Математическая модель шарика, двигающегося по кривой (по «яме»)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F_{\text{сопр.}}$ – уравнение Лагранжа 2-го рода (1).

$L = U - V$ – Лагранжиан (U – кинетическая энергия, V – потенциальная энергия).

$F_{\text{сопр.}} = -kv$ – сила сопротивления (k – коэффициент сопротивления, v - скорость).

$v = \dot{x}$ – скорость равна производной от координаты.

$L = \frac{mv^2}{2} - mgh = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgS(x)$, где S(x) – функция сплайна «ямы» (2).

m – масса шарика,

g – ускорение свободного падения,

k – коэффициент сопротивления.

Подставим найденное уравнение (2) в уравнение Лагранжа (1).

$\frac{\partial L}{\partial x} = -mg\frac{\partial S(x)}{\partial x}$ $\quad$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

Получаем:

$$m\ddot{x} + mg\frac{\partial S(x)}{\partial x} = -k\dot{x}$$

Поделив данное уравнение на m и перенеся слагаемое с функцией сплайна в правую сторону получим:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\dot{x} - g\frac{\partial S(x)}{\partial x}$$

Выведенное дифференциальное уравнение будет уравнением движения шарика по кривой (по «яме»).