um número natural.

II) O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

III) O quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

Podemos afirmar que:

a) apenas I é verdadeiro.

b) apenas II é verdadeira.

c) apenas III é falsa.

d) todas são verdadeiras.

11) Assinale a alternativa correta:

a) $R \subset N$ c) $Q \supset N$

b) $Z \supset R$ d) $N \subset \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

12) Assinale a alternativa correto:

a) O quociente de dois número, racionais é sempre um número inteiro.

b) Existem números Inteiros que não são números reais.

c) A soma de dois números naturais é sempre um número inteiro.

d) A diferença entre dois números naturais é sempre um número natural.

13) O seguinte subconjunto dos números reais

escrito em linguagem simbólica é:

a) $\{ x \in R \mid 3 < x < 15 \}$ c) $\{ x \in R \mid 3 \leq x \leq 15 \}$

b) $\{ x \in R \mid 3 \leq x < 15 \}$ d) $\{ x \in R \mid 3 < x \leq 15 \}$

14) Assinale a alternativa falsa:

a) $R^* = \{ x \in R \mid x < 0 \text{ ou } x > 0 \}$

b) $3 \in Q$

c) Existem números inteiros que não são números naturais.

d) é a representação de $\{ x \in R \mid x \geq 7 \}$

15) O número irracional é:

a) 0,3333... e) $\frac{4}{5}$

b) 345,777... d) $\sqrt{7}$

16) O símbolo R_- representa o conjunto dos números:

a) reais não positivos c) irracional.

b) reais negativos d) reais positivos.

17) Os possíveis valores de *a* e de *b* para que a número $a + b\sqrt{5}$ seja irracional, são:

a) a = 0 e b=0 c) a = 0 e b = $\sqrt{2}$

c) a = 1 e b = $\sqrt{5}$ d) a = $\sqrt{16}$ e b = 0

18) Uma representação decimal do número $\sqrt{5}$ é:

a) 0,326... c) 1.236...

b) 2.236... d) 3,1415...

19) Assinale o número irracional:

a) 3,01001000100001... e) 3,464646...

b) 0,4000... d) 3,45

20) O conjunto dos números reais negativos é representado por:

a) R^* c) R
b) R_- d) R^*_-

21) Assinale a alternativo falso:
a) $5 \in Z$ b) $5,1961... \in Q$
c) $-\frac{5}{3} \in Q$

22) Um número racional compreendido entre $\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$ é:
a) 3,6 c) $\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6}}{2}$
b) $\frac{6}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

23) Qual dos seguintes números é irracional?
a) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt{27}$
b) $\sqrt[4]{1}$ d) $\sqrt{169}$

24) 

é a representação gráfica de:
a) $\{ x \in R \mid x \geq 15 \}$ b) $\{ x \in R \mid -2 \leq x < 4 \}$
c) $\{ x \in R \mid x < -2 \}$ d) $\{ x \in R \mid -2 < x \leq 4 \}$

RESPOSTAS					
1) d	5) b	9) b	13) b	17) c	21) b
2) c	6) c	10) c	14) d	18) b	22) b
3) a	7) b	11) b	15) d	19) a	23) c
4) e	8) c	12) c	16) b	20) b	24) d

SISTEMA DE MEDIDAS LEGAIS

A) Unidades de Comprimento
B) Unidades de ÁREA
C) Áreas Planas
D) Unidades de Volume e de Capacidade
E) Volumes dos principais sólidos geométricos
F) Unidades de Massa

A) UNIDADES DE COMPRIMENTO

Medidas de comprimento:

Medir significa comparar. Quando se mede um determinado comprimento, estamos comparando este comprimento com outro tomado como *unidade de medida.* Portanto, notamos que existe um número seguido de um nome: 4 metros — o número será a medida e o nome será a unidade de medida.

Podemos medir a página deste livro utilizando um lápis; nesse caso o lápis foi tomado como unidade de medida ou seja, ao utilizarmos o lápis para medirmos o comprimento do livro, estamos verificando quantas vezes o lápis (tomado como medida padrão) caberá nesta página.

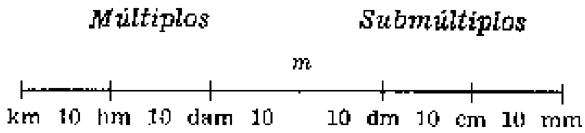
Para haver uma uniformidade nas relações humanas estabeleceu-se o *metro* como *unidade fundamental de medida de comprimento;* que deu origem ao *sistema métrico decimal,* adotado oficialmente no Brasil.

Múltiplos e sub-múltiplos do sistema métrico: Para escrevermos os múltiplos e sub-múltiplos do sistema métrico decimal, utilizamos os seguintes prefixos gregos:

KILO significa 1.000 vezes

HECTA significa 100 vezes
DECA significa 10 vezes
DECI significa décima parte
CENTI significa centésima parte
MILI significa milésima parte.

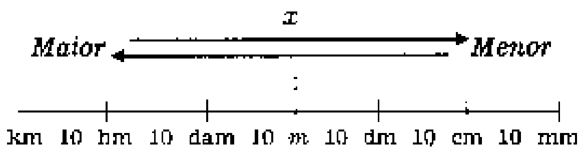
1km = 1.000m e 1 m = 10 dm
1hm = 100m 1 m = 100 cm
1dam = 10m 1 m = 1000 mm



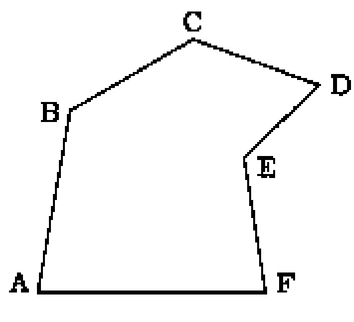
Transformações de unidades: Cada unidade de comprimento é dez (10) vezes maior que a unidade imediatamente. inferior. Na prática cada mudança de vírgula para a direita (ou multiplicação por dez) transforma uma unidade imediatamente inferior a unidade dada; e cada mudança de vírgula para a esquerda (ou divisão por dez) transforma uma unidade na imediatamente superior.

Ex.: 45 Km $\Rightarrow$ 45 . 1.000 = 45.000 m
500 cm $\Rightarrow$ 500 $\div$ 100 = 5 m
8 Km e 25 m $\Rightarrow$ 8.000m + 25m = 8.025 m ou 8,025 Km.

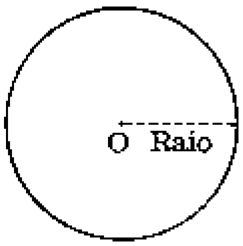
Resumo



Permitido de um polígono: o perímetro de um polígono é a soma do comprimento de seus lados.

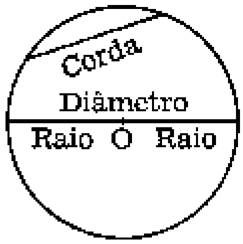


Perímetro de uma circunferência: Como a abertura do compasso não se modifica durante o traçado vê-se logo que os pontos da circunferência distam igualmente do ponto zero (0).



circunferência

Elementos de uma circunferência:



O perímetro da circunferência é calculado multiplicando-se 3,14 pela medida do diâmetro.

3,14 . medida do diâmetro = perímetro.

B) UNIDADES DE ÁREA: a ideia de superfície já é nossa conhecida, é uma noção intuitiva. Ex.: superfície da mesa, do assoalho que são exemplos de superfícies planas enquanto que a superfície de uma bola de futebol, é uma superfície esférica.

Damos o nome de área ao número que mede uma superfície numa determinada unidade.

Metro quadrado: é a unidade fundamental de medida de superfície (superfície de um quadrado que tem 1 m de lado).

Propriedade: Toda unidade de medida de superfície é 100 vezes maior do que a imediatamente inferior.

Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado:

Múltiplos	*Submúltiplos*
km^2: 1.000.000 m^2 m^2	cm^2 : 0,0001 m^2
hm^2: 10.000 m^2	dm^2: 0,01 m^2
dam^2: 100 m^2	mm^2 : 0,000001m^2

1km^2 = 1000000 (= 1000 x 1000)m^2
1 hm^2= 10000 (= 100 x 100)m^2
1dam^2 =100 (=10x10) m^2

Regras Práticas:

- para se converter um número medido numa unidade para a unidade imediatamente superior deve-se dividi-lo por 100.
- para se converter um número medido numa unidade, para uma unidade imediatamente inferior, deve-se multiplicá-lo por 100.

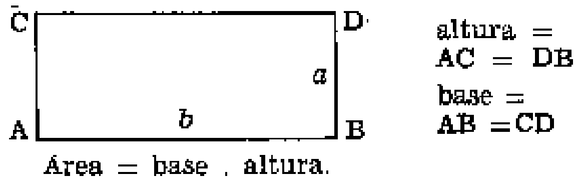
Medidas Agrárias:
centiare (ca) — é o m^2

are (a) —*é o* dam^2 (100 m^2)

hectare (ha) — é o hm^2 (10000 m^2).

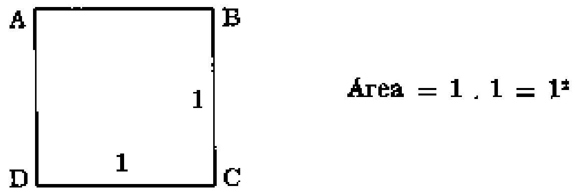
C) ÁREAS PLANAS

Retângulo: a área do retângulo é dada pelo produto da medida de comprimento pela medida da largura, ou, medida da base pela medida da altura.



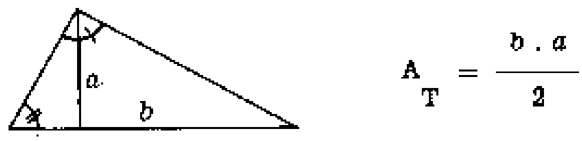
Perímetro: a + a + b + b

Quadrado: a área do quadrado é dada pelo produto “lado por lado, pois sendo um retângulo de lados iguais, base = altura = lado.



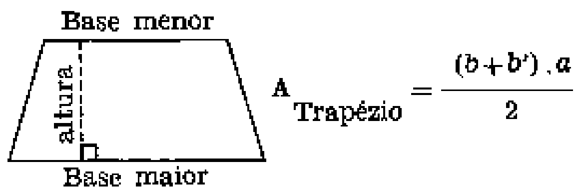
Perímetro: é a soma dos quatro lados.

Triângulo: a área do triângulo é dada pelo produto da base pela altura dividido por dois.



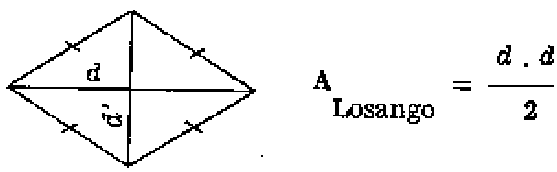
Perímetro – é a soma dos três lados.

Trapézio: a área do trapézio é igual ao produto da semi-soma das bases, pela altura.



Perímetro – é a soma dos quatro lados.

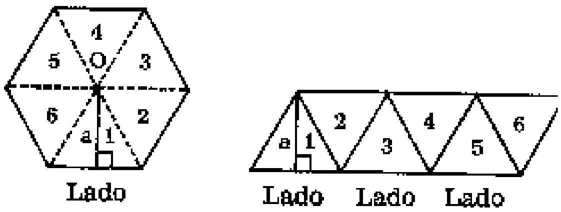
Losango: a área do losango é igual ao semi-produto das suas diagonais.



Perímetro – á a soma dos quatro lados.

Área de polígono regular: a área do polígono regular é igual ao produto da medida do perímetro (p) pela medida do apotema *(a)* sobre 2.

$$A_G = A_{polígono} = \frac{p \cdot a}{2}$$

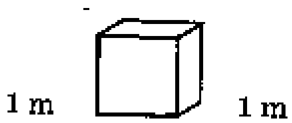


Perímetro – soma de seus lados.

DUNIDADES DE VOLUME E CAPACIDADE

Unidades de volume: volume de um sólido é a medida deste sólido.

Chama-se metro cúbico ao volume de um cubo cuja aresta mede 1 m.



Abrevia-se o metro cúbico por m^3.

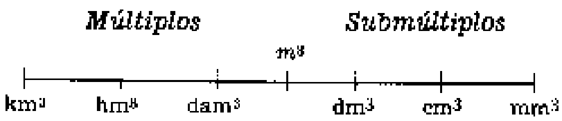
Propriedade: cada unidade de volume é 1.000 vezes maior que a unidade imediatamente inferior.

Múltiplos e sub-múltiplos do metro cúbico:

MÚLTIPIOS	**SUB-MÚLTIPLOS**
km^3 (1 000 000 000m^3)	*dm*^{3} (0,001 m^3)
hm^3 (1 000 000 m^3)	cm^3 (0,000001m^3)
dam^3 (1 000 m^3)	*mm*^{3} (0,000 000 001m^3)

Como se vê:
1 km3 = 1 000 000 000 (1000x1000x1000)m^3
1 hm^3 = 1000000 (100 x 100 x 100) m^3
1dam^3 = 1000 (10x10x10)m^3

1m^3 =1000 (= 10 x 10 x 10) dm^3
1m^3 =1000 000 (=100 x 100 x 100) cm^3
1m^3= 1000000000 (1000x 1000x 1000) mm^3



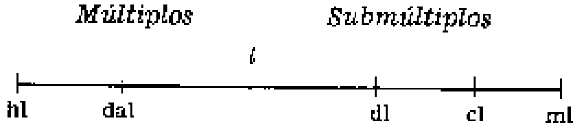
Unidades de capacidade: litro é a unidade fundamental de capacidade. Abrevia-se o litro por l.

O litro é o volume equivalente a um decímetro cúbico.

Múltiplos		*Submúltiplos*
hl (100 l) dal (10 l)	*litro l*	dl (0,1 l) cl (0,01 l) ml (0,001 l)

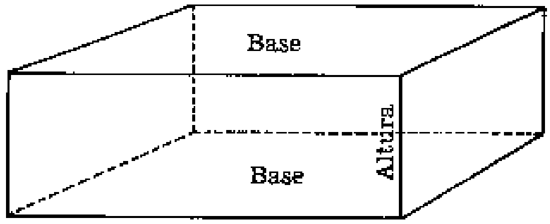
Como se vê:

1 hl = 100 l 1 l = 10 dl
1 dal = 10 l 1 l = 100 cl
1 l = 1000 ml

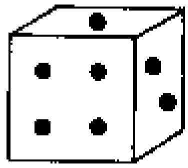


VOLUMES DOS PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Volume do paralelepípedo retângulo: é o mais comum dos sólidos geométricos. Seu volume é dado pelo produto de suas três dimensões.



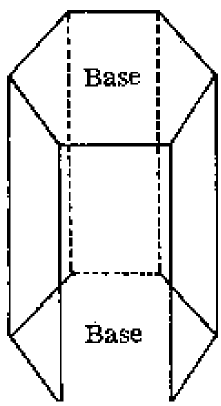
Volume do cubo: o cubo é um paralelepipedo retângulo de faces quadradas. Um exemplo comum de cubo, é o dado.



O volume do cubo é dado pelo produto das medidas de suas três arestas que são iguais.

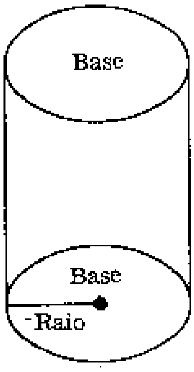
V = *a. a . a* = a^3 cubo

Volume do prisma reto: o volume do prisma reto é dado pelo produto da área da base pela medida da altura.



$$V_{prisma} = A_{base} \cdot alt.$$

Volume do cilindro: o volume do cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura.



V cilindro = A base . altura = 3,14 . R^2 . altura.

F) UNIDADES DE MASSA

— A unidade fundamental para se medir massa de um corpo (ou a quantidade de matéria que esse corpo possui), é o kilograma *(kg).*

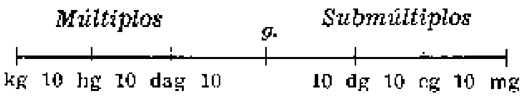
— o *kg* é a massa aproximada de 1 dm^3 de água a 4 graus de temperatura.

— *Múltiplos e sub-múltiplos do kilograma:*

Múltiplos	*Submúltiplos*
kg (1000g)	*dg* (0,1 g)
hg (100g)	*cg* (0,01 g)
dag (10 g)	*mg* (0,001 g)

Como se vê:

1kg = 1000g	1g = 10 dg
1 hg = 100 g *e*	*1*g= 100 cg
1 dag = 10g	1g = 1000 mg



Para a água destilada, 1.º acima de zero.

volume	capacidade	massa
$1dm^2$	1l	1kg

Medidas de tempo:
Não esquecer:
1dia = 24 horas
1 hora = sessenta minutos
1 minuto = sessenta segundos
1 ano = 365 dias
1 mês = 30 dias

Média geométrica

Numa proporção contínua, o meio comum é denominado média proporcional ou média geométrica dos extremos. Portanto no exemplo acima 8 é a média proporcional entre 4 e 16. O quarto termo de uma proporção contínua é chamado terceira proporcional. Assim, no nosso exemplo, 16 é a terceira proporcional depois de 4 e 8.

Para se calcular a média proporcional ou geométrica de dois números, teremos que calcular o valor do meio comum de uma proporção continua. Ex.:

$$\frac{4}{X} = \frac{X}{16}$$

4 . 16 x . x

x^2 = 64 x

$\sqrt{64}$ =8

4.º proporcional: é o nome dado ao quarto termo de uma proporção não continua. Ex.:

$$\frac{4}{8} = \frac{12}{F}, \quad 4 \,.\, x = 8 \,.\, 12$$

$$x = \frac{96}{4} = 24.$$

Nota: Esse cálculo é idêntico ao cálculo do elemento desconhecido de uma proporção).

Média Aritmética Simples: (ma)

A média aritmética simples de dois números é dada pelo quociente da soma de seus valores e pela quantidade das parcelas consideradas.

Ex.: determinar a m_a de: 4, 8, 12, 20

$$m_a = \frac{4+8+12+20}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

Média Aritmética Ponderada (mv):

A média aritmética ponderada de vários números aos quais são atribuídos pesos (que indicam o número de vezes que tais números figuraram) consiste no quociente da soma dos produtos — que se obtém multiplicando cada número pelo peso correspondente, pela soma dos pesos.

Ex.: No cálculo da média final obtida por um aluno durante o ano letivo, usamos a média aritmética ponderada. A resolução é a seguinte:

Matéria	Notas	Peso
Português	60,0	5
Matemática	40,0	3
História	70,0	2

$$m_p = \frac{60\,.\,5+40\;3+70\,.\,2}{5+3+2}$$

$$= \frac{300+120+140}{10} = 56$$

ÂNGULO
Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Ângulo É a região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum, dividindo este plano em duas partes. A abertura do ângulo é uma propriedade invariante deste e é medida, no SI, em radianos.

Unidades de medidas para ângulos
De forma a medir um **ângulo,** um círculo com centro no vértice é desenhado. Como a circunferência do círculo é sempre diretamente proporcional ao comprimento de seu raio, a medida de um ângulo é independente do tamanho do círculo. Note que ângulos são adimensionais, desde que sejam definidos como a razão dos comprimentos.

- A *medida em radiano* de um ângulo é o comprimento do arco cortado pelo ângulo, dividido pelo raio do círculo. O SI utiliza o radiano como o unidade derivada para **ângulos**. Devido ao seu relacionamento com o comprimento do arco, radianos são uma unidade especial. Senos e cossenos cujos argumentos estão em radianos possuem propriedades analíticas particulares, tal como criar funções exponenciais em base e.

- A *medida em graus* de um ângulo é o comprimento de um arco, dividido pela circunferência de um círculo e multiplicada por 360. O símbolo de graus é um pequeno círculo sobrescrito °. 2π radianos é igual a 360° (um círculo completo), então um radiano é aproximadamente 57° e um grau é π/180 radianos.
- O *gradiano*, também chamado de grado, é uma medida angular onde o arco é divido pela circunferência e multiplicado por 400. Essa forma é usado mais em triangulação.
- O *ponto* é usado em navegação, e é definida como 1/32 do círculo, ou exatamente 11,25°.
- O *círculo completo* ou *volta completa* representa o número ou a fração de voltas completas. Por exemplo, π/2 radianos = 90° = 1/4 de um círculo completo.

O ângulo nulo é um ângulo que tem 0º.

A classificação dos ângulos é por sua (normalmente) circunferência em graus.

Tipos de ângulos

Com relação às suas medidas, os ângulos podem ser classificados como

- **Nulo:** Um ângulo nulo mede 0º ou 0 radianos.
- **Agudo:** Ângulo cuja medida é maior do que 0º (ou 0 radianos) e menor do que 90º (ou π/2 radianos).
- **Reto:** Um ângulo reto é um ângulo cuja medida é exatamente 90º (ou π/2 radianos). Assim os seus lados estão localizados em retas perpendiculares.
- **Obtuso:** É um ângulo cuja medida está entre 90º e 180º (ou entre π/2 e π radianos).
- **Raso:** Ângulo que mede exatamente 180º (ou π radianos), os seus lados são semi-retas opostas.
- **Côncavo:** Ângulo que mede mais de 180º (ou π radianos) e menos de 360º (ou 2π radianos).
- **Giro** ou **Completo:** Ângulo que mede 360º (ou 2π radianos). Também pode ser chamado de Ângulo de uma volta.

O ângulo reto (90º) é provavelmente o ângulo mais importante, pois o mesmo é encontrado em inúmeras aplicações práticas, como no encontro de uma parede com o chão, os pés de uma mesa em relação ao seu tampo, caixas de papelão, esquadrias de janelas, etc...

Um ângulo de 360 graus é o ângulo que completa o círculo. Após esta volta completa este ângulo coincide com o ângulo de zero graus mas possui a grandeza de 360 graus (360 º).

Observação: É possível obter ângulos maiores do que 360º mas os lados destes ângulos coincidirão com os lados dos ângulos menores do que 360º na medida que ultrapassa 360º. Para obter tais ângulos basta subtrair 360º do ângulo até que este seja menor do que 360º.

VELOCIDADE

A velocidade é uma grandeza vetorial, ou seja, tem direção e sentido, além do valor numérico. Duas velocidades só serão iguais se tiverem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

Velocidade é a grandeza física que informa com que rapidez e em qual direção um móvel muda de posição no tempo. Sua determinação pode ser feita por meio de um valor médio (que relaciona o deslocamento total de um corpo ao intervalo de tempo decorrido desde que ele deixou a posição inicial até quando chegou ao fim do percurso) ou do valor instantâneo, que diz como a posição varia de acordo com o tempo num determinado instante.

A velocidade média de um trem que percorre cem quilômetros em duas horas é de cinquenta quilômetros por hora. O valor médio da velocidade de um corpo é igual à razão entre o espaço por ele percorrido e o tempo gasto no deslocamento, de acordo com a fórmula $v = s/t$. A representação gráfica da velocidade deve ser feita, em cada ponto, por um segmento orientado que caracteriza seu módulo, sua direção (tangente à trajetória) e seu sentido (que coincide com o sentido do movimento). No intervalo de duas horas, a velocidade do trem pode ter variado para mais ou para menos em torno da velocidade média. A determinação da velocidade instantânea se faz por meio do cálculo da velocidade média num intervalo de tempo tão próximo de zero quanto possível. O cálculo diferencial, inventado por Isaac Newton com esse fim específico, permite determinar valores exatos da velocidade instantânea de um corpo.

Sistema Monetário Brasileiro: Moeda

MOEDA: (do latim "moneta") - deriva do nome da deusa JUNO MONETA, templo que manufaturavam as moedas romanas.

DINHEIRO: Sinônimo de moeda, origem do latim: **DENARIUS**.

Nos tempos primitivos a moeda era qualquer produto que servisse como instrumento de troca, Exemplos:

· Chá na Índia;
· Arroz no Japão;
· Sal e colares em certos países africanos;
· No Brasil, no Rio de Janeiro, o açúcar teve curso forçado como moeda, no Maranhão, o tecido de algodão substituiu o dinheiro em algumas ocasiões.

Em 1874, foi proibida no Brasil, a ***CIRCULAÇÃO*** dos gêneros alimentícios utilizados como moeda.

MOEDA: **Qualquer objeto que sirva como meio de troca em um sistema econômico;**

MOEDA METÁLICA: Cunhagem da moeda em metais preciosos, trazendo seu peso impresso. Hoje trazem impressos os seus valores;

PAPEL-MOEDA Emissão de recibos pelos cunhadores de moedas. Atualmente é a moeda escritural emitida pelo Banco Central de cada país.

MOEDA-ESCRITURAL: Foi criada pelo sistema bancário. Emprestavam os valores acima do lastro do sistema bancário.

ENCAIXE: BACEN (Banco Central) determina uma porcentagem que podem ser emprestada sobre os depósitos efetuados em um banco.

MOEDA **FIDUCIÁRIA**: Moeda que tem curso obrigatório, por Lei, em um país. No Brasil a Moeda Fiduciária é o Real - R$.

PRINCIPAIS FUNÇÕES DA MOEDA

· Intermediário de trocas;
· Medida de valor;
· Reserva de Valor;
· Liberatória;
· Padrão de pagamentos diferidos;
· Instrumento de poder.

Intermediário de Trocas: Esta função permite a superação de **economia de escambo** e a passagem à **economia monetária**;

Medida de valor: a utilização generalizada da moeda implica na criação de uma **unidade-padrão de medida** pela qual são convertidos os valores de todos os bens e serviços;

Reserva de valor: outra função exercida pela moeda, pois pode servir como uma**reserva de valor,** desde o momento que é recebida até o instante em que é gasta por quem a detenha.

Poder Liberatório: o poder de saldar dívidas, liquidar débitos, livrar seu detentor de sair de uma posição passiva. Esta particularidade da moeda dá-se o nome de: **poder liberatório**.

Padrão de pagamentos diferidos: À medida que a moeda tem, sob garantia do Estado, o poder de saldar dívidas, sendo ademais, uma medida de valor, ela torna, automaticamente, padrão de pagamentos diferidos. Esta função da moeda resulta de sua capacidade de facilitar a distribuição de pagamentos ao longo do tempo, que para concessão de crédito ou de diferentes formas de adiantamentos.

MERCADO MONETÁRIO: é onde se encontram a oferta e a demanda por moeda e se determina a taxa de juros de equilíbrio.

MOEDA ESCRITURAL: criada pelo sistema bancário, ao emprestar ou aplicar uma quantidade de moeda superior à que era originalmente introduzida no sistema bancário como depósito em um dos bancos componentes do sistema.

MOEDA METÁLICA: moeda cunhada em metal precioso que trazia impresso o seu peso. Atualmente, são cunhadas em metal não precioso, trazendo impresso o seu valor.

MOEDA-FIDUCIÁRIA: emitida pelos bancos centrais de cada país, tendo curso obrigatório por lei.

MOEDA: é todo objeto que serve para facilitar as trocas de bens e serviços numa economia.

OFERTA DE MOEDA: é a quantidade de moeda que o governo resolve emitir, num determinado período, através das autoridades monetárias.

PADRÃO-OURO: sistema monetário em que o papel-moeda emitido pelas autoridades monetárias tem uma relação com a quantidade de ouro que o país possui. Atualmente, não é mais seguido.

PAPEL-MOEDA: surgiu com a emissão de recibos pelos cunhadores, e assegurava ao seu portador certa quantidade de ouro expressa no documento. Atualmente, é a moeda emitida pelos bancos centrais de cada país.

POLÍTICA FISCAL: são medidas do governo que objetivam diminuir a demanda através da carga tributária.

POLÍTICA MONETÁRIA: são medidas adotadas pelo governo que visam reduzir a quantidade de moeda em circulação na economia.

CRÉDITO A CURTO PRAZO: é o crédito cujo período para pagamento é inferior a cinco meses.

CRÉDITO A LONGO PRAZO: é o crédito cujo período para pagamento é superior a cinco anos.

CRÉDITO A MÉDIO PRAZO: é o crédito cujo período para pagamento é superior a cinco meses e inferior a cinco anos.

CRÉDITO DE CONSUMO: concedido às pessoas para que elas possam adquirir bens de consumo.

CRÉDITO DE PRODUÇÃO: é concedido às empresas para que elas façam frente às despesas decorrentes da produção, como as despesas de investimento ou giro.

CRÉDITO PARA O ESTADO: é o crédito que o governo utiliza para as despesas de investimento ou consumo.

CRÉDITO: é a troca de um bem, ou a concessão de uma quantia de moeda, pela promessa de pagamento futuro.

CREDOR E DEVEDOR: são as pessoas envolvidas na operação de crédito. A primeira é a que empresta a quantia em moeda, sob a promessa de recebê-la no futuro. O devedor é a pessoa que deve pagar o empréstimo.

DEMANDA DE MOEDA PARA ESPECULAÇÃO: ocorre quando aquela parcela da renda das pessoas que poderia ser aplicada em títulos fica retida, pelo fato de a taxa de juros estar baixa e as pessoas aguardarem sua elevação para comprar títulos.

DEMANDA DE MOEDA PARA TRANSAÇÕES: como os recebimentos e pagamentos não são sincronizados, as pessoas precisam reter moeda para pagar suas despesas.

DEMANDA DE MOEDA POR PRECAUÇÃO: refere-se àquela parte da renda das pessoas retida para fazer frente a imprevistos.

Características essenciais da moeda.

As características mais relevantes da moeda, estudada desde Adam Smith são as seguintes:

· Indestrutibilidade e inalterabilidade;
· Homogeneidade;
· Divisibilidade;
·Transferibilidade;
· Facilidade de manuseio e transporte.

Indestrutibilidade e inalterabilidade: A moeda deve ser suficientemente durável, no sentido de que não destrua ou se deteriore com o seu manuseio. Além disso, Indestrutibilidade e inalterabilidade são obstáculos à sua falsificação, constituindo-se, em elementos de fundamental importância para a confiança e a aceitação geral da moeda.

Homogeneidade Duas unidades monetárias distintas, mas de igual valor, devem ser rigorosamente iguais. Ex. se o arroz fosse dado como moeda, aceita pelas duas partes, se o comprador pensasse em pagar sua dívida com arroz miúdos e quebrados, enquanto o vendedor imaginava receber arroz em grãos inteiros e graúdos. A possibilidade de tal equívoco criada pela inexistência de homogeneidade é um exemplo da necessidade de que duas unidades monetárias do mesmo valor sejam rigorosamente iguais.

Divisibilidade A moeda deve possuir múltiplos e submúltiplos em quantidade tal que as transações de grande porte assim como as pequenas possam ser realizadas sem nenhuma restrição. Outro aspecto é quanto ao fracionamento. (troco)

Transferibilidade Outra característica da moeda é quanto à facilidade com que deve processar-se sua transferência, de um detentor para outro.

Facilidade de manuseio e transporte o manuseio e o transporte da moeda não deve oferecer obstáculos, isto é, prejudicar sua utilização.

Meios de pagamentos. (Vide Revista Conjuntura econômica. Em Conjuntura Estatística: Moeda - Base monetária, meios de pagamentos e quase-moeda).

Meios de pagamentos.- Base monetária.
M1 - Papel-moeda em poder do público + os depósitos a vista (nos bancos comerciais);
M2 - M1 + títulos federais;
M3 - M2 + depósitos de poupança;
M4 - M3 + depósitos a prazo.
Alex Mendes

NÚMEROS E GRANDEZAS DIRETA E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS: RAZÕES E PROPORÇÕES, DIVISÃO PROPORCIONAL; REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA. PORCENTAGEM. JUROS.

RAZÕES E PROPORÇÕES

1. INTRODUÇÃO

Se a sua mensalidade escolar sofresse hoje um reajuste de R$ 80,00, como você reagiria? Acharia caro, normal, ou abaixo da expectativa? Esse mesmo valor, que pode parecer caro no reajuste da mensalidade, seria considerado insignificante, se tratasse de um acréscimo no seu salário.

Naturalmente, você já percebeu que os R$ 80,00 nada representam, se não forem comparados com um valor base e se não forem avaliados de acordo com a natureza da comparação. Por exemplo, se a mensalidade escolar fosse de R$ 90,00, o reajuste poderia ser considerado alto; afinal, o valor da mensalidade teria quase dobrado. Já no caso do salário, mesmo considerando o salário mínimo, R$ 80,00 seriam uma parte mínima. .

A fim de esclarecer melhor este tipo de problema, vamos estabelecer regras para comparação entre grandezas.

2. RAZÃO

Você já deve ter ouvido expressões como: "De cada 20 habitantes, 5 são analfabetos", "De cada 10 alunos, 2 gostam de Matemática", "Um dia de sol, para cada dois de chuva".

Em cada uma dessas. frases está sempre clara uma *comparação* entre dois números. Assim, no primeiro caso, destacamos 5 entre 20; no segundo, 2 entre 10, e no terceiro, 1 para cada 2.

Todas as comparações serão matematicamente expressas por um quociente chamado *razão.*

Teremos, pois:

De cada 20 habitantes, 5 são analfabetos.

Razão = $\frac{5}{20}$

De cada 10 alunos, 2 gostam de Matemática.

Razão = $\frac{2}{10}$

c. Um dia de sol, para cada dois de chuva.

Razão = $\frac{1}{2}$

> A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, é o quociente $\frac{a}{b}$, ou a : b.

Nessa expressão, a chama-se *antecedente e b, consequente.* Outros exemplos de razão:

Em cada 10 terrenos vendidos, um é do corretor.

Razão = $\frac{1}{10}$

Os times A e B jogaram 6 vezes e o time A ganhou todas.

Razão = $\frac{6}{6}$

3. Uma liga de metal é feita de 2 partes de ferro e 3 partes de zinco.

Razão = $\frac{2}{5}$ (ferro) Razão = $\frac{3}{5}$ - (zinco).

3. PROPORÇÃO

Há situações em que as grandezas que estão sendo comparadas podem ser expressas por razões de antecedentes e consequentes diferentes, porém com o mesmo quociente. Dessa maneira, quando uma pesquisa escolar nos revelar que, de 40 alunos entrevistados, 10 gostam de Matemática, poderemos supor que, se forem entrevistados 80 alunos da mesma escola, 20 deverão gostar de Matemática. Na verdade, estamos afirmando que 10 estão representando em 40 o mesmo que 20 em 80.

Escrevemos: $\frac{10}{40} = \frac{20}{80}$

A esse tipo de igualdade entre duas razões dá-se o nome de proporção.

> **Dadas duas razões** $\frac{a}{b}$ **e** $\frac{c}{d}$, **com** b **e** $d \neq 0$**,**
>
> **teremos uma *proporção* se** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$**.**

Na expressão acima, a e c são chamados de *antecedentes e* b e d de consequentes**.**.

A proporção também pode ser representada como **a : b = c : d.** Qualquer uma dessas expressões é lida assim: a está para b assim como c está para d. E importante notar que b e c são denominados *meios e a e d, extremos.*

Exemplo:

A proporção $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$, ou 3 **:** 7 **: :** 9 **:** 21, é lida da seguinte forma: 3 está para 7 assim como 9 está para 21. Temos ainda:

3 e 9 como antecedentes,
7 e 21 como consequentes,
7 e 9 como meios e
3 e 21 como extremos.

3.1 PROPRIEDADE FUNDAMENTAL

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc\,; b, d \neq 0}$$

Exemplo:

Se $\frac{6}{24} = \frac{24}{96}$, então $6 \cdot 96 = 24 \cdot 24 = 576$.

3.2 ADIÇÃO (OU SUBTRAÇÃO) DOS ANTECEDENTES E CONSEQUENTES

Em toda proporção, a soma (ou diferença) dos antecedentes está para a soma (ou diferença) dos consequentes assim como cada antecedente está para seu consequente. Ou seja:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entao } \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \\ \text{ou } \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{array}}$$

Essa propriedade é válida desde que nenhum denominador seja nulo.

Exemplo:

$$\frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{21 + 7}{12 + 4} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{21 - 7}{12 - 4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

GRANDEZAS PROPORCIONAIS E DIVISÃO PROPORCIONAL

1. INTRODUÇÃO:

No dia-a-dia, você lida com situações que envolvem números, tais como: preço, peso, salário, dias de trabalho, índice de inflação, velocidade, tempo, idade e outros. Passaremos a nos referir a cada uma dessas situações mensuráveis como uma *grandeza.* Você sabe que cada grandeza não é independente, mas vinculada a outra conveniente. O salário, por exemplo, está relacionado a dias de trabalho. Há pesos que dependem de idade, velocidade, tempo etc. Vamos analisar dois tipos básicos de dependência entre grandezas proporcionais.

2. PROPORÇÃO DIRETA

Grandezas como trabalho produzido e remuneração obtida são, quase sempre, *diretamente proporcionais.* De fato, se você receber R$ 2,00 para cada folha que datilografar, sabe que deverá receber R$ 40,00 por 20 folhas datilografadas.

Podemos destacar outros exemplos de grandezas diretamente proporcionais:

Velocidade média e distância percorrida, pois, se você dobrar a velocidade com que anda, deverá, num mesmo tempo, dobrar a distância percorrida.

Área e preço de terrenos.

Altura de um objeto e comprimento da sombra projetada por ele.

Assim:

Duas grandezas São *diretamente proporcionais* quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra diminui (ou aumenta) nessa mesma razão.

3. PROPORÇÃO INVERSA

Grandezas como tempo de trabalho e número de operários para a mesma tarefa são, em geral, *inversamente proporcionais.* Veja: Para uma tarefa que 10 operários executam em 20 dias, devemos esperar que 5 operários a realizem em 40 dias.

Podemos destacar outros exemplos de grandezas inversamente proporcionais:

Velocidade média e tempo de viagem, pois, se você dobrar a velocidade com que anda, mantendo fixa a distância a ser percorrida, reduzirá o tempo do percurso pela metade.

Número de torneiras de mesma vazão e tempo para encher um tanque, pois, quanto mais torneiras estiverem abertas, menor o tempo para completar o tanque.

Podemos concluir que :

Duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra diminui (ou aumenta) na mesma razão.

Vamos analisar outro exemplo, com o objetivo de reconhecer a natureza da proporção, e destacar a razão. Considere a situação de um grupo de pessoas que, em férias, se instale num acampamento que cobra R$100,00 a diária individual.

Observe na tabela a relação entre o número de pessoas e a despesa diária:

Número de pessoas	1	2	4	5	10
Despesa diária (R$)	100	200	400	500	1.000

Você pode perceber na tabela que a razão de aumento do número de pessoas é a mesma para o aumento da despesa. Assim, se dobrarmos o número de pessoas, dobraremos ao mesmo tempo a despesa. Esta é portanto, uma proporção direta, ou melhor, as grandezas *número de pessoas e despesa diária* são diretamente proporcionais.

Suponha também que, nesse mesmo exemplo, a quantia a ser gasta pelo grupo seja sempre de R$2.000,00. Perceba, então, que o tempo de permanência do grupo dependerá do número de pessoas.

Analise agora a tabela abaixo :

Número de pessoas	1	2	4	5	10
Tempo de permanência (dias)	20	10	5	4	2

Note que, se dobrarmos o número de pessoas, o tempo de permanência se reduzirá à metade. Esta é, portanto, uma proporção inversa, ou melhor, as grandezas *número de pessoas e número de dias* são inversamente proporcionais.

4. DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

4. 1 Diretamente proporcional

Duas pessoas, A e B, trabalharam na fabricação de um mesmo objeto, sendo que A o fez durante 6 horas e B durante 5 horas. Como, agora, elas deverão dividir com justiça os R$ 660,00 apurados com sua venda? Na verdade, o que cada um tem a receber deve ser diretamente proporcional ao tempo gasto na confecção do objeto.

> Dividir um número em partes diretamente proporcionais a outros números dados é encontrar partes desse número que sejam diretamente proporcionais aos números dados e cuja soma reproduza o próprio número.

No nosso problema, temos de dividir 660 em partes diretamente proporcionais a 6 e 5, que são as horas que A e B trabalharam.

Vamos formalizar a divisão, chamando de x o que A tem a receber, e de y o que B tem a receber.

Teremos então:

$$\begin{cases} X + Y = 660 \\ \dfrac{X}{6} = \dfrac{Y}{5} \end{cases}$$

Esse sistema pode ser resolvido, usando as propriedades de proporção. Assim:

$\dfrac{X + Y}{6 + 5} =$ Substituindo X + Y por 660, vem $\dfrac{660}{11} = \dfrac{X}{6} \Rightarrow X = \dfrac{6 \cdot 660}{11} = 360$

Como X + Y = 660, então Y = 300

Concluindo, A deve receber R$ 360,00 enquanto B, R$ 300,00.

4.2 INVERSAMENTE PROPORCIONAL

E se nosso problema não fosse efetuar divisão em partes diretamente proporcionais, mas sim inversamente? Por exemplo: suponha que as duas pessoas, A e B, trabalharam durante um mesmo período para fabricar e vender por R$ 160,00 um certo artigo. Se A chegou atrasado ao trabalho 3 dias e B, 5 dias, como efetuar com justiça a divisão? O problema agora é dividir R$ 160,00 em partes inversamente proporcionais a 3 e a 5, pois deve ser levado em consideração que aquele que se atrasa mais deve receber menos.

> Dividir um número em partes inversamente proporcionais a outros números dados é encontrar partes desse número que sejam diretamente proporcionais aos inversos dos números dados e cuja soma reproduza o próprio número.

No nosso problema, temos de dividir 160 em partes inversamente proporcionais a 3 e a 5, que são os números de atraso de A e B. Vamos formalizar a divisão, chamando de x o que A tem a receber e de y o que B tem a receber.

$$\text{Teremos:} \begin{cases} x + y = 160 \\ \dfrac{x}{\frac{1}{3}} = \dfrac{y}{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\frac{x + y}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x + y}{\frac{8}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{3}}$$

Mas, como x + y = 160, então

$$\frac{160}{\frac{8}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{160}{\frac{8}{15}} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 160 \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow x = 100$$

Como x + y = 160, então y = 60. Concluindo, A deve receber R$ 100,00 e B, R$ 60,00.

4.3 DIVISÃO PROPORCIONAL COMPOSTA

Vamos analisar a seguinte situação: Uma empreiteira foi contratada para pavimentar uma rua. Ela dividiu o trabalho em duas turmas, prometendo pagá-las proporcionalmente. A tarefa foi realizada da seguinte maneira: na primeira turma, 10 homens trabalharam durante 5 dias; na segunda turma, 12 homens trabalharam durante 4 dias. Estamos considerando que os homens tinham a mesma capacidade de trabalho. A empreiteira tinha R$ 29.400,00 para dividir com justiça entre as duas turmas de trabalho. Como fazê-lo?

Essa divisão não é de mesma natureza das anteriores. Trata-se aqui de uma divisão composta em partes proporcionais, já que os números obtidos deverão ser proporcionais a dois números e também a dois outros.

Na primeira turma, 10 homens trabalharam 5 dias, produzindo o mesmo resultado de 50 homens, trabalhando por um dia. Do mesmo modo, na segunda turma, 12 homens trabalharam 4 dias, o que seria equivalente a 48 homens trabalhando um dia.

Para a empreiteira, o problema passaria a ser, portanto, de divisão diretamente proporcional a 50 (que é 10 . 5), e 48 (que é 12 . 4).

Para dividir um número em partes de tal forma que uma delas seja proporcional a *m* e *n* e a outra a *p* e *q*, basta divida esse número em partes proporcionais a *m* . *n* e *p* . *q*.

Convém lembrar que efetuar uma divisão em partes inversamente proporcionais a certos números é o mesmo que fazer a divisão em partes diretamente proporcionais ao inverso dos números dados.

Resolvendo nosso problema, temos:

Chamamos de x: a quantia que deve receber a primeira turma; y: a quantia que deve receber a segunda turma. Assim:

$$\frac{x}{10 \cdot 5} = \frac{y}{12 \cdot 4} \text{ ou } \frac{x}{50} = \frac{y}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{x + y}{50 + 48} = \frac{x}{50}$$

$$\text{Como } x + y = 29400, \text{ então } \frac{29400}{98} = \frac{x}{50}$$

$$\Rightarrow x = \frac{29400 \cdot 50}{98} \Rightarrow 15.000$$

Portanto y = 14 400.

Concluindo, a primeira turma deve receber R$ 15.000,00 da empreiteira, e a segunda, R$ 14.400,00.

Observação: Firmas de projetos costumam cobrar cada trabalho usando como unidade o *homem-hora.* O nosso problema é um exemplo em que esse critério poderia ser usado, ou seja, a unidade nesse caso seria *homem-dia.* Seria obtido o valor de R$ 300,00 que é o resultado de 15 000 : 50, ou de 14 400 : 48.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Retomando o problema do automóvel, vamos resolvê-lo com o uso da regra de três de maneira prática.

Devemos dispor as grandezas, bem como os valores envolvidos, de modo que possamos reconhecer a natureza da proporção e escrevê-la.

Assim:

Grandeza 1: tempo (horas)	Grandeza 2: distância percorrida (km)
↓ 6	↓ 900
8	x

Observe que colocamos na mesma linha valores que se correspondem: 6 horas e 900 km; 8 horas e o valor desconhecido.

Vamos usar setas indicativas, como fizemos antes, para indicar a natureza da proporção. Se elas estiverem no mesmo sentido, as grandezas são diretamente proporcionais; se em sentidos contrários, são inversamente proporcionais.

Nesse problema, para estabelecer se as setas têm o mesmo sentido, foi necessário responder à pergunta: "Considerando a mesma velocidade, se aumentarmos o tempo, aumentará a distância percorrida?" Como a resposta a essa questão é afirmativa, as grandezas são diretamente proporcionais.

Já que a proporção é direta, podemos escrever:

$$\frac{6}{8} = \frac{900}{x}$$

Então: $6 \cdot x = 8 \cdot 900 \Rightarrow x = \frac{7200}{6} = 1\,200$

Concluindo, o automóvel percorrerá 1 200 km em 8 horas.

Vamos analisar outra situação em que usamos a regra de três.

Um automóvel, com velocidade média de 90 km/h, percorre um certo espaço durante 8 horas. Qual será o tempo necessário para percorrer o mesmo espaço com uma velocidade de 60 km/h?

Grandeza 1: tempo (horas)	Grandeza 2: velocidade (km/h)
↑ 8	↓ 90
x	60

A resposta à pergunta "Mantendo o mesmo espaço percorrido, se aumentarmos a velocidade, o tempo aumentará?" é negativa. Vemos, então, que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais.

Como a proporção é inversa, será necessário invertermos a ordem dos termos de uma das colunas, tornando a proporção direta. Assim:

$$\uparrow\begin{array}{c}8\\x\end{array}\qquad\qquad\uparrow\begin{array}{c}60\\90\end{array}$$

Escrevendo a proporção, temos:

$$\frac{8}{x}=\frac{60}{90}\Rightarrow x=\frac{8\cdot 90}{60}=12$$

Concluindo, o automóvel percorrerá a mesma distância em 12 horas.

> Regra de três simples é um processo prático utilizado para resolver problemas que envolvam pares de grandezas direta ou inversamente proporcionais. Essas grandezas formam uma proporção em que se conhece três termos e o quarto termo é procurado.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Vamos agora utilizar a regra de três para resolver problemas em que estão envolvidas mais de duas grandezas proporcionais. Como exemplo, vamos analisar o seguinte problema.

Numa fábrica, 10 máquinas trabalhando 20 dias produzem 2 000 peças. Quantas máquinas serão necessárias para se produzir 1 680 peças em 6 dias?

Como nos problemas anteriores, você deve verificar a natureza da proporção entre as grandezas e escrever essa proporção. Vamos usar o mesmo modo de dispor as grandezas e os valores envolvidos.

Grandeza 1: número de máquinas	Grandeza 2: dias	Grandeza 3: número de peças
$\downarrow$ 10 x	$\uparrow$ 20 6	$\downarrow$ 2000 1680

Natureza da proporção: para estabelecer o sentido das setas é necessário fixar uma das grandezas e relacioná-la com as outras.

Supondo fixo o número de dias, responda à questão: "Aumentando o número de máquinas, aumentará o número de peças fabricadas?" A resposta a essa questão é afirmativa. Logo, as grandezas 1 e 3 são *diretamente proporcionais.*

Agora, supondo fixo o número de peças, responda à questão: "Aumentando o número de máquinas, aumentará o número de dias necessários para o trabalho?" Nesse caso, a resposta é negativa. Logo, as grandezas 1 e 2 são *inversamente proporcionais.*

Para se escrever corretamente a proporção, devemos fazer com que as setas fiquem no mesmo sentido, invertendo os termos das colunas convenientes. Naturalmente, no nosso exemplo, fica mais fácil inverter a coluna da grandeza 2.

$$\downarrow\begin{array}{c}10\\x\end{array}\qquad\downarrow\begin{array}{c}6\\20\end{array}\qquad\downarrow\begin{array}{c}2000\\1680\end{array}$$

Agora, vamos escrever a proporção:

$$\frac{10}{x}=\frac{6}{20}\cdot\frac{2000}{1680}$$

(Lembre-se de que uma grandeza proporcional a duas outras é proporcional ao produto delas.)

$$\frac{10}{x}=\frac{12000}{33600}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 33600}{12000}=28$$

Concluindo, serão necessárias 28 máquinas.

PORCENTAGEM

1. INTRODUÇÃO

Quando você abre o jornal, liga a televisão ou olha vitrinas, frequentemente se vê às voltas com expressões do tipo:

- "O índice de reajuste salarial de março é de 16,19%."
- "O rendimento da caderneta de poupança em fevereiro foi de 18,55%."
- "A inflação acumulada nos últimos 12 meses foi de 381,1351%.
- "Os preços foram reduzidos em até 0,5%."

Mesmo supondo que essas expressões não sejam completamente desconhecidas para uma pessoa, é importante fazermos um estudo organizado do assunto *porcentagem,* uma vez que o seu conhecimento é ferramenta indispensável para a maioria dos problemas relativos à Matemática Comercial.

2. PORCENTAGEM

O estudo da porcentagem é ainda um modo de comparar números usando a proporção direta. Só que uma das razões da proporção é um fração de denominador 100. Vamos deixar isso mais claro: numa situação em que você tiver de calcular 40% de R$ 300,00, o seu trabalho será determinar um valor que represente, em 300, o mesmo que 40 em 100. Isso pode ser resumido na proporção:

$$\frac{40}{100}=\frac{x}{300}$$

Então, o valor de x será de R$ 120,00.

Sabendo que em cálculos de porcentagem será necessário utilizar sempre proporções diretas, fica claro, então, que qualquer problema dessa natureza poderá ser resolvido com regra de três simples.

3. TAXA PORCENTUAL

O uso de regra de três simples no cálculo de porcentagens é um recurso que torna fácil o entendimento do assunto, mas não é o único caminho possível e nem sequer o mais prático.

Para simplificar os cálculos numéricos, é necessário, inicialmente, dar nomes a alguns termos. Veremos isso a partir de um exemplo.

Exemplo:

Calcular 20% de 800.

Calcular 20%, ou $\frac{20}{100}$ de 800 é dividir 800 em 100 partes e tomar 20 dessas partes. Como a centésima parte de 800 é 8, então 20 dessas partes será 160.

Chamamos: 20% de *taxa porcentual;* 800 de *principal*; 160 de *porcentagem.*

Temos, portanto:

- *Principal:* número sobre o qual se vai calcular a porcentagem.
- *Taxa*: valor fixo, tomado a partir de cada 100 partes do principal.
- *Porcentagem:* número que se obtém somando cada uma das 100 partes do principal até conseguir a taxa.

A partir dessas definições, deve ficar claro que, ao calcularmos uma porcentagem de um principal conhecido, não é necessário utilizar a montagem de uma regra de três. Basta dividir o principal por 100 e tomarmos tantas destas partes quanto for a taxa. Vejamos outro exemplo.

Exemplo:

Calcular 32% de 4.000.

Primeiro dividimos 4 000 por 100 e obtemos 40, que é a centésima parte de 4 000. Agora, somando 32 partes iguais a 40, obtemos 32 . 40 ou 1 280 que é a resposta para o problema.

Observe que dividir o principal por 100 e multiplicar o resultado dessa divisão por 32 é o mesmo que multiplicar o principal por $\frac{32}{100}$ ou 0,32. Vamos usar esse raciocínio de agora em diante:

Porcentagem = taxa X principal

JUROS SIMPLES

Consideremos os seguintes fatos:

- Emprestei R$ 100 000,00 para um amigo pelo prazo de 6 meses e recebi, ao fim desse tempo, R$ 24 000,00 de juros.
- O preço de uma televisão, a vista, é R$ 4.000,00. Se eu comprar essa mesma televisão em 10 prestações, vou pagar por ela R$ 4.750,00. Portanto, vou pagar R$750,00 de juros.

No 1.° fato, R$ 24 000,00 é uma compensação em dinheiro que se recebe por emprestar uma quantia por determinado tempo.

No 2.° fato, R$ 750,00 é uma compensação em dinheiro que se paga quando se compra uma mercadoria a prazo.

Assim:

- Quando depositamos ou emprestamos certa quantia por determinado tempo, recebemos uma compensação em dinheiro.
- Quando pedimos emprestada certa quantia por determinado tempo, pagamos uma compensação em dinheiro.
- Quando compramos uma mercadoria a prazo, pagamos uma compensação em dinheiro.

Pelas considerações feitas na introdução, podemos dizer que :

Juro é uma compensação em dinheiro que se recebe ou que se paga.

Nos problemas de juros simples, usaremos a seguinte nomenclatura: dinheiro depositado ou emprestado denomina-se capital.

O porcentual denomina-se taxa e representa o juro recebido ou pago a cada R$100,00, em 1 ano.

O período de depósito ou de empréstimo denomina-se tempo.

A compensação em dinheiro denomina-se juro.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE JUROS SIMPLES

Vejamos alguns exemplos:

1.° exemplo: Calcular os juros produzidos por um capital de R$ 720 000,00, empregado a 25% ao ano, durante 5 anos.

De acordo com os dados do problema, temos:

25% em 1ano $\Rightarrow$ 125% (25 . 5) em 5 anos

$125\% = \frac{125}{100} = 1,25$

Nessas condições, devemos resolver o seguinte problema:

Calcular 125% de R$ 720 000,00. Dai:

x = 125% de 720 000 =

1,25 . 720 000 = 900 000.

900.000 – 720.000 = 180.000

Resposta: Os juros produzidos são de R$ 180.000,00

2.° exemplo: Apliquei um capital de R$ 10.000,00 a uma taxa de 1,8% ao mês, durante 6 meses. Quanto esse capital me renderá de juros?

1,8% em 1 mês $\Rightarrow$ 6 . 1,8% = 10,8% em 6 meses

$10,8\% = \frac{10,8}{100} = 0,108$

Dai:
x = 0,108 . 10 000 = 1080
Resposta: Renderá juros de R$ 1 080,00.

3.° exemplo: Tomei emprestada certa quantia durante 6 meses, a uma taxa de 1,2% ao mês, e devo pagar R$ 3 600,00 de juros. Qual foi a quantia emprestada?
De acordo com os dados do problema:
1,2% em 1 mês $\Rightarrow$ 6 . 1,2% = 7,2% em 6 meses

$7{,}2\% = \dfrac{7{,}2}{100} = 0{,}072$

Nessas condições, devemos resolver o seguinte problema:
3 600 representam 7,2% de uma quantia x. Calcule x.

Dai:
$3600 = 0{,}072 \,.\, x \Rightarrow 0{,}072x = 3\,600 \Rightarrow$

$x = \dfrac{3600}{0{,}072}$

x = 50 000
Resposta: A quantia emprestada foi de R$ 50.000,00.

4.° exemplo: Um capital de R$ 80 000,00, aplicado durante 6 meses, rendeu juros de R$ 4 800,00. Qual foi a taxa (em %) ao mês?
De acordo com os dados do problema:
x% em 1 mês $\Rightarrow$ (6x)% em 6 meses
Devemos, então, resolver o seguinte problema:
4 800 representam quantos % de 80 000?
Dai:
$4\,800 = 6x \,.\, 80\,000 \Rightarrow 480\,000\,x = 4\,800$

$x = \dfrac{4\,800}{480\,000} \Rightarrow x = \dfrac{48}{4\,800} \Rightarrow x = 0{,}01$

$0{,}01 = \dfrac{1}{100} = 1\ \%$

Resposta: A taxa foi de 1% ao mês.

Resolva os problemas:
- Emprestando R$ 50 000,00 à taxa de 1,1% ao mês, durante 8 meses, quanto deverei receber de juros?
- Uma pessoa aplica certa quantia durante 2 anos, à taxa de 15% ao ano, e recebe R$ 21 000,00 de juros. Qual foi a quantia aplicada?
- Um capital de R$ 200 000,00 foi aplicado durante 1 ano e 4 meses à taxa de 18% ao ano. No final desse tempo, quanto receberei de juros e qual o capital acumulado (capital aplicado + juros)?
- Um aparelho de televisão custa R$ 4 500,00. Como vou comprá-lo no prazo de 10 meses, a loja cobrará juros simples de 1,6% ao mês. Quanto vou pagar por esse aparelho.
- A quantia de R$ 500 000,00, aplicada durante 6 meses, rendeu juros de R$ 33 000,00. Qual foi a taxa (%) mensal da aplicação
- Uma geladeira custa R$ 1 000,00. Como vou compra-la no prazo de 5 meses, a loja vendedora cobrara juros simples de 1,5% ao mês. Quanto pagarei por essa geladeira e qual o valor de cada prestação mensal, se todas elas são iguais.
- Comprei um aparelho de som no prazo de 8 meses. O preço original do aparelho era de R$ 800,00 e os juros simples cobrados pela firma foram de R$ 160,00. Qual foi a taxa (%) mensal dos juros cobrados?

Respostas
R$ 4 400,00
R$ 70 000,00
R$ 48 000,00 e R$ 248 000,00
R$ 5 220,00
1,1%
R$ 1 075,00 e R$ 215,00
2,5%

JUROS COMPOSTOS

1. Introdução
O dinheiro e o tempo são dois fatores que se encontram estreitamente ligados com a vida das pessoas e dos negócios. Quando são gerados excedentes de fundos, as pessoas ou as empresas, aplicam-no a fim de ganhar juros que aumentem o capital original disponível; em outras ocasiões, pelo contrário, tem-se a necessidade de recursos financeiros durante um período de tempo e deve-se pagar juros pelo seu uso.

Em período de curto-prazo utiliza-se, geralmente, como já se viu, os juros simples. Já em períodos de longo-prazo, utiliza-se, quase que exclusivamente, os juros compostos.

2. Conceitos Básicos
No regime dos juros simples, o capital inicial sobre o qual calculam-se os juros, permanece sem variação alguma durante todo o tempo que dura a operação. No regime dos juros compostos, por sua vez, os juros que vão sendo gerados, vão sendo acrescentados ao capital inicial, em períodos determinados e, que por sua vez, irão gerar um novo juro adicional para o período seguinte.

Diz-se, então, que os juros capitalizam-se e que se está na presença de uma operação de juros compostos.

Nestas operações, o capital não é constante através do tempo; pois aumenta ao final de cada período pela adição dos juros ganhos de acordo com a taxa acordada.

Esta diferença pode ser observada através do seguinte exemplo:

Exemplo 1: Suponha um capital inicial de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de 30.0 % a.a. por um período de 3 anos a juros simples e compostos. Qual será o total de juros ao final dos 3 anos sob cada um dos rearmes de juros?

Pelo regime de juros simples:
J = c . i . t = R$ 1.000,00 (0,3) (3) = R$ 900,00

Pelo regime de juros compostos:

$$J = C_o\left[(1+i)^n - 1\right] =$$

$$J = R\$1.000{,}00\left[(1{,}3)^3 - 1\right] = R\$1.197{,}00$$

Demonstrando agora, em detalhes, o que se passou com os cálculos, temos:

Ano	Juros simples	Juros Compostos
1	R$ 1.000,00(0,3) = R$ 300,00	R$ 1.000,00(0,3) = R$ 300,00
2	R$ 1.000,00(0,3) = R$ 300,00	R$ 1.300,00(0,3) = R$ 390,00
3	R$ 1.000,00(0,3) = R$ 300,00	R$ 1.690,00(0,3) = R$ 507,00
	R$ 900,00	R$ 1.197,00

Vamos dar outro exemplo de juros compostos:

Suponhamos que você coloque na poupança R$ 100,00 e os juros são de 10% ao mês.

Decorrido o primeiro mês você terá em sua poupança: 100,00 + 10,00 = 110,00

No segundo mês você terá:110,00 + 11,00 =111,00

No terceiro mês você terá: 111,00 + 11,10 = 111,10

E assim por diante.

Para se fazer o cálculo é fácil: basta calcular os juros de cada mês e adicionar ao montante do mês anterior.

DESCONTO SIMPLES

Desconto é uma operação de crédito que se realiza, principalmente, em instituições financeiras bancárias ou monetárias, e consiste em que estas instituições aceitem títulos de crédito, tais como notas promissórias e duplicatas mercantis, entre outros antes da data de seus vencimentos, e descontem de seus valores nominais, o equivalente aos juros do mercado mais comissões de serviço, além do IOF - Imposto sobre Operações Financeiras. Este imposto é da União e a instituição de crédito apenas recolhe-o do cliente financiado, creditando o erário público. Dependendo da política de crédito do governo e do momento econômico, os bancos costumam exigir dos financiados uma manutenção de saldo médio, deixando parte do empréstimo vinculado à conta corrente. Esta operação é chamada de reciprocidade bancária. Depois de todos estes descontos sobre o valor nominal do título, ao financiado resta o valor líquido recebido. Esta modalidade de desconto, é a que denominamos de desconto comercial, ou bancário, ou por fora.

Desconto Comercial, Bancário ou Por Fora

Esta modalidade de desconto é a mais utilizada, a curto prazo, no Brasil. As fórmulas utilizadas são as seguintes:

e $\boxed{\mathbf{VP = VF(1 - d\ .\ n)}}$

onde:

D_f = valor do desconto efetuado.
VF = valor nominal do título, ou seja, o valor futuro.
n = prazo da operação ou prazo de vencimento do título.
d = taxa de juros utilizada no desconto do título.
VP = valor presente ou valor líquido recebido pelo título descontado.

Exemplo 1 - A Cia. Descontada descontou um título no Banco Recíproco com o valor nominal de $2.000,00 vencível dentro de 4 meses, à taxa contratada de 5% a.a. Calcular o desconto comercial e o valor liquido recebido pela empresa.

Resolução:

Para calcular o desconto comercial, vamos utilizar a fórmula:

D_f = VF. d . n. = 2.000 (0,05) (4) = 400

A seguir, vamos calcular o valor liquido recebido, usando a fórmula:

VP = VF(1 – d . n) = 2.000(1 - 0,20) =
VP = 1.600

Exemplo 2 - Uma empresa descontou em um banco uma duplicata. Recebeu $166.667,00. Se este tipo de desconto é de 60% a.a., e o vencimento da duplicata era de 4 meses depois de seu desconto, qual era o valor nominal do título na data de seu vencimento?

Resolução:

Vamos utilizar a fórmula do desconto:

$$\boxed{D_f = \frac{VP \cdot d \cdot n}{1 - d \cdot n}}$$

VP = $166.667 d = 0,6 a.a. n = 4/12 =1/3

Sabendo-se que D_f = VP **.** d **.** n e que VF = VP + D_f vem:

$$D_f = (VF + D_f)d \cdot n = VP \cdot d \cdot n + D \cdot d \cdot n$$

$$D - D \cdot d \cdot n = VP \cdot d \cdot n$$

$$D(1 - d \cdot n) = VP \cdot d \cdot n \therefore D_f = \frac{VP \cdot d \cdot n}{(1 - d \cdot n)}$$

$$D_f = \frac{166.667(0{,}6)(1/3)}{1 - (0{,}6)(1/3)} = \frac{33.333}{0{,}8} =$$

D_f =$41.667,00

Utilizando a fórmula **VF = VP + D**, temos:
VF = 166.667, + 41.667, = $208.334,00

Exemplo 3 - Uma empresa desconta um titulo, pelo qual recebe $87.912,00. A taxa contratada é de 55% a.a. e o valor nominal do titulo é de $100.000,00 . Calcular quanto tempo falta para o vencimento do título.

Resolução:
VF = $100.000 d = 0,55 a.a. VP = $ 87.912
D_f = 100.000 - 87.912 = 12.088

Usando a fórmula **D_f = VF. d . n,** temos:

$$12.088 = 100.000(0{,}55)n \ \therefore \ n = \frac{12.088}{55.000} =$$

n = 0,21978 anos (12 meses) = 2,64 meses, n = 0,64 meses = 19,2 dias ≅ 19 dias

o prazo é de 2 meses e 19 dias.

2. Desconto Racional ou por Dentro

Esta modalidade de desconto simples, praticamente, não é utilizada no Brasil, em operações de desconto e, vamos ver porque, mais adiante. Este tipo de desconto representa, precisamente, o conceito de juros, já que é mensurado a partir do capital realmente utilizado na operação.

As fórmulas utilizadas são:

$D_d = VP \cdot i \cdot n$ ou $D_d = \dfrac{VF \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}$

Exemplo 4 - Se um banco realiza operações de desconto à taxa de juros de 50% a.a. e uma empresa deseja descontar um título, com data de vencimento de 15 de agosto, em 15 de junho, de valor nominal de $185.000,00 qual será o valor líquido a receber?

Resolução:
VF = $185.000,00 n = 2/12 = 1/6 = 0,50
VP = valor Líquido Recebido
Como neste caso temos o VF, vamos utilizar a fórmula do **VP = D_d**

$$D_d = \frac{185.000(0,5)(1/6)}{1 + (0,5)(1/6)} = \frac{15.417}{1,083333} = \$14.231$$

VL = $185.000 - $14.231 = $170.769, (valor líquido recebido)

Podemos observar que, no regime de juros simples, o desconto racional aplicado ao valor nominal é igual dos juros devidos sobre o capital inicial (VP), que é o valor descontado (VF – D_d), desde que ambos sejam calculados à mesma taxa (taxa de juros da operação = taxa).

Exemplo 5 - Uma empresa descontou em um banco uma duplicata. Recebeu $166.677,00. Se a taxa de desconto é de 60% a.a. e o vencimento do título era quatro meses depois de seu desconto, qual era o valor nominal do título na data de seu vencimento?

Resolução:
VP = 166.677, i = 0,60 n = 1/3
Fórmula: VF = VP(1 + i . n)
VF = 166.677(1 +(0,6) (1/3) = $200.000

Comparando este exemplo com o exemplo 1.9.2., observamos a diferença, no valor dos juros, entre a modalidade de desconto comercial e o desconto racional:

Juros pelo desconto racional:
$200.000 - $166.667 = $ 33.333
$208.333 - $166.667 = $ 41.667

Esta é uma das principais razões que justificam a escolha, pelos bancos, pela utilização do desconto bancário, ao invés do desconto racional: maior taxa de desconto sobre o mesmo valor descontado.

3. Desconto Comercial e a Taxa de IOF

O Imposto sobre Operações Financeiras é defini do pelo Banco Central do Brasil e, na data que elaborávamos este trabalho, as alíquotas vigentes em relação aos tipos de operações eram as seguintes:

TIPO	I O F
Operações até 364 dias	0,0041% ao dia
Operações com prazo 360 dias	1,5% no ato
Crédito Direto ao Consumidor (CDC)	0,3% a.m. e máx. 3,6%
Desconto de Duplicatas	0,0041% ao dia
Repasses governamentais	1,5% no ato

Exemplo 1 - Considerando uma situação de desconto de duplicata com as seguintes condições:
valor nominal do título = 100.000
Prazo = 60 dias; IOF = 0,0041% ao dia;
Taxa mensal = 5%.
Calcular a taxa de custo efetivo e o desconto no ato.

Resolução:
Temos: D_1=C . i . n/100 =10.000

$$D_2 = \frac{C \cdot IOF \cdot n}{100} = \frac{100.000(0,0041)(60)}{100} = D_2 = 246,00$$

Onde: D_1 = desconto de juros, D_2 = desconto de IOF
O desconto total será: $D_1 + D_2$ =10.000 + 246 =10.246
O valor descontado do título = Valor nominal - desconto total =100.000 - 10.246 = 89.754
Custo efetivo = $(100.000/89.754)^{1/2}$ - 1 = 0,055 ou 5,5% ao mês.

4. Saldo Médio para Reciprocidade

O saldo médio, eventualmente, solicitado pela instituição financeira, como reciprocidade, influi no custo total da operação de desconto de títulos.

Exemplo 1 - A Cia Emperrada descontou no Banco Desconta Tudo, uma duplicata. A operação teve os seguintes parâmetros:
Valor nominal do título = $10.000.
Prazo de vencimento do título = 3 meses (90 dias)
IOF = 0,0041% ao dia, Taxa de desconto = 6% ao mês

Determinar o fluxo de caixa da empresa e o custo efetivo anual, nas hipóteses de:
- não haver exigência de saldo médio (reciprocidade); e
- exigência de um saldo médio de 30%

Resolução:
a) não haver existência de reciprocidade
Valor do IOF, em $: IOF = 10.000(0,0041/100) (90) = $36,90
Valor do Desconto: D = 10.000 / 6 / 3000) (90) = $1.800
Valor Líquido, na data zero: 10.000 - IOF - D =10.000 - 36,90 - 1.800 = 58,163,10
Valor a desembolsar, dentro de 90 dias =10.000

Primeiramente, calculamos o custo mensal efetivo

$$(i_{em}) = i_{em} = \frac{(\text{Valor nominal})^{1/3}}{\text{Valor do desconto}} - 1 =$$

$$i_{em} = \frac{(10.000,00)^{1/3}}{8.163,10} - 1 = 0,07 \text{ ou } 7\% \text{ ao mes}$$

$$i_{ea} = (1 + i_{em})^{12} - 1 = (1,07)^{12} - 1 = 1,2522 \text{ ou } 125,22\% \text{ a.a.}$$

b) com reciprocidade de 30%
O saldo médio de 30% sobre $10.000 é de $3.000, que deverá ficar sem movimentação pela companhia, na sua conta bancária, durante o prazo da operação. Assim, temos:
valor líquido recebido, na data zero: 8,163,10 - 3,000 = $5.163,10
valor de resgate, daqui a 3 meses: 10.000 - 3.000 = $7.000

$$i_{em} = (7000/5163,10)^{1/3} - 1 = 0,1068 \text{ ou } 10,68\% \text{ a.m.}$$

$$i_{ea} = (1,1068)^{12} - 1 = 2,3783 \text{ ou } 237,83\% \text{ a.a.}$$

EQUAÇÕES
EXPRESSÕES LITERAIS OU ALGÉBRICAS

IGUALDADES E PROPRIEDADES

São expressões constituídas por números e letras, unidos por sinais de operações.

Exemplo: $3a^2$; $-2axy + 4x^2$; xyz; $x/3 + 2$, é o mesmo que $3.a^2$; $-2.a.x.y + 4.x^2$; x.y.z; x : 3 + 2, as letras a, x, y e z representam um número qualquer.

Chama-se **valor numérico** de uma expressão algébrica quando substituímos as letras pelos respectivos valores dados:

Exemplo: $3x^2 + 2y$ para x = –1 e y = 2, substituindo os respectivos valores temos, $3.(-1)^2 + 2.2 \rightarrow 3 . 1+ 4 \rightarrow 3 + 4 = 7$ é o valor numérico da expressão.

Exercícios
Calcular os valores numéricos das expressões:
1) 3x – 3y para x = 1 e y =3
2) x + 2a para x =–2 e a = 0
3) $5x^2 - 2y + a$ para x =1, y =2 e a =3
Respostas: 1) –6 2) –2 3) 4

Termo algébrico ou monômio: é qualquer número real, ou produto de números, ou ainda uma expressão na qual figuram multiplicações de fatores numéricos e literais.

Exemplo: $5x^4$, $-2y$, $\sqrt{3x}$, $-4a$, $\sqrt{3}$, $-x$

Partes do termo algébrico ou monômio.

Exemplo:

$$-3x^5ybz \begin{cases} \text{sinal } (-) \\ 3 \text{ coeficiente numérico ou parte numérica} \\ x^5ybz \text{ parte literal} \end{cases}$$

Obs.:
1) As letras x, y, z (final do alfabeto) são usadas como variáveis (valor variável)
2) quando o termo algébrico não vier expresso o coeficiente ou parte numérica fica subentendido que este coeficiente é igual a 1.

Exemplo: 1) $a^3bx^4 = 1.a^3bx^4$ 2) $-abc = -1.a.b.c$

Termos semelhantes: Dois ou mais termos são semelhantes se possuem as mesmas letras elevadas aos mesmos expoentes e sujeitas às mesmas operações.

Exemplos:
1) a^3bx, $-4a^3bx$ e $2a^3bx$ são termos semelhantes.
2) $-x^3y$, $+3x^3y$ e $8x^3y$ são termos semelhantes.

Grau de um monômio ou termo algébrico: E a soma dos expoentes da parte literal.

Exemplos:
1) $2x^4y^3z = 2.x^4.y^3.z^1$ (somando os expoentes da parte literal temos, 4 + 3 + 1 = 8) grau 8.

Expressão polinômio: É toda expressão literal constituída por uma soma algébrica de termos ou monômios.

Exemplos: 1)$2a^2b - 5x$ 2)$3x^2 + 2b + 1$

Polinômios na variável x são expressões polinomiais com uma só variável x, sem termos semelhantes.

Exemplo:
$5x^2 + 2x - 3$ denominada polinômio na variável x cuja forma geral é $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são os coeficientes.

Grau de um polinômio não nulo, é o grau do monômio de maior grau.

Exemplo: $5a^2x - 3a^4x^2y + 2xy$

Grau 2+1 = 3, grau 4+2+1= 7, grau 1+1= 2, 7 é o maior grau, logo o grau do polinômio é 7.

Exercícios
1) Dar os graus e os coeficientes dos monômios:
a)$-3x\,y^2z$ grau___________coefciente__________
b)$-a^7x^2z^2$ grau___________coeficiente__________
c) xyz grau______________coeficiente__________

2) Dar o grau dos polinômios:
a) $2x^4y - 3xy^2 + 2x$ grau __________
b) $-2+xyz+2x^5y^2$ grau __________

Respostas:
1) a) grau 4, coeficiente –3
b) grau 11, coeficiente –1
c) grau 3, coeficiente 1
2) a) grau 5 b) grau 7

CÁLCULO COM EXPRESSÕES LITERAIS

Adição e Subtração de monômios e expressões polinômios: eliminam-se os sinais de associações, e reduzem os termos semelhantes.

Exemplo:
$3x^2 + (2x - 1) - (-3a) + (x^2 - 2x + 2) - (4a)$
$3x^2 + 2x - 1 + 3a + x^2 - 2x + 2 - 4a =$
$3x^2 + 1.x^2 + 2x - 2x + 3a - 4a - 1 + 2 =$
$(3+1)x^2 + (2-2)x + (3-4)a - 1+2 =$
$4x^2 + 0x - 1.a + 1 =$
$4x^2 - a + 1$

Obs.: As regras de eliminação de parênteses são as mesmas usadas para expressões numéricas no conjunto Z.

Exercícios. Efetuar as operações:
1) 4x + (5a) + (a –3x) + (x –3a)
2) $4x^2 - 7x + 6x^2 + 2 + 4x - x^2 + 1$

Respostas: 1) 2x +3a 2) $9x^2 - 3x + 3$

MULTIPLICAÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Multiplicação de dois monômios: Multiplicam-se os coeficientes e após o produto dos coeficientes escrevem-se as letras em ordem alfabética, dando a cada letra o novo expoente igual à soma de todos os expoentes dessa letra e repetem-se em forma de produto as letras que não são comuns aos dois monômios.

Exemplos:

1) $2x^4 y^3 z \; . \; 3xy^2 z^3 ab = 2.3 .x^{4+1} . y^{3+2} . z^{1+3}.a.b =$ $\mathbf{6abx^5y^5z^4}$

2) $-3a^2bx \; . \; 5ab = -3.5. a^{2+1}.b^{1+1}. x =$ $\mathbf{-15a^3b^2 x}$

Exercícios: Efetuar as multiplicações.

1) $2x^2 yz \; . \; 4x^3 y^3 z =$

2) $-5abx^3 \; . \; 2a^2 b^2 x^2 =$

Respostas: 1) $8x^5 y^4 z^2$ 2) $-10a^3 b^3 x^5$

EQUAÇÕES DO 1.º GRAU

Equação: É o nome dado a toda sentença algébrica que exprime uma relação de igualdade.

Ou ainda: É uma igualdade algébrica que se verifica somente para determinado valor numérico atribuído à variável. Logo, equação é uma igualdade condicional.

Exemplo: $5 + x = 11$

$$\underset{1^0.\text{membro}}{\underbrace{5 + x}} = \underset{2^0.\text{membro}}{\underbrace{11}}$$

onde x é a incógnita, variável ou oculta.

Resolução de equações

Para resolver uma equação (achar a raiz) seguiremos os princípios gerais que podem ser aplicados numa igualdade.

Ao transportar um termo de um membro de uma igualdade para outro, sua operação deverá ser invertida.

Exemplo: $2x + 3 = 8 + x$

fica assim: $2x - x = 8 - 3 = 5 \Rightarrow x = 5$

Note que o x foi para o 1.º membro e o 3 foi para o 2.º membro com as operações invertidas.

Dizemos que 5 é a solução ou a raiz da equação, dizemos ainda que é o conjunto verdade (V).

Exercícios

Resolva as equações :

1) $3x + 7 = 19$ 2) $4x +20=0$

3) $7x - 26 = 3x - 6$

Respostas: 1) x = 4 ou V = {4}

2) x = –5 ou V = {–5} 3) x = 5 ou V = {5}

EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS OU SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Resolução por adição.

Exemplo 1: $\begin{cases} x + y = 7 & \text{- I} \\ x - y = 1 & \text{- II} \end{cases}$

Soma-se membro a membro.

$2x + 0 = 8$

$2x = 8$

$x = \dfrac{8}{2}$

$x = 4$

Sabendo que o valor de x é igual 4 substitua este valor em qualquer uma das equações (I ou II),

Substitui em I fica:

$4 + y = 7 \;\Rightarrow\; y = 7 - 4 \;\Rightarrow\; y = 3$

Se quisermos verificar se está correto, devemos substituir os valores encontrados x e y nas equações

$x + y = 7$	$x - y = 1$
$4 + 3 = 7$	$4 - 3 = 1$

Dizemos que o conjunto verdade: V = {(4, 3)}

Exemplo 2 : $\begin{cases} 2x + y = 11 & \text{- I} \\ x + y = 8 & \text{- II} \end{cases}$

Note que temos apenas a operação +, portanto devemos multiplicar qualquer uma (I ou II) por –1, escolhendo a II, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + y = 8 \; . \; (-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 11 \\ -x - y = -8 \end{cases}$$

soma-se <u>membro a membro</u>

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ -x - y = -8 \end{cases} +$$
$$x + 0 = 3$$
$$x = 3$$

Agora, substituindo x = 3 na equação II: x + y = 8, fica 3 + y = 8, portanto y = 5

Exemplo 3:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 18 & \text{- I} \\ 3x - y = 2 & \text{- II} \end{cases}$$

neste exemplo, devemos multiplicar a equação II por 2 (para "desaparecer" a variável y).

$$\begin{cases} 5x + 2y = 18 \\ 3x - y = 2 \quad .(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 18 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

soma-se membro a membro:

$5x + 2y = 18$

$\underline{6x - 2y = 4}$

$11x + 0 = 22 \Rightarrow \; 11x = 22 \; \Rightarrow x = \dfrac{22}{11} \; \Rightarrow x = 2$

Substituindo x = 2 na equação I:

$5x + 2y = 18$

$5 \,.\, 2 + 2y = 18$

$10 + 2y = 18$

$2y = 18 - 10$

$2y = 8$

$y = \dfrac{8}{2}$

$y = 4$

então V = {(2,4)}

Exercícios. Resolver os sistemas de Equação Linear:

1) $\begin{cases} 7x - y = 20 \\ 5x + y = 16 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 8x - 3y = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8x - 4y = 28 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

Respostas: 1) V = {(3,1)} 2) V = {(1,2)} 3) V {(–3,2)}

INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU

Distinguimos as equações das inequações pelo sinal, na equação temos sinal de igualdade (=) nas inequações são sinais de desigualdade.

> maior que, ≥ maior ou igual, < menor que ,
≤ menor ou igual

Exemplo 1: Determine os números naturais de modo que $4 + 2x > 12$.

$4 + 2x > 12$
$2x > 12 - 4$
$2x > 8 \Rightarrow x > \frac{8}{2} \Rightarrow x > 4$

Exemplo 2: Determine os números inteiros de modo que $4 + 2x \leq 5x + 13$

$4+2x \leq 5x + 13$
$2x - 5x \leq 13 - 4$
$-3x \leq 9 \; . \; (-1) \Rightarrow 3x \geq -9$, quando multiplicamos por (-1), invertemos o sinal dê desigualdade ≤ para ≥, fica:

$3x \geq -9$, onde $x \geq \frac{-9}{3}$ ou $x \geq -3$

Exercícios. Resolva:
1) $x - 3 \geq 1 - x$,
2) $2x + 1 \leq 6x - 2$
3) $3 - x \leq -1 + x$

Respostas: 1) $x \geq 2$ 2) $x \geq 3/4$ 3) $x \geq 2$

PRODUTOS NOTÁVEIS

1.º Caso: Quadrado da Soma

$(a + b)^2 = (a+b).\,(a+b)= a^2 + ab + ab + b^2$
↓ ↓
1.º 2.º $\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2$

Resumindo: “O quadrado da soma é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o 1.º pelo 2.º mais o quadrado do 2.º.

Exercícios. Resolver os produtos notáveis
1) $(a+2)^2$ 2) $(3+2a)^2$ 3) $(x^2+3a)^2$

Respostas: 1.º caso
1) $a^2 + 4a + 4$ 2) $9 + 12a + 4a^2$
3) $x^4 + 6x^2a + 9a^2$

2.º Caso : Quadrado da diferença

$(a - b)^2 = (a - b).\,(a - b) = a^2 - ab - ab - b^2$
↓ ↓
1.º 2.º $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2$

Resumindo: “O quadrado da diferença é igual ao quadrado do 1.º menos duas vezes o 1.º pelo 2.º mais o quadrado do 2.º.

Exercícios. Resolver os produtos notáveis:
1) $(a - 2)^2$ 2) $(4 - 3a)^2$ 3) $(y^2 - 2b)^2$

Respostas: 2.º caso
1) $a^2 - 4a + 4$ 2) $16 - 24a + 9a^2$
3) $y^4 - 4y^2b + 4b^2$

3.º Caso: Produto da soma pela diferença

$(a - b)\,(a + b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$
↓ ↓ ↓ ↓
1.º 2.º 1.º 2.º

Resumindo: “O produto da soma pela diferença é igual ao quadrado do 1.º menos o quadrado do 2.º.

Exercícios. Efetuar os produtos da soma pela diferença:
1) $(a - 2)\,(a + 2)$ 2) $(2a - 3)\,(2a + 3)$
3) $(a^2 - 1)\,(a^2 + 1)$

Respostas: 3.º caso
1) $a^2 - 4$ 2) $4a^2 - 9$
3) $a^4 - 1$

FATORAÇÃO ALGÉBRICA

1.º Caso: Fator Comum

Exemplo 1:
$2a + 2b$: fator comum é o coeficiente 2, fica:
$2\,.(a+b)$. Note que se fizermos a distributiva voltamos no início (Fator comum e distributiva são “operações inversas”)

Exercícios. Fatorar:
1) $5a + 5b$ 2) $ab + ax$ 3) $4ac + 4ab$

Respostas: 1.º caso
1) $5\,.(a + b)$ 2) $a.\,(b + x)$
3) $4a.\,(c + b)$

Exemplo 2:
$3a^2 + 6a$: Fator comum dos coeficientes (3, 6) é 3, porque MDC (3, 6) = 3.

O m.d.c. entre: “a e a^2 é “a” (menor expoente), então o fator comum da expressão $3a^2 + 6a$ é $3a$. Dividindo $3a^2 : 3a = a$ e $6a : 3a = 2$, fica: $3a.\,(a + 2)$.

Exercícios. Fatorar:
1) $4a^2 + 2a$ 2) $3ax + 6a^2y$ 3) $4a^3 + 2a^2$

Respostas: 1.º caso 1) $2a\,.(2a + 1)$
2) $3a\,.(x + 2ay)$ 3) $2a^2\,(2a + 1)$

2.º Caso: Trinômio quadrado perfeito (É a “operação inversa” dos produtos notáveis caso 1)

Exemplo 1
$a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow$ extrair as raízes quadradas do extremo $\sqrt{a^2} + 2ab + \sqrt{b^2} \Rightarrow \sqrt{a^2} = a$ e $\sqrt{b^2} = b$ e o termo do meio é 2.a.b, então $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (quadrado da soma).

Exemplo 2:
$4a^2 + 4a + 1 \Rightarrow$ extrair as raízes dos extremos $\sqrt{4a^2} + 4a + \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{4a^2} = 2a$, $\sqrt{1} = 1$ e o termo central é $2.2a.1 = 4a$, então $4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2$

Exercícios
Fatorar os trinômios (soma)
1) $x^2 + 2xy + y^2$ 2) $9a^2 + 6a + 1$

3) $16 + 8a + a^2$

Respostas: 2.º caso 1) $(x + y)^2$
2) $(3a + 1)^2$ 3) $(4 + a)^2$

Fazendo com trinômio (quadrado da diferença)
$x^2 – 2xy + y^2$, extrair as raízes dos extremos
$\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{y^2} = y$, o termo central é –2.x.y, então:
$x^2 – 2xy + y^2 = (x – y)^2$

Exemplo 3:
$16 – 8a + a^2$, extrair as raízes dos extremos
$\sqrt{16} = 4$ e $\sqrt{a^2} = a$, termo central –2.4.a = –8a,
então: $16 – 8a + a^2 = (4 – a)^2$

Exercícios
Fatorar:
1) $x^2 – 2xy + y^2$ 2) $4 – 4a + a^2$ 3) $4a^2 – 8a + 4$

Respostas: 2.º caso 1) $(x – y)^2$
2) $(2 – a)^2$ 3) $(2a – 2)^2$

3.º Caso: (Diferença de dois quadrados) (note que é um binômio)

Exemplo 1
$a^2 – b^2$, extrair as raízes dos extremos $\sqrt{a^2} = a$ e $\sqrt{b^2} = b$, então fica: $a^2 – b^2 = (a + b) . (a – b)$

Exemplo 2:
$4 – a^2$, extrair as raízes dos extremos $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{a^2} = a$, fica: $(4 – a^2) = (2 – a). (2+ a)$

Exercícios. Fatorar:
1) $x^2 – y^2$ 2) $9 – b^2$ 3) $16x^2 – 1$

Respostas: 3.º caso 1) (x + y) (x – y)
2) (3 + b) (3 – b) 3) (4x + 1) (4x – 1)

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS

São Equações cujas variáveis estão no denominador
Ex: $\frac{4}{x} = 2$, $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = 8$, note que nos dois exemplos $x \neq 0$, pois o denominador deverá ser sempre diferente de zero.

Para resolver uma equação fracionária, devemos achar o m.m.c. dos denominadores e multiplicamos os dois membros por este m.m.c. e simplificamos, temos então uma equação do 1.º grau.

Ex: $\frac{1}{x} + 3 = \frac{7}{2}$, $x \neq 0$, m.m.c. = 2x

$2x \cdot \frac{1}{x} + 3 = \frac{7}{2} \cdot 2x$

$\frac{2x}{x} + 6x = \frac{14x}{2}$, simplificando

$2 + 6x = 7x \Rightarrow$ equação do 1.º grau.

Resolvendo temos: 2 = 7x – 6x
2 = x ou x = 2 ou V = { 2 }

Exercícios
Resolver as equações fracionárias:

1) $\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2x}$ $x \neq 0$

2) $\frac{1}{x} + 1 = \frac{5}{2x}$ $x \neq 0$

Respostas: Equações: 1) V = {–3} 2) V = { $^3/_2$ }

RADICAIS

$\sqrt{4} = 2, \sqrt{1} = 1, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$, etc., são raízes exatas são números inteiros, portanto são racionais: $\sqrt{2}$ = 1,41421356..., $\sqrt{3}$ = 1,73205807..., $\sqrt{5}$ = 2,2360679775..., etc. não são raízes exatas, não são números inteiros. São números irracionais. Do mesmo modo $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{64} = 4$,etc., são racionais, já $\sqrt[3]{9}$ = 2,080083823052.., $\sqrt[3]{20}$ = 2,714417616595... são irracionais.

Nomes: $\sqrt[n]{a} = b$: n = índice; a = radicando $\sqrt{\ }$ = sinal da raiz e b = raiz. Dois radicais são semelhantes se o índice e o radicando forem iguais.

Exemplos:
1) $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ são semelhantes observe o n = 2 "raiz quadrada" pode omitir o índice, ou seja, $\sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$
2) $5\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $2\sqrt[3]{7}$ são semelhantes

Operações: Adição e Subtração
Só podemos adicionar e subtrair radicais semelhantes.

Exemplos:
1) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 - 2 + 5)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
2) $5\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{6} + 7\sqrt[3]{6} = (5 - 3 + 7)\sqrt[3]{6} = 9\sqrt[3]{6}$

Multiplicação e Divisão de Radicais
Só podemos multiplicar radicais com mesmo índice e usamos a propriedade: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Exemplos
1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 . 2} = \sqrt{4} = 2$
2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{3 . 4} = \sqrt{12}$
3) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 . 9} = \sqrt[3]{27} = 3$
4) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5 . 4} = \sqrt[3]{20}$
5) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3 . 5 . 6} = \sqrt{90}$

Exercícios

Efetuar as multiplicações

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}$ 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$ 3) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5}$

Respostas: 1) $\sqrt{24}$ 2) 53) $\sqrt[3]{120}$

Para a divisão de radicais usamos a propriedade também com índices iguais $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b}$

Exemplos:

1) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{18:2} = \sqrt{9} = 3$

2) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{20} : \sqrt{10} = \sqrt{20:10} = \sqrt{2}$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{15:5} = \sqrt[3]{3}$

Exercícios. Efetuar as divisões

1) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$

Respostas: 1) $\sqrt{2}$ 2) 23) 2

Simplificação de Radicais

Podemos simplificar radicais, extraindo parte de raízes exatas usando a propriedade $\sqrt[n]{a^n}$ simplificar índice com expoente do radicando.

Exemplos:

1)Simplificar $\sqrt{12}$

decompor 12 em fatores primos:

12	2
6	2
3	3
1	

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt[2]{2^2}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2) Simplificar $\sqrt{32}$, decompondo 32 fica:

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2

$\sqrt{32} = \sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2} = \sqrt[2]{2^2}\cdot\sqrt[2]{2^2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

3) Simplificar $\sqrt[3]{128}$, decompondo fica:

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

fica

$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2^3\cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

Exercícios
Simplificar os radicais:

1) $\sqrt{20}$ 2) $\sqrt{50}$ 3) $\sqrt[3]{40}$

Respostas: 1) $2\sqrt{5}$ 2) $5\sqrt{2}$ 3) $2.\sqrt[3]{5}$

Racionalização de Radiciação

Em uma fração quando o denominador for um radical devemos racionalizá-lo. Exemplo: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ devemos multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo radical do denominador.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ e $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ são frações equivalentes. Dizemos que $\sqrt{3}$ é o fator racionalizante.

Exercícios
Racionalizar:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 2) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Respostas: 1) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Outros exemplos: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ devemos fazer:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2^1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^1\cdot 2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$$

Exercícios.
Racionalizar:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 2) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

Respostas: 1) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{4}$ 2) $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ 3) $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$

EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

Definição: Denomina-se equação de 2.º grau com variável toda equação de forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

onde : x é variável e a,b, c $\in$ R, com a $\neq$ 0.

Exemplos:

$3x^2 - 6x + 8 = 0$

$2x^2 + 8x + 1 = 0$

$x^2 + 0x - 16 = 0$ $y^2 - y + 9 = 0$

$-3y^2 - 9y + 0 = 0$ $5x^2 + 7x - 9 = 0$

COEFICIENTE DA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

Os números a, b, c são chamados de coeficientes da equação do 2.º grau, sendo que:

- a representa sempre o coeficiente do termo x^2.
- b representa sempre o coeficiente do termo x.
- c é chamado de termo independente ou termo constante.

Exemplos:

a) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ — $a = 3, b = 4, c = 1$

b) $y^2 + 0y + 3 = 0$ — $a = 1, b = 0, c = 3$

c) $-2x^2 - 3x + 1 = 0$ — $a = -2, b = -3, c = 1$

d) $7y^2 + 3y + 0 = 0$ — $a = 7, b = 3, c = 0$

Exercícios

Destaque os coeficientes:

1) $3y^2 + 5y + 0 = 0$ 2) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

3) $5y^2 - 2y + 3 = 0$ 4) $6x^2 + 0x + 3 = 0$

Respostas:

1) a =3, b = 5 e c = 0

2) a = 2, b = –2 e c = 1

3) a = 5, b = –2 e c =3

4) a = 6, b = 0 e c =3

EQUAÇÕES COMPLETAS E INCOMPLETAS

Temos uma equação completa quando os coeficientes **a** , **b** e **c** são diferentes de zero.

Exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \\ y^2 + 2y + 5 = 0 \end{array}\right\} \text{ São equações completas.}$$

Quando uma equação é incompleta, b = 0 ou c = 0, costuma-se escrever a equação sem termos de coeficiente nulo.

Exemplos:

$x^2 - 16 = 0$, b = 0 (Não está escrito o termo x)

$x^2 + 4x = 0$, c = 0 (Não está escrito o termo independente ou termo constante)

$x^2 = 0$, b = 0, c = 0 (Não estão escritos o termo x e termo independente)

FORMA NORMAL DA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

$ax^2 + bx + c = 0$

EXERCÍCIOS

Escreva as equações na forma normal:

1) $7x^2 + 9x = 3x^2 - 1$ 2) $5x^2 - 2x = 2x^2 + 2$

Respostas: 1) $4x^2 + 9x + 1 = 0$ 2) $3x^2 - 2x - 2 = 0$

Resolução de Equações Completas

Para resolver a equação do 2.º Grau, vamos utilizar a <u>fórmula resolutiva</u> ou <u>fórmula de</u> <u>Báscara</u>.

A expressão $b^2 - 4ac$, chamado discriminante de equação, é representada pela letra grega Δ (lê-se deita).

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ logo se $\Delta > 0$ podemos escrever:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

RESUMO

NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2.º GRAU COMPLETA PODEMOS USAR AS DUAS FORMAS:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}}$$

Exemplos:

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ a = 2, b =7, c = 3

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(+7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-(+7) \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \Rightarrow x = \frac{-(+7) \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{-(+7) \pm 5}{4} \Rightarrow x' = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$x'' = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$S = \left\{\frac{-1}{2}, -3\right\}$$

ou

b) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ a = 2, b = 7, c = 3

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 7^2 - 4 . 2 . 3$

$\Delta = 49 - 24$

$\Delta = 25$

$$x = \frac{-(+7) \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x = \frac{-(+7) \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x' = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \text{e}$$

$$x'' = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$S = \left\{\frac{-1}{2}, -3\right\}$$

Observação: fica ao <u>SEU CRITÉRIO</u> A ESCOLHA DA FORMULA.

EXERCÍCIOS

Resolva as equações do 2.º grau completa:

1) $x^2 - 9x + 20 = 0$

2) $2x^2 + x - 3 = 0$

3) $2x^2 - 7x - 15 = 0$

4) $x^2 + 3x + 2 = 0$

5) $x^2 - 4x + 4 = 0$

Respostas

1) V = { 4 , 5)

2) V = { 1, $\frac{-3}{2}$}

3) V = { 5 , $\frac{-3}{2}$}

4) V = { –1 , –2 }

5) V = {2}

EQUAÇÃO DO 2.º GRAU INCOMPLETA

Estudaremos a resolução das equações incompletas do 2.º grau no conjunto R. Equação da forma: $ax^2 + bx = 0$ onde c = 0

Exemplo:

$2x^2 - 7x = 0$ Colocando-se o fator *x* em evidência (menor expoente)

$x . (2x - 7) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ \end{cases}$

ou $2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Os números reais 0 e $\frac{7}{2}$ são as raízes da equação

S = { 0 ; $\frac{7}{2}$)

Equação da forma: $ax^2 + c = 0$, onde b = 0

Exemplos

a) $x^2 - 81 = 0$

$x^2 = 81 \rightarrow$transportando-se o termo independente para o 2.º termo.

$x = \pm\sqrt{81} \rightarrow$pela relação fundamental.

$x = \pm 9$ S = { 9; – 9 }

b) $x^2 + 25 = 0$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25}$, $\sqrt{-25}$ não representa número real, isto é $\sqrt{-25} \notin R$

a equação dada não tem raízes em IR.

S = ϕ ou S = { }

c) $9x^2 - 81 = 0$

$9x^2 = 81$

$x^2 = \frac{81}{9}$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

S = { ±3}

Equação da forma: ax **=** 0 onde b = 0, c = 0

A equação incompleta ax **=** 0 admite uma única solução x **=** 0. Exemplo:

$3x^2 = 0$

$x^2 = \frac{0}{3}$

$x^2 = 0$

$x^2 = \pm\sqrt{0}$

S = { 0 }

Exercícios	Respostas:
1) $4x^2 - 16 = 0$	1) V = { –2, + 2}
2) $5x^2 - 125 = 0$	2) V = { –5, +5}
3) $3x^2 + 75x = 0$	3) V = { 0, –25}

Relações entre coeficiente e raízes

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), sejam x' e x" as raízes dessa equação existem x' e x" reais dos coeficientes a, b, c.

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

RELAÇÃO: SOMA DAS RAÍZES

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} \Rightarrow x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

Daí a soma das raízes é igual a -b/a ou seja, x'+ x" = -b/a

Relação da soma: $x' + x'' = -\frac{b}{a}$

RELAÇÃO: PRODUTO DAS RAÍZES

$$x' \cdot x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x' \cdot x'' = \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right) \cdot \left(-b-\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{\left(-b^2\right) - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} \Rightarrow$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \Rightarrow$$

$$x' \cdot x'' = \frac{4ac}{4a^2} \Rightarrow x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Daí o produto das raízes é igual a $\frac{c}{a}$ ou seja:

$\boxed{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$ (Relação de produto)

Sua Representação:

- Representamos a Soma por **S**

$\boxed{S = x' + x'' = -\frac{b}{a}}$

- Representamos o Produto pôr **P** $\boxed{P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$

Exemplos:

1) $9x^2 - 72x + 45 = 0$ a = 9, b = –72, c = 45.

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{(-72)}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{45}{9} = 5$$

2) $3x^2 + 21x - 24 = 0$ a = 3, b = 21,c = –24

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{(21)}{3} = \frac{-21}{3} = -7$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{+(-24)}{3} = \frac{-24}{3} = -8$$

a = 4,

3) $4x^2 - 16 = 0$ b **=** 0, (equação incompleta) c = –16

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{0}{4} = 0$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{+(-16)}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

4) $(a+1)x^2 - (a+1)x + 2a + 2 = 0$ $\quad a = a+1$, $b = -(a+1)$, $c = 2a+2$

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{[-(a+1)]}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} = 1$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{2a+2}{a+1} = \frac{2(a+1)}{a+1} = 2$$

Se a = 1 essas relações podem ser escritas:

$$x' + x'' = -\frac{b}{1} \qquad x' + x'' = -b$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{1} \qquad x' \cdot x'' = c$$

Exemplo:

$x^2 - 7x + 2 = 0$ $\quad a = 1, b = -7, c = 2$

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{1} = 7$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

EXERCÍCIOS

Calcule a Soma e Produto

1) $2x^2 - 12x + 6 = 0$
2) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$
3) $ax^2 + 3ax -- 1 = 0$
4) $x^2 + 3x - 2 = 0$

Respostas:

1) S = 6 e P = 3
2) S = (a + b) e P = ab
3) S = –3 e P = $\frac{-1}{a}$
4) S = –3 e P = –2

APLICAÇÕES DAS RELAÇÕES

Se considerarmos a **=** 1, a expressão procurada é $x^2 + bx + c$: pelas relações entre coeficientes e raízes temos:

$x' + x'' = -b \longrightarrow b = -(x' + x'')$
$x' . x'' = c \longrightarrow c = x' . x''$

Daí temos: $x^2 + bx + c = 0$

$$x^2 - (\underbrace{x' + x''}_{\text{SOMA DAS RAÍZES}})x + \underbrace{x' . x''}_{\text{PRODUTO DAS RAÍZES}} = 0$$

REPRESENTAÇÃO

Representando a soma $\quad x' + x'' = S$
Representando o produto $x' . x'' = P$
E TEMOS A EQUAÇÃO: $x^2 - Sx + P = 0$

Exemplos:

a) raízes 3 e – 4
$S = x' + x'' = 3 + (-4) = 3 - 4 = -1$
$P = x' . x'' = 3 . (-4) = -12$
$x - Sx + P = 0$
$x^2 + x - 12 = 0$

b) 0,2 e 0,3
$S = x' + x'' = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$
$P = x . x = 0{,}2 . 0{,}3 = 0{,}06$
$x^2 - Sx + P = 0$
$x^2 - 0{,}5x + 0{,}06 = 0$

c) $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{4}$

$$S = x' + x'' = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{10+3}{4} = \frac{13}{4}$$

$$P = x . x = \frac{5}{2} . \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$$

$x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{15}{8} = 0$$

d) 4 e – 4
$S = x' + x'' = 4 + (-4) = 4 - 4 = 0$
$P = x' . x'' = 4 . (-4) = -16$
$x^2 - Sx + P = 0$
$x^2 - 16 = 0$

Exercícios

Componha a equação do 2.º grau cujas raízes são:

1) 3 e 2 $\quad$ 2) 6 e –5 $\quad$ 3) 2 e $\frac{-4}{5}$

4) $3 + \sqrt{5}$ e $3 - \sqrt{5}$ $\quad$ 5) 6 e 0

Respostas:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $\quad$ 2) $x^2 - x - 30 = 0$

3) $x^2 - \frac{-6x}{5} - \frac{8}{5} = 0$

4) $x^2 - 6x + 4 = 0$ $\quad$ 5) $x^2 - 6x = 0$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Um problema de 2.º grau pode ser resolvido por meio de uma equação ou de um sistema de equações do 2.º grau.

Para resolver um problema do segundo grau deve-se seguir três etapas:

- Estabelecer a equação ou sistema de equações correspondente ao problema (traduzir matematicamente), o enunciado do problema para linguagem simbólica.
- Resolver a equação ou sistema
- Interpretar as raízes ou solução encontradas

Exemplo:

Qual é o número cuja soma de seu quadrado com seu dobro é igual a 15?

número procurado : x
equação: $x^2 + 2x = 15$

Resolução:
$x^2 + 2x - 15 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4 . 1 . (-15) \Rightarrow \Delta = 4 + 60$
$\Delta = 64$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2}$

$x' = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x'' = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

Os números são 3 e – 5.

Verificação:

$x^2 + 2x - 15 = 0$	$x^2 + 2x - 15 = 0$
$(3)^2 + 2(3) - 15 = 0$	$(-5)^2 + 2(-5) - 15 = 0$
$9 + 6 - 15 = 0$	$25 - 10 - 15 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$
(V)	(V)

S = { 3 , –5 }

RESOLVA OS PROBLEMAS DO 2.º GRAU:

1) O quadrado de um número adicionado com o quádruplo do mesmo número é igual a 32.
2) A soma entre o quadrado e o triplo de um mesmo número é igual a 10. Determine esse número.
3) O triplo do quadrado de um número mais o próprio número é igual a 30. Determine esse numero.
4) A soma do quadrado de um número com seu quíntuplo é igual a 8 vezes esse número, determine-o.

Respostas:

1) 4 e – 8	2) – 5 e 2
3) $-10/3$ e 3	4) 0 e 3

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU

Como resolver

Para resolver sistemas de equações do 2º grau, é importante dominar as técnicas de resolução de sistema de 1º grau: método da adição e método da substituição.

Imagine o seguinte problema: dois irmãos possuem idades cuja soma é 10 e a multiplicação 16. Qual a idade de cada irmão?

Equacionando:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 16 \end{cases}$$

Pela primeira equação, que vamos chamar de I:

$$x = 10 - y$$

Substituindo na segunda:

$$y \cdot (10 - y) = 16$$

Logo:

$$10y - y^2 = 16 \rightarrow 10y - y^2 - 16 = 0 \rightarrow y^2 - 10y + 16$$

Usando a fórmula:

$$y = \frac{+10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}$$

Logo

$$y_1 = \frac{10+6}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$y_2 = \frac{10-6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Substituindo em I:

$$x_1 = 10 - y_1 \rightarrow x_1 = 10 - 8 \rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = 10 - y_2 \rightarrow x_2 = 10 - 2 \rightarrow x_2 = 8$$

As idades dos dois irmãos são, respectivamente, de 2 e 8 anos. Testando:
a multiplicação de 2 X 8 = 16 e a soma 2 + 8 = 10.

Outro exemplo

Encontre dois números cuja diferença seja 5 e a soma dos quadrados seja 13.

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

Da primeira, que vamos chamar de II:

$$x - y = 5 \rightarrow x = 5 + y$$

Aplicando na segunda:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$(5 + y)^2 + y^2 = 13$$

De Produtos notáveis:

$$25 + 10y + y^2 + y^2 = 13$$

$$2y^2 + 10y + 25 - 13 = 0 \rightarrow 2y^2 + 10y + 12 = 0$$

Dividindo por 2:

$$y^2 + 5y + 6 = 0$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

Logo:

$$y_1 = \frac{-6}{2} = -3$$

Substituindo em II:

$$x_1 = y_1 + 5 \rightarrow x_1 = -3 + 5 = 2$$

$$y_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

Substituindo em II:

$$x_2 = y_2 + 5 \rightarrow x_2 = -2 + 5 = 3$$

Os números são 3 e - 2 ou 2 e - 3.

Os sistemas a seguir envolverão equações do 1º e do 2º grau, lembrando de que suas representações gráficas constituem uma reta e uma parábola, respectivamente. Resolver um sistema envolvendo equações desse modelo requer conhecimentos do método da substituição de termos. Observe as resoluções comentadas a seguir:

Exemplo 1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Isolando x ou y na 2ª equação do sistema:
x + y = 6
x = 6 – y

Substituindo o valor de x na 1ª equação:

$x^2 + y^2 = 20$
$(6 - y)^2 + y^2 = 20$
$(6)^2 - 2 * 6 * y + (y)^2 + y^2 = 20$
$36 - 12y + y^2 + y^2 - 20 = 0$
$16 - 12y + 2y^2 = 0$
$2y^2 - 12y + 16 = 0$ (dividir todos os membros da equação por 2)

$y^2 - 6y + 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-6)^2 - 4 * 1 * 8$
$\Delta = 36 - 32$
$\Delta = 4$

a = 1, b = –6 e c = 8

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$y = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$y' = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$y'' = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Determinando os valores de x em relação aos valores de y obtidos:

Para y = 4, temos:
x = 6 – y
x = 6 – 4
x = 2

Par ordenado (2; 4)

Para y = 2, temos:
x = 6 – y
x = 6 – 2
x = 4

Par ordenado (4; 2)

S = {(2: 4) e (4; 2)}

Exemplo 2

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 18 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

Isolando x ou y na 2ª equação:
x – y = –3
x = y – 3

Substituindo o valor de x na 1ª equação:

$x^2 + 2y^2 = 18$
$(y - 3)^2 + 2y^2 = 18$
$y^2 - 6y + 9 + 2y^2 - 18 = 0$
$3y^2 - 6y - 9 = 0$ (dividir todos os membros da equação por 3)

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-2)^2 - 4 * 1 * (-3)$
$\Delta = 4 + 12$
$\Delta = 16$

a = 1, b = –2 e c = –3

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2*1}$$
$$y = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$y' = \frac{2+4}{2} = 3$$
$$y'' = \frac{2-4}{2} = -1$$

Determinando os valores de x em relação aos valores de y obtidos:

Para y = 3, temos:
x = y – 3
x = 3 – 3
x = 0

Par ordenado (0; 3)

Para y = –1, temos:
x = y – 3
x = –1 –3
x = –4

Par ordenado (–4; –1)

S = {(0; 3) e (–4; –1)}

FUNÇÕES

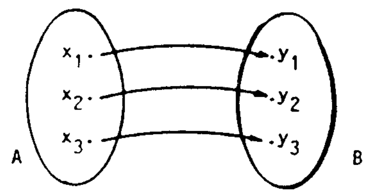
DEFINICÂO

Consideremos uma relação de um conjunto A em um conjunto B. Esta relação será chamada de função ou aplicação quando associar a todo elemento de A um único elemento de B.

Exemplos:

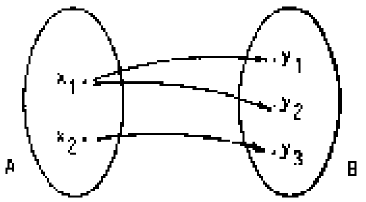
Consideremos algumas relações, esquematizadas com diagramas de Euler-Venn, e vejamos quais são funções:

a)



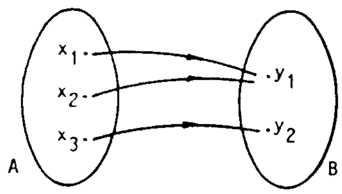
Esta relação é uma função de A em B, pois associa a todo elemento de A um único elemento de B.

b)



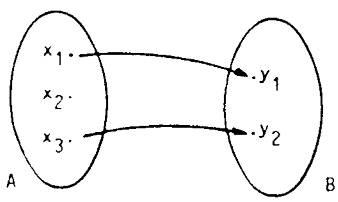
Esta relação não é uma função de A em B, pois associa a $x_1 \in A$ dois elementos de B : y_1 e y_2.

c)



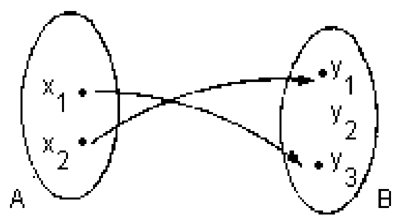
Esta relação é uma função de A em B, pois associa todo elemento de A um único elemento de B.

d)



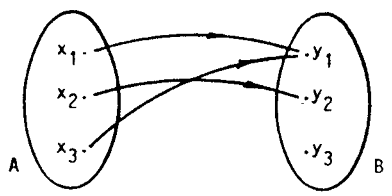
Esta relação não é uma função de A em B, pois não associa a $x_2 \in A$ nenhum elemento de B.

e)



Esta relação é uma função de A em B, pois associa todo elemento de A um único elemento de B.

f)



Esta relação é uma função de A em B, pois associa todo elemento de A um único elemento de B.

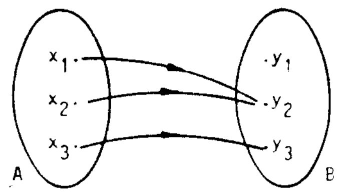
Observações:

a) Notemos que a definição de função não permite que fique nenhum elemento "solitário" no domínio (é o caso de x_2, no exemplo **d**); permite, no entanto, que fiquem elementos "solitários" no contradomínio (são os casos de y_2, no exemplo **e**, e de y_3, no exemplo ***f***) .

b) Notemos ainda que a definição de função não permite que nenhum elemento do domínio "lance mais do que uma flecha" (é o caso de x_1, no exemplo **b**); permite, no entanto, que elementos do contradomínio "levem mais do que uma flechada" (são os casos dos elementos y_1, nos exemplos **c** e ***f***).

NOTAÇÃO

Considere a função seguinte, dada pelo diagrama Euler-Venn:



Esta função será denotada com f e as associações que nela ocorrem serão denotadas da seguinte forma:

$y_2 = f(x_1)$: indica que y_2 é a imagem de x_1 pela f
$y_2 = f(x_2)$: indica que y_2 é a imagem de x_2 pela f
$y_3 = f(x_3)$: indica que y_3 é a imagem de x_3 pela f

O conjunto formado pelos elementos de B, que são imagens dos elementos de A, pela f, é denominado conjunto imagem de A pela f, e é indicado por Im (f) .

No exemplo deste item, temos:
$A = \{x_1, x_2, x_3\}$ é o domínio de função f.
$B = \{y_1, y_2, y_3\}$ é o contradomínio de função f.
$Im(f) = \{y_2, y_3\}$ é o conjunto imagem de A pela f.

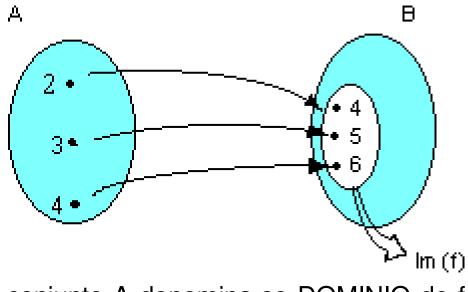
DOMÍNIO, CONTRADOMINIO E IMAGEM DE UMA FUNCÃO

Consideremos os conjuntos:

$A = \{2, 3, 4\}$
$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
e $f(x) = x + 2$

$f(2) = 2 + 2 = 4$
$f(3) = 3 + 2 = 5$
$f(4) = 4 + 2 = 6$

Graficamente teremos:
A = D(f) Domínio B = CD(f) contradomínio



O conjunto A denomina-se DOMINIO de f e pode ser indicado com a notação D (f).

O conjunto B denomina-se CONTRADOMINIO de f e pode ser indicado com a notação CD (f).

O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A denomina-se conjunto-imagem de f e indica-se Im (f).

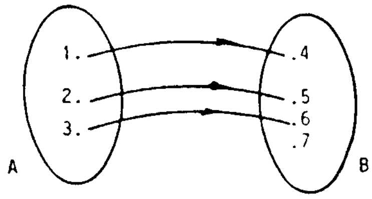
No nosso exemplo acima temos:
$D(f) = A \Rightarrow D(f) = \{2, 3, 4\}$
$CD(f) = B \Rightarrow CD(f) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$Im(f) = \{4, 5, 6\}$.

TIPOS FUNDAMENTAIS DE FUNÇÕES

FUNCÀO INJETORA

Uma função f definida de A em B é injetora quando cada elemento de B , é imagem de um único elemento de A.

Exemplo:

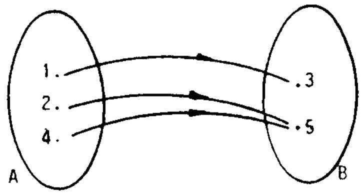


FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função f definida de A em B é sobrejetora se todas os elementos de B são imagens, ou seja:

Im (f) = B

Exemplo:



Im (f) = { 3, 5 } = B

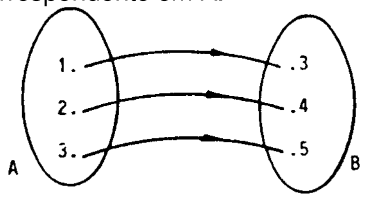
FUNCÃO BIJETORA

Uma função f definida de A em B, quando injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, recebe o nome de função bijetora.

Exemplo:

é sobrejetora $\Rightarrow$ Im(f) = B

é injetora - cada elemento da imagem em B tem um único correspondente em A.



Como essa função é injetora e sobrejetora, dizemos que é bijetora.

FUNÇÃO INVERSA

Seja f uma função bijetora definida de A em B, com $x \in A$ e $y \in B$, sendo $(x, y) \in f$. Chamaremos de função inversa de f, e indicaremos por f^{-1}, o conjunto dos pares ordenados $(y, x) \in f^{-1}$ com $y \in B$ e $x \in A$.

Exemplo: Achar a função inversa de y = 2x

Solução:

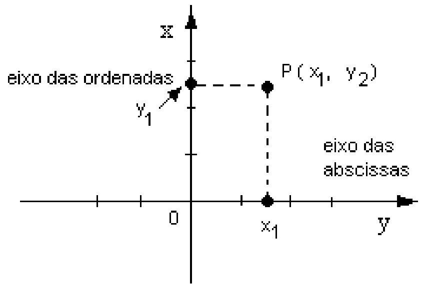
a) Troquemos x por y e y por x ; teremos: x = 2y

b) Expressemos o novo y em função do novo x ; teremos $y = \frac{x}{2}$ e então: $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

GRÁFICOS

SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

Como já vimos, o sistema cartesiano ortogonal é composto por dois eixos perpendiculares com origem comum e uma unidade de medida.



- No eixo horizontal, chamado eixo das abscissas, representamos os primeiros elementos do par ordenado de números reais.
- No eixo vertical, chamado eixo das ordenadas, representamos os segundos elementos do par ordenado de números reais.

Vale observar que:

A todo par ordenado de números reais corresponde um e um só ponto do plano, e a cada ponto corresponde um e um só par ordenado de números reais.

Vamos construir gráficos de funções definidas por leis y = f (x) com $x \in IR$. Para isso:

1º) Construímos uma tabela onde aparecem os valores de x e os correspondentes valores de y, do seguindo modo:

a) atribuímos a x uma série de valores do domínio,

b) calculamos para cada valor de x o correspondente valor de y através da lei de formação y = f (x);

2º) Cada par ordenado (x,y), onde o 1º elemento é a variável independente e o 2º elemento é a variável dependente, obtido na tabela, determina um ponto do plano no sistema de eixos.

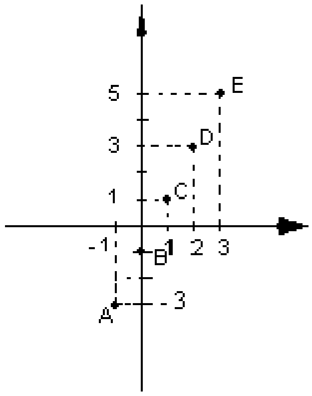
3º) 0 conjunto de todos os pontos (x,y), com $x \in D(f)$ formam o gráfico da função f (x).

Exemplo:

Construa o gráfico de f(x) = 2x – 1 onde

D = { –1, 0, 1, 2 , 3 }

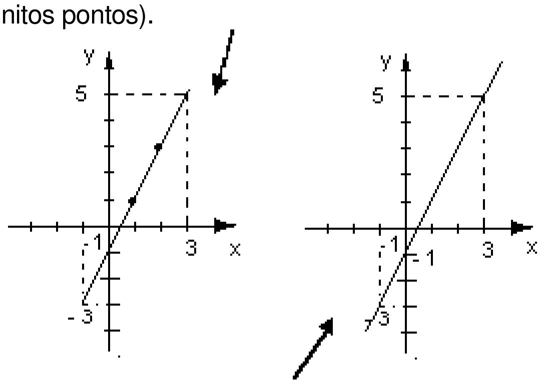
	x	y	ponto
f (–1) = 2 . (–1) –1 = –3	–1	–3	(–1, –3)
f (0) = 2 . 0 – 1 = –1	0	–1	(0, –1)
f (1) = 2 . 1 – 1 = 1	1	1	(1, 1)
f (2) = 2 . 2 – 1 = 3	2	3	(2, 3)
f (3) = 2 . 3 – 1 = 5	3	5	(3, 5)



Os pontos A, B, C, D e E formam o gráfico da função.

OBSERVAÇÃO

Se tivermos para o domínio o intervalo [–1,3], teremos para gráfico de f(x) = 2x – 1 um segmento de reta com infinitos pontos).

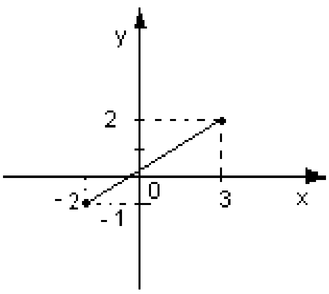


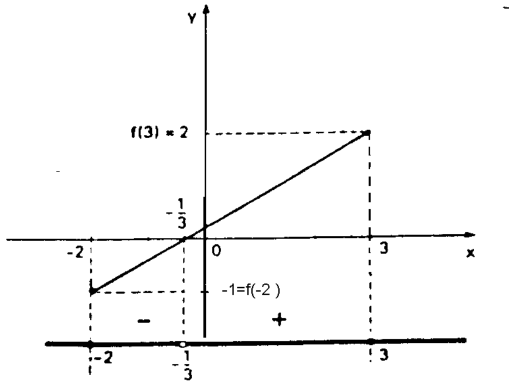
Se tivermos como domínio o conjunto IR, teremos para o gráfico de f(x) = 2x – 1 uma reta.

ANÁLISE DE GRÁFICOS

Através do gráfico de uma função podemos obter informações importantes o respeito do seu comportamento, tais como: crescimento, decrescimento, domínio, imagem, valores máximos e mínimos, e, ainda, quando a função é positiva ou negativa etc.

Assim, dada a função real f(x) = $\frac{3x}{5}+\frac{1}{5}$ e o seu gráfico, podemos analisar o seu comportamento do seguinte modo:





- ZERO DA FUNÇÃO:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{5}+\frac{1}{5}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Graficamente, o zero da função é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico com o eixo x.

- DOMÍNIO: projetando o gráfico sobre o eixo x : D (f) = [–2, 3]
- IMAGEM: projetando o gráfico sobre o eixo y : Im (f) = [–1, 2]

observe, por exemplo, que para:
– 2 < 3 temos f (–2) < f (3)
–1 2
portanto dizemos que f é **crescente**.

- SINAIS:

$x \in \left[-2, -\frac{1}{3}\right[\Rightarrow f(x) < 0$

$x \in \left]-\frac{1}{3}, 3\right] \Rightarrow f(x) > 0$

- VALOR MÍNIMO: –1 é o menor valor assumido por y = f (x) , $Y_{mín} = -1$
- VALOR MÁXIMO: 2 é o maior valor assumido por y = f (x) , $Y_{máx} = 2$

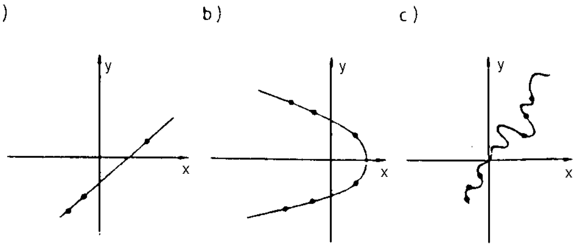
TÉCNICA PARA RECONHECER SE UM GRÁFICO REPRESENTA OU NÃO UMA FUNÇAO

Para reconhecermos se o gráfico de uma relação representa ou não uma função, aplicamos a seguinte técnica:

Traçamos várias retas paralelas ao eixo **y** ; se o gráfico da relação for interceptado em um único ponto, então o gráfico representa uma função. Caso contrário não representa uma função.

Exemplos:

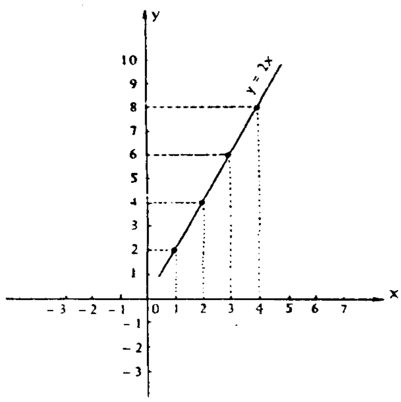
a) b) c)



O gráfico **a)** representa uma função, pois qualquer que seja a reta traçada paralelamente a y, o gráfico é interceptado num único ponto, o que não acontece com **b**) e **c**).

FUNÇÂO CRESCENTE

Consideremos a função y = 2x definida de IR em IR. Atribuindo-se valores para x, obtemos valores correspondentes para y e os representamos no plano cartesiano:

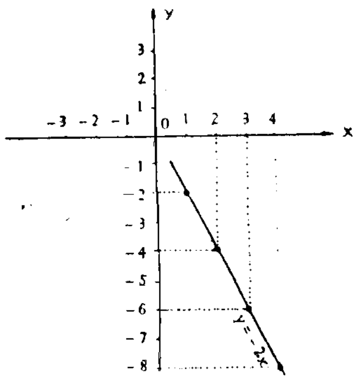


Observe que a medida que os valores de x aumentam, os valores de y também aumentam; neste caso dizemos que a função é **crescente**.

FUNÇÃO DECRESCENTE

Consideremos a função y = –2x definida de IR em IR.

Atribuindo-se valores para x, obteremos valores correspondentes para y e os representamos no plano cartesiano.



Note que a medida que as valores de x aumentam, os valores de y diminuem; neste caso dizemos que a função é **decrescente**.

FUNÇÃO CONSTANTE

É toda função de IR em IR definida por

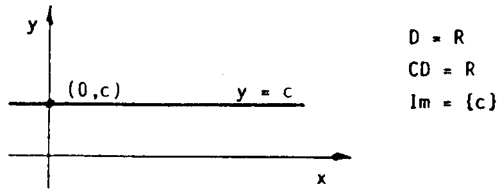
f (x) = c (c = constante)

Exemplos:

a) f(x) = 5 b) f(x) = –2

c) f(x) = $\sqrt{3}$ d) f(x) = ½

Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo **x** **,** passando pelo ponto **(0, c).**

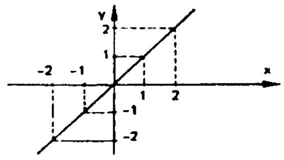


FUNÇÃO IDENTIDADE

É a função de IR em IR definida por

f(x) = x

x	y = f (x) = x
–2	–2
–1	–1
0	0
1	1
2	2



Observe que seu gráfico é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

D = IR CD = IR Im = IR

FUNÇÃO AFIM

É toda função f de IR em IR definida por

f (x) = ax + b (a, b reais e a $\neq$ 0)

Exemplos:

a) f(x) = 2x –1 b) f(x) = 2 – x

c) f(x) = 5x

Observações

1) quando **b = 0** a função recebe o nome de **função linear.**

2) o domínio de uma função afim é IR: D(f) = IR

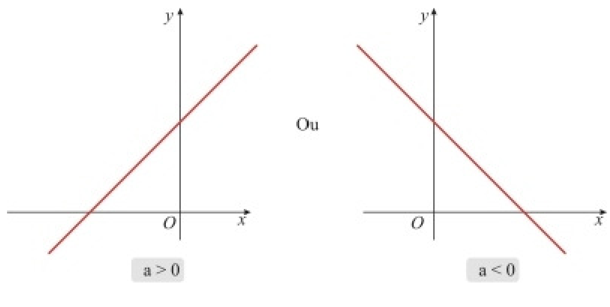
3) seu conjunto imagem é IR: Im(f) = IR

4) seu gráfico é uma reta do plano cartesiano.

Uma função definida por f: R→R chama-se afim quando existem constantes a, b que pertencem ao conjunto dos reais tais que f(x)= ax + b para todo x pertence a R. A lei que define **função afim** é:

$$f(x) = ax + b \ (a \in R)$$

O gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo Ox.



Domínio: *D* = R

Imagem: *Im* = R

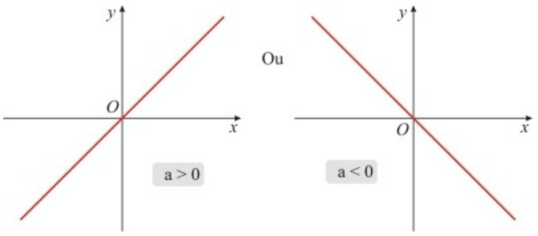
São casos particulares de função afim as funções lineares e constante.

Função linear

Uma função definida por f: R→R chama-se linear quando existe uma constante a ∈ R tal que f(x) = ax para todo x ∈ R. A lei que define uma função linear é a seguinte:

$$f(x) = ax\,(a \in R)$$

O gráfico da função linear é uma reta, não perpendicular ao eixo Ox e que cruza a origem do plano cartesiano.



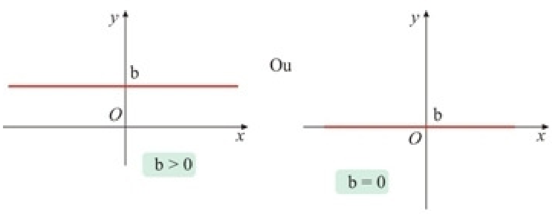
Domínio: *D* = R
Imagem: *Im* = R

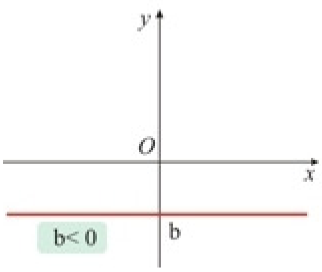
Função constante

Uma função definida por f: R→R chama-se constante quando existe uma constante b R tal que f(x) = b para todo x ∈ R. A lei que define uma função constante é:

$$f(x) = b\,(b \in R)$$

O gráfico de uma função constante, é uma reta paralela ou coincidente ao eixo Ox q que cruza o eixo Oy no ponto de ordenada b.





Coeficientes numéricos

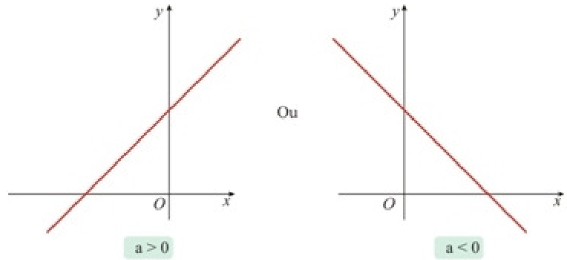
Cada coeficiente numérico de uma função caracteriza um elemento do gráfico dessa função.

• Coeficiente a: coeficiente angular de uma reta. A é igual à tangente do ângulo que a reta faz com o eixo x.

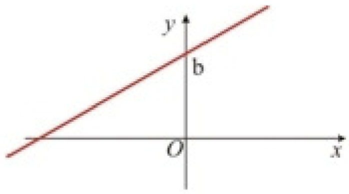
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Quando a > 0, a função é crescente.

Quando a < 0, a função é decrescente.



• Coeficiente b: é a ordenada do ponto em que o gráfico de f cruza o eixo das ordenadas, ou seja, b = f(0).



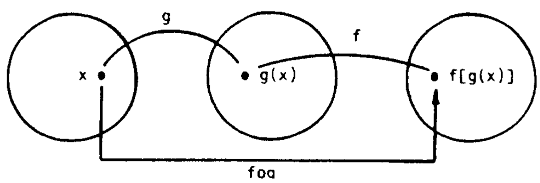
Thyago Ribeiro

FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas as funções **f** e **g** de IR em IR definidas por
f (x) = 3x e **g (x) = x²** temos que:
f (1) = 3 . 1 = 3
f (2) = 3 . 2 = 6
f (a) = 3 . a = 3 a (a Є IR)
f (g) = 3 . g = 3 g (g Є IR)

$$\left.\begin{array}{l} f[g(x)] = 3 . g(x) \\ \\ g(x) = x^2 \end{array}\right| \Rightarrow f[g(x)] = 3x^2$$

função composta de f e g
Esquematicamente:



Símbolo:
f o g lê-se **"f composto g"** - **(f o g) (x) = f [g (x)]**

FUNÇÃO QUADRÁTICA

É toda função f de IR em IR definida por

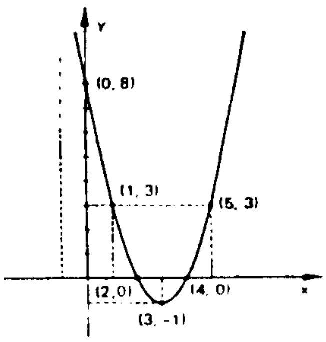
$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

(a, b ,c reais e a ≠ 0)

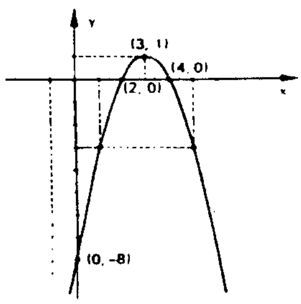
Exemplos:
a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 2x$
c) $f(x) = -2x^2 + 3$
d) $f(x) = x^2$

Seu gráfico e uma parábola que terá **concavidade** voltada **"para cima"** se **a > 0** ou voltada **"para baixo"** se **a < 0**.

Exemplos:
$f(x) = x^2 - 6x + 8$ $(a = 1 > 0)$ concavidade p/ cima



$f(x) = -x^2 + 6x - 8$ $(a = -1 < 0)$ concavidade p/ baixo



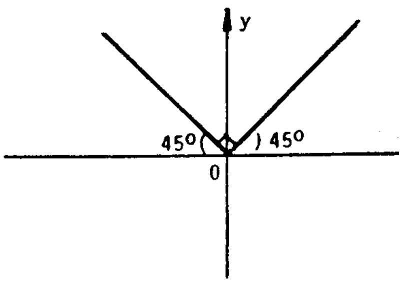
FUNÇÃO MODULAR

Consideremos uma função f de IR em IR tal que, para todo x Є IR, tenhamos $f(x) = |x|$ onde o símbolo $|x|$ que se lê módulo de x, significa:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

esta função será chamada de função modular.

Gráfico da função modular:

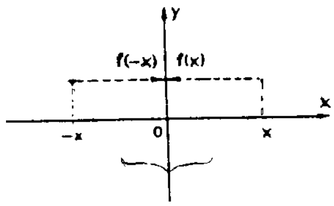


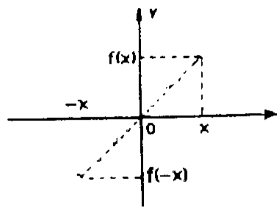
FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Uma função f de A em B diz-se função par se, para todo x Є A, tivermos $f(x) = f(-x)$.

Uma função f de A em B diz-se uma função ímpar se, para todo x Є R, tivermos $f(-x) = -f(x)$.

Decorre das definições dadas que o gráfico de uma função par é **simétrico** em relação ao **eixo y** e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação ao ponto origem.



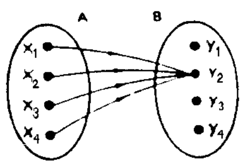


função par: $f(x) = f(-x)$ unção ímpar: $f(-x) = -f(x)$

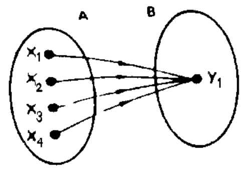
EXERCICIOS

01) Das funções de A em B seguintes, esquematizadas com diagramas de Euler-Venn, dizer se elas são ou não sobrejetoras, injetoras, bijetoras.

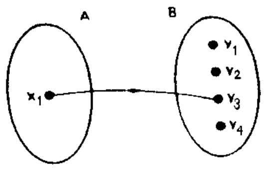
a)



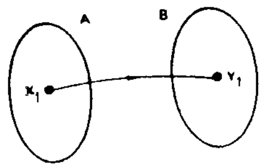
b)



c)



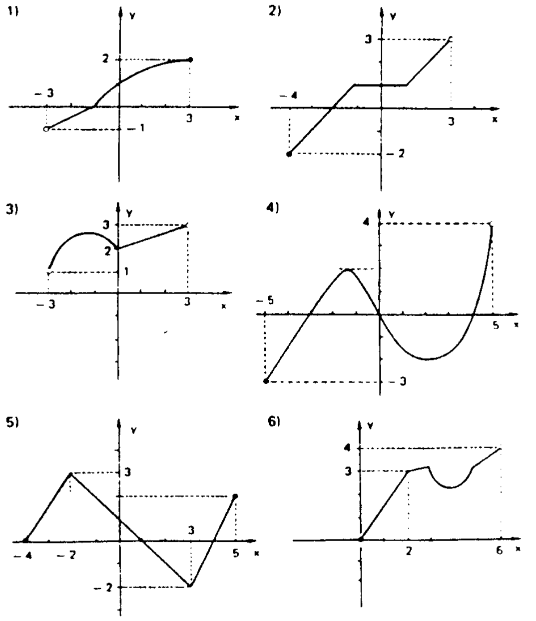
d)



RESPOSTAS

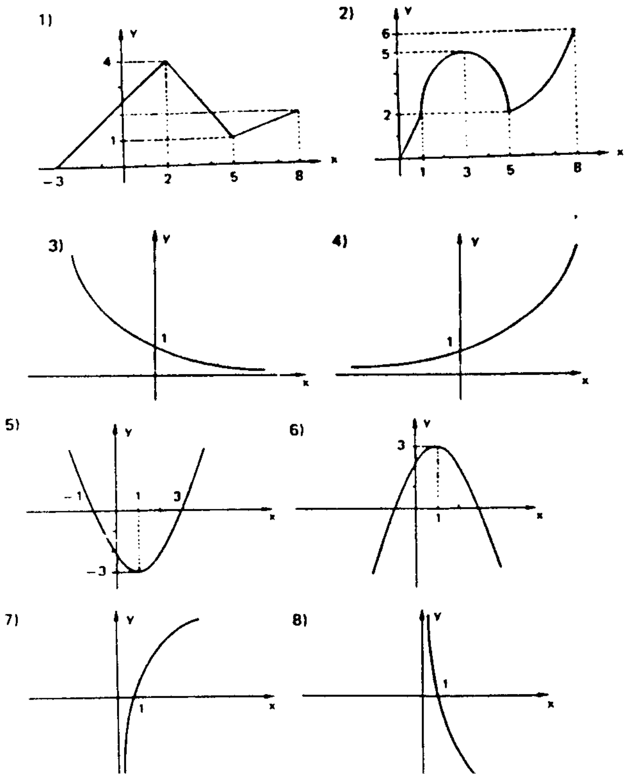
a) Não é sobrejetora, pois y_1, y_3, y_4 Є B não estão associados a elemento algum do domínio: não é injetora, pois y_2 Є B é imagem de x_1, x_2, x_3, x_4 Є A: logo, por dupla razão, não é bijetora.
b) É sobrejetora, pois todos os elementos de B (no caso há apenas y_1) são imagens de elementos de A; não é injetora, pois y_1 Є B é imagem de x_1, x_2, x_3, x_4 Є A, logo, por não ser injetora, embora seja sobrejetora, não é bijetora.
c) Não é sobrejetora, pois y_1, y_2, y_4 Є B não estão associados a elemento algum do domínio; é injetora, pois nenhum elemento de B é imagem do que mais de um elemento de A; logo, por não ser sobrejetora, embora seja injetora, não é bijetora.
d) É sobrejetora, pois todos os elementos de B (no caso há apenas y_1) são imagens de elementos de A; é injetora, pois o único elemento de B é imagem de um único elemento de A; logo, por ser simultaneamente sobrejetora e injetora, é bijetora.

2) Dê o domínio e a imagem dos seguintes gráficos:



Respostas:
1) D (f) =] –3, 3] e Im (f) =] –1, 2]
2) D (f) = [–4, 3 [e Im (f) = [–2, 3 [
3) D (f) =] –3, 3 [e Im (f) =] 1, 3 [
4) D (f) = [–5, 5 [e Im (f) = [–3, 4 [
5) D (f) = [–4, 5] e Im (f) = [–2, 3]
6) D (f) = [0, 6 [e Im (f) = [0, 4[

03) Observar os gráficos abaixo, e dizer se as funções são crescentes ou decrescentes e escrever os intervalos correspondentes:



RESPOSTAS
1) crescente: [–3, 2] decrescente: [2, 5] crescente: [5, 8]
2) crescente: [0, 3] decrescente: [3, 5] crescente: [5, 8]
3) decrescente
4) crescente
5) decrescente:] – ∞ , 1] crescente: [1, + ∞ [
6) crescente:] – ∞ , 1] decrescente: [1, + ∞ [
7) crescente
8) decrescente

04) Determine a função inversa das seguintes funções:

a) $y = 3x$ b) $y = x - 2$

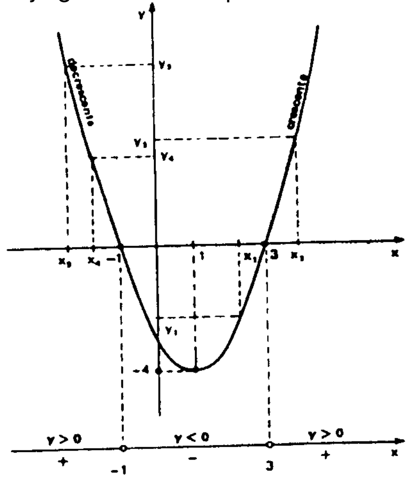
c) $y = x^3$ d) $y = \dfrac{x-5}{3}$

RESPOSTAS

a) $y = \dfrac{x}{3}$ b) $y = x + 2$

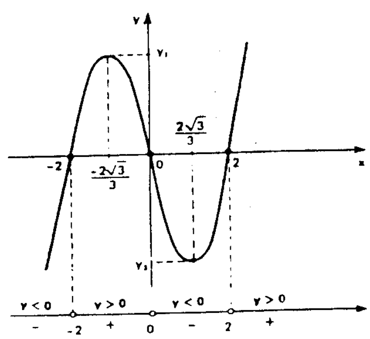
c) $y = \sqrt[3]{x}$ d) $y = 3x + 5$

05) Analise a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ou $y = x^2 - 2x - 3$ cujo gráfico é dado por:



- Zero da função: x = –1 e x = 3
- f (x) é crescente em] 1, + ∞ [
- f (x) e decrescente em] – ∞ , 1[
- Domínio → D(f) = IR
- Imagem → Im(f) = [–4, + ∞ [
- Valor mínimo → $y_{mín} = -4$
- Sinais: x Є] – ∞ , –1[⇒ f (x) > 0
  x Є] 3, + ∞ [⇒ f (x) > 0
  x Є [– 1, 3 [⇒ f (x) < 0

06) Analise a função $y = x^3 - 4x$ cujo gráfico é dado por:



RESPOSTAS
- Zero da função: x = – 2; x = 0; x = 2
- f (x) é crescente em $\left]-\infty, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right[$ e em $\left]\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

- f (x) é decrescente em $]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}[$
- Domínio → D(f) = IR
- Imagem → Im(f) = IR
- Sinais: x Є] – ∞ , –2 [⇒ f (x) < 0
  x Є] – 2, 0 [⇒ f (x) > 0
  x Є] 0, 2 [⇒ f (x) < 0
  x Є] 2, + ∞ [⇒ f (x) > 0

FUNÇÃO DO 1º GRAU

FUNCÃO LINEAR

Uma função f de IR em IR chama-se linear quando é definida pela equação do 1º grau com duas variáveis y = ax , com a Є IR e a ≠ 0.

Exemplos:
f definida pela equação y = 2x onde f : x → 2x
f definida pela equação y = –3x onde f : x → –3x

GRÁFICO

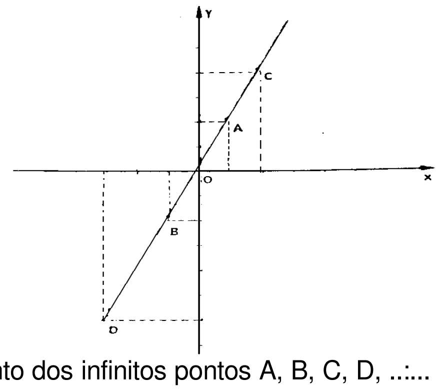
Num sistema de coordenadas cartesianas podemos construir o gráfico de uma função linear.

Para isso, vamos atribuir valores arbitrários para x (que pertençam ao domínio da função) e obteremos valores correspondentes para y (que são as imagens dos valores de x pela função).

A seguir, representamos num sistema de coordenadas cartesianas os pontos (x, y) onde x é a abscissa e y é a ordenada.

Vejamos alguns exemplos:
Construir, num sistema cartesiano de coordenadas cartesianas, o gráfico da função linear definida pela equação: y = 2x.
x = 1 → y = 2 . (1) = 2
x = –1 → y = 2 . (–1) = –2
x = 2 → y = 2 . (2) = 4
x = – 3 → y = 2 . (–3) = – 6

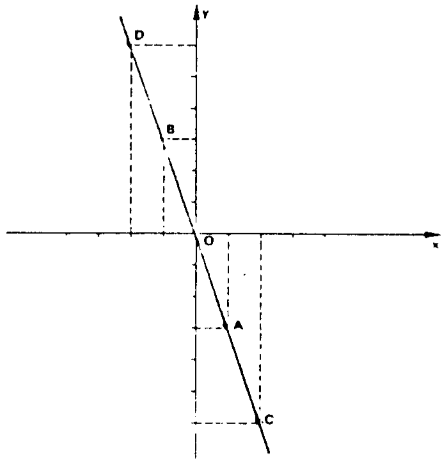
x	y	
1	2	→ A (1, 2)
–1	–2	→ B (–1, –2)
2	4	→ C (2, 4)
–3	–6	→ D (–3, –6)



O conjunto dos infinitos pontos A, B, C, D, ..:... chama-se gráfico da função linear y = 2x.

Outro exemplo:
Construir, num sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico da função linear definida pela equação y = –3x.
x = 1 → y = – 3 . (1) = – 3
x = –1 → y = –3 . (–1) = 3
x = 2 → y = –3 . (2) = – 6
x = –2 → y = –3 . (–2) = 6

x	y	
1	–3	→ A (1,– 3)
–1	3	→ B (–1, 3)
2	–6	→ C (2, – 6)
–2	6	→ D (–2, 6)



O conjunto dos infinitos pontos A, B, C, D , ... chama-se gráfico da função linear y = –3x.

Conclusão:
O gráfico de uma função linear é a reta suporte dos infinitos pontos A, B, C, D, ... e que passa pelo ponto origem O.

Observação
Como uma reta é sempre determinada por dois pontos, basta representarmos dois pontos A e B para obtermos o gráfico de uma função linear num sistema de coordenadas cartesianas.

FUNÇÃO AFIM

Uma função f de IR em IR chama-se afim quando é definida pela equação do 1º grau com duas variáveis
y = ax + b com a,b Є IR e a ≠ 0.

Exemplos:
f definida pela equação y = x +2 onde f : x → x + 2
f definida pela equação y = 3x –1onde f : x → 3x – 1

A função linear é caso particular da função afim, quando b = 0.

GRÁFICO

Para construirmos o gráfico de uma função afim, num sistema de coordenadas cartesianas, vamos proceder do mesmo modo como fizemos na função linear.

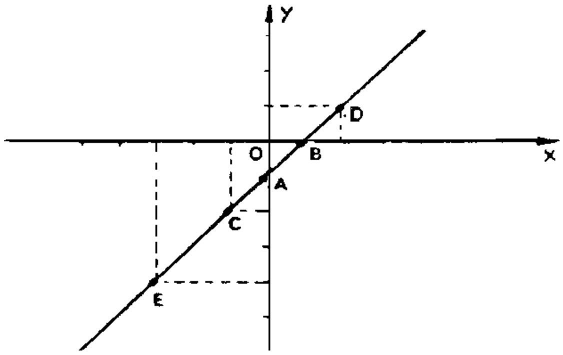
Assim, vejamos alguns exemplos, com b ≠ 0.

Construir o gráfico da função y = x – 1

Solução:

x = 0	→	y = 0 – 1 = – 1
x = 1	→	y = 1 – 1 = 0
x = –1	→	y = –1 – 1 = –2
x = 2	→	y = 2 – 1 = 1
x = –3	→	y = –3 – 1 = –4

x	y	→ pontos (x , y)
0	–1	→ A (0, –1)
1	0	→ B (1, 0)
–1	–2	→ C (–1, –2)
2	1	→ D (2, 1)
–3	–4	→ E (–3, –4)



O conjunto dos infinitos pontos A, B, C, D, E,... chama-se gráfico da função afim **y = x – 1**.

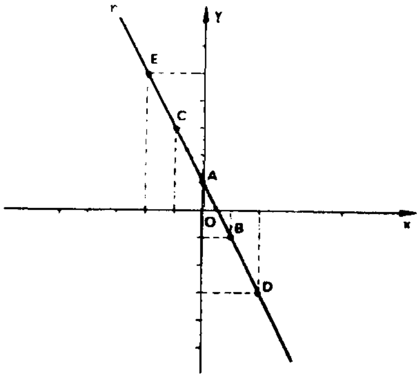
Outro exemplo:
Construir o gráfico da função y = –2x + 1.

Solução:

x = 0 →	y = –2. (0) + 1 = 0 + 1 = 1
x = 1 →	y = –2. (1) + 1 = –2 + 1 = –1
x = –1 →	y = –2. (–1) +1 = 2 + 1 = 3
x = 2 →	y = –2. (2) + 1 = –4 + 1 = –3
x = –2 →	y = –2. (–2)+ 1 = 4 + 1 = 5

x	y	→ pontos (x , y)
0	1	→ A (0, 1)
1	–1	→ B (1, –1)
–1	3	→ C (–1, 3)
2	–3	→ D (2, –3)
–2	5	→ E (–2, 5)

Gráfico



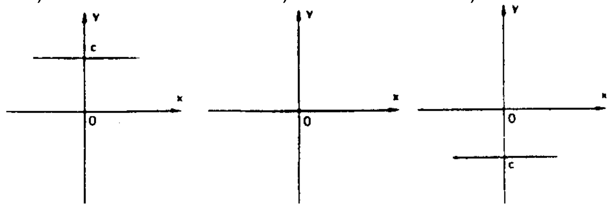
FUNÇÃO DO 1º GRAU
As funções linear e afim são chamadas, de modo geral, funções do 1º grau.

Assim são funções do primeiro grau:
f definida pela equação y = 3x
f definida pela equação y = x + 4
f definida pela equação y = – x
f definida pela equação y = – 4x + 1

FUNÇÃO CONSTANTE
Consideremos uma função f de IR em IR tal que, para todo x Є IR, tenhamos f(x) = c, onde c Є IR; esta função será chamada de **função constante**.

O gráfico da função constante é uma reta paralela ou coincidente com o **eixo x** ; podemos ter três casos:

a) c > 0 b) c = 0 c) c < 0



Observações:
Na função constante, f (x) = c ; o conjunto imagem é unitário.

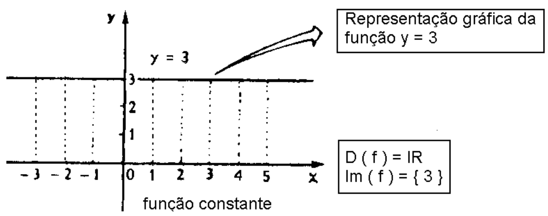
A função constante não é sobrejetora, não é injetora e não é bijetora; e, em consequência disto, ela não admite inversa.

Exemplo:
Consideremos a função y = 3, na qual a = 0 e b = 3
Atribuindo valores para x Є IR determinamos y Є IR

x Є R	y = 0 . X + 3	y Є IR	(x, y)
– 3	y = 0 .(–3)+ 3	y = 3	(–3, 3)
–2	y = 0. (–2) + 3	y = 3	(–2, 3)
–1	y = 0. (–1) + 3	y = 3	(–1, 3)
0	y = 0. 0 + 3	y = 3	(0, 3)
1	y = 0. 1 + 3	y = 3	(1 , 3)
2	y = 0. 2 + 3	y = 3	(2, 3)

Você deve ter percebido que qualquer que seja o valor atribuído a x, y será sempre igual a 3.

Representação gráfica:



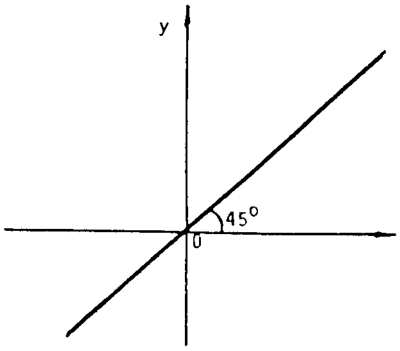
Toda função linear, onde a = 0, recebe o nome de função constante.

FUNÇÃO IDENTIDADE
Consideremos a função f de IR em IR tal que, para todo x Є R, tenhamos f(x) = x; esta função será chamada função identidade.

Observemos algumas determinações de imagens na função identidade.
x = 0 ⇒ f (0) = 0 ⇒ y = 0; logo, (0, 0) é um ponto

do gráfico dessa função.
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow y = 1$; logo (1, 1) é um ponto do gráfico dessa função.
$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow y = -1$; logo (–1,–1) é um ponto gráfico dessa função.

Usando estes pontos, como apoio, concluímos que o gráfico da função identidade é uma reta, que é a bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes.



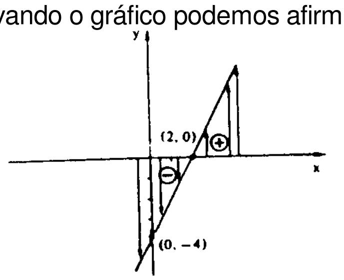
VARIAÇÃO DO SINAL DA FUNÇÃO LINEAR

A variação do sinal da função linear $y = ax + b$ é fornecida pelo sinal dos valores que y adquire, quando atribuímos valores para x.

1º CASO: a > 0

Consideremos a função $y = 2x - 4$, onde $a = 2$ e $b= -4$.

Observando o gráfico podemos afirmar:

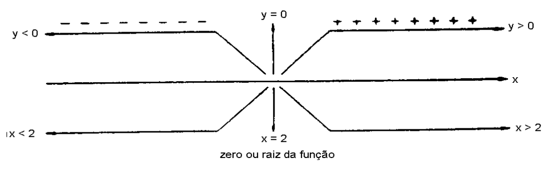


a) para $x = 2$ obtém-se $y = 0$
b) para $x > 2$ obtém-se para y valores positivos, isto é, $y > 0$.
c) para $x < 2$ obtém-se para y valores negativos, isto é, $y < 0$.

Resumindo:

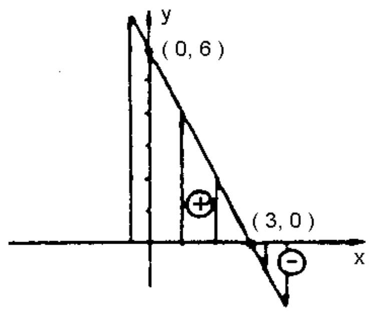
$$\forall\ x \in \mathrm{IR} \mid x > 2 \quad \Rightarrow y > 0$$
$$\forall\ x \in \mathrm{IR} \mid x < 2 \quad \Rightarrow y < 0$$
$$\forall\ x \in \mathrm{IR} \mid x = 2 \quad \Rightarrow y = 0$$

Esquematizando:



2º CASO: a < 0

Consideremos a função $y = -2x + 6$, onde $a = -2$ e $b = 6$.

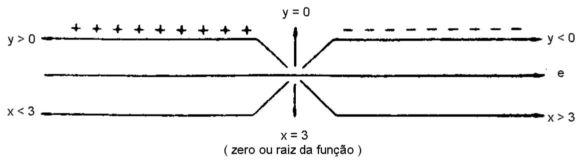


Observando o gráfico podemos afirmar:
a) para $x = 3$ obtém-se $y = 0$
b) para $x > 3$ obtêm-se para y valores negativos, isto é, $y < 0$.
c) para $x < 3$ obtêm-se para y valores positivos, isto é, $y > 0$.

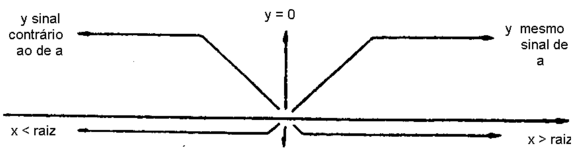
Resumindo:

$$\forall\ x \in \mathrm{IR} \mid x > 3 \quad \Rightarrow y < 0$$
$$\forall\ x \in \mathrm{IR} \mid x < 3 \quad \Rightarrow y > 0$$
$$\exists\ x \in \mathrm{IR} \mid x = 3 \quad \Rightarrow y = 0$$

Esquematizando:



De um modo geral podemos utilizar a seguinte técnica para o estudo da variação do sinal da função linear:



y tem o mesmo sinal de a quando x assume valores maiores que a raiz.

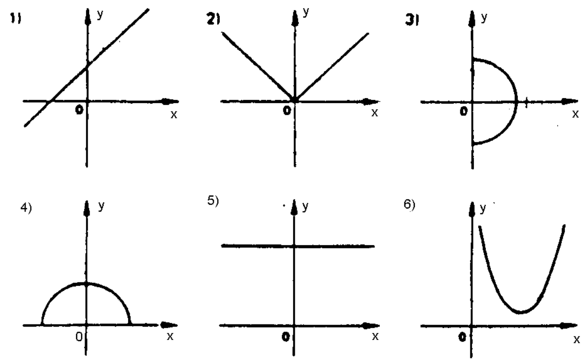
y tem sinal contrário ao de a quando x assume valores menores que a raiz.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) Determine o domínio das funções definidas por:
a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 4}$
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 2}$

Solução:
a) Para todo **x real** as operações indicadas na fórmula são possíveis e geram como resultado um número real dai: D (f) = IR
b) Para que as operações indicadas na fórmula sejam possíveis, deve-se ter: $x - 4 \neq 0$, isto é, $x \neq 4$. D (f) = { x Є IR | $x \neq 4$}
c) Devemos ter:
$x - 1 \geq 0$ e $x - 2 \neq 0$
$x \geq 1$ $x \neq 2$
e daí: D (f) = { x Є IR | $x \geq 1$ e $x \neq 2$ }

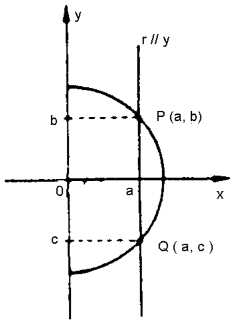
02) Verificar quais dos gráficos abaixo representam funções:

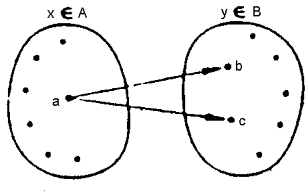


Resposta:

Somente o gráfico 3 não é função, porque existe x com mais de uma imagem y, ou seja, traçando-se uma reta paralela ao eixo y, ela pode Interceptar a curva em mais de um ponto. Ou seja:

Os pontos P e Q têm a mesma abscissa, o que não satisfaz a definição de função.





não é função

3) Estudar o sinal da função y = 2x – 6

Solução a = +2 (sinal de a)

b = – 6

a) Determinação da raiz:

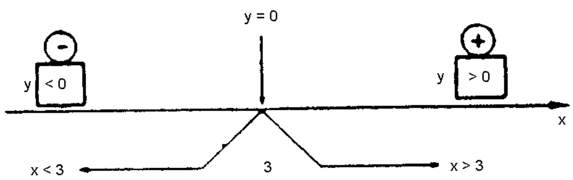
y = 2x – 6 = 0 $\Rightarrow$ 2x = 6 $\Rightarrow$ x = 3

Portanto, y = 0 para x = 3.

b) Determinação do sinal de y:

Se x > 3 , então y > 0 (mesmo sinal de a)

Se x < 3 , então y < 0 (sinal contrário de a)



04) Estudar o sinal da fundão y = –3x + 5

Solução:

a = –3 (sinal de a) b = + 5

a) Determinação da raiz:

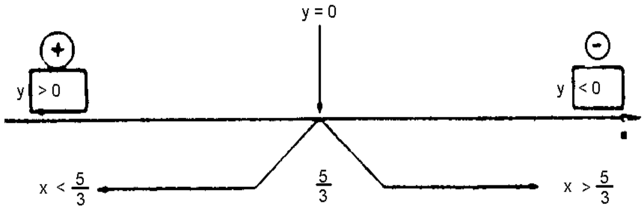
$y = -3x + 5 = 0 \Rightarrow -3x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Portanto, y = 0 para $x = \frac{5}{3}$

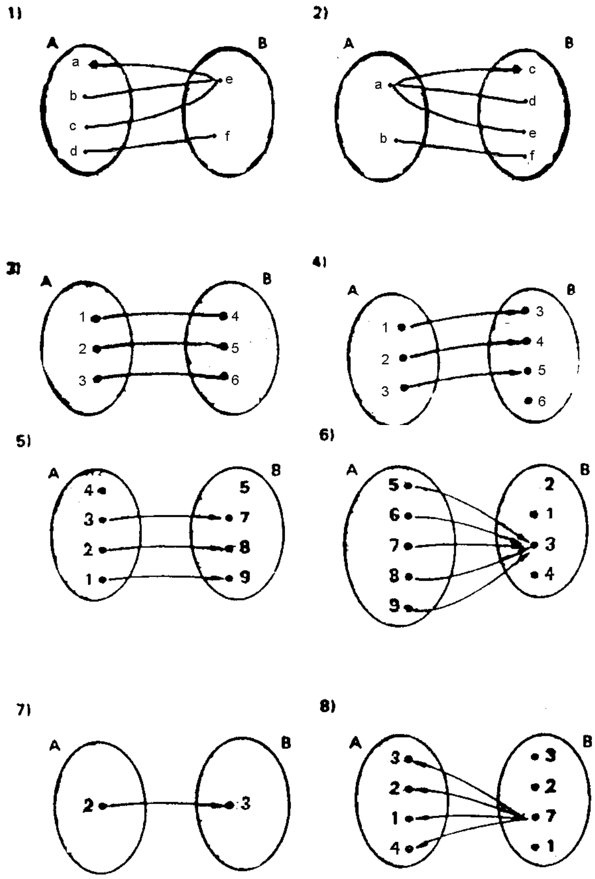
b) Determinação do sinal de y:

se $x > \frac{5}{3}$, então y < 0 (mesmo sinal de a)

se $x < \frac{5}{3}$, então y > 0 (sinal contrário de a)



05) Dentre os diagramas seguintes, assinale os que representam função e dê D (f) e Im(f)



Respostas:

1) È função ; D(f) = {a.b,c,d} e Im(f) = {e,f }

2) Não é função

3) È função ; D(f) = {1, 2, 3} e Im(f) = { 4, 5, 6 }

4) È função ; D(f) = {1, 2, 3 } e Im(f) = { 3, 4, 5}

5) Não é função

6) È função ; D(f) = {5, 6, 7, 8, 9} e Im(f) = {3}

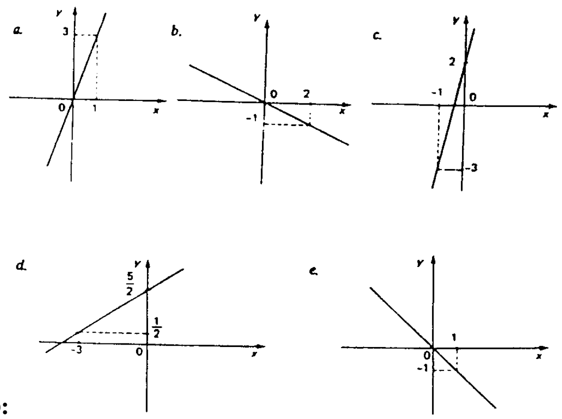
7) É função ; D(f) = { 2 } e Im(f) = { 3 }

06) Construa o gráfico das funções:

a) f(x) = 3x b) $g(x) = -\frac{1}{2}x$

c) h (x) = 5x + 2 d) $i(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$

e) $y = -x$



Solução:

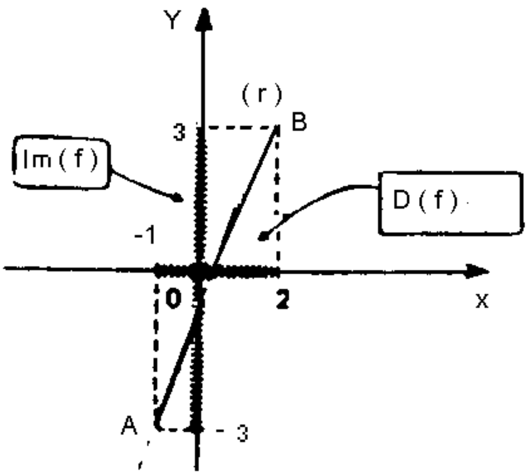
07) Uma função f, definida por $f(x) = 2x - 1$, tem domínio $D(f) = \{x \in IR \mid -1 \leq x \leq 2\}$ Determine o conjunto-imagem

Solução:

Desenhamos o gráfico de f e o projetamos sobre o eixo 0x

x	y
–1	–3
2	3

O segmento $\overline{AB}$ é o gráfico de f; sua projeção sobre o eixo 0y nos dá: $Im(f) = [-3, 3]$



08) Classifique as seguintes funções lineares em crescentes ou decrescentes:

a) $y = f(x) = -2x - 1$
b) $y = g(x) = -3 + x$
c) $y = h(x) = \frac{1}{2}x - 5$
d) $y = t(x) = -x$

Respostas:

a) decrescente b) crescente
c) crescente d) decrescente

09) Fazer o estudo da variação do sinal das funções:

1) $y = 3x + 6$
2) $y = 2x + 8$
3) $y = -4x + 8$
4) $y = -2x + 6$
5) $y = 4x - 8$
6) $y = 5x - 25$
7) $y = -9x - 12$
8) $y = -3x - 15$
9) $y = 2x + 10$

Respostas:

1) $x > -2 \Rightarrow y > 0$; $x = -2 \Rightarrow y = 0$; $x < -2 \Rightarrow y < 0$
2) $x > -4 \Rightarrow y > 0$; $x = -4 \Rightarrow y = 0$; $x < -4 \Rightarrow y < 0$
3) $x > 2 \Rightarrow y < 0$; $x = 2 \Rightarrow y = 0$; $x < 2 \Rightarrow y > 0$
4) $x > 3 \Rightarrow y < 0$; $x = 3 \Rightarrow y = 0$; $x < 3 \Rightarrow y > 0$
5) $x > 2 \Rightarrow y > 0$; $x = 2 \Rightarrow y = 0$; $x < 2 \Rightarrow y < 0$
6) $x > 5 \Rightarrow y > 0$; $x = 5 \Rightarrow y = 0$; $x < 5 \Rightarrow y < 0$
7) $x > -\frac{4}{3} \Rightarrow y < 0$; $x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = 0$; $x < -\frac{4}{3} \Rightarrow y > 0$
8) $x > -5 \Rightarrow y < 0$; $x = -5 \Rightarrow y = 0$; $x < -5 \Rightarrow y > 0$
9) $x > -5 \Rightarrow y > 0$; $x = -5 \Rightarrow y = 0$; $x < -5 \Rightarrow y < 0$

FUNÇÃO QUADRÁTICA

EQUACÃO DO SEGUNDO GRAU

Toda equação que pode ser reduzida à equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$, é uma equação do 2º grau em x.

Exemplos:

São equações do 2º grau:

$x^2 - 7x + 10 = 0$	(a = 1, b = –7, c = 10)
$3x^2 + 5x + 2 = 0$	(a = 3, b = 5, c = 2)
$x^2 - 3x + 1 = 0$	(a = 1, b = –3, c = 1)
$x^2 - 2x = 0$	(a = 1, b = –2, c = 0)
$-x^2 + 3 = 0$	(a = –1, b = 0, c = 3)
$x^2 = 0$	(a = 1, b = 0, c = 0)

Resolução:

Calculamos as raízes ou soluções de uma equação do 2º grau usando a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Chamamos Δ de discriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$

Podemos indicar as raízes por x_1 e x_2, assim:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A existência de raízes de uma equação do 2º grau depende do sinal do seu discriminante. Vale dizer que:

$\Delta > 0 \rightarrow$ existem duas raízes reais e distintas ($x_1 \neq x_2$)
$\Delta = 0 \rightarrow$ existem duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$)
$\Delta < 0 \rightarrow$ não existem raízes reais

Exercícios:

1) Determine o conjunto verdade da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, em IR
temos: a = 1, b = –7 e c = 10
$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

As raízes são 2 e 5.
V = { 2, 5 }

2) Determine x real, tal que $3x^2 - 2x + 6 = 0$
temos: a = 3, b = –2 e c = 6
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -68$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-68}$ e $\sqrt{-68} \notin$ IR
não existem raízes reais V = { }

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Toda lei de formação que pode ser reduzida a forma:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$

Onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$, define uma função quadrática ou função do 2º grau para todo x real.

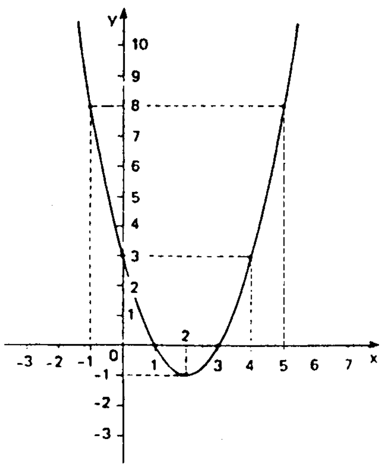
GRÁFICO
Façamos o gráfico de $f : IR \rightarrow IR$ definida por
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

A tabela nos mostra alguns pontos do gráfico, que é uma curva aberta denominada parábola. Basta marcar estes pontos e traçar a curva.

x	$y = x^2 - 4x + 3$	ponto
-1	$y = (-1)^2 - 4(-1) + 3 = 8$	(-1, 8)
0	$y = 0^2 - 4 . 0 + 3 = 3$	(0, 3)
1	$y = 1^2 - 4 . 1 + 3 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2^2 - 4 . 2 + 3 = -1$	(2,-1)
3	$y = 3^2 - 4 . 3 + 3 = 0$	(3, 0)
4	$y = 4^2 - 4 . 4 + 3 = 3$	(4, 3)
5	$y = 5^2 - 4 . 5 + 3 = 8$	(5, 8)

De maneira geral, o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

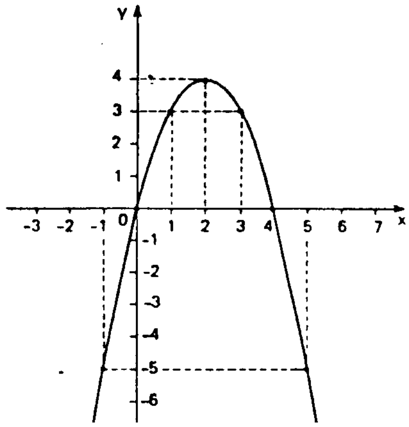
Gráfico:



Eis o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x$

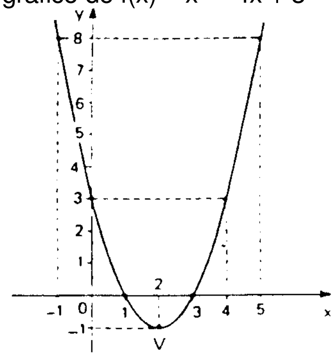
x	$y = -x^2 + 4x$	ponto
-1	$y = -(-1)^2 + 4(-1) = -5$	(-1, -5)
0	$y = -0^2 + 4 . 0 = 0$	(0, 0)
1	$y = -(1)^2 + 4 . 1 = 3$	(1, 3)
2	$y = -(2)^2 + 4 . 2 = 4$	(2, 4)
3	$y = -(3)^2 + 4 . 3 = 3$	(3, 3)
4	$y = -(4)^2 + 4 . 4 = 0$	(4, 0)
5	$y = -(5)^2 + 4 . 5 = -5$	(5, -5)

Gráfico:



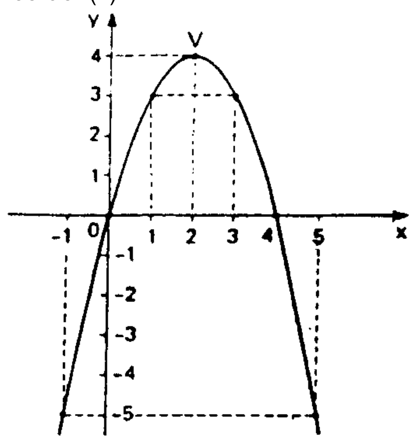
VÉRTICE E CONCAVIDADE
O ponto V indicado nos gráficos seguintes é denominado vértice da parábola. Em (I) temos uma parábola de concavidade voltada para cima (côncava para cima), enquanto que em (II) temos uma parábola de concavidade voltada para baixo (côncava para baixo)

I) gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Parábola côncava para cima

II) gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x$



parábola côncava para baixo

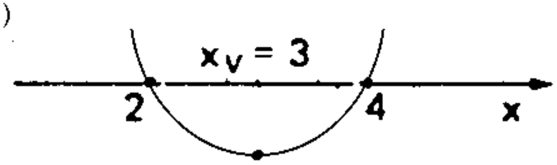
Note que a parábola côncava para cima é o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ onde temos a = 1 (portanto a > 0) enquanto que a côncava para baixo é o gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x$ onde temos a = –1 (portanto a > 0).

De maneira geral, quando a > 0 o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola côncava para cima.
E quando a < 0 a parábola é côncava para baixo.

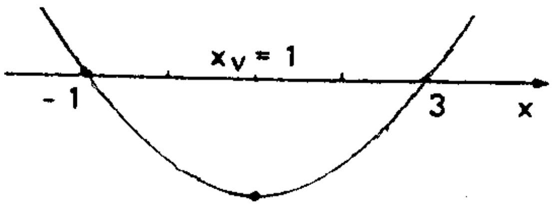
COORDENADA DO VÉRTICE

Observe os seguintes esboços de gráficos de funções do 2º grau:

a)



b)



Note que a abscissa do vértice é obtida pela semi-soma dos zeros da função. No esboço (a) temos:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

No esboço (b) temos:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como a soma das raízes de uma equação do 2º grau é obtida pela fórmula $S = \frac{-b}{a}$, podemos concluir que:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

ou seja, a abscissa do vértice da parábola é obtida pela fórmula: $x_V = \frac{-b}{2a}$

Exemplos de determinação de coordenadas do vértice da parábola das funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 8x + 15$
Solução:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$y_V = (4)^2 - 8.\ (4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

Portanto: V = (4, –1)

b) $y = 2x^2 - 3x + 2$

Solução:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(2)} = \frac{3}{4}$$

$$y_V = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 2 =$$

$$= 2.\left(\frac{9}{16}\right) - \frac{9}{4} + 2 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{18 - 36 + 32}{16} =$$

$$= \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Portanto: V = ($\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$)

EXERCICIOS

Determine as coordenadas do vértice da parábola definida pelas funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 6x + 5$
b) $y = -x^2 - 8x + 16$
c) $y = 2x^2 + 6x$
d) $y = -2x^2 + 4x - 8$
e) $y = -x^2 + 6x - 9$
f) $y = x^2 - 16$

Respostas:

a) V = {3, –4}	b) V = {–4, 32}
c) V = {–3/2, –9/2}	d) V = { 1, –6}
e) V = { 3, 0}	f) V = {0, –16}

RAÍZES OU ZEROS DA FUNÇAO DO 2º GRAU

Os valores de x que anulam a função $y = ax^2 + bx + c$ são denominados zeros da função.

Na função $y = x^2 - 2x - 3$:

- o número –1 é zero da função, pois para x = –1, temos y = 0.
- o número 3 é também zero da função, pois para x = 3, temos y = 0.

Para determinar os zeros da função $y = ax^2 + bx + c$ devemos resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplos:
Determinar os zeros da função
$y = x^2 - 2x - 3$

Solução:

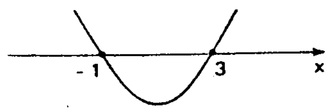
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.\ (1).\ (-3)$$
$$\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x = \frac{-(-2) \pm 4}{2(1)} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{array}\right.$$

Portanto: – 1 e 3 são os zeros da função:
$y = x^2 - 2x - 3$

Como no plano cartesiano os zeros da função são as abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x, podemos fazer o seguinte esboço do gráfico da função $y = x^2 - 2x - 3$.

Lembre-se que, como a > 0, a parábola tem a concavidade voltada para cima.



Vamos determinar os zeros e esboçar o gráfico das funções:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

Solução:

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

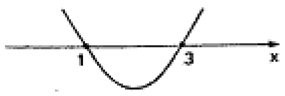
$\Delta = (-4)^2 - 4.(1).(3)$

$\Delta = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm 2}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

Como a = 1 > 0, a concavidade está voltada para cima.



b) $y = -2x^2 + 5x - 2$

Solução:

$\Delta = b^2 - 4ac$

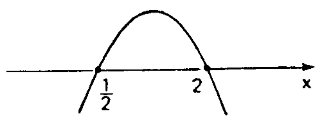
$\Delta = (5)^2 - 4.(-2).(-2)$

$\Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(5) \pm 3}{2(-2)} = \frac{-5 \pm 3}{-4} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-8}{-4} = 2 \end{array} \right.$$

Como a = –2 < 0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



c) $y = 4x^2 - 4x + 1$

Solução:

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

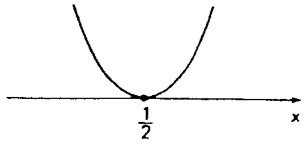
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4.(4).(1)$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4)}{2(4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Como a = 4 > 0, a parábola tem a concavidade voltada para cima.



d) $y = -3x^2 + 2x - 1$

Solução:

$-3x^2 + 2x - 1 = 0$

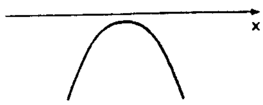
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (2)^2 - 4(-3)(-1)$

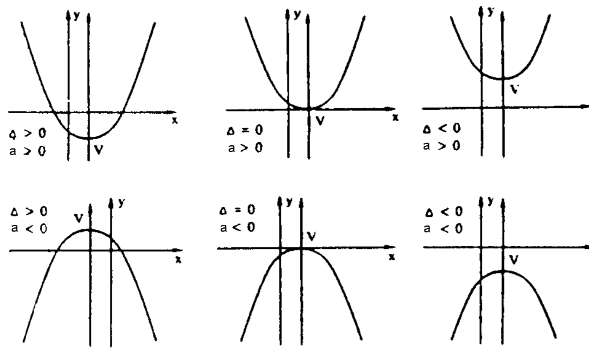
$\Delta = 4 - 12 = -8$

A função não tem raízes reais.

Como a = –3 < 0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



Em resumo, eis alguns gráficos de função quadrática:



CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO

Para construir uma parábola começamos fazendo uma tabela de pontos da curva. O vértice é um ponto importante e por isso é conveniente que ele esteja na tabela.

Eis como procedemos:

a) determinemos x_v, aplicando a fórmula $x_V = \frac{-b}{2a}$
b) atribuímos a x o valor x_v e mais alguns valores, menores e maiores que x_v .
c) Calculamos os valores de y
d) marcamos os pontos no gráfico
e) traçamos a curva

Exemplo:

Construir o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$

Solução: temos: a = 1, b = –2 e c = 2

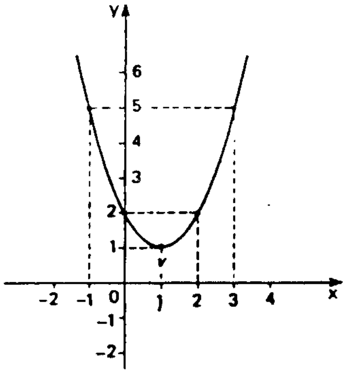
$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

Fazemos a tabela dando a x os valores -1, 0, 2 e 3.

x	$y = x^2 - 2x + 2$	ponto
-1	$y = (-1)^2 - 2(-1) + 2 = 5$	(-1, 5)
0	$y = 0^2 - 2 .\ 0 + 2 = 2$	(0, 2)
1	$y = 1^2 - 2 .\ 1 + 2 = 1$	(1, 1)
2	$y = 2^2 - 2 .\ 2 + 2 = 2$	(2, 2)

3	$y = 3^2 - 2\ .\ 3 + 2 = 5$	(3, 5)

Gráfico:



ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

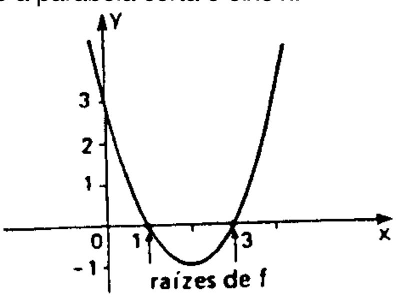
Estudar o sinal de uma função quadrática é determinar os valores de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

Já sabemos determinar os zeros (as raízes) de uma função quadrática, isto é, os valores de x que anulam a função, e esboçar o gráfico de uma função quadrática.

Sinais da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Vamos agora esboçar o gráfico de
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

As raízes de f, que são 1 e 3, são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo x.

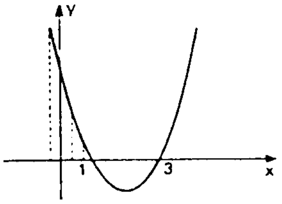


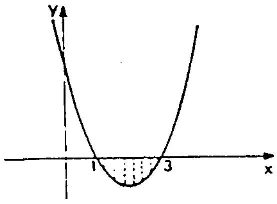
Vamos percorrer o eixo dos x da esquerda para a direita.

Antes de chegar em x = 1, todos os pontos da parábola estão acima do eixo x, tendo ordenada y positiva. Isto significa que para todos os valores de x menores que 1 temos $f(x) > 0$.

Para x = 1 temos $f(x) = 0$ (1 é uma das raízes de f)

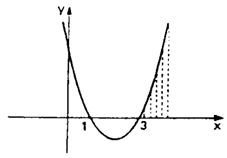
Depois de x = 1 e antes de x = 3, os pontos da parábola estão abaixo do eixo x, tendo ordenada y negativa. Isto significa que para os valores de x compreendidos entre 1 e 3 temos $f(x) < 0$.



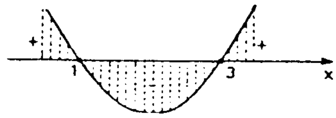


Para x = 3 temos $f(x) = 0$ (3 é raiz de f).

Depois de x = 3, todos os pontos da parábola estão acima do eixo x, tendo ordenada y positiva. Isto significa que para todos os valores de x maiores do que 3 temos $f(x) > 0$.



Este estudo de sinais pode ser sintetizado num esquema gráfico como o da figura abaixo, onde representamos apenas o eixo x e a parábola.



Marcamos no esquema as raízes 1 e 3, e os sinais da função em cada trecho. Estes são os sinais das ordenadas y dos pontos da curva (deixamos o eixo y fora da jogada mas devemos ter em mente que os pontos que estão acima do eixo x têm ordenada y positiva e os que estão abaixo do eixo x têm ordenada negativa).

Fica claro que percorrendo o eixo x da esquerda para a direita tiramos as seguintes conclusões:

$x < 1$	$\Rightarrow$	$f(x) > 0$
$x = 1$	$\Rightarrow$	$f(x) = 0$
$1 < x < 3$	$\Rightarrow$	$f(x) < 0$
$x = 3$	$\Rightarrow$	$f(x) = 0$
$x > 3$	$\Rightarrow$	$f(x) > 0$

De maneira geral, para dar os sinais da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumprimos as seguintes etapas:

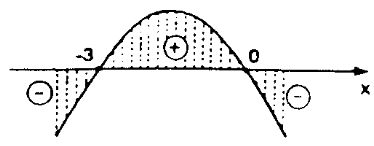
a) calculamos as raízes reais de f (se existirem)
b) verificamos qual é a concavidade da parábola
c) esquematizamos o gráfico com o eixo x e a parábola
d) escrevemos as conclusões tiradas do esquema

Exemplos:
Vamos estudar os sinais de algumas funções quadráticas:

1) $f(x) = -x^2 - 3x$

Solução:
Raízes: $-x^2 - 3x = 0 \Rightarrow -x(x + 3) = 0 \Rightarrow$
$(-x = 0 \text{ ou } x + 3 = 0) \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3$
concavidade: $a = -1 \Rightarrow a < 0$ para baixo

Esquema gráfico



Conclusões:

$x < -3$	$\Rightarrow$	$f(x) < o$
$x = -3$	$\Rightarrow$	$f(x) = 0$

$-3 < x < 0 \Rightarrow f(x) > 0$
$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
$x > 0 \Rightarrow f(x) < 0$

2) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$
Solução:
Raízes:

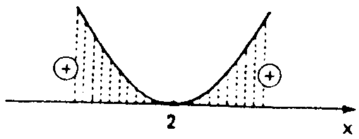
$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{0}}{4} = 2$$

A parábola tangência o eixo x no ponto de abscissa 2.

concavidade: $a = 2 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ para cima

Esquema gráfico

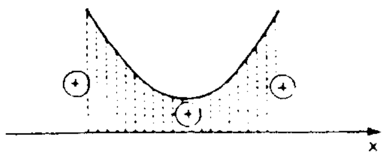


Conclusões:
$x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$
$x = 2 \Rightarrow f(x) = 0$
$x > 2 \Rightarrow f(x) > 0$

3) $f(x) = x^2 + 7x + 13$
Solução:
Raízes:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \text{IR}$$

Esquema gráfico



Conclusão: $\forall\ x \in \text{IR},\ f(x) > 0$

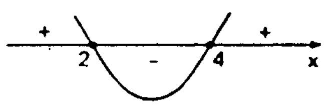
4) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
Solução:
Raízes: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$

$\Delta = 36 - 32 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{6+2}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \dfrac{6-2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right.$$

$x_1 = 2$ e $x_2 = 4$

Esboço gráfico:



Estudo do sinal:
para $x < 2$ ou $x > 4 \Rightarrow y > 0$
para $x = 2$ ou $x = 4 \Rightarrow y = 0$
para $2 < x < 4 \Rightarrow y < 0$

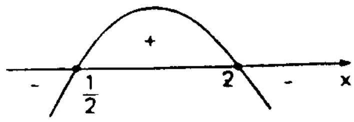
5) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$
Solução:
Zeros da função: $\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)$

$\Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{2(-2)} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-5-3}{-4} = \dfrac{-8}{-4} = 2 \end{array} \right.$$

$x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$

Esboço do gráfico:



Estudo do sinal
Para $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2 \Rightarrow y < 0$

Para $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2 \Rightarrow y = 0$

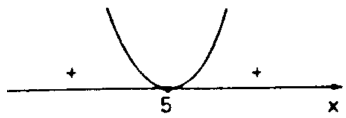
Para $\frac{1}{2} < x < 2 \Rightarrow y > 0$

6) $f(x) = x^2 - 10x + 25$
Solução: $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$

$\Delta = 100 - 100 = 0$

$$x = \frac{-(-10)}{2(1)} = \frac{10}{2} = 5$$

Esboço gráfico:



Estudo do sinal:
para $x \neq 5 \Rightarrow y > 0$
para $x = 5 \Rightarrow y = 0$

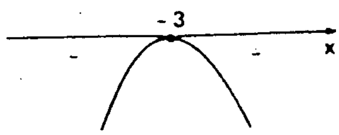
Observe que não existe valor que torne a função negativa.

7) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$
Solução:
Zeros da função: $\Delta = (-6)^2 - 4(-1)(-9)$

$\Delta = 36 - 36 = 0$

$$x = \frac{-(-6)}{2(-1)} = \frac{6}{-2} = -3$$

Esboço gráfico:



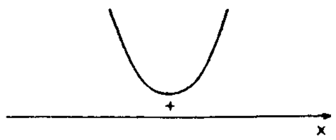
Estudo do sinal:
para $x \neq -3 \Rightarrow y < 0$ para $x = -3 \Rightarrow y = 0$

Observe que não existe valor de x que torne a função positiva.

8) $f(x) = x^2 - 3x + 3$
Solução:
Zeros da função $\Delta = (-3)^2 - 4 . 1 . 3$
$\Delta = 9 - 12 = -3$

A função não tem zeros reais

Esboço do gráfico:



Estudo do sinal: $\forall x \in IR \Rightarrow y > 0$

9) Determine os valores de m, reais, para que a função
$f(x) = (m^2 - 4)x^2 + 2x$
seja uma função quadrática.
Solução:
A função é quadrática $\Leftrightarrow a \neq 0$
Assim: $m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 4 \Rightarrow m \neq \pm 2$
Temos: m Є IR, com $m \neq \pm 2$

10) Determine m de modo que a parábola
$y = (2m - 5)x^2 - x$
tenha concavidade voltada para cima.
Solução:
Condição: concavidade para cima $\Leftrightarrow a > 0$
$2m - 5 > 0 \Rightarrow m > \frac{5}{2}$

11) Determinar m para que o gráfico da função quadrática $y = (m - 3)x^2 + 5x - 2$ tenha concavidade volta para cima.
solução:
condição: $a > 0 \Rightarrow m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$

12) Para que valores de m função $f(x) = x^2 - 3x + m - 2$ admite duas raízes reais iguais?
Solução:
condição: $\Delta > 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(m - 2) = 9 - 4m + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4m + 17 > 0 \Rightarrow m => \frac{-17}{-4} \Rightarrow m > \frac{17}{4}$

13) Para que valores de x a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ assume valores que acarretam $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$?
Solução:
$f(x) = x^2 - 5x + 6$
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Portanto:
$f(x) > 0$ para [x Є R / x < 2 ou x > 3]
$f(x) < 0$ para [x Є R / 2 < x < 3]

EXERCÍCIOS

01) Determine as raízes, o vértice, D(f) e Im(f) das seguintes funções:
a) $y = x^2 + x + 1$
b) $y = x^2 - 9$
c) $y = -x^2 + 4x - 4$
d) $y = -x^2 - 8x$

Respostas:
a) não tem; (-1/2, 3/4); IR; { y Є IR | $y \geq \frac{3}{4}$}
b) 3, -3; (0, 0); IR; { y Є IR | $y \geq 0$}
c) 2; (2,0); IR; { y Є R | $y \leq 0$}
d) 0, -8; (-4, 16); IR; { y Є IR | $y \leq 16$}

02) Determine os zeros (se existirem) das funções quadráticas:
a) $y = x^2 - 6x + 8$
b) $y = -x^2 + 4x - 3$
c) $y = -x^2 + 4x$
d) $y = x^2 - 6x + 9$
e) $y = -9x^2 + 12x - 4$
f) $y = 2x^2 - 2x + 1$
g) $y = x^2 + 2x - 3$
h) $y = 3x^2 + 6x$
i) $y = x^2$

Respostas:
a) 2 e 4 b) 1 e 3
c) 4 e 0 d) 3
e) 2/3 f) ϕ
g) –3 e 1 h) – 2 e 0
i) 0

03) Determine os valores reais de m, para os quais:
a) $x^2 - 6x - m - 4 = 0$ admita duas raízes reais diferentes
b) $mx^2 - (2m - 2)x + m - 3 = 0$ admita duas raízes reais e iguais
c) $x^2 - (m + 4)x + 4m + 1 = 0$ não admita raízes reais
d) $x^2 - 2mx - 3m + 4 = 0$ admita duas raízes reais diferentes.

Respostas:
a) $\{ m \in IR | m > -13 \}$
b) $\{ m \in IR | m = -1 \}$
c) $\{ m \in IR | 2 < m < 6 \}$
d) $\{ m \in IR | m < -4 \text{ e } m > 1 \}$

04) Dada a função $y = x^2 - x - 6$, determine os valores de x para que se tenha $y > 0$.
Resposta : S = $\{ x \in IR | x < -2 \text{ ou } x > 3 \}$

05) Dada a função $y = x^2 - 8x + 12$, determine os valores de x para que se tenha $y < 0$.
Resposta : S = $\{ x \in IR | 2 < x < 6 \}$

FUNÇÃO PAR
FUNÇÃO ÍMPAR

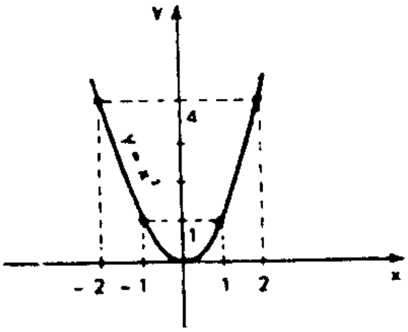
FUNÇAO PAR
Dizemos que uma função de D em A é uma função

par se e somente se: f (x) = f (– x), $\forall x, \; x \in D$ isto é, a valores simétricos da variável x correspondem a mesma imagem pela função.

Exemplo:
f (x) = x^2 é uma função par, pois temos, por exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = (-2)^2 = 4 \\ f(2) = 2^2 = 4 \end{array}\right| \quad f(-2) = f(2)$$

Observe o seu gráfico:



Vale observar que: o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y.

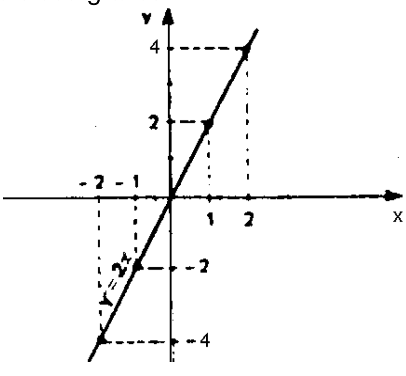
FUNÇÃO ÍMPAR

Dizemos que uma função D em A é uma função impar se e somente se f (– x) = – f (x), $\forall x, \; x \in D$, isto é, os valores simétricos da variável x correspondem as imagens simétricas pela função.

Exemplo:
f (x) = 2x é uma função ímpar, pois temos, por exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2(-1) = -2 \\ f(1) = 2 \cdot 1 = 2 \end{array}\right| \quad f(-1) = -f(1)$$

Observe o seu gráfico:



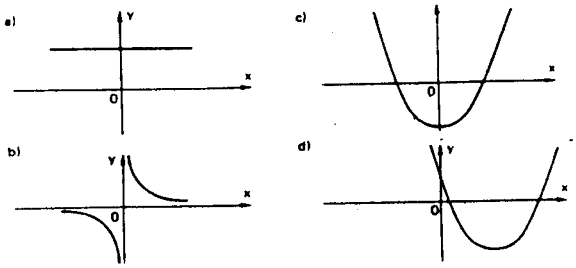
O gráfico de uma função impar é simétrico em relação a origem do sistema cartesiano.

EXERCÍCIOS

01) Dizer se as funções seguintes são pares, ímpares ou nenhuma das duas.
a) f(x) = x
b) f(x) = x^2
c) f(x) = x^3
d) f(x) = | x |
e) f(x) = x +1

Respostas
a) f(-x) = -x = -f(x); é função ímpar
b) f(-x) = $(-x)^2 = x^2$ = f(x); é função par
c) f(-x) = $(-x)^3 = -x^3$ = -f (x); é função ímpar
d) f(-x) = | -x | = | x | = f (x); é função par
e) f(-x) = -x + 1
$\neq$ x + 1 = f (x)
$\neq$ - (x + 1)= - f (x)
não é função par nem função ímpar

02) Dizer se as funções seguintes, dados seus gráficos cartesianos são pares, ímpares ou nenhuma das duas.



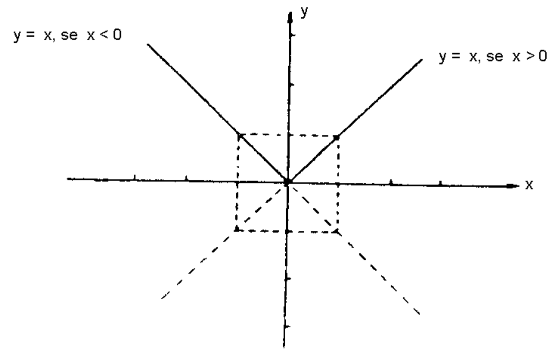
Resposta
a) é uma função par, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo x.
b) é uma função ímpar, pois seu gráfico é simétrico em relação ao ponto origem,
c) é uma função par, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y.
d) Não é nem função par nem função impar, pois seu gráfico não é simétrico nem em relação ao eixo y e nem em relação ao ponto origem.

FUNÇÃO MODULO

Chamamos de função modular a toda função do tipo y = | x | definida por:

$$f(x) = \left|\begin{array}{l} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0, \text{para todo } x \text{ real} \end{array}\right.$$

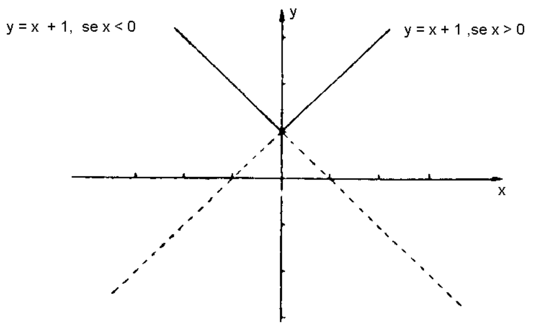
Representação gráfica:



D (f) = R
Im (f) = R_+

Exemplos:
a) y = | x | + 1

$$y = \begin{cases} x + 1, \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1, \text{se } x < 0 \end{cases}$$



D (f) = R Im (f) = { y Є IR | y $\geq$ 1}

b) Calcular | x – 5 | = 3
Solução:
| x – 5 | = 3 $\Leftrightarrow$ x – 5 = 3 ou x – 5 = –3

Resolvendo as equações obtidas, temos:

x – 5 = 3	x – 5 = – 3
x = 8	x = 2

S = {2, 8}

c) Resolver a equação $| x |^2 + 2 | x | – 15 = 0$
Solução:
Fazemos | x | = y, com y $\geq$ 0, e teremos
$y^2 + 2y – 15 = 0$ $\Delta = 64$
y' = 3 ou y " = – 5 (esse valor não convêm pois y $\geq$ 0)

Como | x | = y e y = 3, temos
| x | = 3 $\Leftrightarrow$ x =3 ou x = –3
S = { –3, 3}

d) Resolver a equação $| x^2 – x – 1| = 1$
Solução:

$\| x^2 – x – 1\| = 1$	$x^2 – x – 1 = 1$ ou
	$x^2 – x – 1 = – 1$
$x^2 – x – 1 = 1$	$x^2 – x – 1 = – 1$
$x^2 – x – 2 = 0$	$x^2 – x = 0$
$\Delta = 9$	
	x (x – 1) = 0
x' = 2 ou x " = –1	x' = 0 ou x " = 1

S = { –1, 0, 1, 2 }

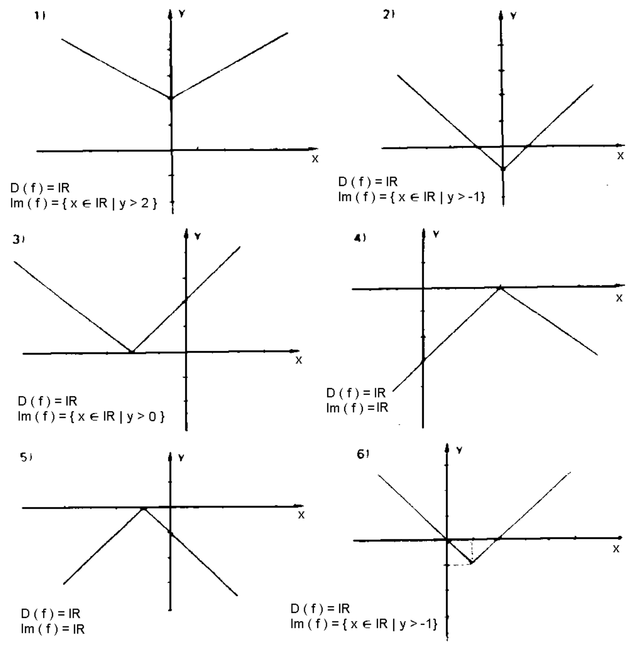
e) Resolver a equação $| x |^2 – 2 | x | – 3 = 0$
Solução:
Fazendo | x | = y, obtemos
$y^2 – 2y – 3 = 0$ $\Rightarrow$ y = –1 ou y = 3

Como y = | x |, vem:
| x | = 3 $\Rightarrow$ x = –3 ou x = 3
| x | = –1 não tem solução pois | x | $\geq$ 0

Assim, o conjunto-solução da equação é
S = { –3, 3}

EXERCÍCIOS
Represente graficamente as seguintes funções modulares e dê D (f) e Im (f) :

1) y = | x | + 2	4) y = –| x – 3 |
2) y = | x | – 1	5) y = –| x + 1 |
3) y = | x + 2|	6) y = | x – 1 | – 1



FUNÇÃO COMPOSTA
Consideremos a seguinte função:

Um terreno foi dividido em 20 lotes, todos de forma quadrada e de mesma área. Nestas condições, vamos mostrar que a área do terreno é uma função da medida do lado de cada lote, representando uma composição de funções.

Para isto, indicaremos por:
x = medida do lado de cada lote
y = área de cada terreno
z = área da terreno

1) Área de cada lote = (medida do lado)^2
$\Rightarrow$ $y = x^2$

Então, a área de cada lote é uma função da medida do lado, ou seja, $y = f (x) = x^2$

2) Área do terreno = 20. (área de cada lote)
$\Rightarrow$ z = 20y
Então, a área do terreno é uma função da área de cada lote, ou seja: z = g(y) = 20y

3) Comparando (1) e (2), temos:
Área do terreno = 20 . (medida do lado)^2, ou seja: $z = 20x^2$ pois $y = x^2$ e z = 20y

então, a área do terreno é uma função da medida de cada lote, ou seja, $z = h (x) = 20x^2$

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} 20x^2$$

h

$\longrightarrow$ composta de g com f

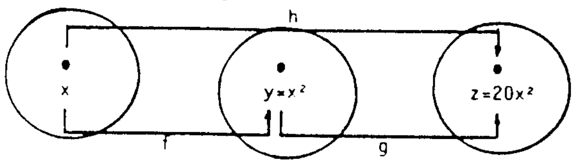
A função h, assim obtida, denomina-se função composta de g com f.

Observe agora:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ z = g(y) \end{array}\right| \Rightarrow z = g\left[f(x)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} z = h(x) \\ z = g\left[f(x)\right] \end{array}\right| \Rightarrow h(x) = g\left[h(x)\right]$$

A função h (x), composta de g com f, pode ser indicada por:
g [f (x)] ou (g o f) (x)



EXERCICIOS

01) Sendo f (x) = 2x e g (x) = $\frac{x^3}{2}$ funções reais, calcule g [f (–2)].

Temos :
f (x) = 2x $\Rightarrow$ f (–2) = 2 (–2) = $\Rightarrow$ f (–2)= –4

g (x) = $\frac{x^3}{2}$ e g [f (–2)] = g (–4) =

g [f (–2)] = $\frac{(-4)^3}{2}$ = –32 $\Rightarrow$ g [f (–2)] = –32

02) Sendo f (x) = 2x e g (x) = $\frac{x^3}{2}$ funções reais, calcule f [g (–2)].

Temos :

g (x) = $\frac{x^3}{2}$ $\Rightarrow$ g (–2) = $\frac{(-2)^3}{2}$ $\Rightarrow$ g (–2) = –4
f (x) = 2x e f [g (–2)] = f (–4)
f [g(–2)] = 2 . (–4) = – 8 $\Rightarrow$ f [g (–2)] = – 8

03) Sendo f(x) = 2x – 1 e g (x) = x + 2 funções reais, calcule:
a) (g o f) ou g [f (x)]
b) (f o g) (x)

a) Para obter g[f (x)] substituímos x de g(x) por (2x – 1) que é a expressão de f (x).
g (x) = x + 2 $\Rightarrow$ g [f (x)] = (2x – 1) + 2 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ g [f (x)] = 2x + 1
$\downarrow$ $\downarrow$
f (x) 2x – 1

b) Para obter f [g (x)] substituímos o x de f (x) por (x + 1) que é a expressão de g (x).
f (x) = 2x – 2 $\Rightarrow$ f [g (x)] = 2 (x + 2) –1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f [g (x)] = 2x + 3
$\downarrow$ $\downarrow$
g (x) x + 2

04) Dados f (x) = 2x – 1 e f [g (x)] = 6x + 11, calcular g (x).

Solução

Neste caso, vamos substituir x por g (x) na função f (x)e teremos 2 [g (x)] – 1 = 6x + 11.

2 g (x) – 1 = 6x + 11 $\Rightarrow$ 2 g (x) = 6x + 12

g (x) = $\frac{6x + 12}{2}$ $\Rightarrow$ g (x) = 3x + 6

05) Considere as funções:
f de IR em IR, cuja lei é f (x) = x + 1

g de IR em IR, cuja lei é x^2

a) calcular (f o g) (x) d) calcular (f o f) (x)
b) calcular (g o f) (x) e) calcular (g o g) (x)
e) dizer se (f o g) (x) = (g o f) (x)

Respostas:
a) (f o g) (x) = x^2 + 1
b) (g o f) (x) = x^2 +2x +1
c) Observando os resultados dos itens anteriores, constatamos que, para x $\neq$ 0, (f o q) (x) $\neq$ (g o f) (x)
d) (f o f)(x) = x + 2
e) (g o g)(x) = x^4

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Propriedades das potências
Considerando *a*, *r* e *s* reais, temos como

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS:
Vamos admitir que : $\boxed{a^1 = a}$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$a^r : a^s = a^{r-s}$ (a $\neq$ 0)

$\boxed{a^0 = 1 \ (a \neq 0)}$

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$(a \cdot b)^s = a^s \cdot b^s$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ (a $\neq$ 0)

$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$ (s $\in$ IN, s > 2)

Exemplos:
1) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-2) = (-2)^{3+2+1} = (-2)^6 = 64$
2) $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$
3) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$
4) $2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 10^2 = 100$
5) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
6) $5^{3/2} = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$

RESOLVENDO EXERCÍCIOS:
1. Determine o valor de:

a) $(32)^{0,1}$ b) $(81)^{2/5}$

Resolvendo:

a) $(32)^{0,1} = (2^5)^{1/10} = 2^{5/10} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

b) $(81)^{2/5} = \sqrt[5]{81^2} = \sqrt[5]{3^8} = 3\sqrt[5]{27}$

2. Calcule e Simplifique:

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + (-2)^{-3}$ b) $\sqrt{243} : \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1/2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}$

Resolvendo:

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + (-2)^{-3} = \dfrac{3^2}{2^2} + \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{17}{8}$

b) $\sqrt{243} : \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1/2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}$

$= 3^{5/2} : 3^{1/2} . 1 = 3^{5/2 - 1/2} = 3^2 = 9$

3. Simplifique:

a) $\dfrac{3^{r+1} \cdot 9^{r-1}}{27^{r+1}}$ b) $5^{n+3} + 5^{n+2}$

Resolvendo:

a) $3^{r+1} . 3^{2r-2} : 3^{3r+3} = 3^{r+1+2r-2-3r-3} =$

$3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$

b) $5^n . 5^3 + 5^n . 5^2 = 5^n(5^3 + 5^2) = 5^n . 150$

Exercícios:

4. Calcule:

a) $(8)^{2/3}$ b) $(0,027)^{1/3}$ c) $(16)^{0,25}$

d) $(125)^{-0,25}$ e) $(\sqrt{2})^{-3}$ f) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$

5. Efetue:

a) $(0,75)^{-1} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}$ b) $(64)^{0,08} . (64)^{0,17}$

c) $(0,01) \cdot (0,001)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-9}$

6. Efetue e simplifique:

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{2} : \sqrt[4]{4}$ b) $\dfrac{\left(3^{1/2}\right)^{-3} \cdot 3^{1/2}}{3^{-4} \cdot 3^{2/3}}$

c) $\dfrac{5^n \cdot 5^2 + 5^n \cdot 5^{-1}}{5^n \cdot 5^{-2}}$ d) $\dfrac{2^{n-1} - 2^{n-2}}{2^{n+3}}$

7. Copie apenas as verdadeiras

a) $2^{n-2} = 2^n . 2^{-2}$ b) $2^b = 2^3 \Leftrightarrow b = 4$

c) $3^{b+1} = 3^5 \Leftrightarrow b = 5$ d) $3^{b+1} = 3^5 \Leftrightarrow b = 4$

Gráfico

Definição: Uma lei de formação do tipo:

$$\boxed{f(x) = a^x \text{ ou } y = a^x}$$

onde a é um número real positivo e diferente de 1, define uma *função exponencial* de base a para todo x real.

Exemplos:

São funções exponenciais:

1) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, onde $a = \dfrac{1}{2}$

2) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$ ou $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$, onde $a = \sqrt{3}$

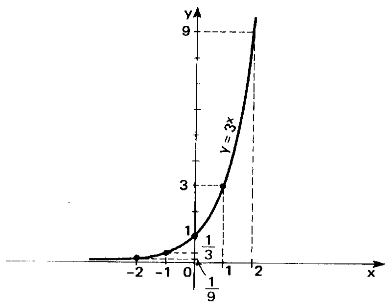
Gráfico

Numa função exponencial, sendo a um numero real *positivo* e *diferente* de 1, podemos ter a > 1 ou 0 < a < 1 e obtemos um tipo de curva para cada caso. Vamos, então construir dois gráficos, um com a = 3 e outro com $a = \dfrac{1}{3}$.

a>1

$f(x) = 3^x$ ou $y = 3^x$ onde $a = 3 \Rightarrow a>1$

	x	y	ponto
$f(-2) = (3)^{-2} = \dfrac{1}{9}$	-2	$\dfrac{1}{9}$	$\left(-2, \dfrac{1}{9}\right)$
$f(-1) = (3)^{-1} = \dfrac{1}{3}$	-1	$\dfrac{1}{3}$	$\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$
$f(0) = (3)^0 = 1$	0	1	(0 , 1)
$f(1) = (3)^1 = 3$	1	3	(1 , 3)
$f(2) = (3)^2 = 9$	2	9	(2 , 9)



Podemos observar que:

- $D = IR$ e $Im = IR_+^*$
- a curva intercepta o eixo dos y em 1.
- a função é crescente.

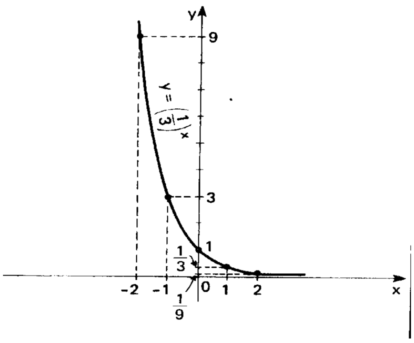
0 < a < 1

$f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ ou $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$,

onde $a = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 0 < a < 1$

	x	y	ponto
$f(-2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	-2	9	(2 , 9)
$f(-1) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = 3$	-1	3	(1 , 3)

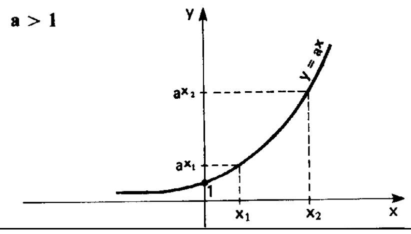
$f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$	0	1	$(0, 1)$
$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
$f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	2	$\frac{1}{9}$	$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$



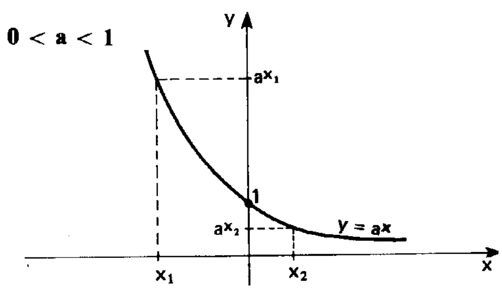
Podemos observar que:

- D = IR e Im = IR_+^*
- a curva intercepta o eixo dos y em 1.
- a função é decrescente.

Para qualquer função exponencial $y = a^x$, com a > 0 e a $\neq$ 1, vale observar:



1	a > 1 $\Rightarrow$ função crescente x1 < x2 $\Leftrightarrow$ $a^{x_1} < a^{x_2}$
2	0 <a < 1 $\Rightarrow$ função decrescente $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
3	Domínio: D = IR Imagem: Im = IR_+^*



4	a curva está acima do eixo dos x. $a > 0 \Rightarrow a^x > 0 \quad \forall x,\ x \in IR$
5	a curva intercepta o eixo dos y em y = 1 $x = 0 \Rightarrow y = a^0 \Rightarrow y = 1$
6	$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

RESOLVENDO EXERCÍCIOS

8. Sendo $f(x) = (2)^{-2x}$, calcule $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$.

$f(-1) = (2)^{-2(-1)} = 2^2 = 4$

$f(1) = (2)^{-2 \cdot 1} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$f(0) = 2^{-2 \cdot 0} = 2^0 = 1$

9. Determine m $\in$ IR de modo que $f(x) = (m - 2)^x$ seja decrescente:

$f(x)$ é decrescente quando a base (m- 2) estiver entre 0 e 1. Portanto:

$$0 < m - 2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m - 2 \Rightarrow m > 2 \\ e \\ m - 2 < 1 \Rightarrow m < 3 \end{cases}$$

Devemos Ter: 2 < m < 3

10. Determine o valor de x, em IR.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^5$

b) $\left(\frac{5}{4}\right)^x > \left(\frac{5}{4}\right)^3$

Resolvendo:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

b) *Como* $\frac{5}{4}$ *é maior que 1, conservamos a desigualdade para os expoentes:*

$\left(\frac{5}{4}\right)^x > \left(\frac{5}{4}\right)^3 \Rightarrow x > 3 \qquad S = \{x \in IR \mid x > 3\}$

c) *Como* $\frac{2}{3}$ *está entre 0 e 1, invertemos a desigualdade para os expoentes:*

$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Rightarrow x < 5 \quad S = \{x \in IR \mid x < 5\}$

Exercícios:

10. Esboce o gráfico das funções dadas por:

a) $y = 2^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

11. Sendo f (x) = $(3)^{x^2-2}$, calcule:

a) f (-1) b) f(0) c) f (2) d)f ($\sqrt{2}$)

12. Determine me IR de modo que f (x) = $(2m - 3)^x$ seja:

a) crescente b) decrescente

13. Determine o valor de x, em IR:

a) $3^x = 3^4$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ f) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} > \left(\frac{4}{3}\right)^3$

c) $2^x < 2^5$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Vamos resolver *equações exponenciais,* isto é, equações onde a variável pode aparecer no expoente.

São equações exponenciais:

1] $2^X = 32$ 2] $5^{X^2-X} = 25$ 3] $3^{2X} - 3^X - 6 = 0$

Resolução: Para resolver uma equação exponencial, devemos lembrar que:

$$\boxed{a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)}$$

RESOLVENDO EXERCÍCIOS:

15. Resolva a equação $(11^3)^{x-2} = \frac{1}{121}$

$11^{3(x-2)} = 11^{-2} \Rightarrow 3(x-2) = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 6 = -2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$V = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

16. Determine x tal que $2^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} \cdot \frac{1}{4}$

$2^{x^2} = 2^{3x} \cdot \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^{-2} \Rightarrow 2^{x^2} = 2^{3x-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

$V = \{1, 2\}$

17. Resolva a equação $8 \cdot 2^{2x+5} = \sqrt[4]{8^{x-1}}$

$2^3 \cdot 2^{2x+5} = [2^{3(x-1)}]^{1/4} \Rightarrow 2^{2x+8} = 2^{\frac{3x-3}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 8 = \frac{3x-3}{4} \Rightarrow 8x + 32 = 3x - 3 \Rightarrow x = -7$

$V = \{-7\}$

18. Resolva a equação:

$3^3 \cdot 3^X = \sqrt[X]{243^2}$ $(x \in IN, x \geq 2)$

Sendo $243 = 3^5$, *temos* $243^2 = (3^5)^2 = 3^{10}$; então:

$3^{3+x} = \sqrt[x]{3^{10}} \Rightarrow 3^{3+x} = 3^{10/x} \Rightarrow 3 + x = \frac{10}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = -5$

Como x é índice de raiz, a solução é x = 2

V = { 2}

19. Determine x em: $3^{2x+1} - 3^{x+1} = 18$

$3^{2x} \cdot 3 - 3^x \cdot 3 = 18 \Rightarrow (3^x)^2 \cdot 3 - 3^x \cdot 3 - 18 = 0$

e fazendo $3^x = y$, temos:

$3y^2 - 3y - 18 = 0 \Rightarrow y = -2$ ou $y = 3$

$3^x = -2$ ∄ *solução, pois* $3^x > 0$

$3^x - y$

∀ x real

$3x = 3 \Rightarrow x = 1$

V = { 1}

Exercícios:

20. Resolva a equação:

a) $3^x = \sqrt[3]{81}$ c) $27^{2+x} = \frac{1}{81}$

b) $10^x = 0{,}001$ d) $2^{x^2+1} = \frac{1}{2}$

21. Determine x em :

a) $3^x \cdot 3^{-2} = 27$ c) $(0{,}001)^{x-2} = 10^{2x+1}$

b) $(7^2)^x = 343$

22. Resolva a equação:

a) $2^{x^2} \cdot 2^{2x} = 2^{15}$ c) $[3^{(x-1)}]^{(2-x)} = 1$

b) $5^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{4x} = \frac{1}{125}$ Obs: $1 = 3^0$

23. Determine x tal que:

a) $25^{3x+1} = \sqrt[6]{125^{4x-2}}$

b) $81 \cdot 3^{x-2} = \sqrt[x]{9^4}$ $(x \in IN \mid x \geq 2)$

24. Resolva a equação:

a) $2^{x+3} + 2^{x-2} = 33$ b) $25^x - 2 \cdot 5^x = -1$

c) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 0$ d) $2^{2x+3} - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$

25. Resolva a equação;

a) $4^{x+2} - 2^{x+3} + 1 = 0$ b) $2^{6x} - 9 \cdot 2^{3x} + 8 = 0$

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Vamos resolver *inequações exponenciais,* isto é, inequações onde podemos ter a variável no expoente. Exemplos:

1] $2^{x-1} < 8$ 2] $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-6x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \geq 1$

Resolução:

Para resolver uma inequação exponencial, vamos lembrar que:

a > 1	0< a < 1
$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$	$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$
"conservamos" a desigualdade	"invertemos" a desigualdade

RESOLVENDO EXERCÍCIOS

26. Resolva a inequação: $2^{x^2} \cdot 2^x < 4^{10}$.

$2^{x^2+x} < 2^{20}$ *e como 2 é maior que 1, conservamos a desigualdade para os expoentes:*

$2^{x^2+x} < 2^{20} \Rightarrow x^2 + x < 20$

$x^2 + x < 20 \Rightarrow x^2 + x - 20 < 0$

Resolvendo essa inequação, temos: - 5 < x < 4.

S=] -5, 4[

27. Determine x tal que: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{6x}$

$$\left(\frac{1}{2^2}\right)^{x^2-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{6x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(x^2-4\right)} < \left(\frac{1}{2}\right)^{6x}$$

como $\frac{1}{2}$ *está entre 0 e 1, invertemos a desigualdade para os expoentes.*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(x^2-4\right)} < \left(\frac{1}{2}\right)^{6x} \Rightarrow 2\left(x^2-4\right) > 6x$$

Resolvendo $2x^2 - 6x - 8 > 0$, *temos:*

$x < -1$ ou $x > 4$, $S = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]4,+\infty\right[$

28. Resolva a inequação: $2^{2x+2} - 5 \cdot 2^x \le -1$

$2^{2x} \cdot 2^2 - 5 \cdot 2^x \le -1 \Rightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 1 \le 0$

Fazendo $2^x = y$, Vem:

$$4y^2 - 5y + 1 \le 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \le \underbrace{y}_{2^x} \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-2} \le 2^x \le 2^0 \Rightarrow -2 \le x \le 0$$

S = [-2, 0]

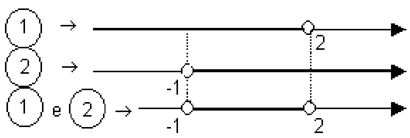
29. Resolva a inequação: $\frac{1}{9} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$

Devemos ter, simultaneamente:

$$1 \quad \frac{1}{9} < \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3 \quad 2$$

$$1 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 2 > x$$

$$2 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x > -1$$



S =] - 1, 2 [

Exercícios:

30. Resolva a inequação:

a) $3^x \le 81$

b) $(0,2)^x < (0,2)^5$

c) $5^{2x-3} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^{3x} > \left(\sqrt{2}\right)^{2x-5}$

31. Resolva a inequação:

a) $\left(\frac{8}{5}\right)^{x^2} < \left(\frac{8}{5}\right)^{3x+4}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x+9} \ge 1$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x-1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} < \frac{1}{8}$

d) $2^{3x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2} \ge 32^{-1}$

32. Determine x tal que:

a) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x + 5^{x-1} \le 55$

b) $5^{2x+1} - 5^x > 5^{x+2} - 5$

c) $2^{2x-1} - 2^{x-1} > 2^x - 1$

d) $3^{2x+2} - \frac{10}{9} \cdot 3^{x+2} < -1$

e) $7^{2x+1} + 1 \le 8 \cdot 7^x$

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO:

33. Calcule:

a) $(27)^{\frac{2}{3}}$

b) $(8)^{-0,25}$

c) $\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)^{-2}$

d) $(216)^{-2/3}$

e) $8^{0,333...}$

f) $\left[\left(7^4\right)^{1/2}\right]^{1/3}$

34. Determine o valor de:

a) $(81)^{0,21} \cdot (81)^{0,09} : (81)^{0,05}$

b) $(0,04)^{1/4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1/2} \cdot \sqrt{125}$

c) $\dfrac{\left(3^{1/3}\right)^{1/2} \cdot 3^{-1/2}}{3^2 \cdot 3^{-3/2}}$

35. Efetue:

a) $3^{m+1} \cdot 3^{m+3} : 9^{m-1}$

b) $\dfrac{5^{2n+1} - 25^n}{5^{2n}}$

c) $(4^{n+1} + 2^{2n-1}) : 4^n$

36. Calcule:

a) $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq -b$.

b) $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot \dfrac{1}{b-a}$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq b$.

37. Copie apenas as afirmações verdadeiras:

a) $2^{2x-3} = 4 \Leftrightarrow x = 2$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1/3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow x < 3$

d) $2\sqrt{2^x} < 8 \Leftrightarrow x > 4$

38. Resolva as equações:

a) $2^{2x} \cdot \frac{1}{4} = 16$

b) $25 \cdot \sqrt[4]{5^x} = 125$

c) $(0,01)^{2x-1} = 100^{3x+2}$

d) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x^2-1} = 2^{6(x-1)}$

39. Determine x tal que:

a) $9^{1-2x} = \sqrt[6]{27^{x-1}}$

b) $\sqrt[4]{3^{x^2-7x+8}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1}}$

40. Determine x tal que:

a) $3^{x+1} + 3^{x} + 3^{x-1} = 39$

b) $5^{2x} - 30 \cdot 5^{x} + 125 = 0$

c) $-16 \cdot 2^{x} + 4^{x} = -64$

d) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x} = -3$

Respostas:

4. a) 4 b) 0,3 c) 2
d) $\frac{\sqrt[5]{4}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ f) 9

5. a) $\frac{3}{4}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 10

6. a) $4\sqrt[3]{2}$ b) $9\sqrt[3]{3}$ c) 630 d) $\frac{1}{32}$

7. são verdadeiras: a e d

11. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) 9 d) 1

12. a) $m > 2$ b) $\frac{3}{2} < m < 2$

13. a) 4 b) 1 c) $\{x \in IR \mid x < 5\}$
d) $\{x \in \overline{IR} \mid x < 3\}$ e) $\{x \in IR \mid x > -1\}$
f) $\{x \in \overline{IR} \mid x > 2\}$

20. a) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$ b) $\{-3\}$ c) $\left\{\frac{-10}{3}\right\}$ d) ϕ

21. a) $\{5\}$ b) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $\{1\}$

22. a) $\{-5, 3\}$ b) $\{1, 3\}$ c) $\{1, 2\}$

23. a) $\left\{\frac{-3}{4}\right\}$ b) $\{2\}$

24. a) $\{2\}$ b) $\{0\}$ c) ϕ d) $\{-2, -1\}$

25. a) $\{-2\}$ b) $\{0, 1\}$

30. a) $]-\infty, 4]$ b) $]5, +\infty[$ c) $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right]$
d) $]-5, +\infty[$

31. a) $]-1, 4[$ b) $\{3\}$ c) $]-\infty, -2[\, \cup\,]3, +\infty[$
d) $\left]-1, \frac{5}{2}\right[$

32. a) $]-\infty, 2]$ b) $]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$
c) $]-\infty, 0[\, \cup\,]1, +\infty[$ d) $]-2, 0[$
e) $]-1, 0[$

33. a) 9 b) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ d) $\frac{1}{36}$ e) 2 f) $\sqrt[3]{49}$

34. a) 3 b) $5\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt[6]{3}}{3}$

35. a) 729 b) 4 c) $\frac{9}{2}$

36. a) $\frac{ab}{a+b}$ b) $\frac{b+a}{a^2 \cdot b^2}$

37. São verdadeiras b e c

38. a) $\{3\}$ b) $\{4\}$ c) $\left\{\frac{-1}{5}\right\}$ d) $\left\{\frac{-11}{5}, 1\right\}$

39. a) $\left\{\frac{5}{9}\right\}$ b) $\{2, 3\}$

40. a) $\{2\}$ b) $\{1, 2\}$ c) $\{3\}$
d) $\{1, 1\}$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição:

Podemos dizer que em : $5^3 = 125$

3 é o logaritmo de 125 na base 5. isso pode ser escrito da seguinte forma: $\log_5 = 125 = 3$

Veja outros casos:

$2^5 = 32 \iff \log_2 32 = 5$

$3^4 = 81 \iff \log_3 81 = 4$

$10^{0.3010} = 2 \iff \log_{10} 2 = 0,3010$

De um modo geral, dados dois números reais *a* e *b*, *positivos,* com $b \neq 1$, chama-se *logaritmo* de a na base *b*, ao número *c*, tal que $b^C = a$. Ou seja:

$\log_b a = c \iff b^C = a$

O número a recebe o nome de *logaritimando* e b é a base.

Alguns logaritmos são fáceis de serem encontrados. Outros são achados nas tabelas.

Vamos, agora, achar alguns logaritmos fáceis.

1. Calcular:

a) $\log_4 16$

Solução: Se $\log_4 16 = x$, então $4^x = 16$.

Como $16 = 4^2$, temos :

$4^x = 4^2$

Comparando, vem que: $x = 2$

Resposta: $\log_4 16 = 2$

b) $\log_{25} 5$

Solução: Se $\log_{25} 5 = x$, então $25^{\,x} = 5$

Como $25 = 5^2$, temos: $(5^2)^x = 5$

$5^{2x} = 5$ ou $2x = 1$ e $x = \frac{1}{2}$

Resposta: $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

c) $\log_3 1$

Solução: Se $\log_3 1 = x$, então $3^x = 1$.

Como $3^0 = 1$, temos:

$3^x = 3^0$ ou $x = 0$

Resposta: $\log_3 1 = 0$

Obs.: De modo geral, para um número a qualquer positivo e diferente de 1, temos:

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

d) $\log_9 27$

Solução: Se $\log_9 27 = x$, então $9^x = 27$.

Como $9 = 3^2$ e $27 = 3^3$, temos :

$(3^2)^x = 3^3$

$3^{2x} = 3^3$ ou $2x = 3$ e $x = \frac{3}{2}$

Resposta: $\log_9 27 = \frac{3}{2}$

e) $\log_8 \frac{1}{2}$

Solução: Se $\log_8 \frac{1}{2} = x$, então $8^x = \frac{1}{2}$.

Como $8 = 2^3$ e $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ temos:

$(2^3)^x = 2^{-1}$

$2^{3x} = 2^{-1}$ ou $3x = -1$ e $x = \frac{-1}{3}$

Resposta: $\log_8 \frac{1}{2} = \frac{-1}{3}$

f) $\log_{10} 0{,}1$

Solução: $\log_{10} 0{,}1 = x$, então $10^x = 0{,}1$

Como $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, temos:

$10^x = 10^{-1}$ ou $x = -1$

Resposta: $\log_{10} 0{,}1 = -1$

g) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

Solução: Se $\log_2 \sqrt[3]{2} = x$, então $2^x = \sqrt[3]{2}$

Como $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, temos: $2^x = 2^{\frac{1}{3}}$ ou $x = \frac{1}{3}$

Resposta: $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

h) $\log_{125} \sqrt[3]{25}$

Solução: Se $\log_{125} \sqrt[3]{25} = x$, então $125^x = \sqrt[3]{25}$

Como $125 = 5^3$ e $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$, temos:

$(5^3)^x = \sqrt[3]{5^2}$

$5^{3x} = 5^{\frac{2}{3}}$ ou $3x = \frac{2}{3}$ e $x = \frac{2}{9}$

Resposta: $\log_{125} \sqrt[3]{25} = \frac{2}{9}$

2. O logaritmo de 243 numa certa base é 5. Qual é a base?

Solução

Se $\log_x 243 = 5$, então $x^5 = 243$.

Como $243 = 3$ $x^5 = 3^5$ ou $x = 3$

Resposta: A base é 3.

3. Qual é o logaritmo de - 9 na base 3?

Solução

$\log_3(-9) = x$, então $3^x = -9$

Não há um número x que satisfaça essas condições. Lembre-se de que em $\log_b a$, a deve ser positivo.

Resposta: Não existem logaritmo de - 9 na base 3.

4. Encontrar um número x tal que $\log_x 36 = 2$

Solução

Se $\log_x 36 = 2$, então $x^2 = 36$.

ou $x = \pm\sqrt{36}$ ou $x = \pm 6$

Como não tem sentido $\log_{-6} 36$, ficaremos somente com x = 6.

Resposta: x = 6

Exercícios Propostos

1. Calcular:

a) $\log_2 32$	i) $\log_2 \frac{1}{8}$
b) $\log_{16} 64$	j) $\log_8 \frac{1}{16}$
c) $\log_{10} 0{,}01$	l) $\log_{100} 10\,000$
d) $\log_{16} \sqrt{32}$	m) $\log_{625} 5$
e) $\log_{64} 64$	n) $\log_{\sqrt{3}} 3$
f) $\log_x x$, $x > 0$ e $x \neq 1$	o) $\log_9 81$
g) $\log_4 \frac{1}{4}$	p) $\log_a \sqrt[3]{a^2}, a > 0$ e $a \neq 1$
h) $\log_4 \sqrt[3]{4}$	

2. Achar o valor de x tal que:

a) $\log x 4 = 1$	f) $\log_{(x+1)} 4 = 2$
b) $\log 2\ x = -1$	g) $\log_{\sqrt{x}} 18 = 2$
c) $\log 2(4+x) = 3$	h) $\log_x 0{,}00001 = -5$
d) $\log 2 \sqrt{x} = 4$	i) $\log_{2x} 2 = 2$
e) $\log x 169 = 2$	j) $\log_7 49 = 1 + x$

3. Qual é a base na qual o logaritmo de 4 dá o mesmo resultado que o logaritmo de 10 na base 100?

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Quatro propriedades serão de importância fundamental nos cálculos com logaritmos daqui para frente. Vamos estudá-las.

1. Logaritmo de um produto

Já sabemos que $\log_2 16 = 4$ e $\log_2 8 = 3$. Podemos achar o $\log_2(16 \cdot 8)$ da seguinte maneira:

Se $\log_2 (16 \cdot 8) = x$, então $2^x = 16 \cdot 8$

Como $2^4 = 16$ e $2^3 = 8$, então :

$2^x = 2^4 \cdot 2^3$ ou $x = 4 + 3$

Assim: $\log_2(16 \cdot 8) = 4 + 3$ ou ainda:

$\log_2(16 \cdot 8) = \log_2 16 + \log_2 8$

De um modo geral:

$$\log_C (a \,.\, b) = \log_C a + \log_C b$$

onde a, b e c são tais que tornam possível a existência da expressão.

2. Logaritmo de um quociente

Já sabemos que $\log_2 16 = 4$ e $\log_2 8 = 3$ Podemos achar $\log_2 \left(\frac{16}{8}\right)$ da seguinte maneira: $\log_2 \left(\frac{16}{8}\right) = x$, então $2^x = \frac{16}{8}$

Mas $16 = 2^4$ e $8 = 2^3$. Podemos escrever então:

$$2^x = \frac{2^4}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{4-3} \quad \text{ou } x = 4 - 3$$

Assim :

$\log_2 \left(\frac{16}{8}\right) = 4 - 3$ ou ainda:

$\log_2 \left(\frac{16}{8}\right) = \log_2 16 - \log_2 8$

De um modo geral, temos:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

3. Logaritmo da potência

Sabendo que $\log_2 8 = 3$, podemos achar $\log_2 8^5$ da seguinte maneira:

Se $\log_2 8^5 = x$, então $2^x = 8^5$.

Mas como $8 = 2^3$, podemos escrever:

$2^x = (2^3)^5 \Rightarrow 2^x = 2^{3 \,.\, 5}$

$x = 3 \,.\, 5$ ou $x = 5 \,.\, \log_2 8$

Desta maneira: $\log_2 8^5 = 5 \,.\, \log_2 8$

De um modo geral, temos:

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

4. Mudança de base

Sabendo que $\log_2 8 = 3$ e $\log_2 16 = 4$, podemos calcular $\log_{16} 8$ da seguinte forma:

$\log_2 8 = x \Rightarrow 16^x = 8$

Mas como $16 = 2^4$ e $8 = 2^3$, temos: $(2^4)^x = 2^3$

$2^{4x} = 2^3$ ou $4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Portanto: $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$ ou ainda

$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}$$

De um modo geral, temos:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Nessa expressão, c é a base em que pretendemos trabalhar.

Exercícios Resolvidos

1. Sabendo que $\log_2 5 = 2{,}289$ e $\log_2 6 = 2{,}585$, calcular:

a) $\log_2 30$

Solução

Como $30 = 5 \,.\, 6$, então $\log_2 30 = \log_2 (5 \,.\, 6)$.

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto, vem:

$\log_2 30 = \log_2 (5 \,.\, 6) = \log_2 5 + \log_2 6$

$\log_2 30 = 2{,}289 + 2{,}585$

Resposta: $\log_2 30 = 4{,}874$

b) $\log_2 \left(\frac{5}{6}\right)$

Solução: Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente, vem :

$\log_2 \left(\frac{5}{6}\right) = \log_2 5 - \log_2 6 = 2{,}289 - 2{,}585$

Resposta: $\log_2 \left(\frac{5}{6}\right) = -\,0{,}296$

c) $\log_2 625$

Solução Como $625 = 5^4$, temos :

$\log_2 625 = \log_2 5^4$

Usando a propriedade do logaritmo de potência, temos:

$\log_2 625 = \log_2 5^4 = 4 \log_2 5 = 4 \,.\, 2{,}289$

Resposta: $\log_2 625 = 9{,}156$

d) $\log_6 5$

Solução: Usando a propriedade da mudança de base, temos:

$$\log_6 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{2{,}289}{2{,}585} = 0{,}885$$

Resposta: $\log_6 5 = 0{,}885$

2. Desenvolver as expressões abaixo usando as propriedades dos logaritmos:

a) $\log_x \left(\frac{ab}{c}\right)$

Solução: $\log_x \left(\frac{ab}{c}\right) = \log_x(ab) - \log_x c = \log_x a + \log_x b - \log_x c$

b) $\log_x \left(\frac{a^2 b^3}{c^4}\right)$

Solução:

$\log_x \left(\frac{a^2 b^3}{c^4}\right) =$

$= \log_x(a^2b^3) - \log_x c^4 = \log_x a^2 + \log_x b^3 - \log_x c^4 =$
$= 2\log_x a + 3\log_x b - 4\log_x c$

c) $\log_x = \dfrac{\left(a^2b\right)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{2}}}$

Solução:

$$\log_x = \frac{\left(a^2b\right)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{2}}} = \log_x\left(a^2b\right)^{\frac{1}{3}} - \log_x c^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\log_x\left(a^2b\right) - \log_x c^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log_x a^2 + \log_x b\right) - \log_x c^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\,2\log_x a + \log_x b\right) - \frac{1}{2}\log_x c =$$

d) $\log_x\left(\dfrac{a}{\sqrt{bc}}\right)$

Solução: $\log_x\left(\dfrac{a}{\sqrt{bc}}\right) = \log_x a - \log_x\sqrt{bc} =$

$$= \log_x a - \log_x (bc)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \log_x a - \frac{1}{2}\log_x(bc) =$$

$$= \log_x a - \frac{1}{2}\left(\log_x b + \log_x c\right)$$

3. Dados $\log_{10}2 = 0{,}301$ e $\log_{10}3 = 0{,}477$, calcular $\log_{10}162$.

Solução:

Decompondo 162 em fatores primos, encontramos $162 = 2 \,.\, 3^4$. Então: $\log_{10} 162 = \log_{10}(\,2 \,.\, 3^4)$

Aplicando as propriedades, vem :

$\log_{10}162 = \log_{10}2 + 4\log_{10}3$

$\log_{10}162 = 0{,}301 + 4 \,.\, 0{,}477$

$\log_{10}162 = 2{,}209$

4. Encontrar um número $x > 0$ tal que:

$\log_5 x + \log_5 2 = 2$

Solução: Utilizando ao contrário a propriedade do logaritmo do produto, teremos:

$\log_5 x + \log_5 2 = 2$

$\log_5(x \,.\, 2) = 2$ ou $x \,.\, 2 = 5^2$ e $x = \dfrac{25}{2}$

5. Resolva a equação:

$\log_2(x^2 + 2x + 7) - \log_2(\,x - 1) = 2$

Solução:

Antes de começar a resolver esta equação, devemos nos lembrar de que não podemos encontrar logaritmos de números negativos. Por isso, o valor de x que encontraremos não poderá tornar $x^2 + 2x + 7$ ou $x - 1$ negativos.

Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente no sentido inverso, teremos:

$\log_2(x^2 + 2x - 7) - \log_2(\,x - 1) = 2$

$\log_2\left(\dfrac{x^2+2x-7}{x-1}\right) = 2$ ou

$$\frac{x^2+2x-7}{x-1} = 2^2 \Rightarrow \frac{x^2+2x-7}{x-1} = 4$$

$$x^2 + 2x - 7 = 4(x-1) \Rightarrow x^2 + 2x - 7 = 4x - 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Aplicando a fórmula de Báskara para resolução de equações do segundo grau, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, na qual a é o coeficiente de x^2, *b* é o coeficiente de *x* e *c*, o termo independente de x, vem :

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -1 \end{array}$$

Observe que $x_2 = -1$ torna as expressões $x - 1$ e $x^2 - 2x - 7$, em $\log_2(x - 1)$e $\log_2(x^2 + 2x - 7)$, negativas. Por isso, deveremos desprezar esse valor e considerar apenas $x_1 = 3$.

Resposta: $x = 3$.

6. Resolver a equação :

$\log_4 x = \log_2 3$

Solução:

Primeiramente vamos igualar as bases desses logaritmos, passando-os para base 2.

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 3 \Rightarrow \frac{\log_2 x}{2} = \log_2 3$$

$$\log_2 x = 2\log_2 3 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 3^2$$

$$\log_2 x = \log_2 9$$

Comparando os dois termos da igualdade, concluímos que $x = 9$.

Resposta: $x = 9$.

Exercícios Propostos

4. Aplicar as propriedades dos logaritmos para desenvolver as expressões:

a) $\log_c\left(a^2b\right)$

b) $\log_c\left(a^3b^4\right)$

c) $\log_c\left(\dfrac{a}{b^2}\right)$

d) $\log_c\sqrt{a}$

e) $\log_c\left(\dfrac{a}{b^2d^3}\right)$

f) $\log_c\left(\dfrac{\sqrt{ab}}{d}\right)$

g) $\log_c\left(ab^n\right)$

h) $\log_c\left(\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)$

i) $\log_c\left(\dfrac{1}{abc}\right)$

5. Sendo dado $\log_{10}2 = 0{,}301$ e $\log_{10}3 = 0{,}477$,

calcular:

a) $\log_{10}6$ f) $\log_{10}\sqrt{8}$

b) $\log_{10}27$ g) $\log_{3}2$

c) $\log_{10}\left(\frac{1}{16}\right)$ h) $\log_{2}3$

d) $\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$ i) $\log_{10}5$ $\left(\text{sugestão} : 5 = \frac{10}{2}\right)$

e) $\log_{10}54$ j) $\log_{10}45$

6. Encontrar o valor de x tal que :

a) $\log_3 x + \log_3 4 = 2$

b) $\log_3 2 - \log_3 x = 4$

c) $\log_3 x - 1 = \log_3 2$

d) $\log_4(x + 1) = \log_4 5$

e) $\log_{10} 3 + \log_{10}(2x + 1) = \log_{10}(2 - x)$

FUNÇÃO LOGARITMICA

Chamamos de função logarítmica a junção que a cada número real e positivo x associa o seu logaritmo a certa base positiva e diferente de 1.

Assim = $y = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

Vamos construir o gráfico de algumas funções logarítmicas.

Gráfico 1 $y = \log_2 x$

x	$\log_2 x$
8	3
4	2
2	1
1	0
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2

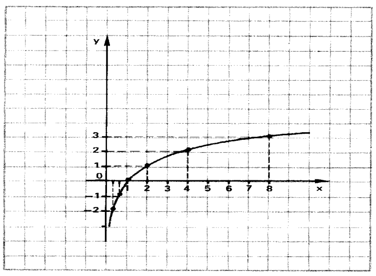
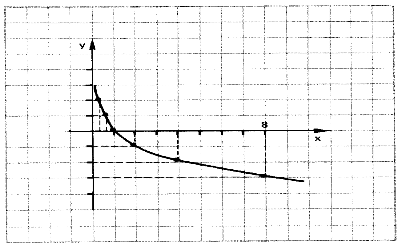


Gráfico 2 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
8	-3
4	-2
2	1
1	0
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2



Perceba que $y = \log_2 x$ *é crescente.* Então, podemos dizer que se $b > c$ então $\log_2 b > \log_2 c$. Isso de fato acontece sempre que a base do logaritmo é um número maior que 1.

Em contrapartida, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ *é decrescente.*

Então, podemos dizer que se $b > c$, então $\log_{\frac{1}{2}} b < \log_{\frac{1}{2}} c$ Isso acontece sempre que a base é um número entre 0 e 1.

Exercícios Propostos

16. Construir os gráficos das funções ;

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

17. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

a) $\log_2 5 > \log_2 3$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $\log_{0,4} 0,31 > \log_{0,4} 0,32$ d) $\log_{40} 3100 > \log_{40} 3000$

e) $\log_4 1,4 > \log_5 1,4$ f) $\log_{0,4} 0,5 < \log_{0,4} 0,6$

18. Construir num mesmo sistema de eixos os gráficos das funções $f_1(x) = 2^x$ e $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Encontrar o ponto (x , y) em que $f_1(x) = f_2(x)$.

Respostas dos exercícios

1)

a) 5
b) 1,5
c) –2
d) 0,625
e) 1
f) 1
g) –1
h) $\frac{1}{3}$
i) –3
j) $\frac{-4}{3}$
l) 2
m) $\frac{1}{4}$
n) 2
o) 2
p) $\frac{2}{3}$

2)

a) 4
b) $\frac{1}{2}$
c) 4
d) 256
e) 13
f) 1
g) 18
h) 10
i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
j) 1

3) 16

4)

a) $2\log_c a + \log_c b$ b) $3\log_c a + 4\log_c b$

c) $\log_c a - \log_c b$ d) $\frac{1}{2}\log_c a$

e) $\log_c a - 2\log_c b - 3\log_c d$

f) $\frac{1}{2}\log_c a + \frac{1}{2}\log_c b - \log_c d$

g) $\log_c a + n\log_c b$ h) $\frac{3}{2}\log_c a - \frac{2}{3}\log_c b$

i) $-\log_c a - \log_c b - 1$

5)

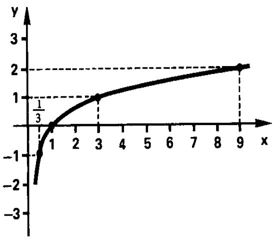
a) 0,778	f) 0,451
b) 1,431	g) 0,631
c) –1,204	h) 1,585
d) 0,176	i) 0,699
e) 1.732	j) 1,653

6)

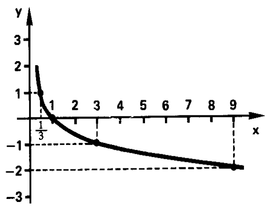
a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{2}{81}$ c) 6 d) 4 e) $\frac{-1}{7}$

16)

a)



b)



17)

a) V b) F c) V d) V e) V f) F

18) (0, 1)

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Definição:

> ***Equação polinomial*** é toda equação de forma P (x) = 0, onde P(x) é um polinômio.
> ***Raiz de uma equação polinomial*** P(x) = 0 é todo número α, tal que P(α) =0.

Teorema da decomposição

Todo polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a^n$, de grau n $\geq$ 1, pode ser escrito na forma faturada:

$P(x) = a_0 \cdot (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$,
onde $x_1, x_2, \ldots x_n$ são as raízes de P(x).

OBSERVAÇÃO: Toda equação polinomial de grau n(n $\in$ IN*) apresenta ***n*** e somente n raízes.

Aplicação:

1) Faturar o polinômio $P(x) = 3x^2 - 21x + 30$.

Solução

As raízes de $3x^2 - 21x + 30 = 0$ são :

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441-360}}{6} = \frac{21 \pm 9}{6} \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$3x^2 - 21x + 30 = 3(x-5)(x-2)$

2) Faturar o polinômio $P(x) = 5x^3 + 15x^2 - 5x - 15$, sabendo-se que suas raízes são 1, -1 e –3.

Solução:
$5x^3 + 15x^2 - 5x - 15 = 5(x-1)(x+1)(x+3)$

3) As raízes de um polinômio P(x) do 3º grau são 1, -1 e 2. Obter P(x), sabendo-se que P (0) = 6.

Solução:
Temos:
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = a(x-1)(x+1)(x-2)$

Como :
P(0) = 6, vem : $6 = a(0-1)(0+1)(0-2) \Rightarrow$
$6 = a \cdot 2 \therefore a = 3$

Logo: $\boxed{P(x) = 3(x-1)(x+1)(x-2)}$

4) Escrever o polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ na forma fatorada, sabendo-se que uma raiz é 3.

Solução:
Se 3 é raiz, usando o Briot-Ruffini, vem :

3	1	-5	7	-3
	1	-2	1	0

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \therefore \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Assim:
$P(x) = 1 \cdot (x-1)(x-1)(x-3) = (x-1)^2(x-3)$

Exercícios

1) Fatore:
a) $P(x) = x^3 - x$ b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$

2) Fatore o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$, sabendo que suas raízes são 2, 3 e -4.

3) Determine o polinômio do 2º grau P(x) cujas raízes são 2 e 3, sabendo que P(1) = 5.

4) Determine o polinômio P(x) do 3º grau cujas raízes são 0, 1e 2, sabendo que $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

5) Obtenha o polinômio do 2º grau P(x), sabendo que P(1) = 0, P(2) = 0 eP(3) =1.

6) Obtenha o polinômio do 3º grau P(x), sabendo que P(-1) = 0, P(1) = 0, P(3) = 0 e P(4) = 2.

7) Escreva o polinômio do 4º grau cujas raízes são 1, 2, i, -i.

8) Escreva o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ na forma fatorada, sabendo que uma raiz é igual a 1.

9) $\frac{1}{2}$ e - 2 são raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$. Os valores de a e b são, respectivamente:

a) 5 e 1
b) 3 e 2
c) $\frac{1}{2}$ e –2
d) –2 e $\frac{1}{2}$
e) 3 e –2

10) Um polinômio de grau 3 tem como raízes os números 1, -2 e 3. Sabendo que P(- 1) = -2, o valor de P(2) será:

a) 1
b) $\frac{3}{4}$
c) –4
d) 3
e) n.d.a.

11) Seja f(x) um polinômio de grau 3, tal que f(0)= -2, f(1)= 3, f(2)= 1, e f(3)= 6. Então:

a) f (4) < 0
b) 0 < f(4) < 6
c) 3 < f(4) < 6
d) f(4) > 6
e) n.d.a.

12) Um polinômio do 3º grau anula-se para x = 1 e para x = -3. Assume os valores -12 e 30 para x = 0 e x = 2, respectivamente. Esse polinômio é:

a) $P(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 4)$
b) $P(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 4)$
c) $P(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$
d) $P(x) = (x + 1)(x - 3)(x + 4)$
e) n.d.a.

13) A equação do 3º grau cujas raízes são $-\frac{1}{2}$, 1 e 2 é:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
b) $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$
c) $2x^3 - 5x^2 - x - 2 = 0$
d) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$
ei $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

14) Se-4 é a raiz de $2x^3 + 6x^2 + 7x + a = 0$,a vale:

a) 40
b) –60
c) 0
d) 60
e) 10

Multiplicidade de uma raiz

Dada a equação $a_0x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a^n = 0 (a_0 \neq 0)$, diz-se que α é raiz de multiplicidade *m*(m $\in$ IN* e m $\leq$ n) se, e somente se, das n raízes, apenas m forem iguais a α.

Aplicações

1) Classificar as raízes das equações, quanto à sua multiplicidade:
   a) $(x + 2)(x - 1)^3(x - 3)^2 (x + 4)^5 = 0$
   b) $x(x^2 + x)^4 . (x^3 + 2x^2 + x) = 0$
   c) $(x^2 - 5x + 5)^6 . (x - 2)^3 . (x^2 + 3x) = 0$

Solução:

a) -2 é raiz de multiplicidade 1 (ou raiz simples)
1 é raiz de multiplicidade 3 (ou raiz tripla)
3 é raiz de multiplicidade 2 (ou raiz dupla)
-4 é raiz de multiplicidade 5

b) Fatoremos o polinômio em binômios do 1º grau:

$x(x^2 + x)^4 . (x^3 + 2x^2 + x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x .[x (x+1)]^4 . [x(x^2 + 2x + 1)] = 0 \therefore$

$\therefore x . x^4 . (x + 1)^4 . x . (x+1)^2 = 0 \therefore$

$x^6 . (x + 1)^6 = 0$

Assim, temos que:
-1 é raiz de multiplicidade 6
0 é raiz de multiplicidade 6

c) Fatoremos o polinômio em binômios do 1º grau :

$(x^2 - 5x + 6)^5 (x - 2)^3 (x^2 + 3x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [(x - 2)(x - 3)]^5 (x - 2)^3 x (x + 3) = 0 \therefore$

$\therefore (x - 2)^5 (x - 3)^5 (x - 2)^3 x (x + 3) = 0 \therefore$

$\therefore (x - 2)^8 (x - 3)^5 x (x + 3) = 0$

Assim, temos que:
2 é raiz de multiplicidade 8
3 é raiz de multiplicidade 5
0 é raiz de multiplicidade 1
-3 é raiz de multiplicidade 1

2) Achar a multiplicidade da raiz 1 na equação $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Solução:

Se 1 é raiz, então $P(x) = x^3 - 3x + 2$ é divisível por x - 1,

Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

1	1	0	-3	2
	1	1	-2	0
	Q (x)			

$x^3 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2)(x - 1) = 0$.

As raízes de $x^2 + x - 2 = 0$ são 1 e -2.

Portanto:

$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)(x - 1) = (x + 2)(x - 1)^2$

Logo, 1 é raiz de multiplicidade 2.

3) Achar a multiplicidade da raiz 3 na equação $x^4 + x - 84 = 0$.

Solução :
3 é raiz, logo P(x) é divisível por x - 3.
Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

3	1	0	0	1	-84
	1	3	9	28	0

$x^4 + x - 84 = (x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 28) = 0$

Usando novamente o dispositivo de Briot-Ruffini:

3	1	3	9	28
	1	6	27	82

Como $R \neq 0$, 3 não é raiz de $x^3+3x^2+9x+28 = 0$.
Assim, 3 é raiz de multiplicidade 1.

Exercícios

1) classifique as raízes das equações a seguir, quanto à sua multiplicidade :

a) $(x^2 - 7x + 10)^2 (x - 2) = 0$
b) $(x - 1)^2 (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 3x) = 0$
c) $(x - 1)^7 (x^2 - 1)^4 = 0$
d) $(x^4 - 1)^2 (x - i)(x + i) = 0$

2) Ache a multiplicidade da raiz 1 na equação $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

3) Ache a multiplicidade da raiz 2 na equação $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$.

4) Ache a multiplicidade da raiz 1 nas equações:
a) $x^4 + x - 2 = 0$ b) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$

5) Componha uma equação de grau 3, sabendo que 3 é raiz simples e 2 é raiz dupla.

6) Admite uma raiz de multiplicidade dois a seguinte equação:
a) $x^2 - 4 = 0$
b) $x^6 - x^4 + 3x^2 = 0$
c) $x - 2 = 0$
d) $(x - 1)^4 = 0$
e) $(x - 1)^3 = 0$

7) Assinale, entre as equações a seguir, a que apresenta raiz de multiplicidade três:
a) $x^3 - 1 = 0$
b) $(x - 2)^4 = 0$
c) $x^4 - 4x^2 = 0$
d) $(x - 1)^3 . (x + 1) = 0$
e) $x^5 - x = 0$

8) Da equação $x^4 - 11x^3 + 45x^2 - 81x + 54 = 0$, podemos afirmar que :
a) 2 é raiz de multiplicidade dois;
b) 3 é raiz de multiplicidade quatro;
c) 3 é raiz de multiplicidade três;
d) 2 é raiz de multiplicidade três;
e) 2 e 1 são raízes de multiplicidade dois.

Relações de Girard

Em toda equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes x_1 e x_2, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Em toda equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Em toda equação do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + + dx + e = 0$, de raízes x_1, x_2, x_3 e x_4, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO: Estas relações podem ser generalizadas para equações de grau n, n > 4.

APLICAÇÕES

1) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, calcular:

a) $x_1 + x_2$ c) $x_1^2 + x_2^2$ e) $x_1^3 + x_2^3$
b) $x_1 . x_2$ d) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

Solução:

a) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 5$

b) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 6$

c) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$

$= 5^2 - 2 \cdot 6 = 25 - 12 = 13$

d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{5}{6}$

e) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$

$5\,(13 - 6) = 35$

2) Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 6x + 8 = 0$, calcular:

a) $x_1 + x_2 + x_3$
b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
c) $x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3$
d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$
e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Solução:

a) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$

b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$

c) $x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{8}{2} = -4$

d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} =$

$= \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$

$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$

$= 2^2 - 2 \,.\, 3 = -2$

3) Dada a equação $x^4 + x^2 - 7 = 0$, calcular:

a) a soma das raízes
b) o produto das raízes

Solução:

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = 0$

b) $x_1\, x_2\, x_3\, x_4 = \frac{e}{a} = -7$

4) Determinar m e n, sabendo-se que 2 é raiz dupla da equação $mx^3 + nx + 16 = 0$.

Solução:

Pelas relações de Girard :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{n}{m} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{16}{m} \end{cases}$$

Como $x_1 = x_2 = 2$, vem :

$$\begin{cases} 2 + 2 + x_3 = 0 \\ 2 \cdot 2 + 2x_3 + 2x_3 = \frac{n}{m} \\ 2 \cdot 2 \cdot x_3 = -\frac{16}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -4 \\ 4 + 4x_3 = \frac{n}{m} \\ x_3 = -\frac{4}{m} \end{cases} \therefore$$

$$\therefore \begin{cases} 4 + 4(-4) = \frac{n}{m} \\ -4 = -\frac{4}{m} \end{cases} \therefore \begin{cases} -12 = \frac{n}{m} \\ m = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} n = -12 \\ m = 1 \end{cases}$$

5) Determinar ***k***, de modo que o produto de duas raízes da equação $x^3 + kx^2 + 2 = 0$ seja 1.

solução:

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 + kx^2 + 0x + 2 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -k & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -2 & (3) \end{cases}$$

O produto de duas raízes é 1.
Portanto, $x_1\, x_2 = 1$
Substituindo $x_1\, x_2 = 1$ em (3), vem : $x_3 = -2$
Substituindo $x_1\, x_2 = 1$ e $x_3 = -2$ em (2), vem :

$1 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 = 1 \therefore x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$

Substituindo $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ e $x_3 = -2$ em (1) vem:

$\frac{1}{2} + (-2) = -k \Rightarrow k = 2 - \frac{1}{2} \therefore k = \frac{3}{2}$

6) Resolver a equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é a soma das outras duas.

Solução:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +1 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6 & (3) \end{cases}$$

Uma das raízes é a soma das outras duas:
$x_1 = x_2 + x_3$

Substituindo $x_1 = x_2 + x_3$ em (1), vem :
$x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow 2x_1 = 4 \therefore x_1 = 2$
Substituindo $x_1 = 2$ em (3), vem :
$2x_2\, x_3 = -6 \Rightarrow x_2\, x_3 = -3$
Resolvendo o sistema $\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 \cdot x_3 = -3 \end{cases}$, vem :

$x_2 = 3 \Rightarrow x_3 = -1$ ou $x_2 = -1 \Rightarrow x_3 = 3 \therefore$
S = { 2, 3, -1)

Exercícios

1) Calcule a soma e o produto das raízes da equação $3x^3 - 6x^2 + 7x - 3 = 0$.

2) Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $2x^3 - x^2 + 17x + 10 = 0$, calcule $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

3) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$, calcule :
a) $x_1 + x_2$
b) $x_1\, x_2$
c) $x_1^2 + x_2^2$
d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
e) $x_1^3 + x_2^3$

4) Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $3x^3 + 6x + 9 = 0$, calcule:
a) $x_1 + x_2 + x_3$
b) $x_1\, x_2 + x_1\, x_3 + x_2\, x_3$
c) $x_1\, x_2\, x_3$
d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$
e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

5) Sendo x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes da equação $x^4 + 3x^2 + 7x + 8 = 0$, calcule:
a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
b) $x_1\, x_2 + x_1\, x_3 + x_1\, x_4 + x_2\, x_3 + x_2\, x_4 + x_3 x_4$
c) $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$

6) Uma das raízes do polinômio $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ é -2. A soma das outras raízes é:
a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

7) Resolva a equação $x^3 + 5x^2 - 12x - 36 = 0$, sabendo-se que uma raiz é o produto das outras duas.

8) Determine k, de modo que a equação $x^3 - 28x + k = 0$ tenha uma raiz igual ao dobro de uma outra.

9) Determine k, de modo que o produto das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 8x + k - 1 = 0$ seja -2.

10) Determine k, de modo que a equação $x^3 + kx + 2 = 0$ admita como raiz dupla o número 1.

11) Resolva a equação $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$, sabendo que duas raízes são simétricas, isto é, $x_1 = -x_2$

12) Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$, sabendo que uma das raízes é o quádruplo da soma das outras duas.

13) As raízes da equação $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$ estão em progressão geométrica. O valor de k é :
a) –10 b) –18 c) –24 d) 16 e) 12

14) Sendo a, b e c as raízes da equação $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$, o valor da expressão $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ é:
a) 19 b) 31 c) 19/4 d) 31/4 e) n.d.a.

15) Se x_1, x_2 e x_3 são as três soluções distintas da equação $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ -2 & x & 2 \\ 0 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ e $S = x_1, + x_2 + x_3$, então :
a) S = 0 b) S = 2 c) S = 4 d) S = 8 e) n.d.a.

16) Se duas raízes da equação $x^3 + x^2 - qx - q = 0$ têm soma nula, a terceira raiz será:
a) 1 b) –1 c) 4 d) –4 e) n.d.a.

17) O número a é a raiz tripla da equação $x^3 - 3ax^2 + 6ax - 8 = 0$. O valor de x é;
a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

18) As raízes da equação $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = o$ estão em progressão geométrica. O produto de duas das maiores raízes será :
a) 2 b) ½ c) 1 d) 7/2 e) n.d.a.

19) As raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ são as idades de três crianças. Sabendo que duas crianças são gêmeas, podemos afirmar que as idades são:
a) 1, 1, 2 b) 1, 2, 2 c) 1, 3, 3 d) 1, 1, 3 e) 1, 1, 4

20) As raízes da equação $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ formam uma PA. Estas raízes são:
a) -1, 1, 3 b)1,5,9 c) 3, 7, 11 d) 5, 7, 9 e) 3, 5, 7

21) Se as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ constituem uma PA de razão 3, então o valor de a + b é :
a) 13 c) 5 e) -13
b) 10 d) –10

Respostas

definição

1) .a) P (x) = x (x + 1) (x –1)
b) P (x) = (x –2) (x –3)

2) P(x) = (x -2) (x –3) (x +4)
3) $P(x) = \frac{5}{2}(x-2)(x-3)$
4) P(x) = 4x (x-2)(x –1)
5) $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$
6) $P(x) = \frac{2}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$
7) P(x) = a (x –1)(x –2)(x +i)(x -i) com a ε IR
8) P(x) =(x -1)(x+1)(x+2)
9) a
10) a
11) d
12) b
13) b
14) d

multiplicidade de uma raíz

1) a) 2 é raiz de multiplicidade 3
5 é raiz de multiplicidade 2

b) 0 é raiz de multiplicidade 1
1 é raiz de multiplicidade 2
2 é raiz de multiplicidade 1
3 é raiz de multiplicidade 2

c) 1 é raiz de multiplicidade 11
-1 é raiz de multiplicidade 4

d) 1 é raiz de multiplicidade 2
1 é raiz de multiplicidade 2
-1 é raiz de multiplicidade 2
i é raiz de multiplicidade 3
-i é raiz de multiplicidade 3

2) 1 é raiz de multiplicidade 1
3) 2 é raiz de multiplicidade 3
4) a) 1 é raiz de multiplicidade 1
b) 1 é raiz de multiplicidade 3

5) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$
6) b
7) d
8) c

Relações de Girard

1) S = 2; P = 1.
2) $\frac{-17}{10}$
3) a) –1 b) 1 c) –1 d) –1 e) 2
4) a) 0 b) 2 c) –3 d) $\frac{-2}{3}$ e)-4
5) a) 0 b) 3 c) 8
6) c
7) S = { -6, -2, 3 }
8) K = $\pm$ 48
9) k = 3
10) K = -3
11) S = { -2, 2, 3 }
12) S = { -1, 2, 4 }
13) c
14) d
15) a
16) b
17) e
18) a
19) b
20) e
21)a

PROGRESSÕES

Observe a seguinte sequência: (5; 9; 13; 17; 21; 25; 29)

Cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se 4 ao termo anterior, ou seja:
$a_n = a_{n-1} + 4$ onde $2 \le n \le 7$

Podemos notar que a diferença entre dois termos sucessivos não muda, sendo uma constante.

$a_2 - a_1 = 4$
$a_3 - a_2 = 4$
. . . .
$a_7 - a_6 = 4$

Este tipo de sequência tem propriedades interessantes e são muito utilizadas, são chamadas de PROGRESSÕES ARITMÉTICAS.

Definição:
Progressão Aritmética (P.A.) é toda sequência onde, a partir do segundo, a diferença entre um termo e seu antecessor é uma constante que recebe o nome de razão.

$A_N - A_{N-1} = R$ ou $A_N = A_{N-1} + R$

Exemplos:
a) (2, 5, 8, 11, 14, ...) $a_1 = 2$ e $r = 3$
b) ($\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}$,. . . .) $a_1 = \frac{1}{16}$ e $r = \frac{1}{16}$
c) (-3, -3, -3, -3, ...) $a_1 = -3$ e $r = 0$
d) (1, 3, 5, 7, 9, ...) $a_1 = 1$ e $r = 2$

Classificação
As Progressões Aritméticas podem ser classificadas em três categorias:
1.º) CRESCENTES são as PA em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isto

ocorre somente se $r > 0$.
(0, 5, 10, 15, 20, 25, 30)
(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)

2.º) DECRESCENTES são as PA em que cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre se $r < 0$.
(0, - 2, - 4, - 6, - 8, - 10, - 12)
(13, 11, 9, 7, 5, 3, 1)

3.º) CONSTATES são as PA em que cada termo é igual ao anterior. É fácil ver que isto só ocorre quando $r = 0$.
(4, 4 , 4, 4, 4, 4)
(6, 6, 6, 6, 6, 6, 6)

As PA também podem ser classificadas em:
a) FINITAS: (1, 3, 5, 7, 9, 11)
b) INFINITAS: (6, 10 , 14 , 18 , ...)

IV - TERMO GERAL

Podemos obter uma relação entre o primeiro termo e um termo qualquer, assim:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r$

. . . .

$a_{10} = a_9 + r = (a_1 + 8r) + r = a_1 + 9r$

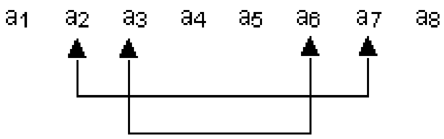
logo $A_N = A_1 + (N - 1) \cdot R$

que recebe o nome de fórmula do Termo Geral de uma Progressão Aritmética.

<u>V - TERMOS EQUIDISTANTES</u>

Em uma PA finita, dois termos são chamados equidistantes dos extremos, quando o número de termos que precede um deles é igual ao número de termos que sucede o outro.

Por exemplo: Dada a PA
(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)



a_2 e a_7 são equidistantes dos extremos
a_3 e a_6 são equidistantes dos extremos

E temos a seguinte propriedade para os termos equidistantes: A soma de dois termos equidistantes dos extremos é uma constante igual à soma dos extremos.

Exemplo:
(–3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29)
– 3 e 29 são extremos e sua soma é 26
1 e 25 são equidistantes e sua soma é 26
5 e 21 são equidistantes e sua soma é 26
Dessa propriedade podemos escrever também que:
Se uma PA finita tem número ímpar de termos então o termo central é a média aritmética dos extremos.

<u>VI - INTERPOLACÃO ARITMÉTICA</u>

Dados dois termos A e B inserir ou interpolar <u>k</u> meios aritméticos entre A e B é obter uma PA cujo primeiro termo é A, o último termo é B e a razão é calculada através da relação:

$$\frac{B-A}{K+1}$$

Exemplo:
Interpolar (inserir) 3 meios aritméticos entre 2 e 10 de modo a formar uma Progressão Aritmética.

Solução:

Aplicando a fórmula: $\frac{B-A}{K+1}$ 1º termo $A = 2$, último termo $B = 10$, k meios $= 3$

Substituindo na forma acima vem:

$$\frac{B-A}{K+1} \Rightarrow \frac{10-2}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$$

portanto a razão da PA é 2

A Progressão Aritmética procurada será: 2, 4, 6, 8, 10.

VII –SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA PA

Podemos determinar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA S_n da seguinte forma:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n} (+)$

$S_n = a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + \dots + a_1 + a_2 + a_3$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$

Observe que aqui usamos a propriedade dos termos equidistantes, assim: $2S_n = n\,(a_1 + a_n)$

logo: $S_N = \frac{(A_1 + A_N) \cdot N}{2}$

EXERCICIOS

Não esquecer as denominações:
$a_n \rightarrow$ termo de ordem n
a1 $\rightarrow$ 1º termo
n $\rightarrow$ número de termos
r $\rightarrow$ razão

1) Determinar o 20º termo (a_{20}) da PA (2, 5, 8, ...)

Resolução:

$a_1 = 2$	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$r = 5 - 2 = 8 - 5 = 3$	$a_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 3$
$n = 20$	$a_{20} = 2 + 19 \cdot 3$
$a_{20} = ?$	$a_{20} = 2 + 57$
	$a_{20} = 59$

2) Escrever a PA tal que $a_1 = 2$ e $r = 5$, com sete termos.

Solução:
$a_2 = a_1 + r = 2 + 5 = 7$
$a_3 = a_2 + r = 7 + 5 = 12$
$a_4 = a_3 + r = 12 + 5 = 17$
$a_5 = a_4 + r = 17 + 5 = 22$
$a_6 = a_5 + r = 22 + 5 = 27$

$a_7 = a_6 + r = 27 + 5 = 32$

Logo, a PA solicitada no problema é: (2, 7, 12, 17, 22, 27, 32).

3) Obter a razão da PA em que o primeiro termo é – 8 e o vigésimo é 30.
Solução:
$a_{20} = a_1 + 19r = \Rightarrow 30 = -8 + 19r \Rightarrow$
$\Rightarrow 30 + 8 = 19r \Rightarrow 38 = 19r \Rightarrow r = \frac{38}{19} = 2$

4) Calcular r e a_5 na PA (8, 13, 18, 23, ...)
Solução:
$r = 23 - 18 = 13 - 8 = 5$

$a_5 = a_4 + r$
$a_5 = 23 + 5$
$a_5 = 28$

5) Achar o primeiro termo de uma PA tal que
$r = -2$ e $a_{10} = 83$.
Solução:
Aplicando a fórmula do termo geral, teremos que o décimo termo é: $a_{10} = a_1 + (10 - 1)\, r$ ou seja:
$83 = a_1 + 9 \,.\, (-2) \Rightarrow -a_1 = -18 - 83 \Rightarrow$
$\Rightarrow -a_1 = -101 \Rightarrow a_1 = 101$

6) Determinar a razão (r) da PA, cujo 1º termo (a_1) é – 5 e o 34º termo (a_{34}) é 45.
Solução:

$a_1 = -5$	$a_{34} = -5 + (34 - 1)\,.r$
$a_{34} = 45$	$45 = -5 + 33\,.\,r$
$n = 34$	$33r = 50$
$R = ?$	$r = \dfrac{50}{33}$

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1 - DEFINIÇÃO
Vejamos a sequência 2, 6, 18, 54, 162

Onde cada termo, a partir do 2.º, é obtido multiplicando-se o termo anterior por 3, ou seja:
$a_n = a_{n-1} \,.\, 3 \qquad n = 2, 3, \ldots, 5$

Observe que o quociente entre dois termos sucessivos não muda, sendo uma constante.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$
$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$
$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{54}{18} = 3$$
$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{162}{54} = 3$$

Sequências onde o quociente entre dois termos consecutivos é uma constante também possuem propriedades interessantes. São também úteis para a Matemática recebem um nome próprio: PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS.

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS é toda sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do seu termo precedente por uma constante. Esta constante é chamada razão da progressão geométrica.

Em símbolos:
$A_N = A_{N-1} \,.\, Q \qquad N = 1, 2, 3, \ldots$

ou seja: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = q$

CLASSIFICAÇÃO E TERMO GERAL
Quanto ao número de termos, podemos classificar a Progressão Geométrica em:
- FINITA: quando o nº de termo for finito: 2, 4, 8, 16, 32, 64 (6 termos)
- INFINITA: quando o número de termos for infinito: 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . .

Quanto à razão, podemos classificar a PG em:
- CRESCENTE: quando cada termo é maior que o anterior: 2, 4, 8, 16, 32
- DECRESCENTE: quando cada termo é menor que o anterior: 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, ..,
- CONSTANTE: quando cada termo é igual ao anterior: 3, 3, 3, 3, 3, . . . (q = 1)
- OSCILANTE OU ALTERNANTE: quando cada termo, a partir do segundo tem sinal contrário ao do termo anterior.

Em alguns problemas, seria útil existir uma relação entre o primeiro termo e um termo qualquer. Vejamos como obtê-la.

$a_2 = a_1 \,.\, q$
$a_3 = a_2 \,.\, q = (a_1 \,.\, q) \,.\, q = a_1 \,.\, q^2$
$a_4 = a_3 \,.\, q = (a_1 \,.\, q^2) \,.\, q = a_1 \,.\, q^3$
$a_5 = a_4 \,.\, q = (a_1 \,.\, q^3) \,.\, q = a_1 \,.\, q^4$
. . . .
$a_n = a_{n-1} \,.\, q = (a_1 \,.\, q^{n-2}) \,.\, q = a_1 \,.\, q^{n-1}$

$$A_N = A_1 \,.\, Q^{N-1}$$

Esta última expressão é chamada termo geral de uma Progressão Geométrica.

EXERCÍCIOS
1) Determinar o 9.º termo (a_9) da P.G. (1, 2, 4, 8;....).
Solução:
$a_n \rightarrow$ termo de ordem n
$a_1 \rightarrow$ 1º termo
$n \rightarrow$ número de termos
$q \rightarrow$ razão

FÓRMULA DO TERMO GERAL: $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$

$a_1 = 1 \qquad q = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2 \qquad n = 9 \qquad a_9 = ?$

$a_9 = 1 \,.\, 2^{9-1} \Rightarrow a_9 = 1 \,.\, 2^8 \Rightarrow$

$a_9 = 1 \cdot 256 \quad \therefore \ a_9 = 256$

2) Determinar a_1 (1º termo) da PG cuja a_8 (8º termo) é 729, sabendo-se que a razão é 3.

Solução:

$a_1 = ? \qquad q = 3 \qquad n = 8 \qquad a_8 = 729$

$a_8 = a_1 \cdot 3^{8-1}$

$729 = a_1 \cdot 3^7$

$3^6 = a_1 \cdot 3^7$

$a_1 = 3^6 : 3^7$

$a_1 = 3^{-1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{3}$

3) Determinar a razão de uma PG com 4 termos cujos extremos são 1 e 64.

Solução: $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$64 = 1 \cdot q^{4-1}$

$4^3 = 1 \cdot q^3$

$4^3 = q^3$

$q = 4$

TERMOS EQUIDISTANTES

Em toda PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Exemplo:

(1, 3, 9, 27, 81, 243)

1 e 243 extremos → produto = 243

3 e 81 equidistantes → produto = 3 . 81 = 243

9 e 27 equidistantes → produto = 9 . 27 = 243

Desta propriedade temos que:

Em toda Progressão Geométrica finita com número ímpar de termos, o termo médio é a média geométrica dos extremos.

Exemplo: (3, 6, 12, $\underline{24}$, 48, 96, 192)

$24^2 = 3 \cdot 192$

IV - PRODUTO DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA PG

Sendo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ uma PG de razão q, indicamos o produto dos seus n primeiros termos por:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$

0bserve que:

$P_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) \ldots (a_1 \cdot q^{n-1})$

$P_n = (a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \ldots a_1) \cdot (q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \ldots q^{n-1})$

$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$

Mas 1 + 2 + 3 + ... + (n –1) é uma PA de (n –1) termos e razão 1. Considerando a fórmula da soma dos termos de uma PA, temos:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)^n}{2} \Rightarrow S = \frac{[1 + (n-1)] \cdot n-1}{2} \Rightarrow S = \frac{n(n-1)}{2}$$

Assim, podemos afirmar que:

$$P_N = A_1^N \cdot Q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

V - INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA.

Inserir ou interpolar k meios geométricos entre os números A e B, significa obter uma PG de k+2 termos, onde A é o primeiro termo e B é o último e a razão é dada por: $Q^{K+1} = \frac{B}{A}$

VI - SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA PG

Seja uma PG de n termos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

A soma dos n primeiros termos será indicada por: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Observe que, se q = 1, temos $S = n \cdot a_1$. Suponhamos agora que, na progressão dada, tenhamos $q \neq 1$. Multipliquemos ambos os membros por q.

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

Como $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$, ... $a_{n-1} \cdot q = a_n$ temos:

$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n \cdot q$

E sendo $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = S_n - a_1$, vem:

$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$

$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n}{1 - q}$$

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1)}$$

VII - SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA COM - 1 < Q < 1

Vejamos como calcular $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

Neste caso, temos a soma dos termos de uma PG infinita com $q = \frac{1}{2}$.

Multiplicando por 2 ambos os membros, temos:

$$2S = 2 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots}_{S}$$

$2S = 2 + S \Rightarrow S = 2$

Calculemos agora $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

Multiplicando por 3 ambos os membros, temos:

$$3S = 3 + 1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...}_{S}$$

$$3S = 3 + S \Rightarrow 2S = 3 \Rightarrow S = \frac{3}{2}$$

Vamos obter uma fórmula para calcular a soma dos termos de uma PG infinita com -1 < q < 1, Neste caso a soma converge para um valor que será indicado por S

$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$
$S = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1} + ...$

multiplicando por q ambos os membros, temos:
$S_q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^n + ... \Rightarrow$
$\Rightarrow Sq = S - a_1 \quad \Rightarrow S - Sq = a_1$
$\Rightarrow S(1-q) = a_1 \Rightarrow \quad S = \frac{a_1}{1-q}$

Resumindo:
se - 1 < q < 1, temos:

$$\boxed{S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \frac{a_1}{1-q}}$$

EXERCÍCIOS

1) Determinar a soma dos termos da PG $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{64}\right)$

Solução: $a_1 = 1 \qquad q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_n = \frac{1 - \frac{1}{128}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{128} \cdot 2 \Rightarrow S_n = \frac{127}{64} \quad \text{ou}$$

$$S_n = 1{,}984375$$

2) Determinar a soma dos oito primeiros termos da PG $(2, 2^2, 2^3, ...)$.

Solução:
$a_1 = 2 \quad q = 2 \qquad n = 8$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot (1 - 2^8)}{1 - 2} = \frac{2 \cdot (1 - 256)}{-1} =$$

$$= \frac{2 \cdot (-255)}{-1} = 510 \therefore S_8 = 510$$

3) Determinar a razão da PG $\left(2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; ...\right)$

Solução: De $a_2 = a_1 \cdot q$ tiramos que:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

4) Achar o sétimo termo da PG $\left(\frac{1}{2}; 1; 2; ...\right)$

Solução:

A PG é tal que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = 2$

Aplicando então a fórmula do termo geral, teremos que o sétimo termo é:

$$a_7 = a_1 \cdot q^{(7-1)} = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = \frac{1}{2} \cdot 64$$

portanto ($\therefore$) $a_7 = 32$

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Princípio fundamental da contagem (PFC)

Se um primeiro evento pode ocorrer de *m* maneiras diferentes e um segundo evento, de *k* maneiras diferentes, então, para ocorrerem os dois sucessivamente, existem m **.** k maneiras diferentes.

Aplicações

1) Uma moça dispõe de 4 blusas e 3 saias. De quantos modos distintos ela pode se vestir?

Solução:

A escolha de uma blusa pode ser feita de 4 maneiras diferentes e a de uma saia, de 3 maneiras diferentes.

Pelo PFC, temos: 4 **.** 3 = 12 possibilidades para a escolha da blusa e saia. Podemos resumir a resolução no seguinte esquema;

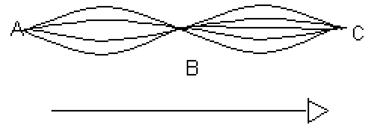
Blusa	saia
↓	↓
4 **.**	3

= 12 modos diferentes

2) Existem 4 caminhos ligando os pontos *A* e *B*, e 5 caminhos ligando os pontos *B* e *C*. Para ir de *A* a *C*, passando pelo ponto *B*, qual o número de trajetos diferentes que podem ser realizados?

Solução:

Escolher um trajeto de A a C significa escolher um caminho de A a B e depois outro, de B a C.



Como para cada percurso escolhido de A a B temos ainda 5 possibilidades para ir de B a C, o número de trajetos pedido é dado por: 4 . 5 = 20.

Esquema:

Percurso AB	Percurso BC

4 . 5 = 20

3) Quantos números de três algarismos podemos escrever com os algarismos ímpares?

Solução:
Os números devem ser formados com os algarismos: 1, 3, 5, 7, 9. Existem 5 possibilidades para a escolha do algarismo das centenas, 5 possibilidades para o das dezenas e 5 para o das unidades.

Assim, temos, para a escolha do número, 5 . 5 . 5 = 125.

algarismos da centena	algarismos da dezena	algarismos da unidade
5 .	5 .	5 = 125

4) Quantas placas poderão ser confeccionadas se forem utilizados três letras e três algarismos para a identificação de um veículo? (Considerar 26 letras, supondo que não há nenhuma restrição.)

Solução:
Como dispomos de 26 letras, temos 26 possibilidades para cada posição a ser preenchida por letras. Por outro lado, como dispomos de dez algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), temos 10 possibilidades para cada posição a ser preenchida por algarismos. Portanto, pelo PFC o número total de placas é dado por:

letras algarimos

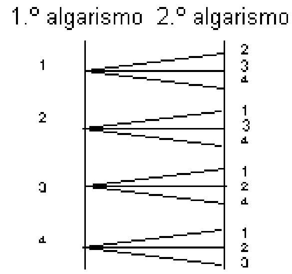
26 26 26 10 10 10 = 17.576.000

5) Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Solução:
Observe que temos 4 possibilidades para o primeiro algarismo e, para cada uma delas, 3 possibilidades para o segundo, visto que não é permitida a repetição. Assim, o número total de possibilidades é: 4 . 3 =12

Esquema:

1.º algarismo	2.º algarismo
4 .	3 = 12



6) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Solução:
Existem 9 possibilidades para o primeiro algarismo, apenas 8 para o segundo e apenas 7 para o terceiro. Assim, o número total de possibilidades é: 9 . 8 . 7 = 504

Esquema:

9 . 8 . 7 = 504

7) Quantos são os números de 3 algarismos distintos?

Solução:
Existem 10 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Temos 9 possibilidades para a escolha do primeiro algarismo, pois ele não pode ser igual a zero. Para o segundo algarismo, temos também 9 possibilidades, pois um deles foi usado anteriormente.

Para o terceiro algarismo existem, então, 8 possibilidades, pois dois deles já foram usados. O numero total de possibilidades é: 9 . 9 . 8 = 648

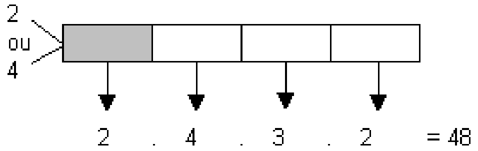
Esquema:

9 . 9 . 8 = 648

8) Quantos números entre 2000 e 5000 podemos formar com os algarismos pares, sem os repetir?

Solução:
Os candidatos a formar os números são : 0, 2, 4, 6 e 8. Como os números devem estar compreendidos entre 2000 e 5000, o primeiro algarismo só pode ser 2 ou 4. Assim, temos apenas duas possibilidades para o primeiro algarismo e 4 para o segundo, três para o terceiro e duas paia o quarto.

O número total de possibilidades é: 2 . 4 . 3 . 2 = 48
Esquema:



Exercícios

1) Uma indústria automobilística oferece um determinado veículo em três padrões quanto ao luxo, três tipos de motores e sete tonalidades de cor. Quantas são as opções para um comprador desse carro?
2) Sabendo-se que num prédio existem 3 entradas diferentes, que o prédio é dotado de 4 elevadores e que cada apartamento possui uma única porta de entrada, de quantos modos diferentes um morador pode chegar à rua?
3) Se um quarto tem 5 portas, qual o número de maneiras distintas de se entrar nele e sair do mesmo por uma porta diferente da que se utilizou para entrar?
4) Existem 3 linhas de ônibus ligando a cidade A à cidade B, e 4 outras ligando B à cidade C. Uma pessoa deseja viajar de A a C, passando por B. Quantas linhas de ônibus diferentes poderá utilizar na viagem de ida e volta, sem utilizar duas vezes a mesma linha?
5) Quantas placas poderão ser confeccionadas para a identificação de um veículo se forem utilizados duas letras e quatro algarismos? (Observação: dispomos de 26 letras e supomos que não haverá nenhuma restrição)
6) No exercício anterior, quantas placas poderão ser confeccionadas se forem utilizados 4 letras e 2 algarismos?
7) Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
8) Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?
9) Quantos números de 4 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
10) Quantos números de 5 algarismos não repetidos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
11) Quantos números, com 4 algarismos distintos, podemos formar com os algarismos ímpares?
12) Quantos números, com 4 algarismos distintos, podemos formar com o nosso sistema de numeração?
13) Quantos números ímpares com 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
14) Quantos números múltiplos de 5 e com 4 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 7, sem os repetir?
15) Quantos números pares, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7? E quantos ímpares?
16) Obtenha o total de números de 3 algarismos distintos, escolhidos entre os elementos do conjunto (1, 2, 4, 5, 9), que contêm 1 e não contêm 9.
17) Quantos números compreendidos entre 2000 e 7000 podemos escrever com os algarismos ímpares, sem os repetir?
18) Quantos números de 3 algarismos distintos possuem o zero como algarismo de dezena?
19) Quantos números de 5 algarismos distintos possuem o zero como algarismo das dezenas e começam por um algarismo ímpar?
20) Quantos números de 4 algarismos diferentes tem o algarismo da unidade de milhar igual a 2?
21) Quantos números se podem escrever com os algarismos ímpares, sem os repetir, que estejam compreendidos entre 700 e 1 500?
22) Em um ônibus há cinco lugares vagos. Duas pessoas tomam o ônibus. De quantas maneiras diferentes elas podem ocupar os lugares?
23) Dez times participam de um campeonato de futebol. De quantas formas se podem obter os três primeiros colocados?
24) A placa de um automóvel é formada por duas letras seguidas e um número de quatro algarismos. Com as letras A e R e os algarismos pares, quantas placas diferentes podem ser confeccionadas, de modo que o número não tenha nenhum algarismo repetido?
25) Calcular quantos números múltiplos de 3 de quatro algarismos distintos podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.
26) Obtenha o total de números múltiplos de 4 com quatro algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

ARRANJOS SIMPLES

Introdução:

Na aplicação $A_{n,p}$, calculamos quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com 1, 2, 3 e 4. Os números são :

12 13 14 21 23 24 31 32 34 41 42 43

Observe que os números em questão diferem ou pela ordem dentro do agrupamento ($12 \neq 21$) ou pelos elementos componentes ($13 \neq 24$). Cada número se comporta como uma sequência, isto é :

$(1,2) \neq (2,1)$ e $(1,3) \neq (3,4)$

A esse tipo de agrupamento chamamos *arranjo simples.*

Definição:

Seja ***I*** um conjunto com n elementos. Chama-se *arranjo simples* dos n elementos de *I*, tomados ***p*** a ***p***, a toda sequência de ***p*** elementos distintos, escolhidos entre os elementos de ***I*** ($P \leq n$).

O número de arranjos simples dos n elementos, tomados ***p*** a ***p***, é indicado por $A_{n,p}$

Fórmula:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-(p-1)),$$
$$p \leq n \text{ e } \{p, n\} \subset \mathbb{N}$$

Aplicações

1) Calcular:

a) $A_{7,1}$ b) $A_{7,2}$ c) $A_{7,3}$ d) $A_{7,4}$

Solução:

a) $A_{7,1} = 7$ c) $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
b) $A_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$ d) $A_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

2) Resolver a equação $A_{x,3} = 3 \,.\, A_{x,2}$.

Solução:

$x \,.\, (x-1) \,.\, (x-2) = 3 \,.\, x \,.\, (x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-1)(x-2) - 3x(x-1) = 0$

$\therefore x(x-1)[x-2-3] = 0$

x = 0 (não convém)
ou
x = 1 (não convém)
ou
x = 5 (convém)
S = $\{5\}$

3) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Solução:

Essa mesma aplicação já foi feita, usando-se o principio fundamental da contagem. Utilizando-se a fórmula, o número de arranjos simples é:

$A_{9,3} = 9 \,.\, 8 \,.\, 7 = 504$ números

Observação: Podemos resolver os problemas sobre arranjos simples usando apenas o principio fundamental da contagem.

Exercícios

1) Calcule:

a) $A_{8,1}$ b) $A_{8,2}$ c) $A_{8,3}$ d) $A_{8,4}$

2) Efetue:

a) $A_{7,1} + 7A_{5,2} - 2A_{4,3} - A_{10,2}$ b) $\dfrac{A_{8,2} + A_{7,4}}{A_{5,2} - A_{10,1}}$

3) Resolva as equações:

a) $A_{x,2} = A_{x,3}$ b) $A_{x,2} = 12$ c) $A_{x,3} = 3x(x-1)$

FATORIAL

Definição:

- Chama-se fatorial de um número natural *n*, n ≥ 2, ao produto de todos os números naturais de 1 até n. Assim :
- $n! = n(n-1)(n-2)\,.\,.\,.\;2 \,.\, 1,\; n \geq 2$ (lê-se: *n* fatorial)
- $1! = 1$
- $0! = 1$

Fórmula de arranjos simples com o auxílio de fatorial:

$$\boxed{A_{N,P} = \frac{n!}{(n-p)!},\; p \leq n \text{ e } \{p,n\} \subset \mathbb{N}}$$

Aplicações

1) Calcular:

a) $5!$ c) $\dfrac{8!}{6!}$ e) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

b) $\dfrac{5!}{4!}$ d) $\dfrac{11!+10!}{10!}$

Solução:

a) $5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$

b) $\dfrac{5!}{4!} = \dfrac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$

c) $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

d) $\dfrac{11!+10!}{10!} = \dfrac{11 \cdot 10! + 10!}{10!} = \dfrac{\cancel{10!}(11+1)}{\cancel{10!}} = 12$

e) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^2 - n$

2) Obter ***n***, de modo que $A_{n,2} = 30$.

Solução:

Utilizando a fórmula, vem :

$\dfrac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \dfrac{n\,(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30 \;\therefore$

$n^2 - n - 30 = 0$
n = 6
ou
n = –5 (não convém)

3) Obter n, tal que: $4 \,.\, A_{n-1,3} = 3 \,.\, A_{n,3}$.

Solução:

$$\frac{4 \cdot (n-1)!}{(n-4)!} = 3 \cdot \frac{n!}{(n-3)!} \Rightarrow \frac{4 \cdot (n-3)!}{(n-4)!} = 3 \cdot \frac{n!}{(n-1)!} \;\therefore$$

$$\frac{4 \cdot (n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} = 3 \cdot \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$

$\therefore 4n - 12 = 3n \therefore n = 12$

4) Obter n, tal que : $\dfrac{(n+2)! - (n+1)!}{n!} = 4$

Solução:

$$\frac{(n+2)\;(n+1)\;\cdot\; n! - (n+1)\;\cdot\; n!}{n!} = 4 \;\therefore$$

$$\Rightarrow \frac{n!(n+1)\cdot\;[n+2-1]}{n!} = 4$$

$\therefore (n+1)^2 = 4$
n + 1 = 2 $\therefore$ n = 1
n + 1 = –2 $\therefore$ n = –3 (não convém)

Exercícios

1) Assinale a alternativa correta:

a) 10 ! = 5! + 5 !
b) 10 ! = 2! . 5 !
c) 10 ! = 11! -1!
d) $\dfrac{10!}{2!} = 5$
e) 10 ! =10. 9. 8. 7!

2) Assinale a alternativa falsa;

a) n! = n (n-1)!
d) (n –1)! = (n- 1)(n-2)!

b) $n! = n(n - 1)(n - 2)!$ e) $(n - 1)! = n(n - 1)$
c) $n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)!$

3) Calcule:

a) $\dfrac{12!}{10!}$ c) $\dfrac{7!}{3!4!}$

b) $\dfrac{7!+5!}{5!}$ d) $\dfrac{8!-6!}{5!}$

4) Simplifique:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ d) $\dfrac{n!}{n(n-1)!}$

b) $\dfrac{(n+2)!\,n!}{[(n+1)!]^2}$ e) $\dfrac{5M!-2(M-1)!}{M!}$

c) $\dfrac{n!+(n+1)!}{n!}$

5) Obtenha n, em:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = 10$ b) $n! + (n - 1)! = 6(n - 1)!$

c) $\dfrac{n(n-1)!}{(n-2)!} = 6$ d) $(n - 1)! = 120$

6) Efetuando $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$, obtém-se:

a) $\dfrac{1}{(n+1)!}$ d) $\dfrac{2n+1}{(n+1)!}$

b) $\dfrac{1}{n!}$ e) 0

c) $\dfrac{n!(n+1)!}{n-1}$

7) Resolva as equações:
a) $A_{x,3} = 8A_{x,2}$ b) $A_{x,3} = 3 \cdot (x - 1)$

8) Obtenha n, que verifique $8n! = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{n+1}$

9) O número n está para o número de seus arranjos 3 a 3 como 1 está para 240, obtenha n.

PERMUTAÇÕES SIMPLES

Introdução:

Consideremos os números de três algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2 e 3. Esses números são : 123 132 213 231 312 321

A quantidade desses números é dada por $A_{3,3} = 6$.

Esses números diferem entre si *somente pela posição de seus elementos.* Cada número é chamado de *permutação simples,* obtida com os algarismos 1, 2 e 3.

Definição:

Seja *I* um conjunto com n elementos. Chama-se *permutação simples* dos *n* elementos de *I* a toda a sequência dos *n* elementos.

O número de permutações simples de n elementos é indicado por P_n.

OBSERVA ÇÃO: $P_n = A_{n,n}$.

Fórmula:

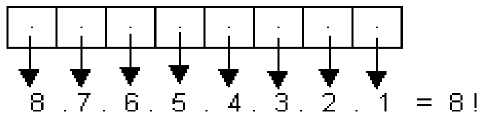
Aplicações

1) Considere a palavra ATREVIDO.
a) quantos anagramas (permutações simples) podemos formar?
b) quantos anagramas começam por A?
c) quantos anagramas começam pela sílaba TRE?
d) quantos anagramas possuem a sílaba TR E?
e) quantos anagramas possuem as letras T, R e E juntas?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam em consoante?

Solução:

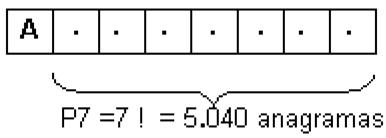
a) Devemos distribuir as 8 letras em 8 posições disponíveis.

Assim:

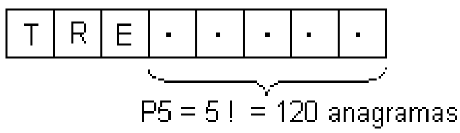


Ou então, $P_8 = 8\,! = 40.320$ anagramas

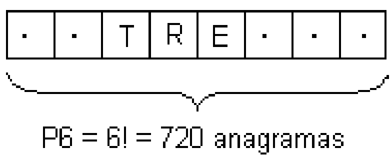
b) A primeira posição deve ser ocupada pela letra A; assim, devemos distribuir as 7 letras restantes em 7 posições, Então:



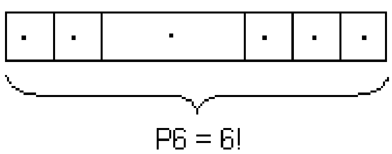
c) Como as 3 primeiras posições ficam ocupadas pela sílaba TRE, devemos distribuir as 5 letras restantes em 5 posições. Então:



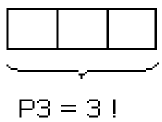
d) considerando a sílaba TRE como um único elemento, devemos permutar entre si 6 elementos,



e) Devemos permutar entre si 6 elementos, tendo considerado as letras T, R, E como um único elemento:



Devemos também permutar as letras T, R, E, pois não foi especificada a ordem :

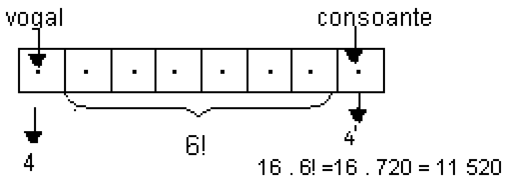


Para cada agrupamento formado, as letras T, R, E podem ser dispostas de P_3 maneiras. Assim, para P_6 agrupamentos, temos

$P_6 . P_3$ anagramas. Então:

$P_6 . P_3 = 6! . 3! = 720 . 6 = 4\ 320$ anagramas

f) A palavra ATREVIDO possui 4 vogais e 4 consoantes. Assim:



Exercícios

1) Considere a palavra CAPITULO:
a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam por C?
c) quantos anagramas começam pelas letras C, A e P juntas e nesta ordem?
d) quantos anagramas possuem as letras C, A e P juntas e nesta ordem?
e) quantos anagramas possuem as letras C, A e P juntas?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam em consoante?

2) Quantos anagramas da palavra MOLEZA começam e terminam por vogal?
3) Quantos anagramas da palavra ESCOLA possuem as vogais e consoantes alternadas?
4) De quantos modos diferentes podemos dispor as letras da palavra ESPANTO, de modo que as vogais e consoantes apareçam juntas, em qualquer ordem?
5) obtenha o número de anagramas formados com as letras da palavra REPÚBLICA nas quais as vogais se mantenham nas respectivas posições.

PERMUTAÇÕES SIMPLES, COM ELEMENTOS REPETIDOS

Dados n elementos, dos quais :

α_1 são iguais a $a_1 \to \underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{\alpha_1}$

α_2 são iguais a $a_2 \to \underbrace{a_2,\ a_2,\ \ldots, a_2}_{\alpha_2}$

$$\boxed{p_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r) = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha!\,\ldots\,\alpha_r!}}$$

. . . .

α_r são iguais a $a_r \to \underbrace{a_r, a_r, \ldots, a_r}_{\alpha_r}$

sendo ainda que: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = n$, e indicando-se por $p_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r)$ o número das permutações simples dos n elementos, tem-se que:

Aplicações

1) Obter a quantidade de números de 4 algarismos formados pelos algarismos 2 e 3 de maneira que cada um apareça duas vezes na formação do número.

Solução:

os números são $\begin{cases} 2233 & 2323 & 2332 \\ 3322 & 3232 & 3223 \end{cases}$

A quantidade desses números pode ser obtida por:

$$P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2!\cancel{2!}} = \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 6 \text{ números}$$

2) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMADA?

solução:

Temos:

Assin $\underbrace{A, A, A}_{3}\ \underbrace{M}_{1}\ \underbrace{D}_{1}$

$$p_5^{(3,1,1)} = \frac{5!}{3!1!1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20 \text{ anagramas}$$

3) Quantos anagramas da palavra GARRAFA começam pela sílaba RA?

Solução:

Usando R e A nas duas primeiras posições, restam 5 letras para serem permutadas, sendo que:

As $\underbrace{G}_{1}\ \underbrace{A, A}_{2}\ \underbrace{R}_{1}\ \underbrace{F}_{1}$

$$p_5^{(2,1,1)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}!}{\cancel{2!}} = 60 \text{ anagramas}$$

Exercícios

1) O número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra ARARA é:

a) 120 c) 20 e) 30
b) 60 d) 10

2) O número de permutações distintas possíveis com as oito letras da palavra PARALELA, começando todas com a letra P, será de ;

a) 120 c) 420 e) 360
b) 720 d) 24

3) Quantos números de 5 algarismos podemos formar com os algarismos 3 e 4 de maneira que o 3 apareça três vezes em todos os números?

a) 10 c) 120 e) 6
b) 20 d) 24

4) Quantos números pares de cinco algarismos podemos escrever apenas com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas?

a) 120 c) 20 e) 6 b) 24 d) 12

5) Quantos anagramas da palavra MATEMÁTICA

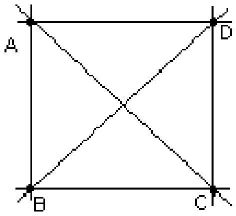
terminam pela sílaba MA?

a) 10 800 c) 5 040 e) 40 320
b) 10 080 d) 5 400

COMBINAÇÕES SIMPLES

Introdução:

Consideremos as retas determinadas pelos quatro pontos, conforme a figura.



Só temos 6 retas distintas ($\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AD}$) porque $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BA}, \ldots,$ $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ representam retas coincidentes.

Os agrupamentos {A, B}, {A, C} etc. constituem *subconjuntos* do conjunto formado por A, B, C e D.

Seja *I* um conjunto com n elementos. Chama-se *combinação simples* dos *n* elementos de *I*, tomados *p* a *p*, a qualquer subconjunto de *p* elementos do conjunto *I*.

Diferem entre si apenas pelos elementos componentes, e são chamados combinações simples dos 4 elementos tomados 2 a 2.

O número de combinações simples dos *n* elementos tomados *p* a *p* é indicado por $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$.

OBSERVAÇÃO: $C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p}$.

Fórmula:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},\ p \le n \quad e\ \{p, n\} \subset IN}$$

Aplicações

1) calcular:

a) $C_{7,1}$ b) $C_{7,2}$ c) $C_{7,3}$ d) $C_{7,4}$

Solução:

a) $C_{7,1} = \frac{7!}{1!6!} = \frac{7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 7$

b) $C_{7,2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 21$

c) $C_{7,3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 35$

d) $C_{7,4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

2) Quantos subconjuntos de 3 elementos tem um conjunto de 5 elementos?

$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 10$ subconjuntos

3) obter n, tal que $\frac{C_{n,3}}{C_{n,2}} = \frac{4}{3}$

Solução:

$$\frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{n!}}{3!(n-3)} \cdot \frac{2!(n-2)!}{\cancel{n!}} = \frac{4}{3} \therefore$$

$$\therefore \frac{2 \cdot (n-2)(n-3)!}{3 \cdot 2 \cdot (n-3)!} = \frac{4}{3} \therefore n-2 = 4$$

$\boxed{n = 6}$ convém

4) Obter n, tal que $C_{n,2} = 28$.

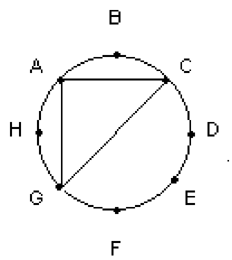
Solução:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 56 \therefore$$

$n^2 - n - 56 = 0$ → n = 8

n = -7 (não convém)

5) Numa circunferência marcam-se 8 pontos, 2 a 2 distintos. Obter o número de triângulos que podemos formar com vértice nos pontos indicados:



Solução:

Um triângulo fica identificado quando escolhemos 3 desses pontos, não importando a ordem. Assim, o número de triângulos é dado por:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6.5!}{3 \cdot 2.5!} = 56$$

6) Em uma reunião estão presentes 6 rapazes e 5 moças. Quantas comissões de 5 pessoas, 3 rapazes e 2 moças, podem ser formadas?

Solução:

Na escolha de elementos para formar uma comissão, não importa a ordem. Sendo assim :

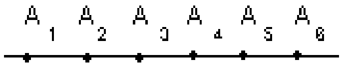
- escolher 3 rapazes: $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!}$ = 20 modos
- escolher 2 moças: $C_{5,2} = \frac{5!}{2!3!}$ = 10 modos

Como para cada uma das 20 triplas de rapazes temos 10 pares de moças para compor cada comissão, então, o total de comissões é $C_{6,3} \,.\, C_{5,2} = 200$.

7) Sobre uma reta são marcados 6 pontos, e sobre uma outra reta, paralela á primeira, 4 pontos.
a) Quantas retas esses pontos determinam?
b) Quantos triângulos existem com vértices em três desses pontos?

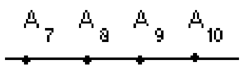
Solução:
a) $C_{10,2} - C_{6,2} - C_{4,2} + 2 = 26$ retas onde

$C_{6,2}$ é o maior número de retas possíveis de serem determinadas por seis pontos $C_{4,2}$ é o maior número de retas possíveis de serem determinadas por quatro pontos .



b) $C_{10,3} - C_{6,3} - C_{4,3} = 96$ triângulos onde

$C_{6,3}$ é o total de combinações determinadas por três pontos alinhados em uma das retas, pois pontos colineares não determinam triângulo.
$C_{4,3}$ é o total de combinações determinadas por três pontos alinhados da outra reta.



8) Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas das quais pelo menos 4 sejam pretas?

Solução:
As retiradas podem ser efetuadas da seguinte forma:
4 pretas e 3 brancas $\Rightarrow C_{6,4} \,.\, C_{10,3} = 1\,800$ ou
5 pretas e 2 brancas $\Rightarrow C_{6,5} \,.\, C_{10,2} = 270$ ou
6 pretas e1 branca $\Rightarrow C_{6,6} \,.\, C_{10,1} = 10$

Logo. 1 800 + 270 + 10 = 2 080 modos

Exercícios
1) Calcule:
a) $C_{8,1} + C_{9,2} - C_{7,7} + C_{10,0}$
b) $C_{5,2} + P_2 - C_{5,3}$
c) $A_{n,p} \,.\, P_p$

2) Obtenha *n*, tal que :
a) $C_{n,2} = 21$
b) $C_{n-1,2} = 36$
c) $5 \,.\, C_{n,n-1} + C_{n,n-3} = A_{n,3}$

3) Resolva a equação $C_{x,2} = x$.

4) Quantos subconjuntos de 4 elementos possui um conjunto de 8 elementos?

5) Numa reunião de 7 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podemos formar?

6) Um conjunto A tem 45 subconjuntos de 2 elementos. Obtenha o número de elementos de A

7) Obtenha o valor de p na equação: $\dfrac{A_{p,3}}{C_{p,4}} = 12$.

8) Obtenha x na equação $C_{x,3} = 3 \,.\, A_{x,2}$.

9) Numa circunferência marcam-se 7 pontos distintos. Obtenha:
a) o número de retas distintas que esses pontos determinam;
b) o número de triângulos com vértices nesses pontos;
c) o número de quadriláteros com vértices nesses pontos;
d) o número de hexágonos com vértices nesses pontos.

10) A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses. Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formadas?

11) Uma urna contém 10 bolas brancas e 4 bolas pretas. De quantos modos é possível tirar 5 bolas, das quais duas sejam brancas e 3 sejam pretas?

12) Em uma prova existem 10 questões para que os alunos escolham 5 delas. De quantos modos isto pode ser feito?

13) De quantas maneiras distintas um grupo de 10 pessoas pode ser dividido em 3 grupos contendo, respectivamente, 5, 3 e duas pessoas?

14) Quantas diagonais possui um polígono de n lados?

15) São dadas duas retas distintas e paralelas. Sobre a primeira marcam-se 8 pontos e sobre a segunda marcam-se 4 pontos. Obter:
a) o número de triângulos com vértices nos pontos marcados;
b) o número de quadriláteros convexos com vértices nos pontos marcados.

16) São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5, e somente 5, estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em três quaisquer dos 12 pontos?

17) Uma urna contém 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 4 azuis. De quantos modos podemos tirar 6 bolas das quais:
a) nenhuma seja azul
b) três bolas sejam azuis
c) pelo menos três sejam azuis

18) De quantos modos podemos separar os números de 1 a 8 em dois conjuntos de 4 elementos?

19) De quantos modos podemos separar os

números de 1 a 8 em dois conjuntos de 4 elementos, de modo que o 2 e o 6 não estejam no mesmo conjunto?

20) Dentre 5 números positivos e 5 números negativos, de quantos modos podemos escolher quatro números cujo produto seja positivo?

21) Em um piano marcam-se vinte pontos, não alinhados 3 a 3, exceto cinco que estão sobre uma reta. O número de retas determinadas por estes pontos é:
a) 180
b) 1140
c) 380
d) 190
e) 181

22) Quantos paralelogramos são determinados por um conjunto de sete retas paralelas, interceptando um outro conjunto de quatro retas paralelas?
a) 162
b) 126
c) 106
d) 84
e) 33

23) Uma lanchonete que vende cachorro quente o-ferece ao freguês: pimenta, cebola, mostarda e molho de tomate, como tempero adicional. Quantos tipos de cachorros quentes diferentes (Pela adição ou não de algum tempero) podem ser vendidos?
a) 12
b) 24
c) 16
d) 4
e) 10

24) O número de triângulos que podem ser traçados utilizando-se 12 pontos de um plano, não havendo 3 pontos em linha reta, é:
a) 4368
b) 220
c) 48
d) 144
e) 180

25) O time de futebol é formado por 1 goleiro, 4 defensores, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes. Um técnico dispõe de 21 jogadores, sendo 3 goleiros, 7 defensores, 6 jogadores de meio campo e 5 atacantes. De quantas maneiras poderá escalar sua equipe?
a) 630
b) 7 000
c) $2,26 \cdot 10^9$
d) 21000
e) n.d.a.

26) Sendo $5 \cdot C_{n,\, n-1} + C_{n,\, n-3}$, calcular n.

27) Um conjunto A possui n elementos, sendo $n \geq 4$. O número de subconjuntos de A com 4 elementos é:

a) $\dfrac{[n!]}{24(n-4)}$ c) $(n-4)!$ e) $4!$
b) $\dfrac{n!}{(n-4)}$ d) $n!$

28) No cardápio de uma festa constam 10 diferentes tipos de salgadinhos, dos quais apenas 4 serão servidos quentes. O garçom encarregado de arrumar a travessa e servi-la foi instruído para que a mesma contenha sempre só dois tipos diferentes de salgadinhos frios e dois diferentes dos quentes. De quantos modos diversos pode o garçom, respeitando as instruções, selecionar os salgadinhos para compor a travessa?
a) 90 d) 38
b) 21 e) n.d.a.
c) 240

29) Em uma sacola há 20 bolas de mesma dimensão: 4 são azuis e as restantes, vermelhas. De quantas maneiras distintas podemos extrair um conjunto de 4 bolas desta sacola, de modo que haja pelo menos uma azul entre elas?
a) $\dfrac{20!}{16!} - \dfrac{16!}{12!}$ d) $\dfrac{1}{4!} \cdot \left(\dfrac{20!}{16!} - \dfrac{16!}{12!}\right)$
b) $\dfrac{20!}{4!16!}$ e) n.d.a.
c) $\dfrac{20!}{16!}$

30) Uma classe tem 10 meninos e 9 meninas. Quantas comissões diferentes podemos formar com 4 meninos e 3 meninas, incluindo obrigatoriamente o melhor aluno dentre os meninos e a melhor aluna dentre as meninas?
a) $A_{10,4} \cdot A_{9,3}$ c) $A_{9,2} - A_{8,3}$ e) $C_{19,7}$
b) $C_{10,4} - C_{9,3}$ d) $C_{9,3} - C_{8,2}$

31) Numa classe de 10 estudantes, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão, De quantas maneiras distintas o grupo pode ser formado, sabendo que dos dez estudantes dois são marido e mulher e apenas irão se juntos?
a) 126 b) 98 c) 115 d) 165 e) 122

RESPOSTAS

Principio fundamental da contagem

1) 63	14) 24
2) 12	15) 90 pares e 120 ímpares
3) 20	16) 18
4) 72	17) 48
5) 6 760 000	18) 72
6) 45 697 600	19) 1 680
7) 216	20) 504
8) 180	21) 30
9) 360	22) 20
10) 2 520	23) 720
11) 120	24) 48
12) 4 536	25) 72
13) 60	26) 96

Arranjos simples

1) a) 8 b) 56 c) 336 d) 1680

2) a) 9 b) 89,6

3) a) s = {3} b) S = {4} c) S = {5}

Fatorial

1) e 2) e

3) a) 132 b) 43 c) 35 d) 330

4) a) n b) $\frac{n+2}{n+1}$ c) n + 2 d) 1 e) $\frac{5M-2}{M}$

5) n = 9 b) n = 5 c) n = 3 d) n = 6

6) a

7) a) S = {10} b) S = {3}

8) n = 5

9) n = 17

Permutações simples

1) a) 40 320 d) 720
b) 5 040 e) 4 320
c) 120 f) 11 520

2) 144
3) 72
4) 288
5) 120

Permutações simples com elementos repetidos

1) d 2) c 3) a 4) d 5) b

Combinações simples

1) a) 44 c) $\frac{n!p!}{(n-p)!}$
b) 2
2) a) n = 7 b) n = 10
c) n = 4
3) S = {3}
4) 70
5) 35
6) 10
7) p=5
8) S={20}
9) a) 21 c) 35
b) 35 d) 7
10) 140
11) 180
12) 252
13) 2 520
14) $\frac{n(n-3)}{2}$
15) a) 160 b) 168
16) 210
17) a) 28 c) 252
b) 224
18) 70
19) 55
20) 105
21) e
22) b
23) c
24) b
25) d
26) n =4
27) a
28) a
29) d
30) d
31) b

PROBABILIDADE

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Suponha que em uma urna existam cinco bolas vermelhas e uma bola branca. Extraindo-se, ao acaso, uma das bolas, é mais provável que esta seja vermelha. Isto irão significa que não saia a bola branca, mas que é mais fácil a extração de uma vermelha. Os casos *possíveis* seu seis:

E = {V, V, V, V, V, B}

Cinco são favoráveis á *extração* da bola vermelha. Dizemos que a *probabilidade* da extração de uma bola vermelha é $\frac{5}{6}$ e a da bola branca, $\frac{1}{6}$.

Se as bolas da urna fossem todas vermelhas, a extração de uma vermelha seria *certa* e de probabilidade igual a 1. Consequentemente, a extração de uma bola branca seria *impossível e* de probabilidade igual a zero.

Espaço amostral:

Dado um fenômeno aleatório, isto é, sujeito ás leis do acaso, chamamos *espaço amostral* ao conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrerem. Vamos indica-lo pela letra E.

EXEMPLOS:

Lançamento de um dado e observação da face voltada para cima:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima :

E = {C, R}, onde C indica cara e R coroa.

Lançamento de duas moedas diferentes e observação das faces voltadas para cima:

E = { (C, C), (C, R), (R, C), (R, R) }

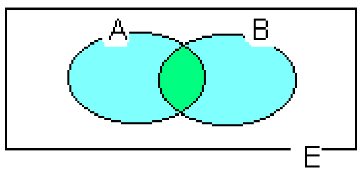
Evento:

Chama-se *evento* a qualquer subconjunto do espaço amostral. Tomemos, por exemplo, o lançamento de um dado :

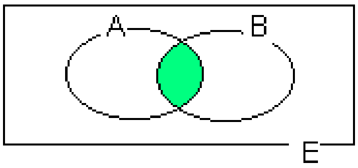
- ocorrência do resultado 3: {3}
- ocorrência do resultado par: {2, 4, 6}
- ocorrência de resultado 1 até 6: E (evento certo)
- ocorrência de resultado maior que 6 : ϕ (evento impossível)

Como evento é um conjunto, podemos aplicar-lhe as operações entre conjuntos apresentadas a seguir.

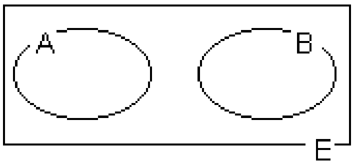
- *União de dois eventos* - Dados os eventos *A* e *B*, chama-se união de *A* e *B* ao evento formado pelos resultados de *A* ou de *B*, indica-se por A $\cup$ B.



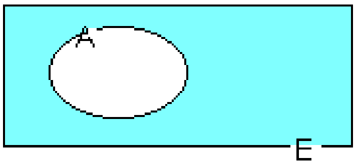
- *Intersecção de dois eventos* - Dados os eventos A e B, chama-se intersecção de A e B ao evento formado pelos resultados de A e de B. Indica-se por A $\cap$ B.



Se $A \cap B = \phi$, dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos, isto é, a ocorrência de um deles elimina a possibilidade de ocorrência do outro.



- *Evento complementar* – Chama-se evento complementar do evento A àquele formado pelos resultados que não são de A. indica-se por $\overline{A}$.



Aplicações

1) Considerar o experimento "registrar as faces voltadas para cima", em três lançamentos de uma moeda.
a) Quantos elementos tem o espaço amostral?
b) Escreva o espaço amostral.

Solução:

a) o espaço amostral tem 8 elementos, pois para cada lançamento temos duas possibilidades e, assim: 2 **.** 2 **.** 2 = 8.
b) E = { (C, C, C), (C, C, R), (C, R, C), (R, C, C), (R, R,C), (R, C, R), (C, R, R), (R, R, R) }

2) Descrever o evento "obter pelo menos uma cara no lançamento de duas moedas".

Solução:

Cada elemento do evento será representado por um par ordenado. Indicando o evento pela letra A, temos: A = {(C,R), (R,C), (C,C)}

3) Obter o número de elementos do evento "soma de pontos maior que 9 no lançamento de dois dados".

Solução:

O evento pode ser tomado por pares ordenados com soma 10, soma 11 ou soma 12. Indicando o evento pela letra S, temos:

S **=** { (4,6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)} $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ n(S) = 6 elementos

4) Lançando-se um dado duas vezes, obter o número de elementos do evento "número par no primeiro lançamento e soma dos pontos igual a 7".

Solução:

Indicando o evento pela letra *B*, temos:
B = { (2, 5), (4, 3), (6, 1)} $\Rightarrow$ n(B) = 3 elementos

Exercícios

1) Dois dados são lançados. O número de elementos do evento "produto ímpar dos pontos obtidos nas faces voltadas para cima" é:
a) 6 b) 9 c) 18 d) 27 e) 30

2) Num grupo de 10 pessoas, seja o evento "escolher 3 pessoas sendo que uma determinada esteja sempre presente na comissão". Qual o número de elementos desse evento?
a) 120 b) 90 c) 45 d) 36 e) 28

3) Lançando três dados, considere o evento "obter pontos distintos". O número de elementos desse evento é:
a) 216 b) 210 c) 6 d) 30 e) 36

4) Uma urna contém 7 bolas brancas, 5 vermelhas e 2 azuis. De quantas maneiras podemos retirar 4 bolas dessa urna, não importando a ordem em que são retiradas, sem recoloca-las?
a) 1 001 d) 6 006
b) 24 024 e) $\frac{14!}{7!5!2!}$
c) 14!

PROBABILIDADE

Sendo n(A) o número de elementos do evento ***A***, e n(E) o número de elementos do espaço amostral ***E*** ($A \subset E$), a probabilidade de ocorrência do evento A, que se indica por P(A), é o número real:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}}$$

OBSERVAÇÕES:

1) Dizemos que n(A) é o número de casos favoráveis ao evento ***A*** e n(E) o número de casos possíveis.
2) Esta definição só vale se todos os elementos do espaço amostral tiverem a mesma probabilidade.
3) $\overline{A}$ é o complementar do evento A.

Propriedades:

P_1	$P(E) = 1$	P_3	$0 \leq P(A) \leq 1$
P_2	$P(\phi) = 0$	P_4	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Aplicações

4) No lançamento de duas moedas, qual a probabilidade de obtermos cara em ambas?

Solução:

Espaço amostral:
E = {(C, C), (C, R), (R, C), (R,R)} $\Rightarrow$ n(E).= 4

Evento ***A*** : A = {(C, C)} $\Rightarrow$ n(A) =1

Assim: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{4}$

5) Jogando-se uma moeda três vezes, qual a probabilidade de se obter cara pelo menos uma vez?

Solução:

E = {(C, C, C), (C, C, R), (C, R, C), (R, C, C), (R, R, C), (R, C, R), (C, R, R), (R. R, R)} $\Rightarrow$ n(E)= 8

A = {(C, C, C), (C, C, R), (C, R, C), (R, C, C), (R, R, C), (R, C, R), (C, R, R) $\Rightarrow$ n(A) = 7

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{7}{8}$$

6) (Cesgranrio) Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. A probabilidade de que cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado é :

a) 2/5 c) 1/2 e) 2/3
b) 3/5 d) 1/3

Solução:

O número de elementos do espaço amostral é dado por : n(E) = $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$

O número de casos favoráveis é dado por n (A) = 2 . 2 . 2 = 8, pois em cada andar temos duas possibilidades para ocupa-lo. Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$ (alternativa ***a***)

7) Numa experiência, existem somente duas possibilidades para o resultado. Se a probabilidade de um resultado é $\frac{1}{3}$, calcular a probabilidade do outro, sabendo que eles são complementares.

Solução:

Indicando por A o evento que tem probabilidade $\frac{1}{3}$, vamos indicar por $\overline{A}$ o outro evento. Se eles são complementares, devemos ter:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + P(\overline{A}) = 1 \therefore$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = \frac{2}{3}}$$

8) No lançamento de um dado, qual a probabilidade de obtermos na face voltada para cima um número primo?

Solução:

Espaço amostral : E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ n(E) = 6

Evento *A* : A = {2, 3, 5} $\Rightarrow$ n(A) = 3

Assim: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

9) No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a 10?

Solução:

Considere a tabela, a seguir, indicando a soma dos pontos:

B \ A	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Da tabela: n(E) = 36 e n(A) = 3

Assim: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Exercícios

1) Jogamos dois dados. A probabilidade de obtermos pontos iguais nos dois é:

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{7}{36}$
b) $\frac{5}{36}$ d) $\frac{1}{36}$

2) A probabilidade de se obter pelo menos duas caras num lançamento de três moedas é;

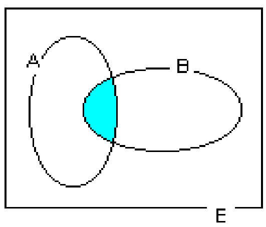
a) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$

ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

Sendo A e B eventos do mesmo espaço amostral E, tem-se que:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

"A probabilidade da união de dois eventos *A* e *B* é igual á soma das probabilidades de *A* e *B*, menos a probabilidade da intersecção de *A* com *B*."



Justificativa:

Sendo n (A $\cup$ B) e n (A $\cap$ B) o número de elementos dos eventos A $\cup$ B e A $\cap$ B, temos que:

n(A $\cup$ B) = n(A) +n(B) – n(A $\cap$ B) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \therefore$$

$\therefore$ P(A $\cup$ B) = P(A) + P(B) – P(A $\cap$ B)

OBSERVA ÇÃO:

Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto é: $A \cap B = \phi$, então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Aplicações

1) Uma urna contém 2 bolas brancas, 3 verdes e 4 azuis. Retirando-se uma bola da urna, qual a probabilidade de que ela seja branca ou verde?

Solução:

Número de bolas brancas : n(B) = 2
Número de bolas verdes: n(V) = 3
Número de bolas azuis: n(A) = 4

A probabilidade de obtermos uma bola branca ou uma bola verde é dada por:
$P(B \cup V) = P(B) + P(V) - P(B \cap V)$

Porém, $P(B \cap V) = 0$, pois o evento bola branca e o evento bola verde são mutuamente exclusivos.

Logo: $P(B \cup V) = P(B) + P(V)$, ou seja:
$P(B \cup V) = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \Rightarrow P(B \cup V) = \frac{5}{9}$

2) Jogando-se um dado, qual a probabilidade de se obter o número 4 ou um número par?

Solução:

O número de elementos do evento número 4 é n(A) = 1.

O número de elementos do evento número par é n(B) = 3.

Observando que $n(A \cap B) = 1$, temos:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \therefore P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

3) A probabilidade de que a população atual de um pais seja de 110 milhões ou mais é de 95%. A probabilidade de ser 110 milhões ou menos é 8%. Calcular a probabilidade de ser 110 milhões.

Solução:

Temos P(A) = 95% e P(B) = 8%.

A probabilidade de ser 110 milhões é $P(A \cap B)$. Observando que $P(A \cup B) = 100\%$, temos:
$P(A \text{ U } B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 100\% = 95\% + 8\% - P(A \cap B) \therefore$
$(A \cap B) = 3\%$

Exercícios

1) (Cescem) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento "retirada de uma bola" e considere os eventos;
A = a bola retirada possui um número múltiplo de 2
B = a bola retirada possui um número múltiplo de 5
Então a probabilidade do evento $A \cup B$ é:

a) $\frac{13}{20}$ c) $\frac{7}{10}$ e) $\frac{11}{20}$
b) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

2) (Santa casa) Num grupo de 60 pessoas, 10 são torcedoras do São Paulo, 5 são torcedoras do Palmeiras e as demais são torcedoras do Corinthians. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, a probabilidade de ele ser torcedor do São Paulo ou do Palmeiras é:
a) 0,40 c) 0,50 e) n.d.a.
b) 0,25 d) 0,30

3) (São Carlos) *S* é um espaço amostral, *A* e *B* eventos quaisquer em *S* e P(C) denota a probabilidade associada a um evento genérico *C* em *S*. Assinale a alternativa correta.
a) $P(A \cap C) = P(A)$ desde que C contenha A

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)}$$

b) $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B) – P(A \cap B)$
c) $P(A \cap B) < P(B)$
d) $P(A) + P(B) \leq 1$
e) Se P(A) = P(B) então A = B

4) (Cescem) Num espaço amostral (A; B), as probabilidades P(A) e P(B) valem respectivamente $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ Assinale qual das alternativas seguintes não é verdadeira.
a) $\overline{A} \cup B = S$ d) $\overline{A} \cup B = B$
b) $A \cup B = \phi$ e) $(A \cap B) \cup (A \cup B) = S$
c) $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B}$

5) (PUC) Num grupo, 50 pessoas pertencem a um clube *A*, 70 a um clube *B*, 30 a um clube *C*, 20 pertencem aos clubes *A* e *B*, 22 aos clubes *A* e *C*, 18 aos clubes *B* e *C* e 10 pertencem aos três clubes. Escolhida ao acaso uma das pessoas presentes, a probabilidade de ela:
a) Pertencer aos três Clubes é $\frac{3}{5}$;
b) pertencer somente ao clube *C* é zero;
c) Pertencer a dois clubes, pelo menos, é 60%;
d) não pertencer ao clube *B* é 40%;
e) n.d.a.

6) (Maringá) Um número é escolhido ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. A probabilidade de o número escolhido ser primo ou quadrado perfeito é:
a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{25}$ e) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{2}{25}$ d) $\frac{2}{5}$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Muitas vezes, o fato de sabermos que certo evento ocorreu modifica a probabilidade que atribuímos a outro evento. Indicaremos por P(B/A) a probabilidade do evento B, tendo ocorrido o evento A (probabilidade condicional de B em relação a A). Podemos escrever:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}}$$

Multiplicação de probabilidades:

A probabilidade da intersecção de dois eventos A e B é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro em relação ao primeiro.

Em símbolos:

Justificativa:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \Rightarrow P(B/A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}} \therefore$$

$$\therefore P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

Analogamente:
$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A/B)$

Eventos independentes:

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se: $P(A/B) = P(A)$ ou $P(B/A) = P(B)$

Da relação $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$, e se A e B forem independentes, temos:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}$$

Aplicações:

1) Escolhida uma carta de baralho de 52 cartas e sabendo-se que esta carta é de ouros, qual a probabilidade de ser dama?

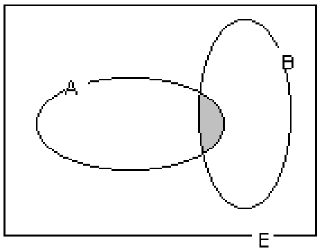
Solução:

Um baralho com 52 cartas tem 13 cartas de ouro, 13 de copas, 13 de paus e 13 de espadas, tendo uma dama de cada naipe.

Observe que queremos a probabilidade de a carta ser uma dama de ouros num novo espaço amostral modificado, que é o das cartas de ouros. Chamando de:

- evento **A:** cartas de ouros
- evento **B:** dama
- evento **A ∩ B** : dama de ouros

Temos: $\boxed{P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{13}}$



2) Jogam-se um dado e uma moeda. Dê a probabilidade de obtermos cara na moeda e o número 5 no dado.

Solução:

Evento *A* : A = {C} $\Rightarrow$ n(A) = 1
Evento *B* : B = { 5 } $\Rightarrow$ n (B) = 1

Sendo *A* e *B* eventos independentes, temos:

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \therefore$

$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

3) (Cesgranrio) Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho, e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e mostra a um jogador. A probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

Solução:

Evento A : cartão com as duas cores
Evento B: face para o juiz vermelha e face para o jogador amarela, tendo saído o cartão de duas cores

Temos:

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$, isto é, $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ (alternativa e)

Respostas:

Espaço amostral e evento
1) b 2) d 3) b 4) a

Probabilidade
1) c 2) b

Adição de probabilidades
1) d 2) b 3) a 4) b 5) b 6) e

GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO. PERÍMETRO.

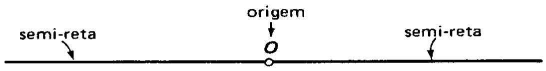
1.POSTULADOS

a) A reta é ilimitada; não tem origem nem extremidades.
b) Na reta existem infinitos pontos.

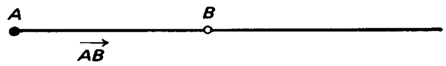
c) Dois pontos distintos determinam uma única reta *(AB)*.

2. SEMI-RETA

Um ponto O sobre uma reta divide-a em dois subconjuntos, denominando-se cada um deles semi-reta.



***Representação*:**



3. SEGMENTO

Sejam A e B dois pontos distintos sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Ficam determinadas as semi-retas: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

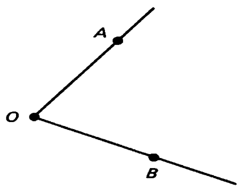
$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}}$$

A intersecção das duas semi-retas define o segmento $\overline{AB}$.

***Representação*: $\overline{AB}$**

4. ÂNGULO

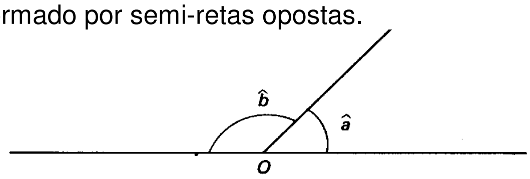
A união de duas semi-retas de mesma origem é um ângulo.



Representação:
$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$

5. ANGULO RASO

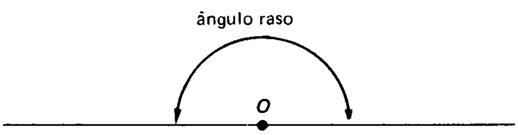
É formado por semi-retas opostas.



$\hat{a} + \hat{b}$ = 1 raso

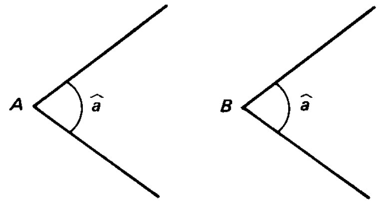
6. ANGULOS SUPLEMENTARES

São ângulos que determinam por soma um ângulo raso.



7. CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS

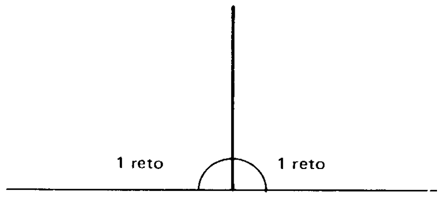
O conceito de congruência é primitivo. Não há definição. Intuitivamente, quando imaginamos dois ângulos coincidindo ponto a ponto, dizemos que possuem a mesma medida ou são congruentes (sinal de congruência: ≅).



$\hat{A} \cong \hat{B}$
ângulos congruentes

8. ÂNGULO RETO

Considerando ângulos suplementares e congruentes entre si, diremos que se trata de ângulos retos.

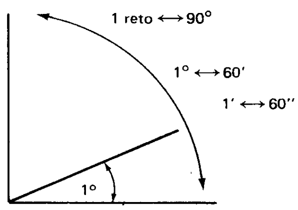


9. MEDIDAS

1 reto ↔ 90° (noventa graus)
1 raso ↔ 2 retos ↔ 180°

1° ↔ 60' (um grau - sessenta minutos)
1' ↔ 60" (um minuto - sessenta segundos)

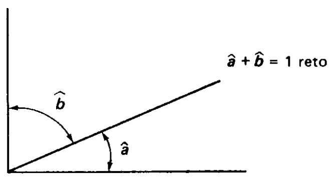
As subdivisões do segundo são: décimos, centésimos etc.



$$\boxed{90^{o} = 89^{o}\ 59'\ 60''}$$

10. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

São ângulos cuja soma é igual a um ângulo reto.



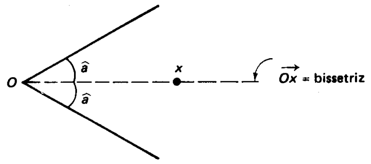
ângulos complementares

11. REPRESENTAÇÃO

x é o ângulo; (90° – x) seu complemento e (180° – x) seu suplemento.

12. BISSETRIZ

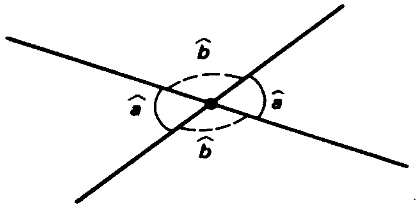
É a semi-reta que tem origem no vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes.



13. ANGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

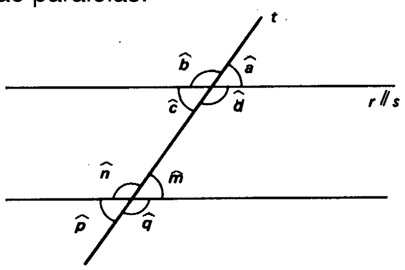
São ângulos formados com as semi-retas apostas duas a duas.

Ângulos apostos pelo vértice são congruentes (Teorema).



14. TEOREMA FUNDAMENTAL SOBRE RETAS PARALELAS

Se uma reta transversal forma com duas retas de um plano ângulos correspondentes congruentes, então as retas são paralelas.



$$\left.\begin{matrix}\hat{a} \cong \hat{m} \\ \hat{b} \cong \hat{n} \\ \hat{c} \cong \hat{p} \\ \hat{d} \cong \hat{q}\end{matrix}\right\}$$ **ângulos correspondentes congruentes**

Consequências:

a) ângulos alternos congruentes:

$\hat{d} \cong \hat{n} = 180^0$ (alternos $\quad \hat{a} \cong \hat{p}$ (alternos

$\hat{c} \cong \hat{m} = 180^0$ internos) $\quad \hat{b} \cong \hat{q}$ externos)

b) ângulos colaterais suplementares:

$$\left.\begin{matrix}\hat{a} + \hat{q} = 180^o \\ \hat{b} + \hat{p} = 180^o\end{matrix}\right\}(\textit{colaterais externos})$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{d} + \hat{m} = 180^o \\ \hat{c} + \hat{n} = 180^o\end{matrix}\right\}(\text{colaterais internos})$$

15. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine o complemento de 34°15'34".

Resolução:

89° 59' 60"
- 34° 15' 34"

55° 44' 26"

Resp.: 55° 44' 26"

2) As medidas 2x + 20° e 5x – 70° são de ângulos opostos pelo vértice. Determine-as.

Resolução:

2x + 20° = 5x – 70° ⇔

⇔ + 70° + 20° = 5x – 2x ⇔

⇔ 90° = 3x ⇔

$\boxed{x = 30°}$

Resp. : os ângulos medem 80º

3) As medidas de dois ângulos complementares estão entre si como 2 está para 7. Calcule-as.

Resolução: Sejam x e y as medidas de 2 ângulos complementares. Então:

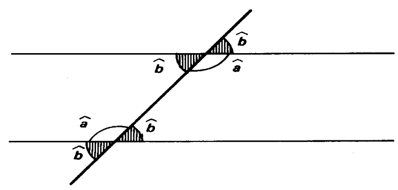
$$\begin{cases} x + y = 90^o \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 90^o \\ \dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{2}{7} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 90^o \\ \dfrac{x + y}{y} = \dfrac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 90^o \\ \dfrac{90^o}{y} = \dfrac{9}{7} \end{cases}$$

⇒ x = 20° e y = 70°

Resp.: As medidas são 20° e 70°.

4) Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam 8 ângulos. Sendo 320° a soma dos ângulos obtusos internos, calcule os demais ângulos.



Resolução:

De acordo com a figura seguinte, teremos pelo enunciado:

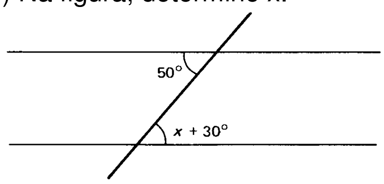
â + â = 320° ⇔ 2â = 320° ⇔ $\boxed{\hat{a} = 160°}$

Sendo b a medida dos ângulos agudos, vem:

$\hat{a} + \hat{b}$ = 180° ou 160° + $\hat{b}$ = 180° ⇒ $\hat{b}$ = 20°

Resp.: Os ângulos obtusos medem 160° e os agudos 20°.

5) Na figura, determine x.



Resolução: **Pelos ângulos alternos internos:**

x + 30° = 50° ⇒ $\boxed{x = 20°}$

16. TRIÂNGULOS

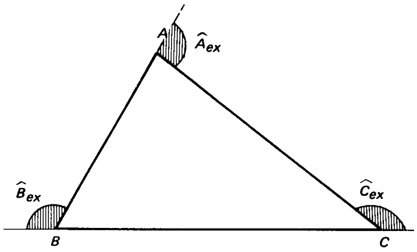
16.1 – Ângulos

$\Delta\ ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

$\overline{AB}; \overline{BC}; \overline{CA}$ são os lados

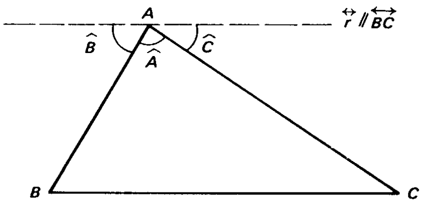
$\hat{A}; \hat{B}; \hat{C}$ são ângulos internos

$\hat{A}_{ex}; \hat{B}_{ex}; \hat{C}_{ex}$ são angulos externos



LEI ANGULAR DE THALES:

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$$



Consequências:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{A}_{ex} = 180° \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_{ex} = \hat{B} + \hat{C}$$

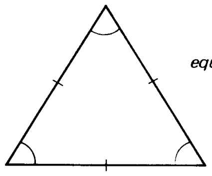
Analogamente:

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{B}_{ex} = \hat{A} + \hat{C} \\ \hat{C}_{ex} = \hat{B} + \hat{A} \end{array}}$$

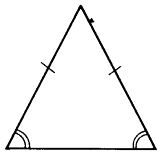
Soma dos ângulos externos:

$$\boxed{\hat{A}_{ex} + \hat{B}_{ex} + \hat{C}_{ex} = 360°}$$

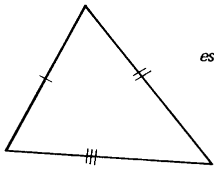
16.2 – Classificação



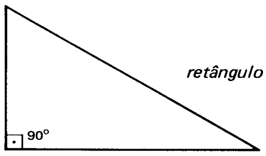
equilátero e equiângulo



isósceles e isoângulo



escaleno

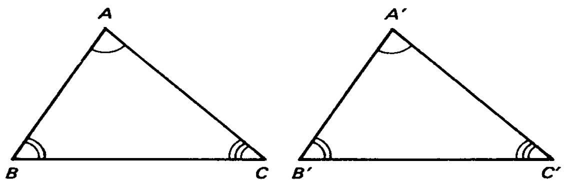


retângulo

Obs. : Se o triângulo possui os 3 ângulos menores que 90°, é acutângulo; e se possui um dos seus ângulos maior do que 90°, é obtusângulo.

16.3 - Congruência de triângulos

Dizemos que dois triângulos são congruentes quando os seis elementos de um forem congruentes com os seis elementos correspondentes do outro.



$$\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

16.4 - Critérios de congruência

LAL: Dois triângulos serão congruentes se possuírem dois lados e o ângulo entre eles congruentes.

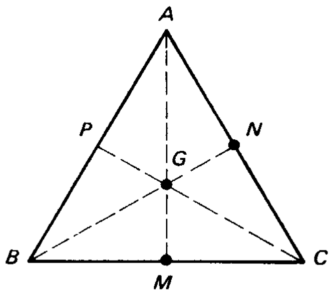
LLL: Dois triângulos serão congruentes se possuírem os três lados respectivamente congruentes.

ALA : Dois triângulos serão congruentes se possuírem dois ângulos e o lado entre eles congruentes.

LAA_O : Dois triângulos serão congruentes se possuírem dois ângulos e o lado oposto a um deles congruentes.

16.5 - Pontos notáveis do triângulo

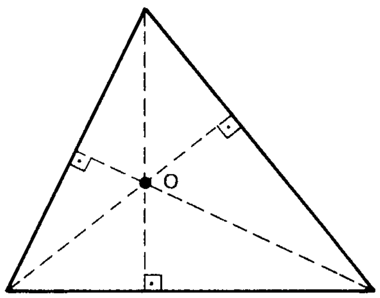
a) O segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto é denominado MEDIANA.
   O encontro das medianas é denominado BARICENTRO.



G é o baricentro

Propriedade: $\begin{cases} AG = 2GM \\ BG = 2GN \\ CG = 2GP \end{cases}$

b) A perpendicular baixada do vértice ao lado oposto é denominada ALTURA.
O encontro das alturas é denominado ORTOCENTRO.



c) INCENTRO é o encontro das bissetrizes internas do triângulo. (É centro da circunferência inscrita.)

d) *CIRCUNCENTRO é* o encontro das mediatrizes dos lados do triângulo, IÉ centro da circunferência circunscrita.)

16.6 – Desigualdades

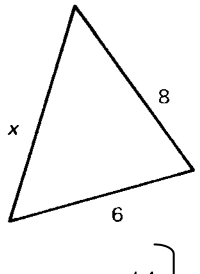
Teorema: Em todo triângulo ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-Versa.

Em qualquer triângulo cada lado é menor do que a soma dos outros dois.

16.7 - EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Sendo 8cm e 6cm as medidas de dois lados de um triângulo, determine o maior número inteiro possível para ser medida do terceiro lado em cm.

Resolução:

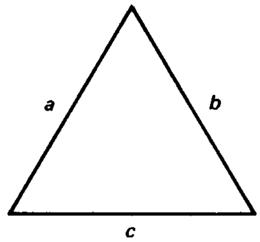


$$\left.\begin{array}{l} x < 6 + 8 \Rightarrow x < 14 \\ 6 < x + 8 \Rightarrow x > -2 \\ 8 < x + 6 \Rightarrow x > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 < x < 14$$

Assim, o maior numero inteiro possível para medir o terceiro lado é 13.

2) O perímetro de um triângulo é 13 cm. Um dos lados é o dobro do outro e a soma destes dois lados é 9 cm. Calcule as medidas dos lados.

Resolução:



$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 13 \\ a = 2b \\ a + b = 9 \end{array}\right\} 3b = 9$$

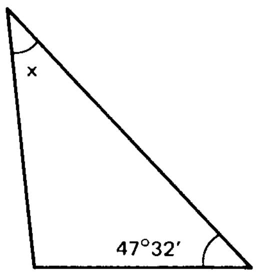
$\boxed{b = 3}$ e $\boxed{a = 6}$

Portanto: $\boxed{c = 4}$

As medidas são : 3 cm; 4 cm; 6 cm

3) Num triângulo isósceles um dos ângulos da base mede 47°32'. Calcule o ângulo do vértice.

Resolução:



$x + 47° \; 32' + 47° \; 32' = 180° \Leftrightarrow$

$x + 94° \; 64' = 180° \Leftrightarrow$

$x + 95° \; 04' = 180° \Leftrightarrow$

$x = 180° - 95° \; 04' \Leftrightarrow$

$x = 84° \; 56'$

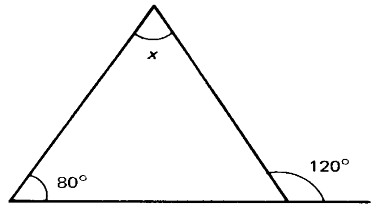
rascunho:

$$\begin{array}{r} 179° \; 60' \\ -\;95° \; 04' \\ \hline 84° \; 56' \end{array}$$

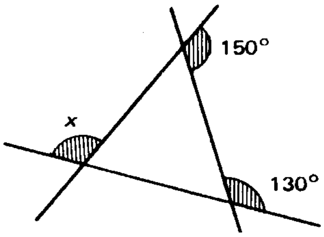
Resp. : O ângulo do vértice é 84°56'.

4) Determine x nas figuras:

a)



b)



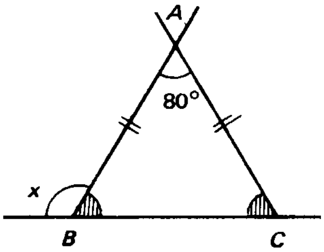
Resolução:

a) $80° + x = 120° \Rightarrow x = 40°$

b) $x + 150° + 130° = 360° \Rightarrow x = 80°$

5) Determine x no triângulo:

Resolução:



Sendo ΔABC isósceles, vem: $\widehat{B} \cong \widehat{C}$ e portanto:

$\widehat{B} \cong \widehat{C} = 50°$, pois $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

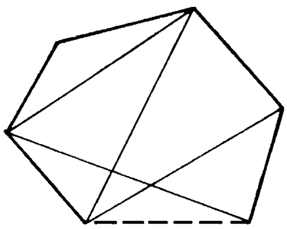
Assim, $x = 80° + 50° \Rightarrow x = 130°$

17. POLIGONOS

O triângulo é um polígono com o menor número de lados possível (n = 3),

De um modo geral dizemos; polígono de n lados.

17.1 - Número de diagonais



$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

(n = número de lados)

De 1 vértice saem (n – 3) diagonais.

De n vértices saem n . (n – 3) diagonais; mas, cada uma é considerada duas vezes.

Logo ; $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

17.2 - Soma dos ângulos internos

$$\boxed{S_i = 180°(n - 2)}$$

17.3 - Soma dos ângulos externos

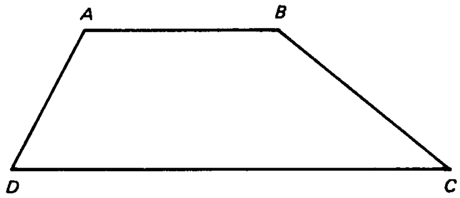
$$\boxed{S_e = 360°}$$

17.4 – Quadriláteros

a) Trapézio:

"Dois lados paralelos".

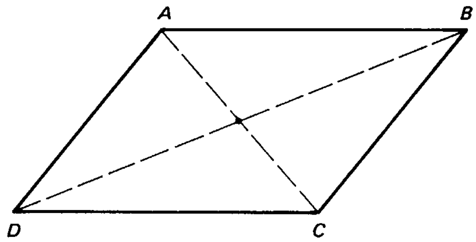
$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DC}$



b) Paralelogramo:

"Lados opostos paralelos dois a dois".

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$

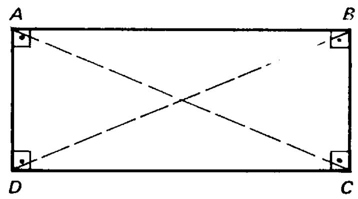


Propriedades:

1) Lados opostos congruentes.
2) Ângulos apostos congruentes.
3) Diagonais se encontram no ponto médio

c) Retângulo:

"Paralelogramo com um ângulo reto".

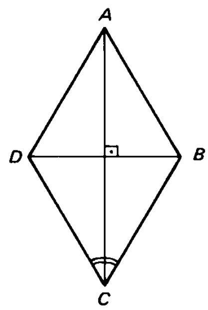


Propriedades:

1) Todas as do paralelogramo.
2) *Diagonais congruentes.*

d) Losango:

"Paralelogramo com os quatro lados congruentes".

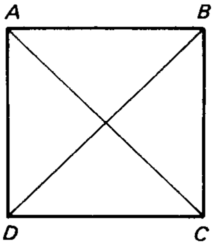


Propriedades:

1) Todas as do paralelogramo.
2) Diagonais são perpendiculares.
3) Diagonais são bissetrizes internas.

e) Quadrado:

"Retângulo e losango ao mesmo tempo".

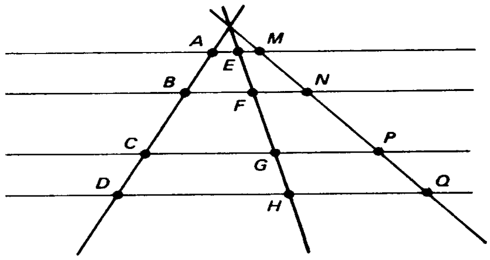


Obs: um polígono é regular quando é equiângulo e equilátero.

SEMELHANÇAS

1. TEOREMA DE THALES

Um feixe de retas paralelas determina sobre um feixe de retas concorrentes segmentos correspondentes proporcionais.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = \frac{MN}{PQ} = \ldots$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG} = \frac{MP}{NP} = \ldots$$

etc...

2. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dada a correspondência entre dois triângulos, dizemos que são semelhantes quando os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

3. CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

a) (AAL) Dois triângulos possuindo dois ângulos correspondentes congruentes são semelhantes.

b) (LAL) Dois triângulos, possuindo dois lados proporcionais e os ângulos entre eles formados congruentes, são semelhantes.

c) (LLL) Dois triângulos, possuindo os três lados proporcionais, são semelhantes.

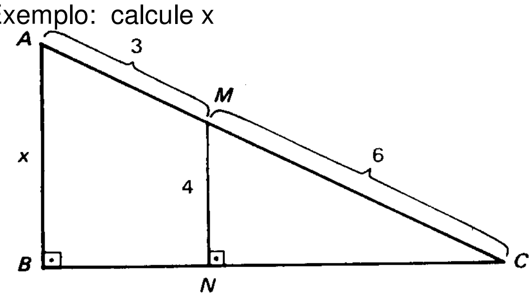
Representação:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

razão de semelhança

Exemplo: calcule x



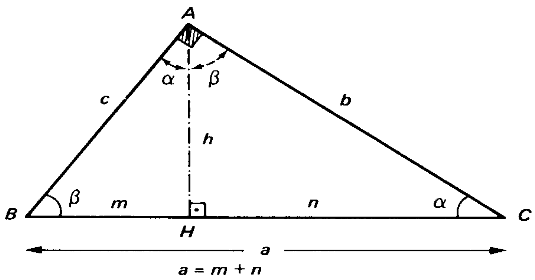
Resolução **:**

$$\Delta ABC \sim \Delta MNC \Leftrightarrow$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{6} \therefore x = 6$$

4. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Na figura:



A é vértice do ângulo reto (Â = 90°)

$$\hat{B} + \hat{C} = 90°$$

m = projeção do cateto c sobre a hipotenusa **a**
n = projeção do cateto b sobre a hipotenusa **a**
H é o pé da altura *AH = h.*
4.1 – Relações

a) $\Delta AHB \sim \Delta CAB \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB^2 = CB \cdot HB$

ou $\boxed{c^2 = a \cdot m}$ (I)

$\Delta AHC \sim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{}{BC} = \frac{HC}{AC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AC^2 = BC \cdot HC$

ou $\boxed{b^2 = a \cdot n}$ *(II)*

Cada cateto é média proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção sobre a mesma.

b) $\Delta AHB \sim \Delta CHA \Leftrightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AH^2 = CH \cdot HB$

ou $\boxed{h^2 = m \cdot n}$ *(III)*

A altura é média proporcional entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa

Consequências:

(I) + (II) vem:

$$c^2 + b^2 = am + an \Leftrightarrow$$

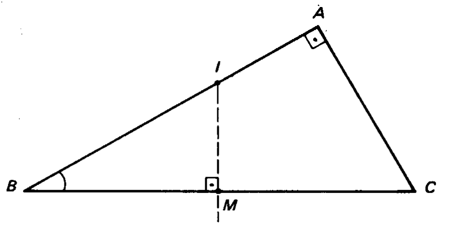
$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 = a\underbrace{(m+n)}_{a} \Leftrightarrow$$

4.2 - TEO $\Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2$

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Exemplo:

Na figura, M é ponto médio de $\overline{BC}$, Â = 90° e $\hat{M}$ = 90°. Sendo *AB = 5 e AC =* 2, calcule *AI.*



Resolução:

a) Teorema de Pitágoras:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{29} \cong 5{,}38 \quad \text{e} \quad \boxed{MB = \frac{\sqrt{29}}{2}}$$

b) $\Delta ABC \sim \Delta MBI \Leftrightarrow \dfrac{AB}{MB} = \dfrac{BC}{BI}$ ou

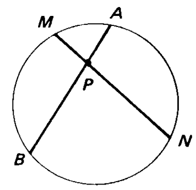
$$\frac{5}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{\sqrt{29}}{BI} \Leftrightarrow BI = \frac{29}{10} = 2{,}9$$

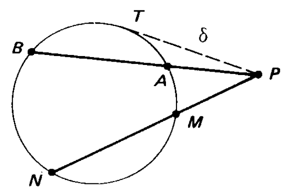
$\boxed{AI = 2{,}1}$

Logo, sendo AI = AB - BI, teremos:

AI = 5 - 2,9 $\Rightarrow$

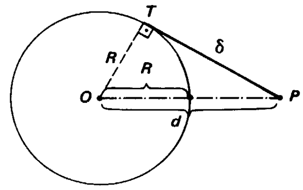
5. RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO





Nas figuras valem as seguintes relações:

δ^2 =*PA . PB=PM . PN*



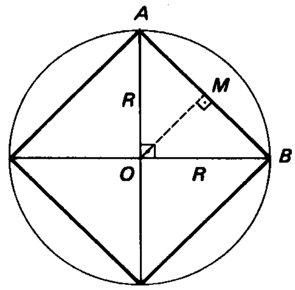
o número δ^2 é denominado *Potência* do ponto P em relação à circunferência.

$$\delta^2 = \left| d^2 - R^2 \right|$$

6. POLÍGONOS REGULARES

a) Quadrado:

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

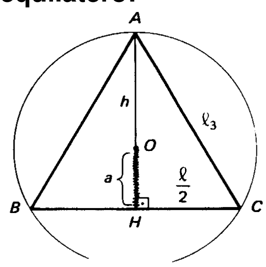


AB = lado do quadrado (ℓ_4)
OM = apótema do quadrado (a_4)
OA = OB = R = raio do círculo

Relações:

- $AB^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow$
- $OM = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow$ $\boxed{a_4 = \dfrac{\ell_4}{2}}$
- *Área do quadrado:* $\boxed{S_4 = \ell_4^2}$

b) Triângulo equilátero:



AC = ℓ_3 (lado do triângulo)
OA = R (raio do círculo)
OH = a (apótema do triângulo)

Relações:

- $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow$ $\boxed{h = \dfrac{\ell_3\sqrt{3}}{2}}$

(altura em função do lado)

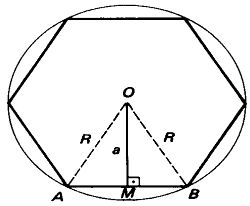
- AO = 2 OH $\Rightarrow$ $\boxed{R = 2a}$
(o raio é o dobro do apótema)

$$\boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$$

- (lado em função do raio)
- Área: $\boxed{S = \dfrac{\ell_3^2\sqrt{3}}{4}}$

(área do triângulo equilátero em função do lado)

c) Hexágono regular:



AB = ℓ_6 (lado do hexágono)
OA = OB = R (raio do círculo)
OM = a (apótema)

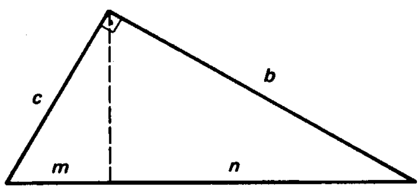
Relações:

- $\Delta\, OAB$ é equilátero $\Rightarrow$
- OM é altura $\Delta\, OAB \Rightarrow$ $\boxed{a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}}$
- Área:

$S = 6 \cdot S_{\Delta ABC} \Rightarrow$ $\boxed{S = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}}$

7. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Num triângulo retângulo os catetos medem 9 cm e 12 cm. Calcule as suas projeções sobre a hipotenusa.
Resolução*:*



c = 9 cm e b = 12 cm

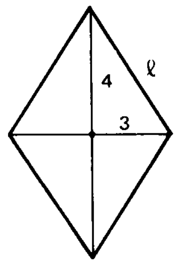
a) Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow$ $\boxed{a = 15 \text{ cm}}$

b) $C^2 = a \cdot m \Rightarrow 9^2 = 15 \cdot m \Rightarrow$ $\boxed{m = 5{,}4}$

c) $b^2 = a \cdot n \Rightarrow 12^2 = 15 \cdot n \Rightarrow$ $\boxed{n = 9{,}6}$

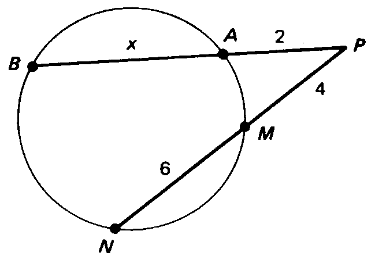
2) As diagonais de um losango medem 6m e 8m. Calcule o seu perímetro:
Resolução:



$\ell^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow$ $\boxed{\ell = 5 \text{ m}}$

O perímetro é: $\boxed{P = 4 \times 5 \text{ m} = 20 \text{ m}}$

3) Calcule *x* na figura:



Resolução:
PA . PB = PM . PN $\Rightarrow$ 2. (2 + x) = 4 X 10 $\Leftrightarrow$
4 + 2 x = 40 $\Leftrightarrow$ 2 x = 36 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x=18}$

4) Calcule a altura de um triângulo equilátero cuja área é $9\sqrt{3}$ m²:
Resolução:

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \therefore \boxed{\ell = 6 \text{ m}}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \therefore \boxed{h = 3\sqrt{3} \text{ m}}$$

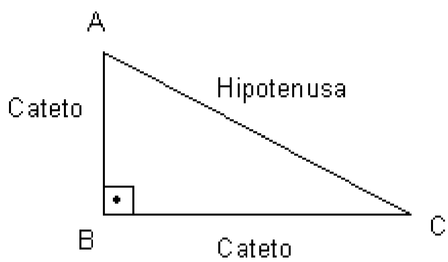
$$A_\ell = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$

$$A_T = 2 \cdot \pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Relembrando: Triângulo retângulo é todo triângulo que possui um ângulo interno reto. (= 90º)

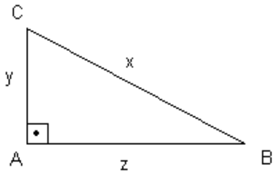


Obs: Num triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa** e os lados adjacentes ao ângulo reto são chamados **catetos.**

Teorema de Pitágoras

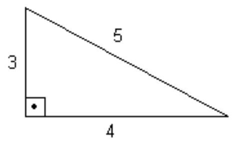
Enunciado: Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Exemplo:



$$\boxed{x^2 = y^2 + z^2}$$

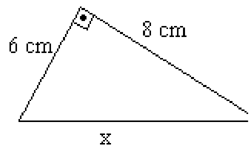
Exemplo numérico:



$5^2 = 3^2 + 4^2$
$5^2 = 9 + 16$
$5^2 = 25$

Exercícios:

1) Num triângulo retângulo os catetos medem 8 cm e 6 cm; a hipotenusa mede:

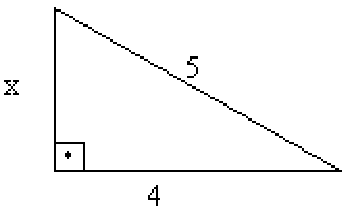


a) 5 cm
b) 14 cm
c) 100 cm
d) 10 cm

2) Num triângulo retângulo os catetos medem 5 cm e 12 cm. A hipotenusa mede:

a) 13cm b) 17 cm c) 169 cm d) 7 cm

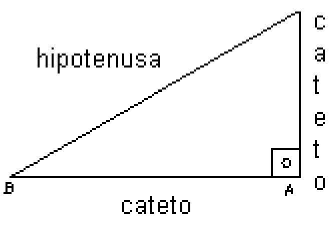
3) O valor de x na figura abaixo é:



Respostas: 1) d 2) a 3) x = 3

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

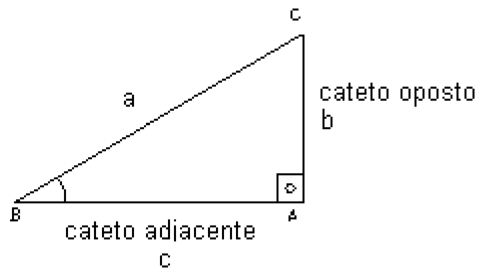
Vamos observar o triângulo retângulo ABC (reto em A).



Nos estudos que faremos nesta unidade, se faz necessário diferenciar os dois catetos do triângulo. Usamos para isso a figura que acabamos de ver.

Tomando como referência o ângulo E. dizemos que:

- $\overline{AC}$ é o cateto oposto de B:
- $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo B.

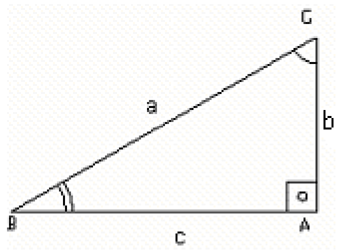


Tomando como referência o ângulo C, dizemos que:

- $\overline{AC}$ o cateto adjacente ao ângulo C;
- $\overline{AB}$ é o cateto oposto ao ângulo C.

Razões trigonométricas

Num triângulo retângulo, chama-se seno de um ângulo agudo o número que expressa a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.



O seno de um ângulo o indica-se por sen α.

$$\text{sen } B = \frac{\text{medida do cateto oposto a B}}{\text{medida da hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } C = \frac{\text{medida do cateto oposto a C}}{\textit{medida} \text{ da hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{c}{a}$$

Num triângulo retângulo, chama-se cosseno de um ângulo agudo o número que expressa a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa.

O cosseno de um ângulo a indica-se por cos α.

$$\cos B = \frac{\text{medida do cateto adjacente a B}}{\text{medida da hipotenusa}} \Rightarrow \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\cos C = \frac{\text{medida do cateto adjacente a C}}{\text{medida da hipotenusa}} \Rightarrow \cos C = \frac{b}{a}$$

Num triângulo retângulo chama-se tangente de um ângulo agudo o número que expressa a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

A tangente de um ângulo a indica-se por tg α

$$\text{tg } C = \frac{\text{cateto oposto a C}}{\textit{cateto} \text{ adjacente a C}} \Rightarrow \text{tg } C = \frac{c}{b}.$$

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NUM TRIÂN-

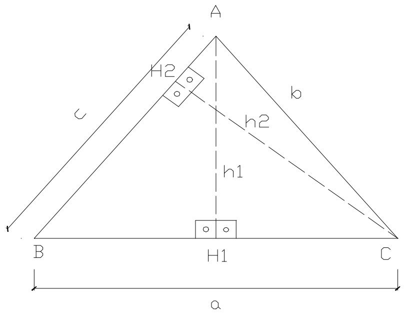
GULO QUALQUER

No triângulo da figura destacamos:

- h_1 : medida de altura relativa ao lado BC:
- h_2 : medida da altura relativa ao lado AB,

no Δ retângulo ABH_1 (H_1 é reto):

$$\text{sen } B = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen} B$$



No Δ retângulo ACH_1 (H_1 é reto):

$$\text{sen } C = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot sen C$$

Comparando 1 e 2. temos:

$$c \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } C \Rightarrow \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

No Δ retângulo BCH_2 (H é reto):

$$\text{sen } B = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen } B$$

No Δ retângulo ACH_2 (H é reto):

$$\text{sen } A = \frac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b \cdot \text{sen } A$$

Comparando 4 e 5, temos:

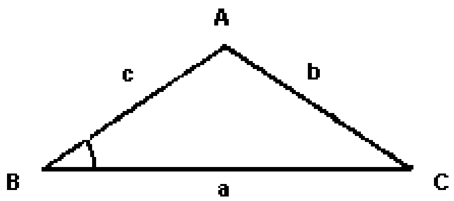
$$a \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } A \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

Comparando 3 e 5. temos:

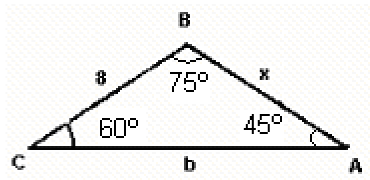
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Observação: A expressão encontrada foi desenvolvida a partir de um triângulo acutângulo. No entanto, chegaríamos à mesma expressão se tivéssemos partido de qualquer triângulo. Daí temos a lei dos senos:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}}$$



Exemplo: No triângulo da figura calcular a medida x:



Resolução:

Pela lei dos senos:

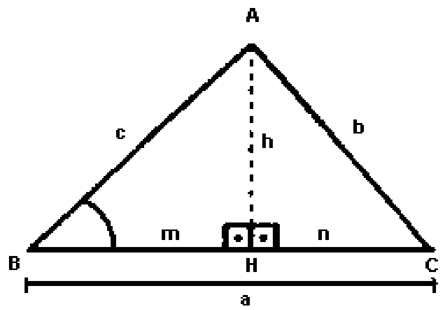
$$\frac{8}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 60°} \Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{`}x = \frac{8\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{6}$$

LEI DOS COSENOS

1. No triângulo acutângulo ABC, temos $b^2 = a^2 + c^2 - 2am$

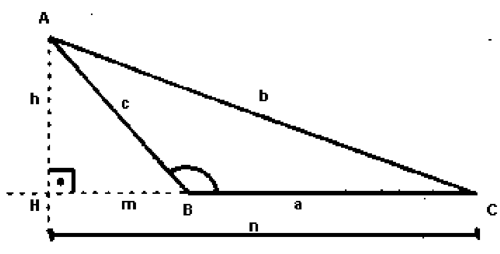


No triângulo retângulo ABH. temos: $\cos B = \frac{m}{c} \Rightarrow$ $m = C \cdot \cos b$

Substituindo 2 em 1: $\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$

A expressão foi mostrada para um triângulo acutângulo. Vejamos, agora, como ela é válida, também. *para os* triângulos obtusângulos:

No triângulo obtusângulo ABC, temos: $b^2 = a^2 + c^2 + 2am$



No triângulo retângulo AHB. temos: $\cos(180^{\circ} - B) = \frac{m}{c}$

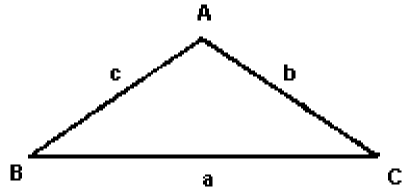
Como $\cos(180^{\circ} - B) = -\cos B$, por uma propriedade não provada aqui, temos que:

$$-\cos B = \frac{m}{c} \Rightarrow m = -c \cdot \cos B$$

Substituindo 2 em 1, temos:
$b^2 = a^2 + c^2 + 2 \, . \, a \, .(-c \, . \cos B)$

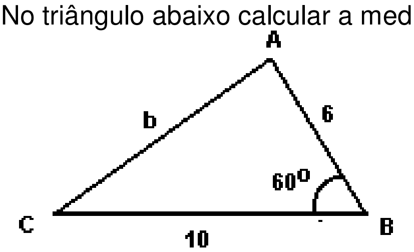
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \, a \, c \, . \cos B$

Dai a lei dos cosenos:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \, b \, . \, c \, . \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \, a \, . \, c \, . \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \, a \, . \, b \, . \cos C$

Exemplo:
No triângulo abaixo calcular a medida de **b**



Resolução: Aplicando ao triângulo dado a lei dos cosenos:
$b^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \, . \, 10 \, . \, 6 \, . \cos 60^\circ$

$b^2 = 100 + 36 - 120 \, . \, \frac{1}{2}$

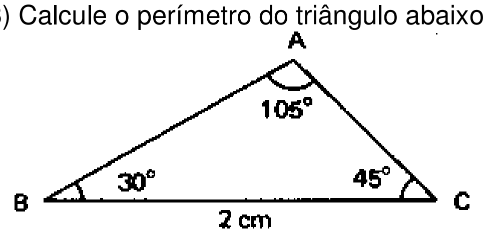
$b^2 = 76 \Rightarrow b = \sqrt{76} \Rightarrow b = 2\sqrt{19}$

Exercícios
Resolva os seguintes problemas:

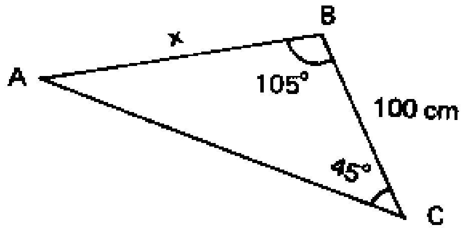
1) Num triângulo ABC, calcule *b* e *c*, sendo $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ e a = 2cm

2) Num triângulo ABC, calcule $\hat{A}$ e $\hat{C}$, sendo $\hat{B} = 105^\circ$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm e $c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ cm.

3) Calcule o perímetro do triângulo abaixo:



4) Calcule x na figura:



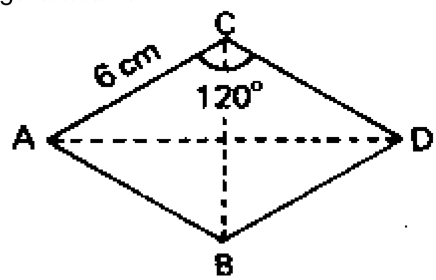
5) Calcule $\hat{A}$ e $\hat{C}$ num triângulo ABC onde b = 1, $c = \sqrt{3} + 1$ e $\hat{B} = 15^\circ$.

6) Calcule a num triângulo ABC, onde b = 4 cm, $c = \sqrt{3}$ cm e $\hat{A} = 30^\circ$.

7) Calcule as diagonais de um paralelogramo cujos lados medem 6cm e $\sqrt{2}$ cm e formam um ângulo de 45°.

8) Calcule a área de um triângulo ABC, sabendo que o lado $\overline{AB}$ mede 2cm, o lado $\overline{BC}$ mede 5cm e que esses lados formam entre si um ângulo de 30°.

9) Calcule a medida da diagonal maior do losango da figura abaixo:



Respostas
1) $b = 2\sqrt{2}$ cm, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ cm
2) $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$
3) $(2\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm
4) $x = 100\sqrt{2}$ cm
5) $\hat{C} = 45^\circ$; $\hat{A} = 120^\circ$
6) $a = \sqrt{7}$ cm
7) $d_1 = \sqrt{26}$; $d_2 = \sqrt{50}$
8) 2,5 cm^2
9) $\sqrt{108}$ cm

ÁREA DAS FIGURAS PLANAS

RETÂNGULO

A = b . h

A = área b = base h = altura

Perímetro: 2b + 2h
Exemplo 1

Qual a área de um retângulo cuja altura é 2 cm e seu perímetro 12 cm?

Solução: **A = b. h**

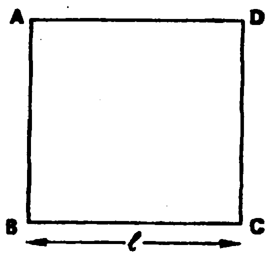
$$h = 2\text{ cm}$$
$$2 + b + 2 + b = 12$$
$$2b + 4 = 12$$
$$2b = 12 - 4$$
$$2b = 8$$
$$b = 8 \div 2 = 4$$
$$b = 4\text{cm}$$
$$A = 4 \cdot 2$$
$$A = 8\text{ cm}^2$$

QUADRADO

PERÍMETRO: L + L + L + L = 4L

Área do quadrado:

$$\boxed{A = \ell \cdot \ell = \ell^2}$$



Exemplo 2

Qual a área do quadrado de 5 cm de lado?

Solução: $A = \ell^2$

$\ell = 5$ cm

$A = 5^2$

$A = 25\text{ cm}^2$

PARALELOGRAMO

A = área do paralelogramo:

$$\boxed{\mathbf{A = B \cdot H}}$$

Perímetro: 2b + 2h

Exemplo 3

A altura de um paralelogramo é 4 cm e é a metade de sua base. Qual é suá área ?

Solução: $A = b \cdot h$

$h = 4$cm

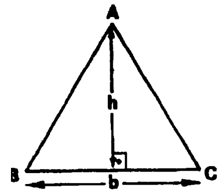
$b = 2 \cdot h$

$b = 2 \cdot 4 = 8$cm

$A = 8 \cdot 4 \qquad A = 32\text{ m}^2$

TRIÂNGULO

Perímetro: é a soma dos três lados.



Área do triângulo:

$$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

Exemplo 4:

A altura de um triângulo é 8 cm e a sua base é a metade da altura. Calcular sua área.

Solução: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$h = 8$cm

$b = \dfrac{h}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ cm

$A = \dfrac{8 \cdot 4}{2}$

$A = 16\text{ m}^2$

TRAPÉZIO

Perímetro: B + b + a soma dos dois lados.

Área do trapézio:

B = base maior

b = base menor

h = altura

Exemplo 5:

Calcular a área do trapézio de base maior de 6 cm, base menor de 4 cm. e altura de 3 cm.

Solução:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

B = 6 cm

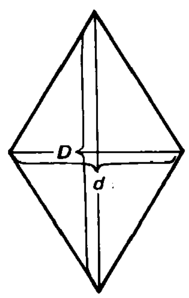
b = 4 cm

h = 3 cm

$$A = \frac{(6 + 4) \cdot 3}{2}$$

$A = 15\text{ cm}^2$

LOSANGO



D= diagonal maior
d = diagonal menor
Perímetro = é a soma dos quatro lados.
Área do losango:

$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Exemplo 6:
Calcular a área do losango de diagonais 6 cm e 5 cm.

Solução: $A = \frac{D \cdot d}{2}$

$A = \frac{6 \cdot 5}{2}$

$A = 15\ cm^2$

CIRCULO

Área do círculo:

$$\boxed{A = \pi R^2}$$

A = área do círculo
R = raio
$\pi = 3{,}14$

Exemplo 7
O raio de uma circunferência é 3 cm. Calcular a sua área.

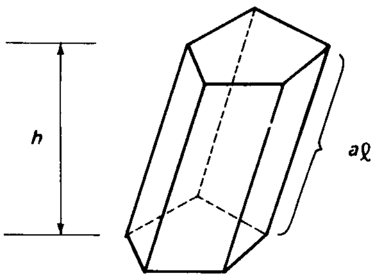
$A = \pi R^2$
$A = 3{,}14 \cdot 3^2$
$A = 3{,}14 \cdot 9$
$A = 28{,}26\ cm^2$

Geometria no Espaço

1. PRISMAS

São sólidos que possuem duas faces apostas paralelas e congruentes denominadas *bases.*

a_ℓ = arestas laterais
h = altura (distância entre as bases)



Cálculos:
A_b = área do polígono da base.

A_ℓ = soma das áreas laterais.

$\boxed{A_T = A_\ell + 2A_b}$ (área total).

$\boxed{V = A_b \cdot h}$ (volume)

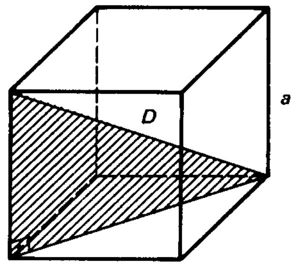
1.1 – Cubo

O cubo é um prisma onde todas as faces são quadradas.

$\boxed{A_T = 6 \cdot a^2}$ (área total)

$\boxed{V = a^3}$ (volume)

a = aresta

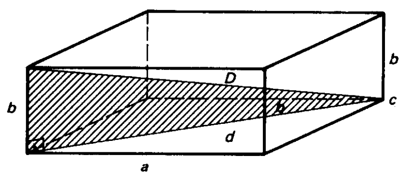


Para o cálculo das diagonais teremos:

$\boxed{d = a\sqrt{2}}$ (diagonal de uma face)

$\boxed{D = a\sqrt{3}}$ (diagonal do cubo)

1.2 - Paralelepípedo reto retângulo



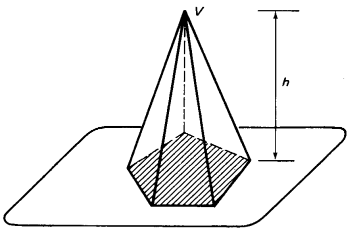
dimensões *a, b, c*

$\boxed{A_T = 2\ (ab + ac + bc)}$ (área total)

$\boxed{V = abc}$ (volume)

$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (diagonal)

2. PIRÂMIDES
São sólidos com uma base plana e um vértice fora do plano dessa base.



Para a pirâmide temos:

A_b = área da base

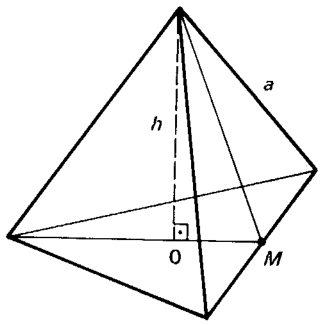
A_ℓ = álea dos triângulos faces laterais

($\boxed{A_T = A_\ell + A_b}$ (área total)

$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$ (volume)

2.1 - Tetraedro regular

É a pirâmide onde todas as faces são triângulos equiláteros.



Tetraedro de aresta *a* :

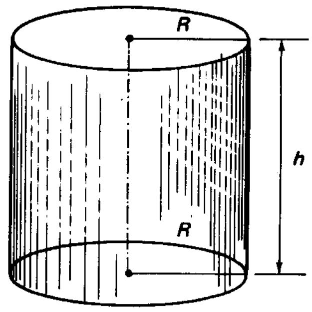
$\boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$ (altura)

$\boxed{A_T = a^2\sqrt{3}}$ (área total)

$\boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$ (volume)

3. CILINDRO CIRCULAR RETO

As bases são paralelas e circulares; possui uma superfície lateral.



$\boxed{A_b = \pi R^2}$ (área da base)

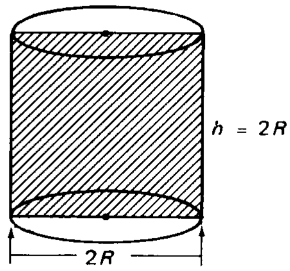
$\boxed{A_\ell = 2\pi R \cdot h}$ (área lateral)

$\boxed{A_T = 2A_b + A_\ell}$ (área total)

$\boxed{V = A_b \cdot h}$ (volume)

3.1 - Cilindro equilátero

Quando a secção meridiana do cilindro for quadrada, este será *equilátero.*



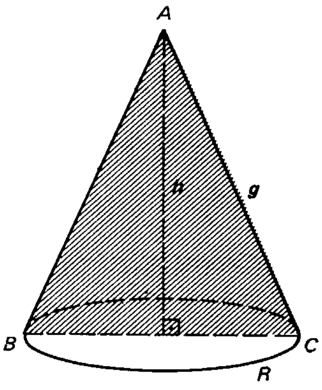
Logo:

$$A_\ell = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$
$$A_T = 2 \cdot \pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$$
$$V = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

4. CONE CIRCULAR RETO

g é geratriz.

Δ *ABC é* secção meridiana.



$g^2 = h^2 + R^2$

$A_\ell = \pi Rg$ (área lateral)

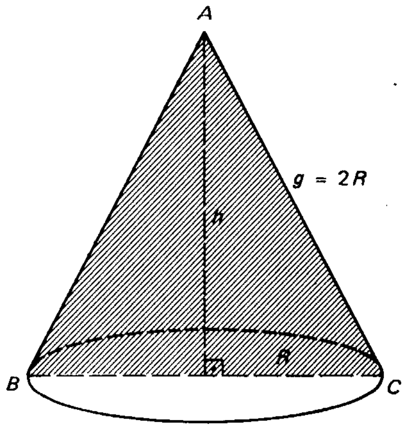
$A_b = \pi R^2$ (área da base)

$A_T = A_\ell + A_b$ (área total)

$\boxed{v = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}$ (volume)

4.1 - Cone equilátero

Se o Δ *ABC* for equilátero, o cone será denominado *equilátero.*



$h = R\sqrt{3}$ (altura)

$A_b = \pi R^2$ (base)

$A_\ell = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$ (área lateral)

$A_T = 3\pi R^2$ (área total)

$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^3 \sqrt{3}}$ (volume)

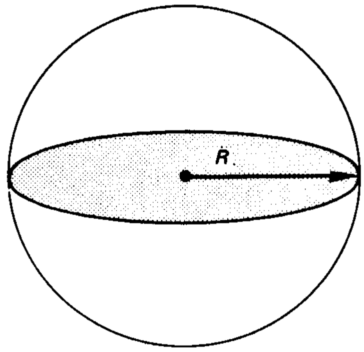
5. ESFERA

Perímetro do círculo maior: 2π R

Área da superfície: 4π R^2

Volume: $\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Área da secção meridiana: π R^2.



EXERCICIOS PROPOSTOS 1

1) Os 3/4 do valor do suplemento de um angulo de 60° são:
a) 30° b) 70º c) 60º d) 90º e) 100º

2) A medida de um ângulo igual ao dobro do seu complemento é:
a) 60° b) 20º c) 35º d) 40º e) 50°

3) O suplemento de 36°12'28" é:
a) 140º 27'12" b) 143°47'32"
c) 143°57'42" d) 134°03'03"
e) n.d.a.

4) número de diagonais de um polígono convexo de 7 lados é:
a) 6 b) 8 c) 14 d) 11 e) 7

5) O polígono que tem o número de lados igual ao número de diagonais é o:
a) quadrado b) pentágono
c) hexágono d) de15 lados
e) não existe

6) O número de diagonais de um polígono convexo é o dobro do número de vértices do mesmo. Então o número de lados desse polígono é:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

7) A soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a:
a) 180° b) 90° c) 360°
d) 540° e) 720°

8) Um polígono regular tem 8 lados; a medida de um dos seus ângulos internos é:
a) 135° b) 45° c) 20°
d) 90° e) 120°

9) O encontro das bissetrizes internas de um triângulo é o:

a) bicentro
b) baricentro
c) incentro
d) metacentro
e) n.d.a.

10) As medianas de um triângulo se cruzam num ponto, dividindo-se em dois segmentos tais que um deles é:
a) o triplo do outro
b) a metade do outro
c) um quinto do outro
d) os $\frac{2}{3}$ do outro
e) n.d.a.

11) Entre os.critérios abaixo, aquele que não garante a congruência de triângulos é:
a) LLL b) ALA c) LAA_O d) AAA
e) LAL

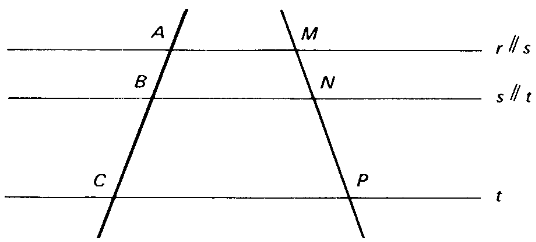
12) O menor valor inteiro para o terceiro lado de um triângulo, cujos outros dois medem 6 e 9, será:
a) 4 b) 10 c) 6 d) 7 e) 1

13) Num paralelogramo de perímetro 32cm e um dos lados10cm, a medida para um dos outros lados é:
a) 6 cm b) 12 cm c) 20 cm
d) 22 cm e) 5 cm

RESPOSTAS AOS EXERCICIOS PROPOSTOS

1) d	6) e	11) d
2) a	7) d	12) a
3) b	8) a	13) a
4) c	9) c	
5) b	10) b	

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 2



1) Na figura
AB = 4 cm *BC* = 6 cm MN = 8 cm
Então, NP vale:
a) 10 cm b) 8 cm c) 1 2 cm d) 6 cm
e) 9 cm

2) Com as retas suportes dos lados *(AD e BC)* não paralelos do trapézio *ABCD,* construímos o ΔABE. Sendo *AE* = 12 cm; *AD* = 5 cm; *BC = 3* cm. O valor de *BE* é:
a) 6,4cm b) 7,2 cm c) 3,8 cm d) 5,2 cm e) 8,2cm

3) O lado *AB* de um ΔABC mede 16 cm. Pelo ponto D pertencente ao lado *AB,* distante 5 cm de A, constrói-se paralela ao lado *BC* que encontra o lado *AC* em E a 8 cm de A. A medida de *AC* é:
a) 15,8 cm b) 13,9 cm c) 22,6 cm
d) 25,6 cm e) 14 cm

4) A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois na razão 3/4. Sendo 21cm e 42 cm as medidas desses dois lados. O maior dos segmentos determinado pela paralela mede:
a) 9cm b) 12cm c) 18 cm
d) 25 cm e) 24 cm

5) Num trapézio os lados não paralelos prolongados determinam um triângulo de lados 24 dm e 36 dm. O menor dos lados não paralelos do trapézio mede 10 dm. O outro lado do trapézio mede:
a) 6 dm b) 9 dm c) 10 dm
d) 13 dm e) 15 dm

6) Num triângulo os lados medem 8 cm; 10 cm e 15 cm. O lado correspondente ao menor deles, num segundo triângulo semelhante ao primeiro, mede 16cm. O perímetro deste último triângulo é:
a) 60 cm b) 62 cm c) 66 cm
d) 70 cm e) 80 cm

7) Dois triângulos semelhantes possuem os seguintes perímetros: 36 cm e 108 cm. Sendo 12 cm a medida de um dos lados do primeiro, a medida do lado correspondente do segundo será:
a) 36 cm b) 48 cm c) 27 cm
d) 11 cm e) 25 cm

8) A base e a altura de um retângulo estão na razão $\frac{12}{5}$. Se a diagonal mede 26cm, a base medida será:
a) 12 cm b) 24 cm c) 16 cm
d) 8 cm e) 5 cm

9) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo mede 14,4 dm e a projeção de um dos catetos sobre a mesma 10,8 dm. O perímetro do triângulo é:
a) 15 dm b) 32 dm c) 60 dm
d) 72 dm e) 81 dm

10) A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm, mede:
a) 4,61cm b) 3,12 cm c) 8,1 cm
d) 13,2 cm e) 4 cm

11) Duas cordas se cruzam num círculo. Os segmentos de uma delas medem 3 cm e 6 cm; um dos segmentos da outra mede 2 cm. Então o outro segmento medirá:
a) 7 cm b) 9 cm c) 10 cm
d) 11 cm e) 5 cm

RESPOSTAS AOS EXERCICIOS PROPOSTOS

1) c	5) e	9) d
2) b	6) c	10) a
3) d	7) a	11) b
4) e	8) b	

MATRIZES

Conceito

Matrizes formam um importante conceito matemático, de especial uso n transformações lineares. Não é o propósito de o estudo de sta página a teoria dessas transformações, mas apenas alguns fundamentos e operações básicas com matrizes que as representam.

Uma matriz $A_{m\times n}$ pode ser entendida como um conjunto de m×n (m multiplicado por n) números ou variáveis dispostos em m linhas e n colunas e destacados por colchetes conforme abaixo:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \\ . \\ .a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Portanto, para a matriz da Figura 02, de 2 linhas e 3 colunas,

$a_{11} = 4$ $a_{12} = 0$ $a_{13} = 9$

$a_{21} = 1$ $a_{22} = 7$ $a_{23} = 3$

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Rigorosamente, uma matriz Am×n é definida como uma função cujo domínio é o conjunto de todos os pares de números inteiros (i, j) tais que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. E os valores que a função pode assumir são dados pelos elementos aij.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Essa operação só pode ser feita com matrizes de mesmo número de linhas e mesmo número de colunas.

Sejam duas matrizes Am×n e Bm×n. Então a matriz R = A ± B é uma matriz m×n tal que cada elemento de R é dado por:

$r_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR

NESSA OPERAÇÃO, TODOS OS ELEMENTOS DA MATRIZ SÃO MULTIPLICADOS PELO ESCALAR. SE AM×N É UMA MATRIZ QUALQUER E C É UM ESCALAR QUALQUER,

P = c A é uma matriz m×n tal que

$p_{ij} = c\, a_{ij}$

Exemplo:

$$2x \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E DE MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Sejam as matrizes A e B, ambas m×n, e os escalares a e b.

• a (bA) = ab (A)

• a (A + B) = aA + aB

• se aA = aB, então A = B

Matrizes nulas, quadradas, unitárias, diagonais e simétricas

Uma matriz m×n é dita **matriz nula** se todos os elementos são iguais a zero. Geralmente simbolizada por Om×n.

Assim, $O_{ij} = 0$

Exemplo: $O_{3x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz quadrada é a matriz cujo número de linhas é igual ao de colunas. Portanto, se Am×n é quadrada, m = n. Pode-se então dizer que A é uma matriz m×m ou n×n.

Matriz unitária In (ou **matriz identidade**) é uma matriz quadrada n×n tal que

Iij = 1 se i = j e Iij = 0 se i ≠ j.

Exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada An×n é dita **matriz diagonal** se

$a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

Exemplo:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

A matriz unitária é, portanto, uma matriz diagonal com os elementos não nulos iguais a 1.

Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é dita **matriz simétrica** se

$a_{ij} = a_{ji}$

Exemplo:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 6 \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Sejam $A_{m\times p}$ e $B_{p\times n}$, isto é, duas matrizes tais que o número de colunas da primeira (p) é igual ao número de linhas da segunda (p).

O produto C = AB é uma matriz m×n ($C_{m\times n}$) tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1,p} a_{ik}\, b_{kj}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} C = AB = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

No exemplo acima,os cálculos são:

$c_{11} = 4.1 + 0.2 + 5.1 = 9$

$c_{12} = 4.2 + 0.5 + 5.0 = 8$

$c_{21} = 1.1 + 1.2 + 3.1 = 6$

$c_{22} = 1.2 + 1.5 + 3.0 = 7$

Na linguagem prática, pode-se dizer que se toma a primeira linha de A e se multiplica pela primeira coluna de B (a soma é a primeira linha e primeira coluna da matriz do produto). Depois, a primeira linha de A pela segunda coluna de B. Depois, a segunda linha de A pela primeira coluna de B e assim sucessivamente.

Ordem dos fatores

Notar que, segundo a definição anterior de produto, só é possível calcular AB e BA se A e B são matrizes quadradas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Entretanto, na multiplicação de matrizes, a ordem dos fatores não é indiferente. Em geral, AB ≠ BA. Veja exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} BA = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Isso significa que nem sempre ocorre a propriedade comutativa. Se AB = BA, as matrizes A e B são denominadas **comutativas**.

Algumas propriedades do produto de matrizes

Sejam as matrizes A, B e C.

1) Se os produtos A (BC) e (AB) C são possíveis de cálculo, então

   A (BC) = (AB) C

2) Se os produtos AC e BC são possíveis, então

   (A + B) C = AC + BC

3) Se os produtos CA e CB são possíveis, então

   C (A + B) = CA + CB

4) Se Ip é a matriz unitária p×p conforme visto em página anterior, então valem as relações:

$$I_p\, A_{p\times n} = A_{p\times n}$$
$$B_{m\times p}\, I_p = B_{m\times p}$$

Potências de matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro n≥1. As relações básicas de potências são:

$A^0 = I$

$A^n = A\, A^{n-1}$

Transposição de matrizes

Seja uma matriz $A_{m\times n}$. A **matriz transposta** de A, usualmente simbolizada por A^T, é uma matriz n×m tal que

$a^T_{ij} = a_{ji}$ para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$

Na prática, as linhas de uma são as colunas da outra. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Algumas propriedades da transposição de matrizes

$(A^T)^T = A$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(kA)^T = k\, A^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

Se $A = A^T$, então A é simétrica

$\det(A^T) = \det(A)$

Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada. A **matriz inversa** de A, usualmente simbolizada por A^{-1}, é uma matriz também quadrada tal que

$A A^{-1} = A^{-1} A = I$

Ou seja, o produto de ambas é a matriz unitária (ou matriz identidade).

Nem toda matriz quadrada admite uma matriz inversa. Se a matriz não possui inversa, ela é dita **matriz singular**. Se a inversa é possível, ela é uma matriz **não singular**.

Algumas propriedades das matrizes inversas

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Matriz ortogonal **é uma matriz quadrada cuja transposta é igual á sua inversa. Portanto,**

$\mathbf{A A^T = A^T A = I}$

Determinando a matriz inversa

Neste tópico são dados os passos para a determinação da matriz inversa pelo método de Gauss-Jordan.

Seja a matriz da abaixo, cuja inversa se deseja saber.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é acrescentar uma matriz unitária no lado direito conforme abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O objetivo é somar ou subtrair linhas multiplicadas por escalares de forma a obter a matriz unitária no lado esquerdo. Notar que esses escalares não são elementos da matriz. Devem ser escolhidos de acordo com o resultado desejado.

1ª linha = 1ª linha + 2ª linha multiplicada por –1.

Com essa operação, consegue-se 1 no elemento 11 (primeira linha, primeira columa) da matriz esquerda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os elementos 12 e 13 tornaram-se nulos, mas é apenas uma coincidência. Em geral isso não ocorre logo na primeira operação.

2ª linha = 2ª linha + 1ª linha multiplicada por –1.

3ª linha = 3ª linha + 1ª linha multiplicada por –2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Com as operações acima, os elementos 21 e 22 tornaram-se nulos, formando a primeira coluna da matriz unitária.

3ª linha = 3ª linha + 2ª linha multiplicada por –3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa operação formou a segunda coluna da matriz identidade.

3ª linha = 3ª linha multiplicada por –1.

Multiplicação executada para fazer 1 no elemento 33 da matriz esquerda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2ª linha = 2ª linha + 3ª linha multiplicada por –1.

Essa operação forma a terceira e última coluna da desejada matriz identidade no lado esquerdo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

E a matriz inversa é a parte da direita.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

É claro que há outros métodos para a finalidade. Para matrizes 2x2, uma fórmula rápida é dada na Figura 08A (det = determinante.

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

então A^{-1} = (1 / det(A)) = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Obs: o método de Gauss-Jordan pode ser usado também para resolver um **sistema de equações lineares**. Nesse caso, a matriz inicial (Figura 01) é a matriz dos coeficientes e a matriz a acrescentar é a matriz dos termos independentes.

Seja o sistema de equações:

$2x - 5y + 4z = -3$

$x - 2y + z = 5$

$x - 4y + 6z = 10$

Monta-se a matriz conforme abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Usando procedimento similar ao anterior, obtém-se a matriz unitária:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{bmatrix}$$

E a solução do sistema é:

x = 124 y = 75 z = 31.

Fonte: http://www.mspc.eng.br

DETERMINANTES

Determinante é um número que se associa a uma matriz **quadrada**. De modo geral, um determinante é indicado escrevendo-se os elementos da matriz entre barras ou antecedendo a matriz pelo símbolo `det`.

Assim, se

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, o determinante de A é indicado por:

$$detA = det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

O cálculo de um determinante é efetuado através de regras específicas que estudaremos mais adiante. É importante ressaltarmos alguns pontos:

Somente às matrizes quadradas é que associamos determinantes.

O determinante não representa o valor de uma matriz. Lembre-se, matriz é uma tabela, e não há significado falar em valor de uma tabela.

DETERMINANTE DE 1 ª ORDEM

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M = [a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}:

$$detM = [a_{11}] = a_{11}$$

Exemplo

$M = [5] \Rightarrow detM = 5 \; ou \; |5| = 5$

Determinante de 2ª Ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

de ordem 2, por definição o determinante associado a M, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

DETERMINANTE DE 3ª ORDEM

Para o cálculo de determinantes de ordem 3 podemos utilizar uma regra prática, conhecida como **Regra de Sarrus**, que só se aplica a determinantes de ordem 3. A seguir, explicaremos detalhadamente como utilizar a Regra de Sarrus para calcular o determinante

$$D = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

1º passo:

Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2ª passo:

Devemos encontrar a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

multiplicar e somar

3º passo:

Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

multiplicar e somar

Assim, **subtraindo** o segundo produto do primeiro, podemos escrever o determinante como:

$$D = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$
$$- \ (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

MENOR COMPLEMENTAR

Chamamos de *menor complementar* relativo a um elemento $a_{i\,j}$ de uma matriz M quadrada de ordem $n > 1$, o determinante $MC_{i\,j}$, de ordem $n-1$, associado à matriz obtida de M quando suprimimos a linha e a coluna que passam por $a_{i\,j}$. Por exemplo, dada a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \\ a_{21} \; a_{22} \end{bmatrix}$$

de ordem 2, para determinar o menor complementar relativo ao elemento $a_{11}(MC_{11})$, eliminamos a linha 1 e a coluna 2:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow MC_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

De modo análogo, para obtermos o menor complementar relativo ao elemento a_{13}, eliminamos a linha 1 e a coluna 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

Para um determinante de ordem 3, o processo de obtenção do menor complementar é o mesmo utilizado anteriormente, por exemplo, sendo

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \\ a_{21} \; a_{22} \; a_{23} \\ a_{31} \; a_{32} \; a_{33} \end{bmatrix}$$

de ordem 3, temos:

$$MC_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

Cofator

Chama-se de cofator de um elemento $a_{i\,j}$ de uma matriz quadrada o número $A_{i\,j}$ tal que

$$\boxed{A_{i\,j} = (-1)^{i+j} \cdot MC_{i\,j}}$$

Exemplo

Considerando $M = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \\ a_{21} \; a_{22} \; a_{23} \\ a_{31} \; a_{32} \; a_{33} \end{bmatrix}$

calcularemos o cofator A_{23}. Temos que $i = 2$ e $j = 3$, logo: $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot MC_{23}$.

Devemos calcular MC_{23}.

$$MC_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

Assim $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$

TEOREMA DE LAPLACE

O determinante de uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]_{mXn} \ (m \geq 2)$ pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz M pelos respectivos cofatores.

Desta forma, fixando $j \in N$, tal que $1 \leq j \leq m$, temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$

em que $\sum_{i=1}^{m}$ é o somatório de todos os termos de índice i, variando de 1 até m, $m \in N$.

Exemplo:

Calcule o determinante a seguir utilizando o Teorema de Laplace:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace na coluna 1, temos:

$$D = 2\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = 2\,(+1)(-4) + (-2)(-1)38 + 0 = -8 + 76 = 68$$

Observação

Se calcularmos o determinante utilizando a Regra de Sarrus, obteremos o mesmo número real.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Se os elementos de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Teorema de Jacobi: o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila, uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Multiplicando-se por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal multiplicados por $(-1)\frac{n(n-1)}{2}$.

Para A e B matrizes quadradas de mesma ordem n, $det(AB) = detA \cdot detB$. Como $A \cdot A^{-1} = I$, $det\ A^{-1} = 1/det\ A$.

Se $k \in R$, então $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$.

Fonte: http://www.mundofisico.joinville.udesc.br

SISTEMAS LINEARES

Resolvendo sistemas

Introdução

Nas equações de 1º grau, cada equação tem uma incógnita, em geral representada pela letra x.

Qualquer equação com duas incógnitas (x e y) não pode ser resolvida porque, para cada valor de x, podemos calcular um valor diferente para y. Por exemplo, na equação 2x + y = 20, se fizermos x = 3 e x = 6 então teremos, respectivamente:

2 · 3 + y = 20 → y = 20 - 6 = 14

2 · 6 + y = 20 → y = 20 - 12 = 8

e assim por diante. Vemos então que, para saber os valores corretos de **x** e **y** precisamos de uma outra informação a respeito das nossas incógnitas.

Se conseguimos obter duas equações a respeito das mesmas incógnitas, temos um sistema.

Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

é um sistema de duas equações nas incógnitas x e y. É possivel resolver esse sistema, ou seja, é possivel descobrir quais são os valores de **x** e **y** que satisfazem às duas equações simultaneamente.

Você pode verificar que **x = 6** e **y = 8** é a solução do nosso sistema, substituindo esses valores nas duas equações, temos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 6 + 8 = 20 \\ 3 \cdot 6 - 8 = 10 \end{cases}$$

Vamos aprender a resolver sistemas de duas equações com duas incógnitas.

Mas, antes, vamos perceber que, para serem resolvidos, muitos problemas dependem dos sistemas.

Sistemas aparecem em problemas

Para que você perceba que os sistemas aparecem em problemas simples, imagine a situação a seguir.

Pedro e Paulo conversam despreocupadamente quando chega José, um amigo comum, que está para se aposentar. José fala sobre as idades das pessoas que se aposentam e percebe que os dois amigos aindam estão longe da aposentadoria. Então, ele pergunta:

- Que idade vocês têm?

Pedro, o mais velho, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:

- Nós temos 72 anos.

A conversa, então, segue assim:

José - Como? Você está brincando comigo. Esse aí não passa de um garoto e você certamente não chegou aos 50.

Pedro - Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Paulo, temos juntos 72 anos.

José - Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que idades vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as **idades** de cada um.

Pedro - É claro que não. Você tem duas coisas desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.

José - Diga.

Pedro - Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Paulo. Agora, José, você tem duas coisas desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.

Vamos pensar um pouco na situação apresentada. José tem duas coisas a descobrir: a idade de Pedro e a idade de Paulo. Essas são suas incógnitas.

Podemos então dar nomes a essas incógnitas:

idade de Pedro = x

idade de Paulo = y

A primeira informação que temos é que os dois juntos possuem 72 anos.

Então, nossa primeira equação é:

$$x + y = 72$$

A outra informação que temos é que a idade de Pedro é o dobro da idade de Paulo. Com isso, podemos escrever a nossa segunda equação:

$$x = 2y$$

Essas duas equações formam o nosso sistema:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ x = 2y \end{cases}$$

Esse sistema, por simplicidade, pode ser resolvido sem necessidade de nenhuma técnica especial. Se a segunda equação nos diz que x é igual a 2y, então substituiremos a letra x da primeira equação por 2y. Veja.

$$\begin{aligned} x+y &= 72 \\ 2y+y &= 72 \\ 3y &= 72 \\ \frac{3y}{3} &= \frac{72}{3} \\ y &= 24 \end{aligned}$$

Como $x = 2y$, então $x = 2 \cdot 24 = 48$. Assim, concluímos que Pedro tem 48 anos e que Paulo tem 24.

Nem sempre os sistemas são tão simples assim. Nesta aula, vamos aprender dois métodos que você pode usar na solução dos sistemas.

O método da substituição

O sistema do problema que vimos foi resolvido pelo método da substituição.

Vamos nos deter um pouco mais no estudo desse método prestando atenção na técnica de resolução.

Agora, vamos apresentar um sistema já pronto, sem a preocupação de saber de onde ele veio. Vamos, então, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$$

Para começar, devemos isolar uma das letra em qualquer uma das equações.

Observando o sistema, vemos que o mais fácil é isolar a incógnita y na segunda equação; assim:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ - y &= 11 - 4x \\ - y &= -11 + 4x \end{aligned}$$

Isso mostra que o valor de y é igual a 4x - 11. Assim, podemos trocar um pelo outro, pois são iguais. Vamos então substituir y por 4x - 11 na primeira equação.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 22 \\ 3x + 2(4x - 11) &= 22 \end{aligned}$$

Temos agora uma equação com uma só incógnita, e sabemos o que temos de fazer para resolvê-la:

$$\begin{aligned} 3x + 2(4x - 11) &= 22 \\ 3x + 2 \cdot 4x - 2 \cdot 11 &= 22 \\ 3x + 8x &= 22 + 22 \\ 11x &= 44 \\ \frac{11x}{11} &= \frac{44}{11} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Já temos o valor de x. Repare que logo no inicio da solução tínhamos concluido que $y = - 11 + 4x$. Então, para obter y, basta substituir x por 4.

$$\begin{aligned} y &= - 11 + 4x \\ y &= - 11 + 4 \cdot 4 \\ y &= - 11 + 16 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

A solução do nosso sistema é, portanto, $x = 4$ e $y = 5$.

Observações - Ao resolver um sistema, é sempre aconselhável conferir a resposta encontrada para ver se não erramos na solução. Os valores de x e de y encontrados estarão certos se eles transformarem as duas equações em igualdades verdadeiras.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - 0y = 11 \end{cases} \qquad x = 4,\ y = 5$$

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 22 \ \rightarrow \text{certo}$$

$$4 \cdot 4 - 5 = 11 \ \rightarrow \text{certo}$$

Tudo confere. Os valores encontrados estão corretos.

Outra coisa que desejamos esclarecer é que isolamos a incógnita **y** na segunda equação porque isso nos pareceu mais simples.

No método da substituição, você pode isolar qualquer uma das duas incógnitas em qualquer das equações e, depois, substituir a expressão encontrada na outra equação.

O método da adição

Para compreender o método da adição, vamos recordar inicialmente o que significa somar duas igualdades membro a membro. Se temos:

A = B

e

C = D

podemos somar os dois lados esquerdos e os dois lados direitos, para concluir:

$$\mathbf{A + C = B + D}$$

Considere agora o seguinte problema.

“Encontrar 2 números, sabendo que sua soma é 27 e que sua diferença é 3.”

Para resolvê-lo, vamos chamar nossos números desconhecidos de x e y. De acordo com o enunciado, temos as equações:

x + y = 27
x - y = 3 {
{
10

A U L A Veja o que acontece quando somamos membro a membro as duas equações:

$$\begin{array}{c} x + y = 27 \\ x - y = 03 + \\ \hline x + x + y - y = 27 + 3 \end{array}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

Encontramos o valor de x. Para encontrar o valor de y vamos substituir x por 15 em qualquer uma das equações. Por exemplo, na segunda:

$$15 - y = 3$$
$$- y = 3 - 15$$
$$- y = - 12$$
$$y = 12$$

A solução do nosso problema é, portanto, x = 15 e y = 12.

O método da adição consiste em somar membro a membro as duas equações, com o objetivo de eliminar uma das incógnitas. No sistema que resolvemos, a incógnita y foi eliminada quando somamos membro a membro as duas equações. Mas isso freqüentemente não acontece dessa forma tão simples. Em geral, devemos ajeitar o sistema antes de somar.

Vamos mostrar a técnica que usamos resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$$

Para começar, devemos escolher qual das duas incógnitas vamos eliminar.

Por exemplo, o y será eliminado.

Observe que, multiplicando toda a primeira equação por **2** e toda a segunda equação por **3**, conseguimos tornar os coeficientes de y iguais.

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases} \overset{(x\,2)}{\underset{(x\,3)}{\rightarrow}} \begin{cases} 6x + 6y = 42 \\ 15x + 6y = 39 \end{cases}$$

Para que o y seja eliminado, devemos trocar os sinais de uma das equações e depois somá-las membro a membro.

Veja:

$$\boxed{\begin{array}{c} - 16x + 6y = 42 \\ - 15x - 6y = - 39 \quad + \\ \hline 16x - 15x + \cancel{6y} - \cancel{6y} = 42 - 39 \\ x = 3 \end{array}}$$

Em seguida, substituimos esse valor em qualquer uma das equações do sistema. Por exemplo, na primeira.

$$8 \cdot 3 + 3y = 21$$
$$24 + 3y = 21$$
$$3y = 21 - 24$$
$$3y = - 3$$
$$\frac{3y}{3} = -\frac{3}{3}$$
$$y = - 1$$

A solução do nosso sistema é, portanto, x = 3 e y = - 1

Você agora deve praticar fazendo os exercícios propostos. Procure resolver cada sistema pelos dois métodos para que, depois, você possa decidir qual deles é o de sua preferência. Não se esqueça também de conferir as respostas.

Exercícios

Exercício 1 $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$

Exercício 2 $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$

Exercício 3 $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$

Exercício 4 $\begin{cases} 2x + 7y = 17 \\ 5x - y = -13 \end{cases}$

Exercício 5 $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

Exercício 6 $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

Exercício 7 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Respostas:

1. x = 4, y = 1
2. x = 3, y = 4
3. x = 5, y = - 2
4. x = - 2, y = 3
5. x = 3/2 , y = 1
6. x = 2, y = 0
7. x = 4, y = 3

SISTEMAS RESOLVEM PROBLEMAS

Mostramos como resolver sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas. Agora vamos usar essa importante ferramenta da matemática na solução de problemas.

Em geral, os problemas são apresentados em linguagem comum, ou seja, com palavras. A primeira parte da solução (que é a mais importante) consiste em traduzir o enunciado do problema da linguagem comum para a ***linguagem matemática***. Nessa linguagem, usamos os números, as operações, as letras que representam números ou quantidades desconhecidas, e as nossas sentenças são chamadas de ***equações***.

Para dar um exemplo, considere a seguinte situação: uma costureira de uma pequena confecção ganha R$ 7,00 por dia mais uma determinada quantia por cada camisa que faz. Certo dia, ela fez 3 camisas e ganhou R$ 19,00.

Se quisermos saber quanto essa costureira ganha por cada camisa que faz devemos traduzir em linguagem matemática a situação apresentada. Vamos então representar por x a quantia que ela recebe por cada camisa. Ela faz 3 camisas e ganha R$ 7,00 por dia, independentemente do número de camisas que faz. Se nesse dia ela ganhou R$ 19,00, a equação que traduz o problema é:

$$7 + 3x = 19$$

Como já sabemos resolver equações e sistemas, daremos mais importância, nesta aula, à tradução do enunciado dos problemas para linguagem matemática. Agora vamos apresentar alguns problemas e suas soluções. Entretanto, procure resolver cada um antes de ver a solução. Para ajudar, incluímos algumas orientações entre o enunciado e a solução.

EXEMPLO 1

Em uma festa havia 40 pessoas. Quando 7 homens saíram, o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na festa?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações - A quantidade de homens e mulheres serão as nossas incógnitas. Então:

o número de homens = x

o número de mulheres = y

Traduza em linguagem matemática a frase: “havia 40 pessoas na festa”.

Se 7 homens saíram, quantos ficaram na festa?

Traduza em linguagem matemática a frase: “o número de mulheres é o dobro do número de homens que ficaram na festa”.

Solução - Seguindo as nossas orientações, temos como primeira equação x + y = 40. Depois, se tínhamos x homens e 7 saíram, então ficaram na festa x - 7 homens. E, se o número de mulheres é o dobro do número de homens, podemos escrever y = 2 (x - 7).

O problema dado é traduzido em linguagem matemática pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 2\,(x - 7) \end{cases}$$

Agora, vamos resolvê-lo. Como a incógnita y está isolada na segunda equação, podemos usar o método da substituição. Temos, então:

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ x + 2\,(x - 7) &= 40 \\ x + 2x - 14 &= 40 \\ 3x &= 40 + 14 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{54}{3} \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Substituindo esse valor na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 18 + y &= 40 \\ y &= 40 - 18 \\ y &= 22 \end{aligned}$$

Na festa havia então 22 mulheres.

EXEMPLO 2

Uma omelete feita com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias.

Uma omelete feita com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém também 280 calorias. Quantas calorias possui um ovo? Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações - A caloria é uma unidade de energia. Todos os alimentos nos fornecem energia em maior ou menor quantidade. Neste problema, vamos chamar de **x** a quantidade de calorias contida em um ovo. Para diversos alimentos, a quantidade de calorias é dada por grama. Isso ocorre porque um queijo pode ter diversos tamanhos, assim como uma abóbora pode também ter os mais variados pesos. Então, no nosso problema, vamos chamar de y a quantidade de calorias contidas em cada grama de queijo. I Se cada grama de queijo possui y calorias, quantas calorias estão contidas em 30 gramas de queijo?

Quantas calorias possuem dois ovos?

Escreva em linguagem matemática a frase: “dois ovos mais 30 gramas de queijo possuem 280 calorias”.

Escreva em linguagem matemática a outra informação contida no enunciado.

Solução - Vamos novamente seguir as orientações para resolver o problema.

Se as nossas incógnitas estão bem definidas, não teremos dificuldade em traduzir o enunciado do problema em linguagem matemática. Temos que:

número de calorias contidas em um ovo = x

número de calorias contidas em um grama de queijo = y

Portanto, se dois ovos e 30 gramas de queijo possuem 280 calorias temos a equação:

$$2x + 30y = 280$$

Da mesma forma, se três ovos e 10 gramas de queijos possuem 280 calorias podemos escrever:

$$3x + 10\,y = 280$$

O sistema que dará a solução do nosso problema é

$$\begin{aligned} 2x + 30\,y &= 280 \\ 3x + 10\,y &= 280 \end{aligned}$$

Repare que o problema pergunta qual é o número de calorias contidas em um ovo. Portanto, se a resposta do problema é o valor de x, podemos usar o método da adição e eliminar a incógnita y.

Observe que, multiplicando a segunda equação por 3, tornamos iguais os coeficientes de y.

Se, em seguida, mudamos todos os sinais da primeira equação, estamos prontos para eliminar a incógnita y.

$$\begin{cases} 2x + 30y = 280 \\ 3x + 10y = 280 \end{cases} \quad \begin{matrix} x\,(-2) \\ \rightarrow \\ x\,(3) \end{matrix} \quad \begin{array}{r} 2x - 30y = -280 \\ \underline{9x + 30y = 840\ +} \\ 9x - 2x = 840 - 280 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 7x &= 560 \\ \frac{7x}{7} &= \frac{560}{7} \\ x &= 80 \end{aligned}$$

Concluímos, então, que cada ovo contém 80 calorias.

EXEMPLO 3

Para ir de sua casa na cidade até seu sítio, João percorre 105 km com seu automóvel. A primeira parte do percurso é feita em estrada asfaltada, com velocidade de 60 km por hora. A segunda parte é feita em estrada de terra, com velocidade de 30 km por hora. Se João leva duas horas para ir de sua casa até o sítio, quantos quilômetros possui a estrada de terra?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações - A velocidade de um automóvel é o número de quilômetros que ele percorre em uma hora. De uma forma geral, a distância percorrida é igual ao produto da velocidade pelo tempo de percurso.

distância = velocidade x tempo

Estabeleça as incógnitas:

x = distância percorrida na estrada asfaltada

y = distância percorrida na estrada de terra

O esquema abaixo ajuda a compreender o problema.

Escreva uma equação com as distâncias.

Procure escrever uma equação com o seguinte significado: “o tempo em que João andou na estrada asfaltada mais o tempo em que ele andou na de terra é igual a duas horas”.

Solução - Mais uma vez, vamos resolver o problema seguindo as orientações. Se João andou x km na estrada asfaltada e y km na estrada de terra, então a nossa primeira equação é x + y = 105.

Observe novamente a relação:

(distância) = (velocidade) x (tempo)

Na primeira parte do percurso, a distância foi x, a velocidade foi 60 e o tempo gasto será chamado de t1. Temos, então:

$$x = 60 \cdot t_1 \text{ ou}$$

$$\frac{x}{60} = t_1$$

Na segunda parte do percurso a distância foi y, a velocidade foi 30 e o tempo gasto será chamado de t2. Temos, então:

$$y = 30 \cdot t_2 \text{ ou}$$

$$\frac{y}{30} = t_2$$

Como a soma dos dois tempos é igual a 2 horas, conseguimos a segunda equação:

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{30} = 2$$

Vamos melhorar o aspecto dessa equação antes de formarmos o sistema.

Multiplicando todos os termos por 60, temos:

$$\overset{1}{\cancel{60}} \cdot \frac{x}{\underset{1}{\cancel{60}}} + \overset{2}{\cancel{60}} \cdot \frac{y}{\underset{1}{\cancel{30}}} = 60 \;.\; 2$$

$$x + 2y = 120$$

Temos, agora, o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 105 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$$

O valor de y nesse sistema é calculado imediatamente pelo método da adição:

$$\begin{array}{rl} -x - y & = -105 \\ x + 2y & = 120 \quad + \\ \hline 2y - y & = 120 - 105 \\ y & = 15 \end{array}$$

Concluímos, então, que a estrada de terra tem 15 km.

Nesta aula você viu a força da álgebra na solução de problemas. Entretanto, para adquirir segurança é preciso praticar. Para cada um dos exercícios, procure “matematizar” as situações descritas usando o método algébrico. Escolha suas incógnitas e arme as equações. Depois, resolva os sistemas e verifique se os valores encontrados estão corretos.

Exercícios:

1) Determine dois números, sabendo que sua soma é 43 e que sua diferença é 7.
2) Um marceneiro recebeu 74 tábuas de compensado. Algumas com 6 mm de espessura e outras com 8 mm de espessura. Quando foram empilhadas, atingiram a altura de 50 cm. Quantas tábuas de 8mm ele recebeu?
3) Em um estacionamento havia carros e motocicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Calcule o número de carros e de motocicletas estacionados.
4) Uma empresa desejava contratar técnicos e, para isso, aplicou uma prova com 50 perguntas a todos os candidatos. Cada candidato ganhou 4 pontos para cada resposta certa e perdeu um ponto para cada resposta errada. Se Marcelo fez 130 pontos, quantas perguntas ele acertou?
5) Certo dia, uma doceira comprou 3 kg de açúcar e 4 kg de farinha e, no total, pagou R$ 3,20. Outro dia, ela comprou 4 kg de açúcar e 6 kg de farinha, pagando R$ 4,50 pelo total da compra. Se os preços foram os mesmos, quanto estava custando o quilo do açúcar e o quilo da farinha?
6) Pedro e Paulo têm juntos R$ 81,00. Se Pedro der 10% do seu dinheiro a Paulo, eles ficarão com quantias iguais. Quanto cada um deles tem?
7) A distância entre duas cidades A e B é de 66 km. Certo dia, às 8 horas da manhã, um ciclista saiu da cidade A, viajando a 10 km por hora em direção à cidade B. No mesmo dia e no mesmo horário um ciclista saiu da cidade B, viajando a 12 km por hora em direção à cidade A. Pergunta-se:

a) A que distância da cidade A deu-se o encontro dos dois ciclistas?

b) A que horas deu-se o encontro?

Respostas:
1. 25 e 18
2. 28
3. 32 automóveis;;11 motos
4. 36
5. açúcar: R$ 0,60;; farinha: R$ 0,35
6. Pedro: R$ 45,00;; Paulo: R$ 36,00QQ
7. 30 km; 11hs

Fonte: http://www.bibvirt.futuro.usp.br

NÚMEROS COMPLEXOS

A FORMA a + bi DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto dos complexos.

Os vários conjuntos numéricos são:

o conjunto IN dos números naturais:
IN = { 0; 1; 2; 3; 4; .. . } ;
o conjunto Z dos números inteiros:
Z ={... ; -2, -1; 0; 1; 2;... } ;
o conjunto Q dos números racionais:

$$Q = \left\{ x = \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \quad e \quad q \neq 0 \right\}$$

conjunto IR dos números reais:
IR = { x | x é racional ou x é irracional }.

E, além disso, verificamos que: IN $\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ IR.

Vamos definir um novo conjunto numérico. Chama-se conjunto dos números complexos, e se indica com C, ao seguinte conjunto :

$$\boxed{\mathbf{C = \{ Z = a + bi \mid a,\ b \in IR \text{ e } i^2 = -1\}}}$$

Exemplos de números complexos

z = 2 + 3i, onde a = 2 e b = 3.
z = -3 + 4i, onde a = -3 e b = 4.
z = 2 – i , onde a = 2 e b = -1.
z = -3 - 5i, onde a = -3 e b = -5.
z = 2, onde a = 2 e b = 0.
z = 1, onde a = 0 e b = 1.

Observação: O exemplo e nos mostra que 2 $\in$ C, e o mesmo ocorre com qualquer outro número real; logo, IR $\subset$ C e vale, então, a seguinte seqüência de inclusões

$$\boxed{\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset IR \subset C}}$$

DEFINIÇÃO

Dado o complexo z = a + bi, chama-se parte real de z o número real a; chama-se parte imaginária de z o número real b.

Os complexos da forma z = bi (para os quais a = 0 e b $\neq$ 0) são chamados de imaginários puros.

Exercícios resolvidos

Resolver, em C, a equação $z^2 = -1$

Resolução:
Como, por definição, $i^2 = -1$; então i é uma raiz da equação proposta.

Observemos ainda que $(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$; logo, - i também é raiz da equação proposta. E então o conjunto-solução da equação será:

$$\boxed{S = \{ i \, ; -i \}}$$

Resolver, em C, a equação $z^2 = -100$.

Resolução:
Observemos inicialmente que $z^2 = -100 \Rightarrow$
$z^2 = 100 \cdot (-1)$; logo, z = ±10i, ou seja:

$$\boxed{S = \{ 10i \, ; -10i \}}$$

Resolver, em C, a equação $z^2 = -3$.

Resolução:
Observemos inicialmente que $z^2 = -3 \Rightarrow$
$z^2 = 3 \cdot (-1)$; logo, $z = \pm\sqrt{3}\, i$, ou seja:

$$\boxed{S = \{ \sqrt{3}\, i \, ; -\sqrt{3}\, i \}}$$

Observação: Para simplificar a linguagem escreveremos:

$z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$
$Z^2 = -100 \Rightarrow Z = \pm\sqrt{-100} = \pm 10i$
$z^2 = -3 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\, i$

Resolver, em C, a equação $z^2 + 13 = 0$.

Resolução:

$z^2 + 13 = 0 \Rightarrow z^2 = -13 \Rightarrow$
$\Rightarrow z = \pm\sqrt{-13} = \pm\sqrt{13}\, i$, ou seja:

$$\boxed{S = \{ \sqrt{13}\, i \, ; -\sqrt{-13}\, i \}}$$

Resolver, em C, a equação $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Resolução
Aplicando a fórmula resolutiva da equação de segundo grau: $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2a}$, onde, neste caso: a = 1, b = - 4 e c = 13, temos:

$$z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} =$$

$\dfrac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$, ou seja:

$$\boxed{S = \{ 2 + 3i \, ; 2 - 3i \}}$$

Resolver, em C, a equação $z^2 + z + 1 = 0$.

Resolução
Aplicando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, onde, neste caso: a = 1, b = 1 e c = 1, temos:

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \text{ ou}$$

seja:

$$\boxed{S = \left\{ \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \, , \, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}}$$

Exercícios propostos

Resolver, em C, a equação $z^2 = -4$.
Resolver, em C, a equação $z^2 = -49$.
Resolver, em C, a equação $z^2 = -144$.

Resolver, em C, a equação $z^2 = -2$.
Resolver, em C, a equação $(z-1)^2 = -121$.
Resolver, em C, a equação $z^2 + 60 = 0$.
Resolver, em C, a equação $z^2 - 2z + 5 = 0$.
Resolver, em C, a equação $z^2 + 2z + 5 = 0$.
Resolver, em C, a equação $z^2 - z + 1 = 0$.
Resolver, em C, a equação $3z^2 + z + 4 = 0$.

Respostas:

$S = \{ 2i; -2i \}$
$S = \{ 7i ; -7i \}$
$S = \{ 12i ; -12i \}$
$S = \left\{\sqrt{2}i;\ -\sqrt{2}i\right\}$
$S = \{ 1+ 11i; 1- 11i \}$
$S = \left\{2\sqrt{15}i ; -2\sqrt{15}i\right\}$
$S = \left\{1+2i ; 1-2i\right\}$
$S = \{ -1+2i ; -1 -2i\}$
$S = \left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i ; \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
$S = \left\{-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{47}}{6}i ; -\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{47}}{6}i\right\}$

IGUALDADE DE COMPLEXOS

Dois números complexos :
$z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$ são iguais se, e somente se, $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$:

$$\boxed{a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2}$$

Adição de Complexos

Dados dois complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, sua soma é um complexo cuja parte real é a soma das partes reais e cuja parte imaginária é a soma das partes imaginárias:

$$\boxed{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$$

Subtração de Complexos

Dados dois complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, sua diferença é um complexo cuja parte real é a diferença das partes reais e cuja parte imaginária é a diferença das partes imaginárias.

$$\boxed{(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$$

Multiplicação de Complexos

Para multiplicarmos dois complexos, $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, procedemos como se estivéssemos multiplicando dois binômios, $(a_1 + b_1 x)$ e $(a_2 + b_2x)$, e levamos em conta que $i^2 = -1$; assim, temos:

$(a_1 + b_1i) . (a_2 + b_2i) =$
$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$
$= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i - b_1 b_2 i$; ou seja:

$(a_1 + b_1i) . (a_2 + b_2i) =$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Propriedade Importante

Como no caso dos números reais, vale também para o produto de números complexos a seguinte propriedade:

$$\boxed{z_1 . z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0}$$

Exercícios resolvidos

Efetuar as operações
$(4 + 5i) + (7 - 2i) - (2 - 6i)$.

Resolução:

$(4 + 5i) + (7- 2i) - (2 - 6i) =$
$(4 + 7 - 2) + (5 - 2 + 6)i = 9 + 9i$

Efetuar as operações
$2 (5 - 2i) - 7 (4 + 1) + 3 (2 + 5i)$.

Resolução:

$2 (5 - 2i) -7(4 + i) + 3(2 + 5i) =$
$(10 - 4i) - (28 + 7i) + (6 + 15i) =$
$= (10 - 28 + 6) + (- 4 -7 +15)i = -12 + 4i$

Efetuar o produto
$(3 + 4i) . (5 - 7i)$.

Resolução:

$(3 + 4i) . (5 - 7i) = 15 - 21i + 20i - 28 i^2 =$
$15 - i + 28 = 43 - i$

Efetuar a potência $(3 + 4i)^2$.

Resolução:

$(3 + 4i)^2 = 3^2 + 2 .3. 4i + (4i)^2 = 9 + 24i +16 i^2 =$
$9 + 24i -16 = - 7 + 24i$

Efetuar o produto $(6 + 5i) . (6 - 5i)$.

Resolução:

$(6 + 5i) . (6 - 5i) = 6^2 - (5 i)^2 = 36 - 25 i^2 =$
$36 + 25 = 61$

Resolver, em C, a equação $z^2 + 3zi = 0$.

Resolução:

$z^2 + 3zi = 0 \Leftrightarrow z (z + 3i) = 0 \Leftrightarrow$
$z = 0$ ou $z + 3i = 0$
$z = 0$ ou $z = -3i$, ou seja,

$$\boxed{S= \{ 0; -3i \}}$$

Resolver, em C, a equação:
$z^2 - 16iz - 73 = 0$.

Resolução:

Aplicando a fórmula resolutiva da equação de segundo grau : $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$, onde, neste caso: a = 1, b = -16i e c = - 73, temos:

$$z = \frac{16i \pm \sqrt{(-16i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-73)}}{2 \cdot 1} =$$
$$\frac{16i \pm \sqrt{256i^2 + 292}}{2} = \frac{16i \pm \sqrt{256 + 292}}{2} =$$
$$\frac{16i \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{16i \pm 6}{2} = 8i \pm 3 \text{ ou seja:}$$

$$\boxed{S = (3 + 8i, -3 + 8i)}$$

Exercícios propostos

Efetuar as operações
(6 - 3i) - (4 + 5i) - (2 - i).

Efetuar as operações
5 (2 + i) - 3(7 +4i) + 4(2- 3i).

Efetuar o produto (-6 + 2i) . (3 - 5i).

Efetuar a potência $(2 + 7i)^2$.

Efetuar a potência $(2 - 7i)^2$.

Efetuar o produto (8 - 3i) . (8 + 3i).

Efetuar o produto (6 + 7i) . (6 - 7i).

Sendo a, b ∃ IR, mostrar que
(a + bi) . (a - bi) é real.

Resolver, em C, a equação $2z^2 = 5zi$.

Resolver, em C, a equação $z^2 - 2i - 2 = 0$.

Respostas:

–7i
–3 – 19i
–8+36i
–45 + 28i
–45 – 28i
73
85
$(a +bi) (a -bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2+b^2$, que é real
$S = \left\{0 ; \frac{5}{2}i\right\}$
S = { 1 + i; -1 + i }

Complexos conjugados

Dado um número complexo, z = a + bi, chama-se conjugado de z, e se indica com $\bar{z}$, o complexo $\bar{z}$ = a - bi (conserva a parte real e troca o sinal da parte imaginária de z).

Divisão de complexos

Dados os complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0$, para dividirmos z_1 por z_2, ou seja, para encontrarmos $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$, multiplicamos o numerador e o denominador desta fração pelo conjugado do denominador e efetuamos as operações indicadas.

Exercícios resolvidos

Determinar os conjugados dos seguintes complexos:

a) $z_1 = 3 + 2i$	d) $z_4 = -5 - 2i$
b) $z_2 = - 2 + 5i$	e) $z_5 = 7i$
c) $z_3 = 4 – i$	f) $z_6 = 3$

Resolução:

Aplicando a definição de conjugado temos:

a) $z_1 = 3 + 2i \Rightarrow \bar{z}_1 = 3 - 2i$
b) $z_2 = - 2 + 5i \Rightarrow \bar{z}_2 = -2 - 5i$
c) $z_3 = 4 - i \Rightarrow \bar{z}_3 = 4 + i$
d) $z_4 = -5 - 2i \Rightarrow \bar{z}_4 = -5 + 2i$
e) $z_5 = 7i \Rightarrow \bar{z}_5 = -7i$
f) $z_6 = 3 = 3 + 0i \Rightarrow \bar{z}_6 = 3 - 0i = 3$

Observação: O conjugado de um número real, como no item f, é sempre o próprio número.

Efetuar o quociente $\frac{7 + 2i}{5 - 3i}$

Resolução:

Multiplicando os dois termos da fração pelo conjugado do denominador, temos:

$$\frac{7+2i}{5-3i} = \frac{7+2i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i} = \frac{35+21i+10i+6i^2}{5^2-3^2i^2} =$$
$$\frac{35+31i-6}{25+9} = \frac{29+31i}{34} = \frac{29}{34} + \frac{31}{34}i$$

Achar o inverso do complexo z = 4 + 5i.

Resolução:

O inverso do complexo z será o complexo $\frac{1}{z}$, ou seja:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4+5i} \cdot \frac{4-5i}{4-5i} = \frac{4-5i}{4^2-5^2i^2} = \frac{4-5i}{16+25} =$$
$$\frac{4-5i}{41} = \frac{4}{41} - \frac{5}{41}i$$

Resolver, em C, a equação:
$(2 + 3i)z + (7 - 2i) = (4 + 5i)$

Resolução:

isolando a variável z, temos:

$(2 + 3i)z = (4 + 5i) - (7 - 2i) \Leftrightarrow$
$(2 + 3i)z = (4 - 7) + (5 + 2)i \Leftrightarrow$
$(2 + 3i)z = -3 + 7i \Leftrightarrow Z = \frac{-3+7i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} =$

$$\frac{-6+9i+14i-21i^2}{2^2-3^2i^2} = \frac{-6+23i+21}{4+9} =$$
$$\frac{15+23i}{13} = \frac{15}{13} + \frac{23}{13}i \quad \text{ou seja:}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{15}{13} + \frac{23}{13}i\right\}}$$

Exercícios propostos

Determinar os conjugados dos seguintes complexos:
a) $z_1 = 6 + i$
b) $z_2 = -4 + 2i$
c) $z_3 = 7 - 3i$
d) $z_4 = -9 - 4i$
e) $z_5 = -2i$
f) $z_6 = 4$
g) $z_7 = -3$
h) $z_8 = 0$

Efetuar o quociente $\frac{2+5i}{3-i}$

Achar o inverso do complexo z = 3 - 2i.

Achar o inverso do complexo z = 1 + i .

Achar o inverso do complexo z = i.

Resolver, em C, a equação:

$(4 - i)z - (2 + 3i) = (8 - 5i)$.

Respostas:

a) $\bar{z}_1 = 6 - i$ b) $\bar{z}_2 = -4 - 2i$ c) $\bar{z}_3 = 7 + 3i$
d) $\bar{z}_4 = -9 + 4i$ e) $\bar{z}_5 = 2i$ f) $\bar{z}_6 = 4$
g) $\bar{z}_7 = -3$ h) $\bar{z}_8 = 0$

$\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$

$\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$-i$

$S = \left\{\frac{42}{17} + \frac{2}{17}i\right\}$

TRIGONOMETRIA

O papel da Trigonometria

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem seu significado mais amplo: Medida dos Triângulos, assim através do estudo da Trigonometria podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo (lados e ângulos).

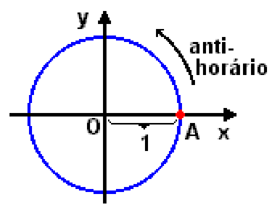
Com o uso de triângulos semelhantes podemos calcular distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre, a altura de uma pirâmide, distância entre duas ilhas, o raio da terra, largura de um rio, entre outras.

A Trigonometria é um instrumento potente de cálculo, que além de seu uso na Matemática, também é usado no estudo de fenômenos físicos, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia entre outros.

PONTO MÓVEL SOBRE UMA CURVA

Consideremos uma curva no plano cartesiano. Se um ponto P está localizado sobre esta curva, simplesmente dizemos P pertence à curva e que P é um ponto fixo na mesma. Se assumirmos que este ponto possa ser deslocado sobre a curva, este ponto receberá o nome de ponto móvel.

Um ponto móvel localizado sobre uma circunferência, partindo de um ponto A pode percorrer esta circunferência em dois sentidos opostos. Por convenção, o sentido anti-horário (contrário aos ponteiros de um relógio) é adotado como sentido positivo.

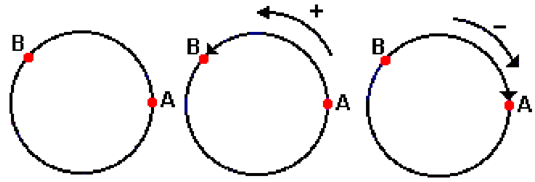


Arcos da circunferência

Se um ponto móvel em uma circunferência partir de A e parar em M, ele descreve um arco AM. O ponto A é a origem do arco e M é a extremidade do arco.

Quando escolhemos um dos sentidos de percurso, o arco é denominado arco orientado e simplesmente pode ser denotado por AB se o sentido de percurso for de A para B e BA quando o sentido de percurso for de B para A.

Quando não consideramos a orientação dos arcos formados por dois pontos A e B sobre uma circunferência, temos dois arcos não orientados sendo A e B as suas extremidades.

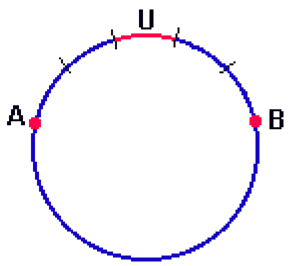


Medida de um arco

A medida de um arco de circunferência é feita por comparação com um outro arco da mesma circunferência tomado como a unidade de arco. Se u for um arco de comprimento unitário (igual a 1), a medida do arco AB, é o número de vezes que o arco u cabe no arco AB.

Na figura em anexo, a medida do arco AB é 5 vezes a medida do arco u. Denotando a medida do arco AB por m(AB) e a medida do arco u por m(u), temos m(AB)=5 m(u).

A medida de um arco de circunferência é a mesma em qualquer um dos sentidos. *A medida algébrica* de um arco AB desta circunferência, é o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo se o sentido for horário.



O número pi

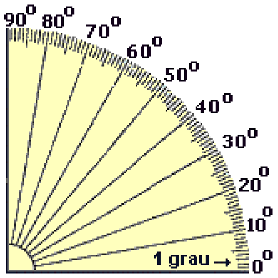
Para toda circunferência, a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante. Esta constante é denotada pela letra grega π, que é um número irracional, isto é, não pode ser expresso como a divisão de dois números inteiros. Uma aproximação para o número πé dada por:

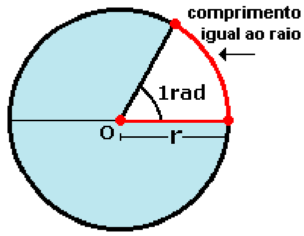
π = 3,14159265358979323846264338327950...

Unidades de medida de arcos

A unidade de medida de arco do Sistema Internacional (SI) é o *radiano*, mas existem outras medidas utilizadas pelos técnicos que são o *grau* e o *grado*. Este último não é muito comum.

Radiano: Medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denotaremos por 1 rad.





Grau: Medida de um arco que corresponde a 1/360 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

Grado: É a medida de um arco igual a 1/400 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

Exemplo: Para determinar a medida em radianos de um arco de comprimento igual a 12 cm, em uma circunferência de raio medindo 8 cm, fazemos,

$$m(AB)=\frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}}=\frac{12}{8}$$

Portanto m(AB)=1,5 radianos

Arcos de uma volta

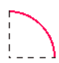
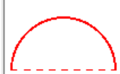
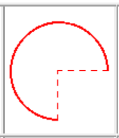
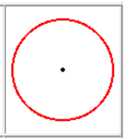
Se AB é o arco correspondente à volta completa de uma circunferência, a medida do arco é igual a C=2πr, então:

$$m(AB)=\frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$$

Assim a medida em radianos de um arco de uma volta é 2π rad, isto é,

2π rad=360 graus

Podemos estabelecer os resultados seguintes

Desenho				
Grau	90	180	270	360
Grado	100	200	300	400
Radiano	π/2	π	3π/2	2π

0 graus = 0 grado = 0 radianos

MUDANÇA DE UNIDADES

Consideremos um arco AB de medida R em radianos, esta medida corresponde a G graus. A relação entre estas medidas é obtida pela seguinte proporção,

2 πrad .... 360 graus R rad .... G graus

Assim, temos a igualdade R/2π=G/360, ou ainda,

$$\frac{R}{\pi} = \frac{G}{180}$$

Exemplos

Para determinar a medida em radianos de um arco de medida 60 graus, fazemos

$$\frac{R}{\pi} = \frac{60}{180}$$

Assim R=π/3 ou 60 graus=π/3 rad

Para determinar a medida em graus de um arco de medida 1 radiano, fazemos:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{G}{180}$$

Asim 1 rad=180/π graus.

TRIGONOMETRIA: EXERCÍCIOS SOBRE ELEMENTOS GERAIS

Um arco AB de uma circunferência tem comprimento L. Se o raio da circunferência mede 4 cm, qual a medida em radianos do arco AB, se:

(a) L=6cm (b) L=16cm (c) L=22cm (d) L=30cm

Resposta:

A medida em radianos de um arco AB é dada por

$$m(AB)= \frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}}$$

(a) m(AB) = (6cm)/(4cm) = 1,5 rad

(b) m(AB) = (16cm)/(4cm) = 4 rad

(c) m(AB) = (22cm)/(4cm) = 5,5 rad

(d) m(AB) = (28cm)/(4cm) = 7 rad

Em uma circunferência de raio R, calcule a medida de um arco em radianos, que tem o triplo do comprimento do raio.

Resposta:

$$m(AB)= \frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}}$$

Assim, como o comprimento do arco é o triplo do comprimento do raio

m(AB) = 3R/R = 3rad

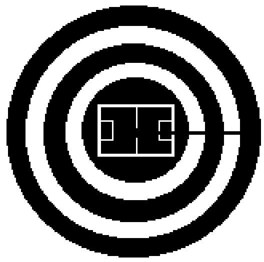
Um atleta percorre 1/3 de uma pista circular, correndo sobre uma única raia. Qual é a medida do arco percorrido em graus? E em radianos?

Resposta:

Uma volta inteira na pista equivale a 360 graus, assim 1/3 de 360 graus é 120 graus.

Uma volta inteira na pista equivale a 2π radianos, então o atleta percorreu (2/3) π.

Em uma pista de atletismo circular com quatro raias, a medida do raio da circunferência até o meio da primeira raia (onde o atleta corre) é 100 metros e a distância entre cada raia é de 2 metros. Se todos os atletas corressem até completar uma volta inteira, quantos metros cada um dos atletas correria?



Resposta:

Para simplificar os resultados supomos pi=3,1415 e enumeramos as raias de dentro para fora como C1, C2, C3, C4 e C5.

A primeira raia C1 tem raio de medida 10 m, então:

m(C1)=2π100=200π=200 x 3,1415=628,3 metros

A raia C2 tem raio de medida 12 m, então:

m(C2)=2π102=204π=204 x 3,1415=640,87 metros

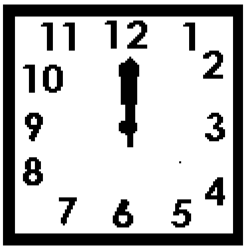
A raia C3 tem raio de medida 14 m, então:

m(C3)=2π104=208π=208 x 3,1415=653,43 metros

A raia C4 tem raio de medida 16 m, então:

m(C4)=2π106=212π=212 x 3,1415=665,99 metros

Qual é a medida (em graus) de três ângulos, sendo que a soma das medidas do primeiro com o segundo é 14 graus, a do segundo com o terceiro é 12 graus e a soma das medidas do primeiro com o terceiro é 8 graus.



Resposta:

Sejam a, b e c os três ângulos, assim

m(a)+m(b)=14 graus

m(b)+m(c)=12 graus

m(a)+m(c)= 8 graus

resolvendo o sistema de equações, obtemos:

m(a)=5 graus
m(b)=9 graus
m(c)=3 graus

Qual é a medida do ângulo que o ponteiro das horas de um relógio descreve em um minuto? Calcule o ângulo em graus e em radianos.

Resposta:

O ponteiro das horas percorre em cada hora um ângulo de 30 graus, que corresponde a 360/12 graus. Como 1 hora possui 60 minutos, então o ângulo percorido é igual a a=0,5 graus, que é obtido pela regra de três:

60 min ………………… 30 graus

1 min ………………… a graus

Convertemos agora a medida do ângulo para radianos, para obter a=π/360 rad, através da regra de três:

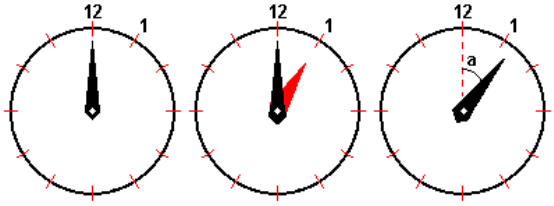
180graus ………………… πrad

0,5 graus ………………… a rad

Os dois ponteiros de um relógio se sobrepoem à 0 horas. Em que momento os dois ponteiros coincidem pela primeira vez novamente?

Resposta:

O ponteiro dos minutos percorre 360° enquanto o ponteiro das horas percorre 360°/12=30º. Até 1:00h os ponteiros não se encontraram, o que ocorrerá entre 1:00h e 2:00h.



Consideraremos a situação original à 1:00h, deste instante até o momento do encontro o ponteiro dos minutos deslocou aº e o ponteiro das horas deslocou (a-30)º, como está na figura, assim:

Ponteiro dos minutos	ponteiro das horas
360º	30º
aº	(a-30)º

Pela tabela, tem-se que: 360(a-30)=30.a, de onde segue que 330a=10800e assim podemos concluir que a=32,7272º

O ponteiro dos minutos deslocou 32,7272º após 1:00h, mas ainda precisamos verificar quantos minutos corresponde este ângulo.

5 min ………………… 30 graus

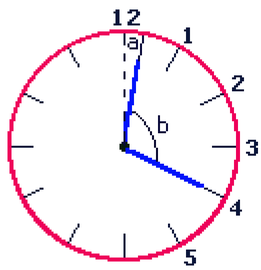
x min …………… 32,7272 graus

A regra de três fornece x=5,4545'=5'27,27". Assim, os ponteiros coincidem novamente após às 12:00h à 1 hora,5 minutos e 27,27 segundos

Calcular o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 12h e 20minutos.

Resposta:

O ponteiro das horas percorre em cada hora um ângulo de 360/12 graus = 30 graus. Em vinte minutos ele percorre o ângulo a



60 min ……… 30 graus

20 min ……… a graus

A regra de três fornece a=10 graus, logo o ângulo formado entre os números 12 e 4 é de 120 graus, então o ângulo entre os ponteiros é 120-10=110 graus.

Em um polígono regular um ângulo externo mede pi/14 rad. Quantos lados tem esse polígono?

28 lados

Escreva o ângulo a=12°28' em radianos.

Resposta:

Usando o fato de que 1 grau possui 60 minutos, temos

1 grau .... 60 minutos

x graus .... 28 minutos

A regra de três garante que x=28/60=0,4666 grau-se desse modo segue que 12° 28'=(12+28/60)°=12+0,4666=12,4666°

Representando por M a medida do ângulo em radianos, temos

180°...............π rad

12,4666°...............M rad

e da regra de três segue que:

M=12,4666. π/180=0,2211 rad

Escreva o ângulo a=36°12'58" em radianos.

Resposta:

Usando o fato de que 1 minuto possui 60 segundos, temos

1 min ....60 segundos

x min ....58 segundos

x=58/60=0,967 min, logo

36°12'58"=36°(12+0,967)'=36°12,967'

Como 1 grau corresponde a 60', então:

1 grau ....60 minutos

x graus ....12,967 minutos

x=12,967/60=0,2161° e

36°12'58"=(36+0,2161)°=36,2161°

A medida M do ângulo em radianos, é

M=36,2161°.π/180=0,6321 rad, que foi obtida como solução da regra de três:

180°...............π rad

36,2161°...............M rad

Dados os ângulos x=0,47623rad e y=0.25412rad, escreva-os em graus, minutos e segundos.

Resposta:

(a)Considere a seguinte regra de três,

180°....................π rad

x..............0,47623 rad

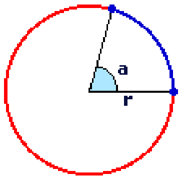
Assim: x=0,47623 . 180/π

=27,2911°=27°17,466'=27°17'27"

(b) Analogamente obtemos:

y=0.25412×180/π=14,56°=14°33,6'=14°33'36"

Em uma circunferência de raio r, calcular a medida do arco subtendido pelo ângulo A em cada caso:



a. A=0°17'48" r = 6,2935cm

b. A=121°6'18" r = 0,2163cm

Resposta:

(a) Primeiro convertemos o ângulo para radianos para obter:

a=0°17'48"=0°(17+48/60)'=(0+17,8)'=(0+17,8/60)°= 0,2967°

Com a regra de três:

180°...............π rad

0,2967°........... a rad

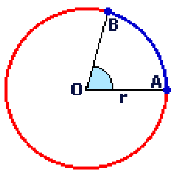
obtemos a=0,2967. π/180=0,0051778 rad e como a medida do arco é dada pela medida do ângulo(rad) x medida do raio, temos que medida do arco=0,0051778×6,2935 = 0,03286cm

(b) Analogamente, a = 121° 6' 18" =121,105°. Em radianos, a medida do ângulo se torna a=121,105 π/180=2,1137rad

Assim, a medida do arco=

2,1137×0,2163=0,4572cm

Em uma circunferência de centro O e raio r, calcule a medida do ângulo AÔB subtendido pelo arco AB nos seguintes casos.



a. AB = 0,16296 cm

r = 12,587cm.

b. AB = 1,3672cm

r = 1,2978cm.

Resposta:

(a) A medida do ângulo AÔB é dada pelo comprimento de AB dividido pelo comprimento do raio, assim m(AÔB)=0,16296/12,587=0,012947 rad = 0° 44' 30''

(b) Analogamente:

m(AÔB)=1,3672/1,2978=1,0535rad=60,360°≅60°21,6'=60°21'35''

Em uma circunferência, dado o comprimento do arco AB e o ângulo AÔB subtendido a este arco, calcule a medida do raio.

AÔB=0°44'30'' AB=0,032592cm

AÔB=60°21'6'' AB=0,4572cm

Resposta:

a. Primeiramente devemos exprimir o ângulo em radianos.

AÔB = 0° 44' 30''=0,7417° = 0,7417 x π/180 = 0,01294 rad

A medida do raio é dada pelo comprimento de AB dividido por m(AÔB), logo:

comprimento do raio = 0,032592/0,01294 = 2,518 cm

b. Analogamente,

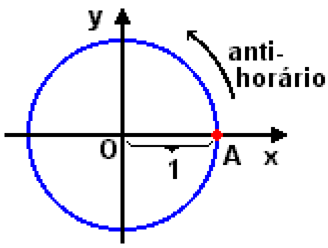
AÔB=60°21'6''=60,3517°≅60,3517×π/180=1,0533rad

comprimento do raio =

0,4572/1,0533=0,4340cm

Círculo Trigonométrico

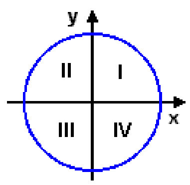
Considere uma circunferência de raio unitário com centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal e o ponto A=(1,0). O ponto A será tomado como a origem dos arcos orientados nesta circunferência e o sentido positivo considerado será o anti-horário. A região contendo esta circunferência e todos os seus pontos interiores, é denominada *círculo trigonométrico*



.

Nos livros de língua inglesa, a palavra círculo se refere à curva envolvente da região circular enquanto circunferência de círculo é a medida desta curva. No Brasil, a circunferência é a curva que envolve a região circular.

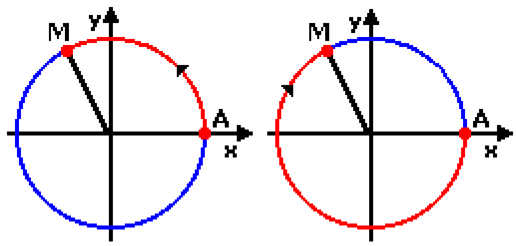
Os eixos OX e OY decompõem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes que são enumerados como segue:

2º. quadrante abscissa: negativa ordenada: positiva 90º<ângulo<180º		1º. quadrante abscissa: positiva ordenada: positiva 0º<ângulo<90º
3º. quadrante abscissa: negativa ordenada: negativa 180º<ângulo<270º		4º. quadrante abscissa: positiva ordenada: negativa 270º<ângulo<360º

Os quadrantes são usados para localizar pontos e a caracterização de ângulos trigonométricos. Por convenção, os pontos situados sobre os eixos não pertencem a qualquer um dos quadrantes.

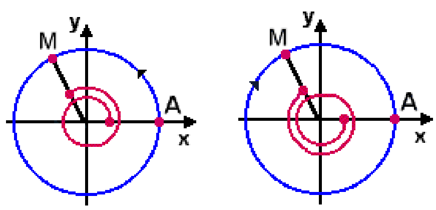
Arcos com mais de uma volta

Em Trigonometria, algumas vezes precisamos considerar arcos cujas medidas sejam maiores do que 360º. Por exemplo, se um ponto móvel parte de um ponto A sobre uma circunferência no sentido anti-horário e para em um ponto M, ele descreve um arco AM. A medida deste arco (em graus) poderá ser menor ou igual a 360º ou ser maior do que 360º. Se esta medida for menor ou igual a 360º, dizemos que este arco está em sua *primeira determinação*.



Acontece que o ponto móvel poderá percorrer a circunferência uma ou mais vezes em um determinado sentido, antes de parar no ponto M, determinando arcos maiores do que 360º ou arcos com mais de uma volta. Existe uma infinidade de arcos mas com medidas diferentes, cuja origem é o ponto A e cuja extremidade é o ponto M.

Seja o arco AM cuja primeira determinação tenha medida igual a m. Um ponto móvel que parte de A e pare em M, pode ter várias medidas algébricas, dependendo do percurso.



Se o sentido for o anti-horário, o ponto M da circunferência trigonométrica será extremidade de uma infinidade de arcos positivos de medidas

$$m, m+2\pi, m+4\pi, m+6\pi, ...$$

Se o sentido for o horário, o ponto M será extremidade de uma infinidade de arcos negativos de medidas algébricas

$$m-2\pi, m-4\pi, m-6\pi, ...$$

e temos assim uma coleção infinita de arcos com extremidade no ponto M.

Generalizando este conceito, se m é a medida da primeira determinação positiva do arco AM, podemos representar as medidas destes arcos por:

$$\mu(AM) = m + 2k\pi$$

onde k é um número inteiro, isto é, k pertence ao conjunto Z={...,-2,-3,-1,0,1,2,3,...}.

Família de arcos: Uma família de arcos {AM} é o conjunto de todos os arcos com ponto inicial em A e extremidade em M.

Exemplo: Se um arco de circunferência tem origem em A e extremidade em M, com a primeira determinação positiva medindo $2\pi/3$, então os arcos desta família {AM}, medem:

Determinações positivas (sentido anti-horário)	
k=0	$\mu(AM)=2\pi/3$
k=1	$\mu(AM)=2\pi/3+2\pi=8\pi/3$
k=2	$\mu(AM)=2\pi/3+4\pi=14\pi/3$
k=3	$\mu(AM)=2\pi/3+6\pi=20\pi/3$
...	...
k=n	$\mu(AM)=2\pi/3+2n\pi=(2+6n)\ \pi/3$

Determinações negativas (sentido horário)	
k=-1	$\mu(AM)=2\pi/3-2\pi=-4\pi/3$
k=-2	$\mu(AM)=2\pi/3-4\pi=-6\pi/3$
k=-3	$\mu(AM)=2\pi/3-6\pi=-16\pi/3$
k=-4	$\mu(AM)=2\pi/3-8\pi=-22\pi/3$
...	...
k=-n	$\mu(AM)=2\pi/3-2n\pi=(2-6n)\ \pi/3$

Arcos côngruos e Ângulos

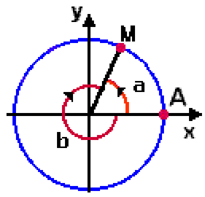
Arcos côngruos: Dois arcos são côngruos se a diferença de suas medidas é um múltiplo de 2π.

Exemplo: Arcos de uma mesma família são côngruos.

Ângulos: As noções de orientação e medida algébrica de arcos podem ser estendidas para ângulos, uma vez que a cada arco AM da circunferência trigonométrica corresponde a um ângulo central determinado pelas semi-retas OA e OM.

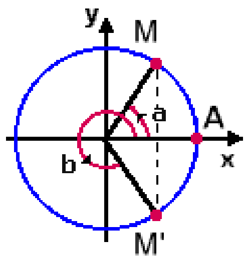
Como no caso dos arcos, podemos considerar dois ângulos orientados um positivo (sentido anti-horário) com medida algébrica *a* correspondente ao arco AM e outro negativo (sentido horário) com medida $b=a-2\pi$ correspondente ao arco AM.

Existem também ângulos com mais de uma volta e as mesmas noções apresentadas para arcos se aplicam para ângulos.



Arcos de mesma origem, simétricos em relação ao eixo OX

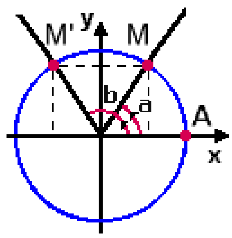
Sejam os arcos AM e AM' na circunferência trigonométrica, com A=(1,0) e os pontos M e M' simétricos em relação ao eixo horizontal OX. Se a medida do arco AM é igual a m, então a medida do arco AM' é dada por: $\mu(AM')=2\pi-m$.



Os arcos da família {AM}, aqueles que têm origem em A e extremidades em M, têm medidas iguais a $2k\pi+m$, onde k é um número inteiro e os arcos da família {AM'} têm medidas iguais a $2k\pi-m$, onde k é um número inteiro.

Arcos de mesma origem, simétricos em relação ao eixo OY

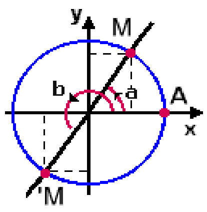
Sejam os arcos AM e AM' na circunferência trigonométrica com A=(1,0) e os pontos M e M' simétricos em relação ao eixo vertical OY. Se a medida do arco AM for igual a m, então a medida do arco AM' será dada pela expressão $\mu(AM')= \pi-m$.



Os arcos da família {AM'}, isto é, aqueles com origem em A e extremidade em M', medem $2k\pi+\pi-m=(2k+1)\ \pi-m$ onde k é um número inteiro.

Arcos com a mesma origem e extremidades simétricas em relação à origem

Sejam os arcos AM e AM' na circunferência trigonométrica com A=(1,0) e os pontos M e M' simétricos em relação a origem (0,0).



Se a medida do arco AM é igual a m, então a medida do arco AM' é dada por: $\mu(AM')=\pi+m$. Arcos genéricos com origem em A e extremidade em M' medem:

$$\boxed{\mu(AM') = 2k\,\pi + \pi + m = (2k+1)\,\pi + m}$$

Trigonometria: Exercícios sobre o círculo trigonométrico

Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco A de medida: A= 810 graus.

Resposta:

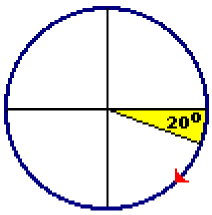
Para o arco de 810° devemos obter quantas voltas completas este arco tem pois 810°>360°. Dividindo 810 por 360, obteremos:

$$\begin{array}{r|l} 810 & 360 \\ \hline 90 & 2 \end{array}$$

Este resultado significa que precisaremos dar duas voltas completas e mais 90° para completarmos o arco de 810°. Assim a primeira determinação positiva será 90°.

Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco A de medida A=-2000 graus.

Resposta:



Para o arco de medida -2000° devemos obter quantas voltas completas este arco tem pois 2000°>360°. Dividindo 2000° por 360° teremos.

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 360 \\ \hline 20 & 5 \end{array}$$

Como a orientação é negativa, o ponto móvel se desloca no sentido horário. O resultado da divisão significa que o ponto móvel percorre a circunferência 5 vezes mais um arco de 20° no sentido horário, como pode ser observado na figura ao lado.

A 1a. determinação positiva é dada por 360°-20°=340°.

Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco de medida $38\pi/3$

Respota:

Como $2\pi=6\pi/3=6.(\pi/3)$ e $38\pi/3=38.(\pi/3)$, então dividindo 38 por 6, obtemos 6 voltas inteiras mais o resto que é 2

Multiplicando o resto 2 por $\pi/3$, dá a medida do ângulo procurado $A=2\pi/3$

Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco de medida:

(a) A=1620° (b) $A=-37\pi/3$ (c)A=-600° (d) $A=125\pi/11$

Respota:

a) 180 graus

b) $5\pi/3$rad

c) 336 graus

d) $14\pi/11$rad

Unindo as extremidades dos arcos da forma $(3n+2)\,\pi/6$, para n=0,1,2,..., obtém-se qual dos polígonos regulares?

(a) Quadrado (b) Hexágono (c) Octógono

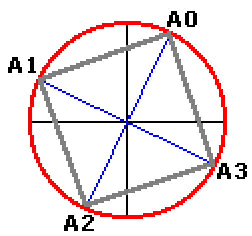
Respota:

O correto é o ítem a: Quadrado, pois tomando An como os arcos para n=0,1,2,..., teremos:

$A0= 5\pi/6$, $A1= 8\pi/6$, $A2=11\pi/6$, $A3=14\pi/6$, $A4=17\pi/6=5\pi/6+2\pi$.

Isto quer dizer que para n=4 temos a segunda determinação do arco $5\pi/6$ e para n>4 os arcos coincidem com os arcos determinados anteriomente.

Além disso, estes 4 pontos dividem a circunferência em 4 partes iguais pois eles estão $3\pi/6=\pi/2$ (rad) distantes um do outro.



Assim as extremidades dos arcos determinam um quadrado.

Verifique se os arcos de medidas $7\pi/3$ e $19\pi/3$ são arcos côngruos?

Respota:

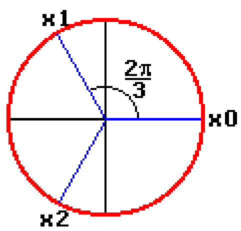
Como a diferença entre as medidas de dois arcos dados é:

$d=19\pi/3-7\pi/3=4\pi$

que é um múltiplo de 2π, então os arcos são côngruos.

Marcar no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas $x=2k\pi/3$, onde k é um número inteiro.

Respota:

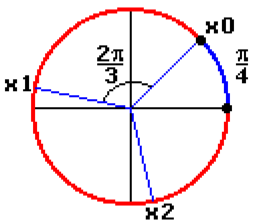


Para para cada k: x_0, x_1, x_2, ... são as medidas dos arcos, logo:

$x_0 = 0$
$x_1 = 2\pi/3$
$x_2 = 4\pi/3$
$x_3 = 6\pi/3 = 2\pi$

Marcar no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas $x=\pi/4+2k\pi/3$, onde k é um número inteiro.

Respota:



Para para cada k: x_0, x_1, x_2, ... são as medidas dos arcos, logo:

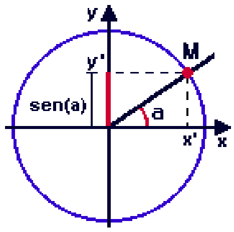
$x0=\pi/4$
$x1=\pi/4+2\pi/3=11\pi/12$
$x3=\pi/4+4\pi/3=19\pi/12$
$x4=\pi/4+6\pi/3=\pi/4+2\pi$

Seno e cosseno

Dada uma circunferência trigonométrica contendo o ponto A=(1,0) e um número real x, existe sempre um arco orientado AM sobre esta circunferência, cuja medida algébrica corresponde a x radianos.

Seno: No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em (0,0) e raio unitário. Seja M=(x',y') um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco AM que corresponde ao ângulo central a. A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OX determina um ponto C=(x',0) e a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OY determina outro ponto B=(0,y').

A medida do segmento OB coincide com a ordenada y' do ponto M e é definida como o seno do arco AM que corresponde ao ângulo a, denotado por sen(AM) ou sen(a).

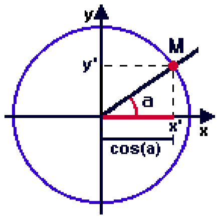


Como temos várias determinações para o mesmo ângulo, escreveremos

$$\boxed{sen(AM)=sen(a)=sen(a+2k\pi)=y'}$$

Para simplificar os enunciados e definições seguintes, escreveremos sen(x) para denotar o seno do arco de medida x radianos.

Cosseno: O cosseno do arco AM correspondente ao ângulo a, denotado por cos(AM) ou cos(a), é a medida do segmento 0C, que coincide com a abscissa x' do ponto M.



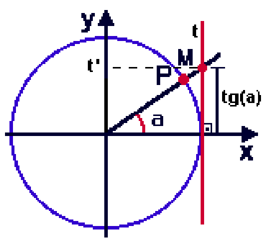
Como antes, existem várias determinações para este ângulo, razão pela qual, escrevemos

$$\boxed{cos(AM) = cos(a) = cos(a+2k\pi) = x'}$$

Tangente

Seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto A=(1,0). Tal reta é perpendicular ao eixo OX. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(1,t').

A ordenada deste ponto T, é definida como a tangente do arco AM correspondente ao ângulo a.



Assim a tangente do ângulo a é dada pelas suas várias determinações:

$$\boxed{tan(AM) = tan(a) = tan(a+k\pi) = \mu(AT) = t'}$$

Podemos escrever M=(cos(a),sen(a)) e T=(1,tan(a)), para cada ângulo a do primeiro quadrante. O seno, o cosseno e a tangente de ângulos do primeiro quadrante são todos positivos.

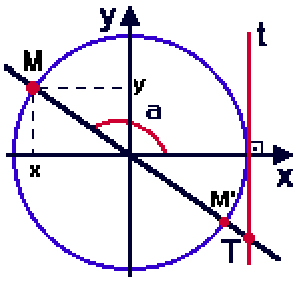
Um caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo horizontal OX. Neste caso:

cos(0)=1, sen(0)=0 e tan(0)=0

Ampliaremos estas noções para ângulos nos outros quadrantes

Ângulos no segundo quadrante

Se na circunferência trigonométrica, tomamos o ponto M no segundo quadrante, então o ângulo a entre o eixo OX e o segmento OM pertence ao intervalo $\pi/2<a<\pi$. Do mesmo modo que no primeiro quadrante, o cosseno está relacionado com a abscissa do ponto M e o seno com a ordenada deste ponto. Como o ponto M=(x,y) possui abscissa negativa e ordenada positiva, o sinal do seno do ângulo a no segundo quadrante é positivo, o cosseno do ângulo a é negativo e a tangente do ângulo a é negativa.



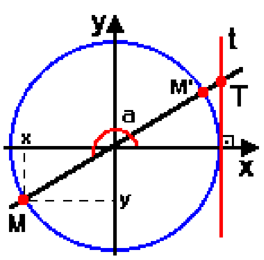
Outro caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo vertical OY e neste caso:

$\cos(\pi/2)=0$ e $\text{sen}(\pi/2)=1$

A tangente não está definida, pois a reta OM não intercepta a reta t, pois elas são paralelas.

Ângulos no terceiro quadrante

O ponto M=(x,y) está localizado no terceiro quadrante, o que significa que o ângulo pertence ao intervalo: $\pi<a<3\pi/2$. Este ponto M=(x,y) é simétrico ao ponto M'=(-x,-y) do primeiro quadrante, em relação à origem do sistema, indicando que tanto a sua abscissa como a sua ordenada são negativos. O seno e o cosseno de um ângulo no terceiro quadrante são negativos e a tangente é positiva.

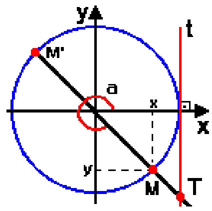


Em particular, se $a=\pi$ radianos, temos que

$\cos(\pi)=-1$, $\text{sen}(\pi)=0$ e $\tan(\pi)=0$

Ângulos no quarto quadrante

O ponto M está no quarto quadrante, $3\pi/2<a<2\pi$. O seno de ângulos no quarto quadrante é negativo, o cosseno é positivo e a tangente é negativa.

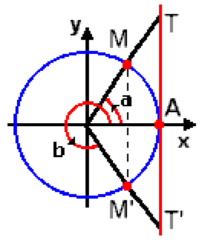


Quando o ângulo mede $3\pi/2$, a tangente não está definida pois a reta OP não intercepta a reta t, estas são paralelas. Quando $a=3\pi/2$, temos:

$\cos(3\pi/2)=0$, $\sin(3\pi/2)=-1$

Simetria em relação ao eixo OX

Em uma circunferência trigonométrica, se M é um ponto no primeiro quadrante e M' o simétrico de M em relação ao eixo OX, estes pontos M e M' possuem a mesma abscissa e as ordenadas possuem sinais opostos.

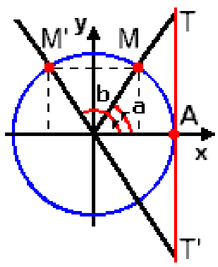


Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM', obtemos:

sen(a) = -sen(b)
cos(a) = cos(b)
tan(a) = -tan(b)

Simetria em relação ao eixo OU

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico a M em relação ao eixo OY, estes pontos M e M' possuem a mesma ordenada e as abscissa são simétricas.



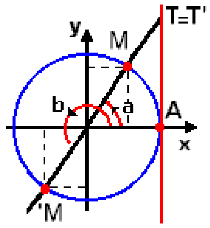
Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

sen(a) = sen(b)

cos(a) = -cos(b)
tan(a) = -tan(b)

Simetria em relação à origem

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico de M em relação a origem, estes pontos M e M' possuem ordenadas e abscissas simétricas.

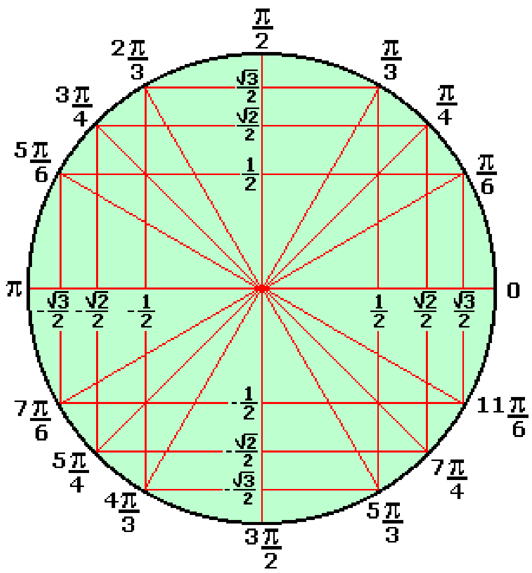


Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

sen(a) = -sen(b)
cos(a) = -cos(b)
tan(a) = tan(b)

Senos e cossenos de alguns ângulos notáveis

Uma maneira de obter o valor do seno e cosseno de alguns ângulos que aparecem com muita frequência em exercícios e aplicações, sem necessidade de memorização, é através de simples observação no círculo trigonométrico.



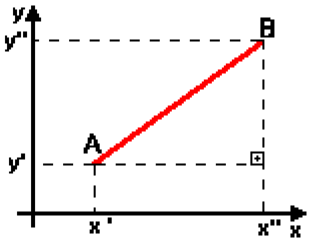
Primeira relação fundamental

Uma identidade fundamental na trigonometria, que realiza um papel muito importante em todas as áreas da Matemática e também das aplicações é:

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

que é verdadeira para todo ângulo a.

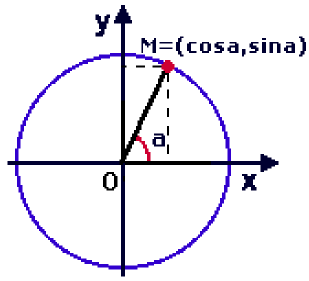
Necessitaremos do conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano, que nada mais é do que a relação de Pitágoras. Sejam dois pontos, A=(x',y') e B=(x",y").



Definimos a distância entre A e B, denotando-a por d(A,B), como:

$$D(A, B) = \sqrt{(x" - x')^2 + (y" - y')^2}$$

Se M é um ponto da circunferência trigonométrica, cujas coordenadas são indicadas por (cos(a),sen(a)) e a distância deste ponto até a origem (0,0) é igual a 1. Utilizando a fórmula da distância, aplicada a estes pontos, $d(M,0) = [(\cos(a)-0)^2+(\text{sen}(a)-0)^2]^{1/2}$, de onde segue que



$1=\cos^2(a)+\sin^2(a)$.

Segunda relação fundamental

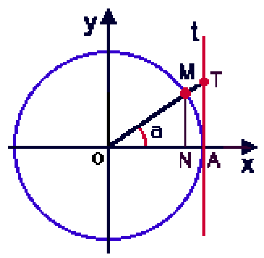
Outra relação fundamental na trigonometria, muitas vezes tomada como a definição da função tangente, é dada por:

$$\tan(a) = \frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}$$

Deve ficar claro, que este quociente somente fará sentido quando o denominador não se anular.

Se a=0, a=π ou a=2π, temos que sen(a)=0, implicando que tan(a)=0, mas se a=π/2 ou a=3π/2, segue que cos(a)=0 e a divisão acima não tem sentido, assim a relação tan(a)=sen(a)/cos(a) não é verdadeira para estes últimos valores de a.

Para a ≠ 0, a ≠ π, a ≠ 2π, a ≠ π/2 e a ≠ 3π/2, considere novamente a circunferência trigonométrica na figura seguinte.



Os triângulos OMN e OTA são semelhantes, logo:

$$\frac{AT}{MN} = \frac{OA}{ON}$$

Como AT=|tan(a)|, MN=|sen(a)|, OA=1 e ON=|cos(a)|, para todo ângulo a, $0 \leq a \leq 2\pi$ com $a \neq \pi/2$ e $a \neq 3\pi/2$ temos

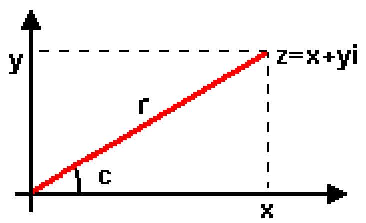
$$\tan(a) = \frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}$$

Forma polar dos números complexos

Um número complexo não nulo z=x+yi, pode ser representado pela sua forma polar:

$$z = r\,[\cos(c) + i\,\text{sen}(c)]$$

onde $r=|z|=R[x^2+y^2]$, $i^2=-1$ e c é o argumento (ângulo formado entre o segmento Oz e o eixo OX) do número complexo z.



A multiplicação de dois números complexos na forma polar:

$$A = |A|\,[\cos(a)+i\text{sen}(a)]$$

$$B = |B|\,[\cos(b)+i\text{sen}(b)]$$

é dada pela Fórmula de De Moivre:

$$AB = |A||B|\,[\cos(a+b)+i\text{sen}(a+b)]$$

Isto é, para multiplicar dois números complexos em suas formas trigonométricas, devemos multiplicar os seus módulos e somar os seus argumentos.

Se os números complexos A e B são unitários então |A|=1 e |B|=1, e nesse caso

$$A = \cos(a) + i\,\text{sen}(a)$$
$$B = \cos(b) + i\,\text{sen}(b)$$

Multiplicando A e B, obtemos

$$AB = \cos(a+b) + i\,\text{sen}(a+b)$$

Existe uma importantíssima relação matemática, atribuída a Euler (lê-se "óiler"), garantindo que para todo número complexo z e também para todo número real z:

$$e^{iz} = \cos(z) + i\,\text{sen}(z)$$

Tal relação, normalmente é demonstrada em um curso de Cálculo Diferencial, e, ela permite uma outra forma para representar números complexos unitários A e B, como:

$$A = e^{ia} = \cos(a) + i\,\text{sen}(a)$$

$$B = e^{ib} = \cos(b) + i\,\text{sen}(b)$$

onde a é o argumento de A e b é o argumento de B. Assim,

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b)+i\text{sen}(a+b)$$

Por outro lado

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \,.\, e^{ib} = [\cos(a)+i\text{sen}(a)]\,[\cos(b)+i\text{sen}(b)]$$

e desse modo

$$e^{i(a+b)} = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$
$$+ i\,[\cos(a)\text{sen}(b) + \cos(b)\text{sen}(a)]$$

Para que dois números complexos sejam iguais, suas partes reais e imaginárias devem ser iguais, logo

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a+b) = \cos(a)\text{sen}(b) + \cos(b)\text{sen}(a)$$

Para a diferença de arcos, substituímos b por -b nas fórmulas da soma

$$\cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \text{sen}(a)\text{sen}(-b)$$

$$\text{sen}(a+(-b)) = \cos(a)\text{sen}(-b) + \cos(-b)\text{sen}(a)$$

para obter

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a-b) = \cos(b)\text{sen}(a) - \cos(a)\text{sen}(b)$$

Seno, cosseno e tangente da soma e da diferença

Na circunferência trigonométrica, sejam os ângulos a e b com 0□a□2π e 0□b□2π, a>b, então;

sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)

cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)

Dividindo a expressão de cima pela de baixo, obtemos:

$$\tan(a+b)=\frac{\text{sen}(a)\cos(b)+\cos(a)\text{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)-\text{sen}(a)\text{sen}(b)}$$

Dividindo todos os quatro termos da fração por cos(a)cos(b), segue a fórmula:

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Como

sen(a-b) = sen(a)cos(b) - cos(a)sen(b)

cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)

podemos dividir a expressão de cima pela de baixo, para obter:

$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Trigonometria: Exercícios sobre seno, cosseno e tangente

Determine o valor de sen(4290°).

Solução:

Dividindo 4290 por 360, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 4290 & 360 \\ \hline 690 & 11 \\ 330 & \end{array}$$

Assim, 4290=11.360+330, isto é, os arcos de medidas 4290° e 330° são côngruos. Então: sen(4290°)=sen(330°)=-1/2.

Determine os valores de cos(3555°) e de sen(3555°).

Solução:

Dividindo 3555 por 360, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 3555 & 360 \\ \hline 315 & 9 \end{array}$$

Assim, 3555=9.360+315 e isto quer dizer que os arcos de medidas 3555° e 315° são côngruos, logo:

cos(3555°)=cos(315°)= $\sqrt{2}$ /2

sen(3555°)=sen(315°)=- $\sqrt{2}$ /2

Determine o valor de sen(-17π/6).

Solução:

Como

sen(-17π/6)=sen(-17π/6+4π)=sen(7π/6)

Então

sen(-17π/6)=-1/2

Determine o valor de cos(9π/4).

Solução:

Como

cos(9π/4)=cos(9π/4-2π)=cos(π/4)

Então

cos(9π/4)= $\sqrt{2}$ /2

Determine o valor de tan(510°).

Solução:

Como

tan(510°)=tan(510°-360°)=tan(150°)

Então

tan(510°) = - $\sqrt{3}$ /3

Determine o valor de tan(-35π/4).

Solução:

Como

tan(-35π/4)=tan(-35π/4+5.2π)=tan(5π/4)

Portanto

tan(-35π/4)=1

Se x está no segundo quadrante e cos(x)=-12/13, qual é o valor de sen(x)?

Solução:

Como $\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$, então:

$\text{sen}^2(x)+(-12/13)^2=1$

$\text{sen}^2(x)=1-(144/169)$

$\text{sen}^2(x)=25/169$

Como o ângulo x pertence ao segundo quadrante, o sen(x) deve ser positivo, logo:

sen(x)=5/13

Quais são os valores de y que satisfazem a ambas as igualdades:

sen(x)=(y+2)/y e cos(x)=(y+1)/y

Solução:

Como $sen^2(x)+cos^2(x)=1$, segue que:

$[(y+2)/y]^2+[(y+1)/y]^2=1$

$(y^2+4y+4)/y^2+(y^2+2y+1)/y^2=1$

$y^2+6y+5=0$

y=3 e y=-1

Quais são os valores de m que satisfazem à igualdade cos(x)=2m-1?

Solução:

Para que a igualdade cos(x)=2m-1 seja satisfeita, devemos ter

$$-1 \leq 2m-1 \leq 1$$

$$0 \leq 2m \leq 2$$

$$0 \leq m \leq 1$$

Quais são os valores de m que satisfazem à igualdade sen(x)=2m-5?

Solução:

Para que a igualdade sen(x)=2m-5 seja satisfeita, devemos ter

$$-1 \leq 2m-5 \leq 1$$

$$4 \leq 2m \leq 6$$

$$2 \leq m \leq 3$$

Mostre que a função definida por f(x)=cos(x) é par, isto é, cos(-a)=cos(a), para qualquer a real.

Solução:

$$\begin{aligned}\cos(-a) &= \cos(2\pi-a)\\ &= \cos(2\pi).\cos(a) + \text{sen}(2\pi).\text{sen}(a)\\ &= 1.\cos(a) + 0.\text{sen}(a)\\ &= \cos(a)\end{aligned}$$

Mostre que a função definida por f(x)=sen(x) é ímpar, isto é, sen(-a)=-sen(a), para qualquer a real.

Solução:

$$\begin{aligned}\text{sen}(-a) &= \text{sen}(2\pi-a)\\ &= \text{sen}(2\pi).\cos(a) - \cos(2\pi).\text{sen}(a)\\ &= 0 . \cos(a) - 1 . \text{sen}(a)\\ &= -\text{sen}(a)\end{aligned}$$

Mostre que a função definida por f(x)=tan(x) é ímpar, isto é, tan(-a)=-tan(a), para qualquer a real, tal que $\cos(a) \neq 0$.

Solução:

tan(-a)=sen(-a)/cos(-a)=-sen(a)/cos(a)=-tan(a)

Se x está no terceiro quadrante e tan(x)=3/4, calcular o valor de cos(x).

Solução:

Se tan(x)=3/4, então sen(x)/cos(x)=3/4, logo:

sen(x)=(3/4)cos(x)

Substituindo este último resultado na relação fundamental da trigonometria: $sen^2(x)+cos^2(x)=1$, obtemos:

$(9/16)cos^2(x)+cos^2(x)=1$

Como x pertence ao terceiro quadrante, cos(x) é negativo e resolvendo esta equação do segundo grau, segue que:

cos(x)=-4/5.

Se x pertence ao segundo quadrante e $sen(x)=1/\sqrt{26}$, calcular o valor de tan(x).

Solução:

Seja $sen(x)=1/\sqrt{26}$. Substituindo este dado na relação fundamental da trigonometria:
$sen^2(x)+cos^2(x)=1$, obtemos:

$(1/\sqrt{26})^2+cos^2(x)=1$

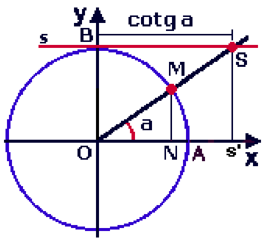
Como x pertence ao segundo quadrante, cos(x) é negativo e resolvendo a equação do segundo grau, segue que:

$cos(x)=-5/\sqrt{26}$

$tan(x)=(1/\sqrt{26})/(-5/\sqrt{26})=-1/5$

Cotangente

Seja a reta s tangente à circunferência trigonométrica no ponto B=(0,1). Esta reta é perpendicular ao eixo OY. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente s no ponto S=(s',1).



A abscissa s' deste ponto, é definida como a cotangente do arco AM correspondente ao ângulo a.

Assim a cotangente do ângulo a é dada pelas suas várias determinações

cot(AM) = cot(a) = cot(a+2kπ) = µ(BS) = s'

Os triângulos OBS e ONM são semelhantes, logo:

$$\frac{BS}{OB} = \frac{ON}{MN}$$

Como a circunferência é unitária |OB|=1

$$\cot(a)=\frac{\cos(a)}{\text{sen}(a)}$$

que é equivalente a

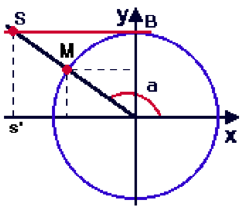
$$\cot(a)=\frac{1}{\tan(a)}$$

A cotangente de ângulos do primeiro quadrante é positiva.

Quando a=0, a cotangente não existe, pois as retas s e OM são paralelas.

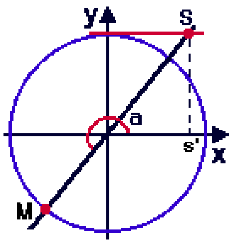
Ângulos no segundo quadrante

Se o ponto M está no segundo quadrante, de modo que o ângulo pertence ao intervalo π/2<a<π, então a cotangente de a é negativa. Quando a=π/2, tem-se que cot(π/2)=0.



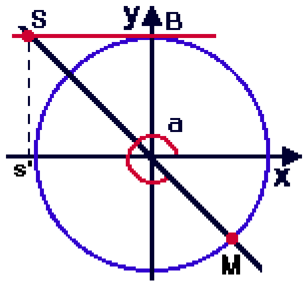
Ângulos no terceiro quadrante

Se o ponto M está no terceiro quadrante, o ângulo está no intervalo π<a<3π/2 e nesse caso, a cotangente é positiva. Quando a=π, a cotangente não existe, as retas que passam por OM e BS são paralelas.



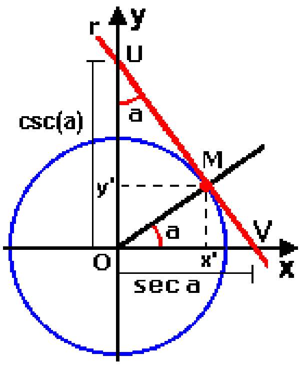
Ângulos no quarto quadrante

Se o ponto M está no quarto quadrante, o ângulo a pertence ao intervalo 3π/2<a<2π, assim a cotangente de a é negativa. Se a=3π/2, cot(3π/2)=0.



Secante e cossecante

Seja a reta r tangente à circunferência trigonométrica no ponto M=(x',y'). Esta reta é perpendicular à reta que contém o segmento OM. A interseção da reta r com o eixo OX determina o ponto V=(v,0). A abscissa do ponto V, é definida como a secante do arco AM correspondente ao ângulo a.



Assim a secante do ângulo a é dada pelas suas várias determinações:

sec(AM) = sec(a) = sec(a+2kπ) = µ(OV) = v

A interseção da reta r com o eixo OY é o ponto U=(0,u). A ordenada do ponto U, é definida como a cossecante do arco AM correspondente ao ângulo a. Então a cossecante do ângulo a é dada pelas suas várias determinações

csc(AM) = csc(a) = csc(a+2kπ) = µ(OU) = u

Os triângulos OMV e Ox'M são semelhantes, deste modo,

$$\frac{OV}{OM} = \frac{OM}{Ox'}$$

que pode ser escrito como

$$\sec(a)=\frac{1}{\cos(a)}$$

se cos(a) é diferente de zero.

Os triângulos OMU e Ox'M são semelhantes, logo:

$$\frac{OU}{OM} = \frac{OM}{x'M}$$

que pode ser escrito como

$$csc(a)=\frac{1}{sen(a)}$$

desde que sen(a) seja diferente de zero.

Algumas propriedades da secante e da cossecante

Observando as representações geométricas da secante e da cossecante, podemos constatar as seguintes propriedades.

Como os pontos U e V sempre estão no exterior da circunferência trigonométrica, as suas distâncias até o centro da circunferência é sempre maior ou igual à medida do raio unitário. Daí segue que:

$sec(a) \leq -1$ ou $sec(a) \geq 1$

$csc(a) \leq -1$ ou $csc(a) \geq 1$

O sinal da secante varia nos quadrantes como o sinal do cosseno, positivo no 1o. e no 4o. quadrantes e negativo no 2o. e no 3o. quadrantes.

O sinal da cossecante varia nos quadrantes como o sinal do seno, positivo no 1o. e no 2o. quadrantes e negativo no 3o. e no 4o. quadrantes.

Não existe a secante de ângulos da forma $a=\pi/2+k\pi$, onde k é um número inteiro, pois nesses ângulos o cosseno é zero.

Não existe a cossecante de ângulos da forma $a=k\pi$, onde k é um número inteiro, pois são ângulos cujo seno é zero.

Relações trigonométricas com secante e cossecante

Valem as seguintes relações trigonométricas

$sec^2(a) = 1 + tan^2(a)$

$csc^2(a) = 1 + cot^2(a)$

Estas fórmulas são justificadas como segue

$$1+tan^2(a)=1+\frac{sen^2(a)}{cos^2(a)} = \frac{1}{cos^2(a)} =sec^2(a)$$

$$1+cot^2(a)=1+\frac{cos^2(a)}{sen^2(a)} = \frac{1}{sen^2(a)} =csc^2(a)$$

Trigonometria: Exercícios sobre cotangente, secante e cossecante

Calcular:

(a) sec(405°) (b) csc(-150°) (c) $cot(19\pi/3)$

Solução:

a) sec(405°)=

sec(405°-360°)=

$sec(45°)=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$

b) csc(-150°)=

csc(-150°+360°)=

1/sen(210°)=1/-sen(30°)=-2

c) $cot(19\pi/3)=cot(\pi/3)=$

$cos(\pi/3)/sen(\pi/3)=(1/2)/(\sqrt{3}/2)=1/\sqrt{3}$

Mostre que:

$$\frac{sen^2(x)+2\,cos^2(x)}{sen(x)cos(x)} = tan(x)+2cot(x)$$

Solução:

$$\frac{sen^2(x)+2cos^2(x)}{sen(x)cos(x)} = \frac{sen^2(x)}{sen(x)cos(x)} + \frac{2cos^2(x)}{sen(x)cos(x)}$$

$$= \frac{sen(x)}{cos(x)} + \frac{2cos(x)}{sen(x)}$$

$$= tan(x)+2cot(x)$$

Mostre que:

$$tan(x)+cot(x) = \frac{csc(x)}{cos(x)}$$

Solução:

$$tan(x)+cot(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} + \frac{cos(x)}{sen(x)}$$

$$= \frac{sen^2(x)+cos^2(x)}{sen(x)cos(x)}$$

$$= \frac{1}{sen(x)cos(x)}$$

$$= \frac{csc(x)}{cos(x)}$$

Verifique que

$sen4(x)-cos4(x) = sen^2(x) - cos^2(x)$

Solução:

$$Sen4(x)-cos4(x) = [sen^2(x)-cos^2(x)].[sen^2(x)+cos^2(x)]$$
$$= [sen^2(x)-cos^2(x)].1$$
$$= sen^2(x)-cos^2(x)$$

Fazendo a substituição x=5 cos(t), com t no primeiro quadrante, demonstre que

$(25-x^2)1/2 = 5\ sen(t)$

Solução:

$$[25-x^2]1/2 = [25-(5cos(t))^2]1/2$$
$$= [25-25cos^2(t)]1/2$$
$$= [25(1-cos^2(t))]1/2$$
$$= [25sen^2(t)]1/2$$
$$= 5|sen(t)|$$

Como t é um ângulo do primeiro quadrante sen(t)>0 então 5|sen(t)|=5sen(t).

Fazendo a substituição x=2 tan(t), com t no quarto quadrante, demonstre que

$1/(4+x^2)1/2 = cos(t)/2$

Solução:

$$[4+x^2]1/2 = [4-(2tan\ t)^2]1/2$$
$$= [4-4tan^2(t)]1/2$$
$$= [4(1+tan^2(t))]1/2$$
$$= [4sec^2(t)]1/2$$
$$= 2|sec(t)|$$

Como t é um ângulo do quarto quadrante, então $cos(t)\geq 0$, logo:

$2|sec(t)|=2|1/cos(t)|=2/cos(t)$.

Assim:

$1/(4+x^2)^{1/2}=cos(t)/2$

Fórmulas de arco duplo, arco triplo e arco metade

Conhecendo-se as relações trigonométricas de um arco de medida *a*, podemos obter estas relações trigonométriuca para arcos de medidas 2a, 3a e a/2, que são consequências imediatas das fórmulas de soma de arcos.

Fórmulas de arco duplo

Como:

$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$

$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$

dividindo a primeira expressão pela segunda, obtemos:

$$tan(a+b) = \frac{sen(a)cos(b)+cos(a)sen(b)}{cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)}$$

Dividindo todos os 4 termos da fração por cos(a)cos(b), segue a fórmula:

$$tan(a+b) = \frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$$

Tomando b=a, obtemos algumas fórmulas do arco duplo:

$sen(2a)=$

$sen(a)cos(a)+cos(a)sen(a)=$

$2sen(a)cos(a)\ cos(2a)=$

$cos(a)cos(a)-sen(a)sen(a)=$

$cos^2(a)-sin^2(a)$

de onde segue que

$$tan(2a)= \frac{tan(a)+tan(a)}{1-tan(a)tan(a)} = \frac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$$

Substituindo $sin^2(a)=1-cos^2(a)$ nas relações acima, obtemos uma relação entre o cosseno do arco duplo com o cosseno do arco:

$$\mathbf{cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)}$$

$$\mathbf{= cos^2(a) - (1-cos^2(a)}$$

$$\mathbf{= 2\ cos^2(a) - 1}$$

Substituindo $cos^2(a)=1-sin^2(a)$ nas relações acima, obtemos uma relação entre o seno do arco duplo com o seno do arco:

$$\mathbf{cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)}$$

$$\mathbf{= 1 - sin^2(a) - sin^2(a))}$$

$$\mathbf{= 1 - 2sin^2(a)}$$

Fórmulas de arco triplo

Se b=2a em

$sen(a+b)=sen(a)cos(b)+cos(a)sen(b)$, então

$$\mathbf{sen(3a)= sen(a+2a)}$$

$$\mathbf{= sen(a)cos(2a) + cos(a)sen(2a)}$$

$$\mathbf{= sen(a)[1-2sin^2(a)]+[2sen(a)cos(a)]cos(a)}$$

$$\mathbf{= sen(a)[1-2sin^2(a)]+2sen(a)cos^2(a))}$$

= sen(a)[1-2sin²(a)]+2sen(a)[1-sin²(a)]

= sen(a)-2sin³(a))+2sen(a)-2sin²(a))

= 3 sen(a) - 4 sin³(a)

Se b=2a em

cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b), então

cos(3a)= cos(a+2a)

= cos(a)cos(2a) - sen(a)sen(2a)

= cos(a)[2cos²(a)-1]-sen(a)[2sen(a)cos(a)]

= cos(a)[2cos²(a)-1]-2sen²(a)cos(a)

= cos(a)[2cos²(a)-1-2(1-cos²(a))]

= cos(a)[2cos²(a)-3+2cos²(a)]

= cos(a)[4cos²(a)-3]

= 4 cos³(a) - 3 cos(a)

As fórmulas do arco triplo são

sen(3a) = 3sen(a)-4sin³(a)

cos(3a) = 4cos³(3a)-3cos(a)

Fórmulas de arco metade

Partindo das fórmulas do arco duplo

cos(2a) = 2cos²(a) – 1

cos(2a) = 1 - 2sin²(a)

e substituindo 2a=c, obtemos:

cos(c) = 2cos²(c/2) – 1

cos(c) = 1 - 2sin²(c/2)

Assim

$$\text{sen}^2(c/2) = \frac{1-\cos(c)}{2}$$

$$\cos^2(c/2) = \frac{1+\cos(c)}{2}$$

Dividindo a expressão de cima pela de baixo, obtemos a tangente da metade do arco, dada por:

$$\tan^2(c/2)= \frac{1-\cos(c)}{1+\cos(c)}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtemos uma fórmula que expressa a tangente da metade do arco em função do cosseno do arco.

Trigonometria: Exercícios sobre adição e subtração de arcos

Se cos(a)=3/5 e sen(b)=1/3, com a pertencente ao 3o. quadrante e b pertencente ao 2o. quadrante, calcular:

a) sen(a+b)

b) sen(a-b)

c) csc(a+b)

d) csc(a-b)

Solução:

Sabemos que

sen(a±b)=sen(a)cos(b)±sen(b)cos(a) e que vale a relação fundamental cos²(x)+sen²(x)=1, para todo x real, assim:

sen²(a)=1-(3/5)²=4/5 e cos²(b)=1-(1/3)²=8/9

Com a notação R[x], para a raiz quadrada de x>0, segue:

sen(a)=-2/R[5] (a pertence ao 3º quadrante)

cos(b)=-2R[2]/3 (b pertence ao 2º quadrante)

Assim:

sen(a+b)=(-2/R[5])(-2R[2]/3)+(1/3)(3/5)= 4R[10]/15+1/5sen(a-b) =

(-2/R[5])(-2R[2]/3)-(1/3)(3/5)=

4R[10]/15-1/5 csc(a+b) =

1/sen(a+b) = 15/(4R[10]+3)csc(a-b) =

1/sen(a-b) = 15/(4R[10]-3)

Se sen(a)=2/3 e cos(b)=3/4, com a pertencente ao 2o. quadrante e b pertencente ao 1o. quadrante, calcular:

a) sen(a+b)

b) sen(a-b)

c) cos(a+b)

d) cos(a-b)

Solução: Temos que

sen(a±b)=sen(a)cos(b)±sen(b)cos(a),

que vale a relação fundamental

cos²(x)+sen²(x)=1, para todo x real e:

cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)

cos(a-b)=cos(a)cos(b)+sen(a)sen(b)

Calcularemos agora os valores de sen(b) e de cos(a).

$sen^2(b)=1-(2/3)^2=5/9$ e $cos^2(a)=1-(3/4)^2=7/16$

Usando a notação R[x] para a raiz quadrada de $x \geq 0$, obteremos:

sen(b)=R[5]/3 (a pertence ao 2º quadrante)

cos(a)=R[7]/4 (b pertence ao 1º quadrante)

Assim,

sen(a+b)=

(2/3)(3/4)+(R[5]/3)(R[7]/4)=

R[35]/12+1/2sen(a-b)=

(2/3)(3/4)-(R[5]/3)(R[7]/4)=

1/2-R[35]/12 cos(a+b)=

(R[7]/4)(3/4)-(2/3)(R[5]/3)=

3R[7]/16-2R[5]/9cos(a-b)=

(R[7]/4)(3/4)+(2/3)(R[5]/3)=

3R[7]/16+2R[5]/9

Dado o ângulo de medida $a=\pi/12$ radianos, determinar:

sen(a) (b) cos(a) (c) tan(a)

Solução:

Como $\pi/3$ e $\pi/4$ são arcos notáveis, escreva $\pi/12=\pi/3-\pi/4$, basta utilizar as fórmulas do seno e do cosseno da diferença de dois ângulos:

$sen(\pi/12)=$

$sen(\pi/3-\pi/4)=$

$sen(\pi/3)cos(\pi/4)-sen(\pi/4)cos(\pi/3)=$

$cos(\pi/12)=cos(\pi/3-\pi/4)=$

$cos(\pi/3)cos(\pi/4)-sen(\pi/4)sen(\pi/3)=...$

$tan(\pi/12)=sen(\pi/12)/cos(\pi/12)=...$

Dado o ângulo de medida a=15 graus, determinar:

a) sen(a)

b) cos(a)

c) tan(a)

Solução: Como 45º e 30º são ângulos notáveis, escreva 15º=45º-30º e utilize as fórmulas:

$sen(15°)=sen(45°-30°)=$

$sen(45°)cos(30°)-sen(30°)cos(45°)=$

$cos(15°)=cos(45°-30°)=$

$cos(45°)cos(30°)-sen(30°)sen(45°)=$

$tan(15°)=sen(15°)/cos(15°)=...$

Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br