# 自动控制理论 A

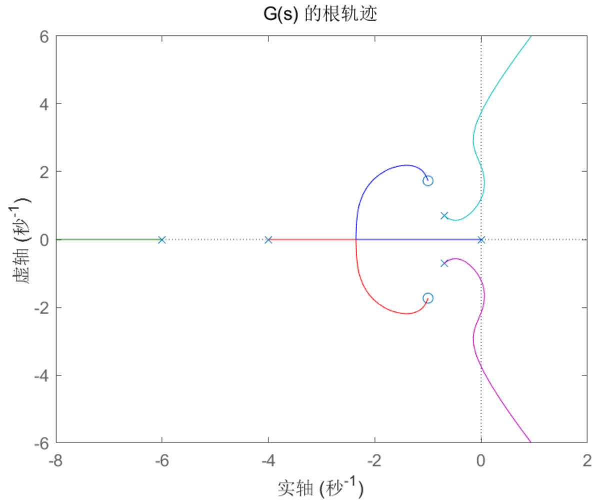
## Matlab 仿真实验报告

| | |
|---|---|
| 实 验 名 称 | ：根轨迹与频率特性分析 |
| 姓　　　名 | ：Maxwell Jay |
| 学　　　号 | ： |
| 班　　　级 | ： |
| 撰 写 日 期 | ：2024 年 12 月 22 日 |

哈尔滨工业大学（深圳）

# 一、 基于根轨迹的性能分析

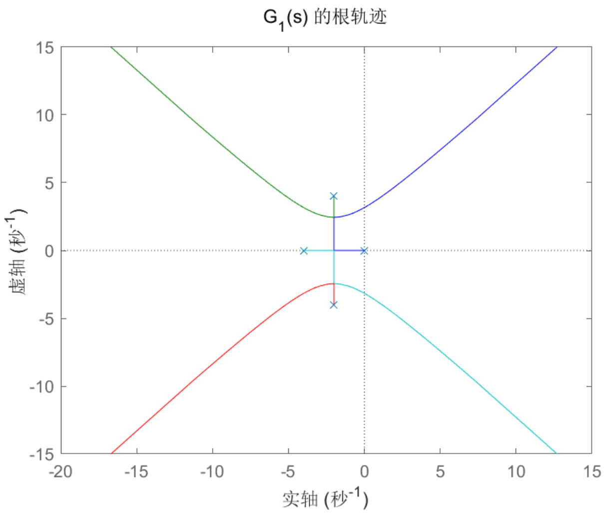
1. 对开环传递函数 $G(s)$、$G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 分别画出关于根轨迹增益 $k$ 的闭环根轨迹图，给出根轨迹的分离点、与虚轴的交点，给出使闭环系统稳定的参数 $k$ 的范围。




分离点：$(-2.36, 0)$

与虚轴交点：$(0, \pm j1.21), (0, \pm j2.15), (0, \pm j3.75)$

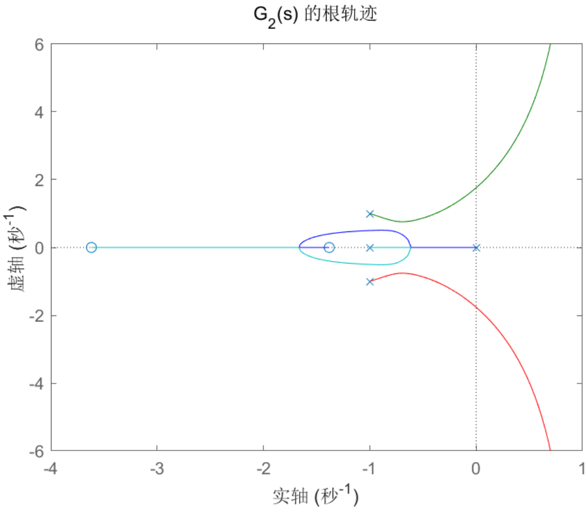
系统稳定 $k$ 范围：$k \in (0, 15.6) \cup (67.5, 163)$




分离点：$(-2.0, 0)$

与虚轴交点：$(0, j0), (0, \pm j3.16)$

系统稳定 $k$ 范围：$k \in (0, 260)$

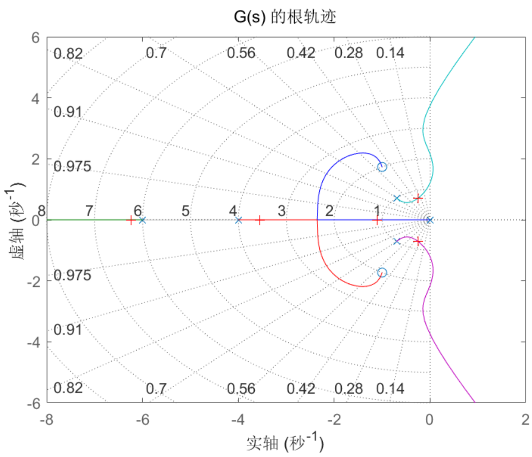


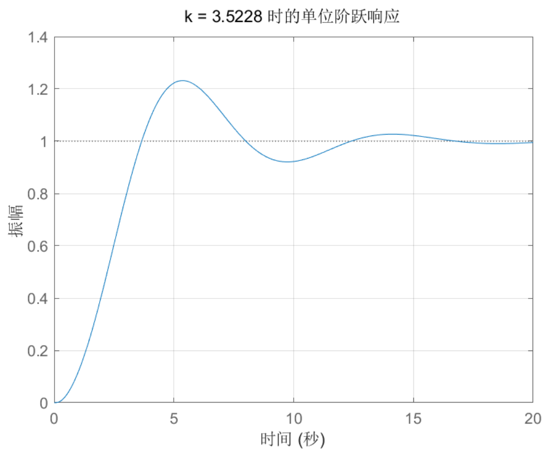

分离点：$(-0.614, 0)$

与虚轴交点：$(0, \pm j0), (0, \pm j1.76)$

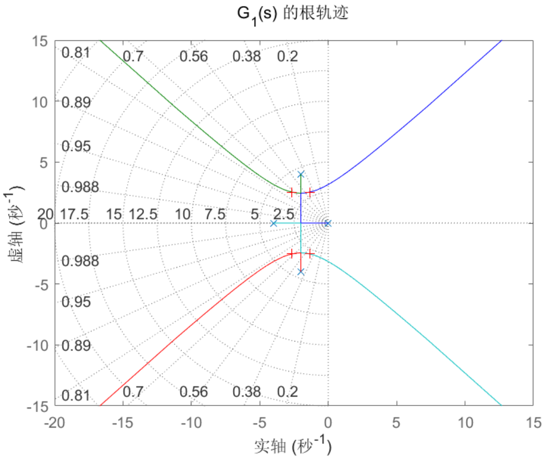
系统稳定 $k$ 范围：$k \in (0, 1.45)$

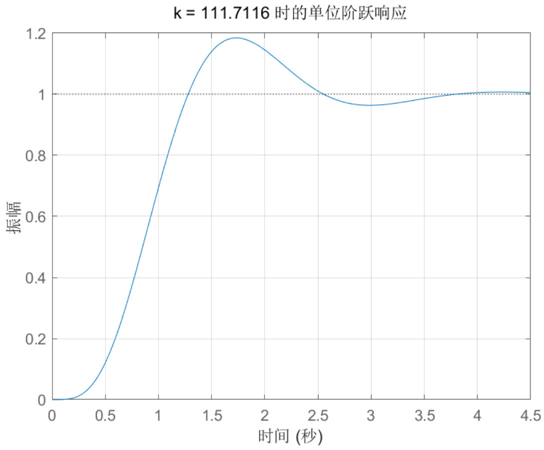
2. 对开环传递函数 $G(s)$、$G_1(s)$ 和 $G_2(s)$，借助等阻尼比射线，找出使闭环主导极点的阻尼比在 0.3～0.8 之间的某一根轨迹增益，画出在该增益下单位反馈闭环系统的阶跃响应。比较从阶跃响应上得到超调与从根轨迹信息框里的超调，进而给出简单的结论。



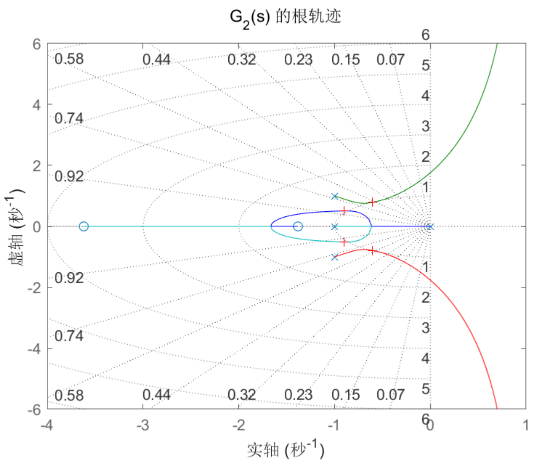



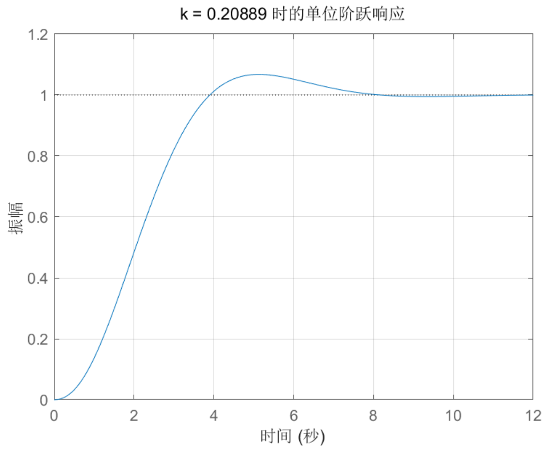

选取的极点对应增益为 $k = 3.5228$，阻尼比为 0.33，显示超调为 33.4%，与绘制的单位阶跃响应所示一致。






选取的极点对应增益为 $k = 111.7116$，显示超调为 19.5%，与绘制的单位阶跃响应所示一致。






选取的极点对应增益为 $k = 0.2089$，阻尼比为 0.603，显示超调为 9.31%，与绘制的单位阶跃响应所示一致。

结论：根轨迹上主导极点的位置能够指示系统单位阶跃响应的性能。当所有极点位于左半平面时，系统对于阶跃信号的响应稳定，并且阻尼比越小，超调越少。

3. 对开环传递函数 $G_3(s)$画出不同零点时的根轨迹，并与不含零点时的根轨迹进行比较，给出简单的结论。

**要求**：给出画根轨迹的 m 文件的代码，画出根轨迹，给出单位阶跃响应图。

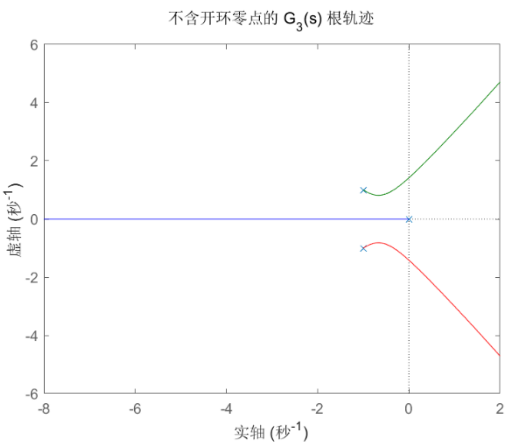
MATLAB 代码如下：

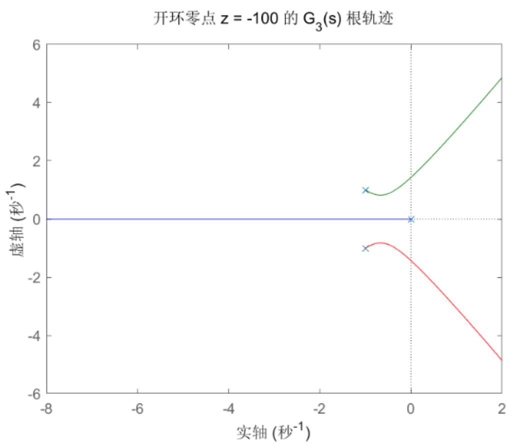
```
% File: root_zero.m
function sys = root_zero(z)
    num = [1, -z];
    den = [1 2 2 0];
    sys = tf(num, den);
end
```

```
% File: root_locus_G3.m
clc; clear; close all;
```

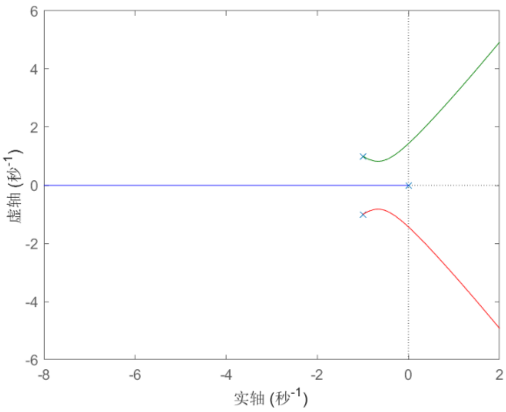
```
num3 = 1;
den3 = [1 2 2 0];
G3 = tf(num3, den3);

% 不含开环零点的 G_3(s) 根轨迹
figure(1);
rlocus(G3);
title('不含开环零点的 G_3(s) 根轨迹');
axis([-8 2 -6 6]);
saveas(gcf, 'locus_G3_nozero.png');

% 含开环零点的 G_3(s) 根轨迹
z = [-100, -75, -50, -25, -5, -4, -3, -2, -1, 0];
for i = 1:length(z)
    G3 = root_zero(z(i));
    figure(2);
    rlocus(G3);
    title('开环零点 z = ' + string(z(i)) + ' 的 G_3(s) 根轨迹');
    axis([-8 2 -6 6]);
    saveas(gcf, 'locus_G3_' + string(z(i)) + '.png');
end
```

结果：

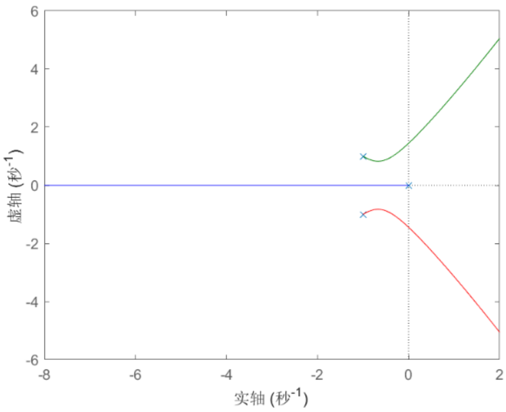


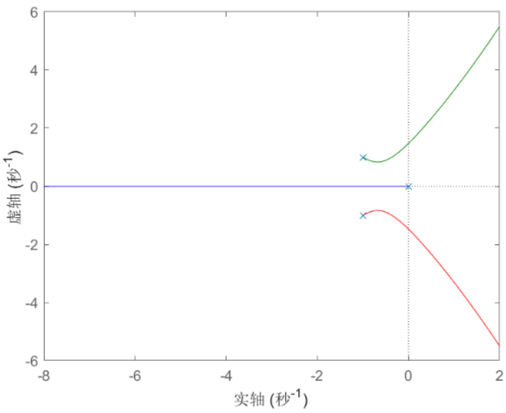
开环零点 z = -75 的 $G_3(s)$ 根轨迹



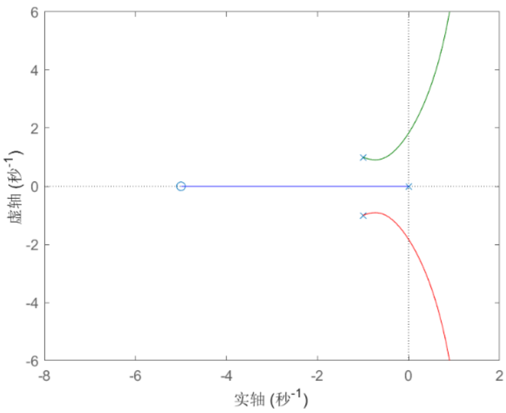

开环零点 z = -50 的 $G_3(s)$ 根轨迹



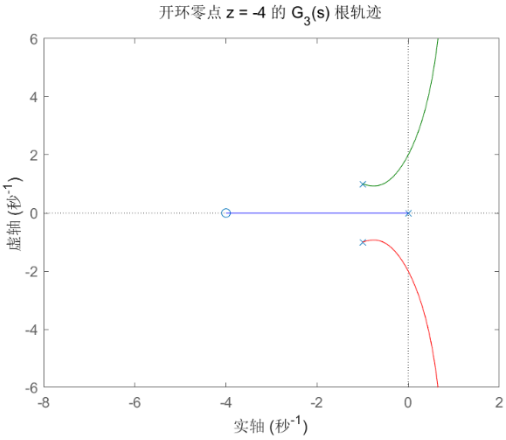

开环零点 z = -25 的 $G_3(s)$ 根轨迹



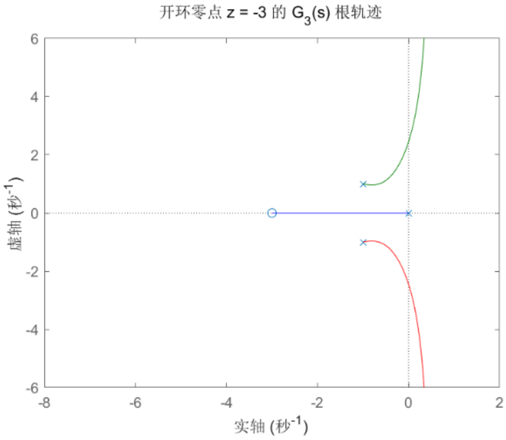

开环零点 z = -5 的 $G_3(s)$ 根轨迹



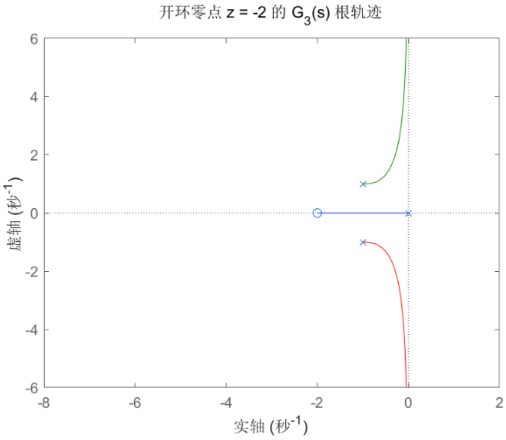

开环零点 z = -4 的 $G_3(s)$ 根轨迹



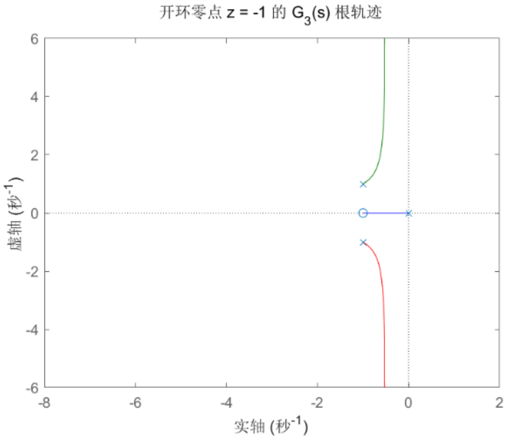

开环零点 z = -3 的 $G_3(s)$ 根轨迹

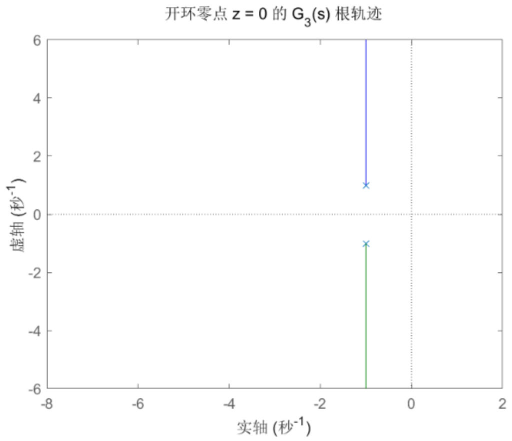



开环零点 z = -2 的 $G_3(s)$ 根轨迹




开环零点 z = -1 的 $G_3(s)$ 根轨迹

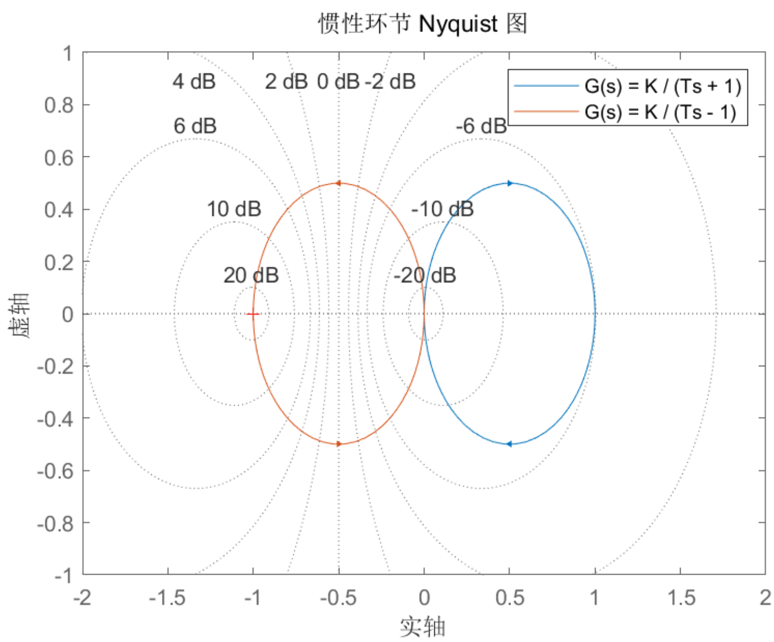





从根轨迹图的变化可以看出，当零点 $z_1$ 从$-100$ 逐渐变成 0 时，两条非实轴上的根轨迹渐近线逐渐变陡峭，直到$z_1=0$时成为两条垂直于实轴的射线。

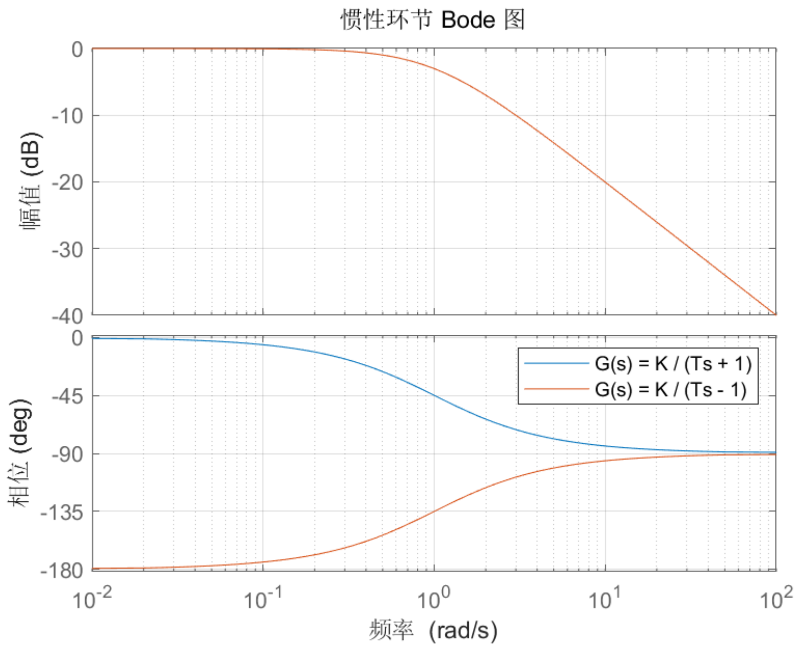
## 二、 线性系统的频率特性分析

1. 固定 $K$ 和 $T$, 在同一幅图里绘制一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$和非最小相位的惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts-1}$的 Nyquist 图，说明它们的 Nyquist 图的关系。



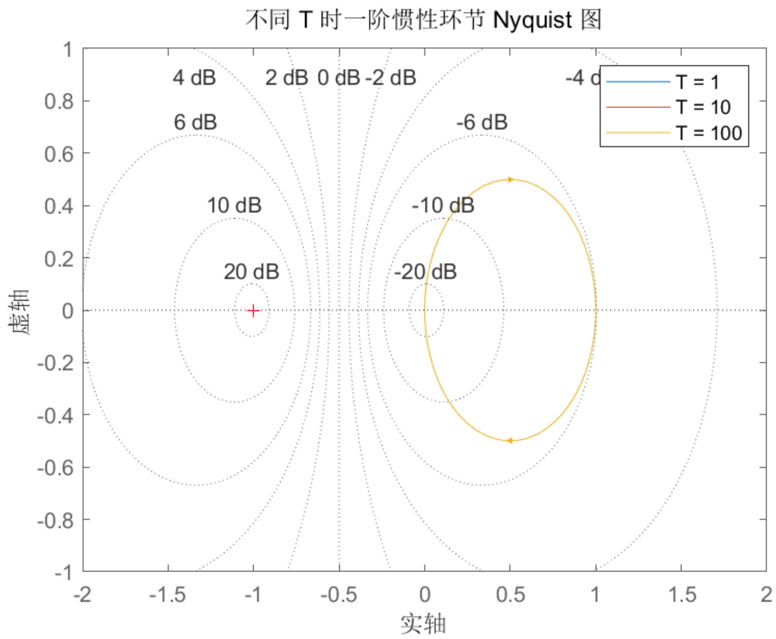

关系：Nyquist 图关于虚轴对称。

2. 固定 $K$ 和 $T$, 在同一幅图里绘制一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$和非最小相位的惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts-1}$的 Bode 图，说明它们的 Bode 图的关系。

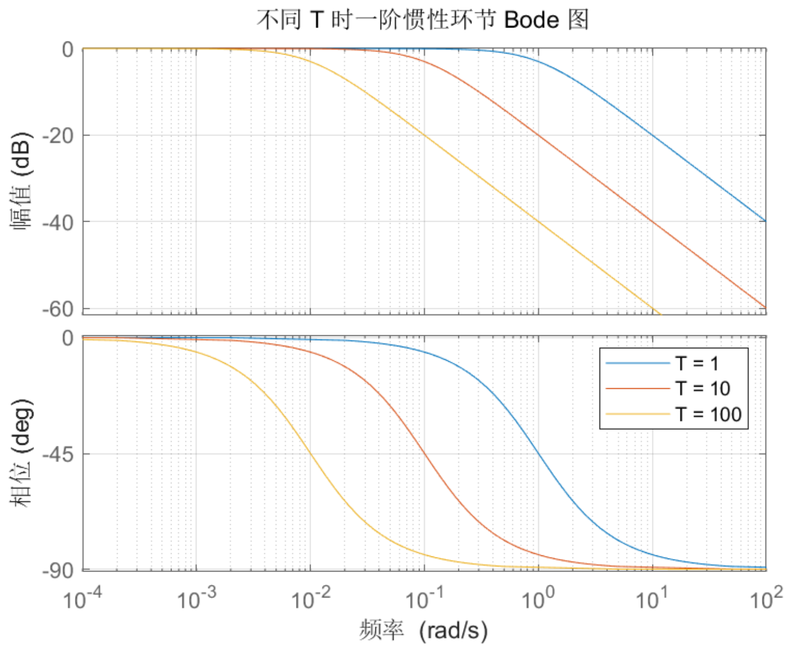



关系：二者的幅频特性相同，相频特性关于 $\varphi=-90°$ 对称。

3. 固定 $K$，分别在同一幅图绘制不同 $T$ 时一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$的 Nyquist 图和 Bode 图，分析 $T$ 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。

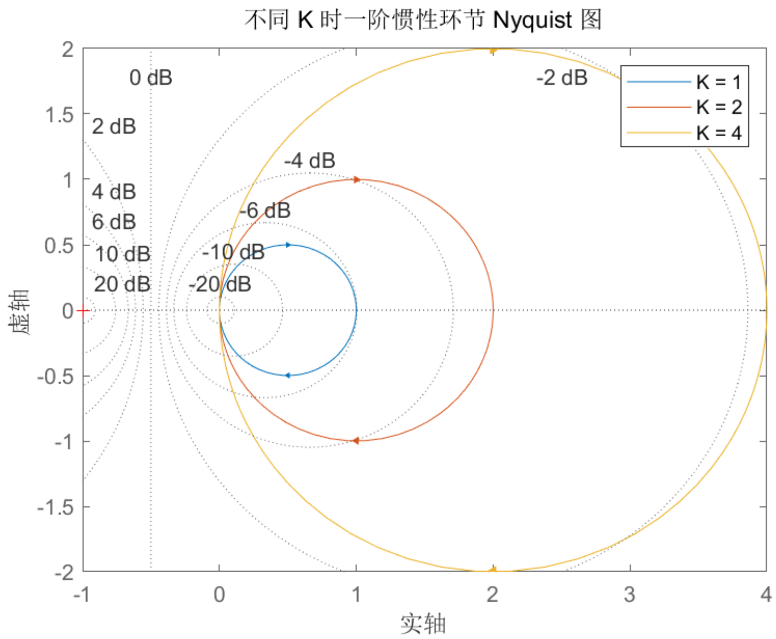



不同 $T$ 值下，一阶惯性环节的 Nyquist 图完全重合，说明 $T$ 对 Nyquist 曲线并无影响。

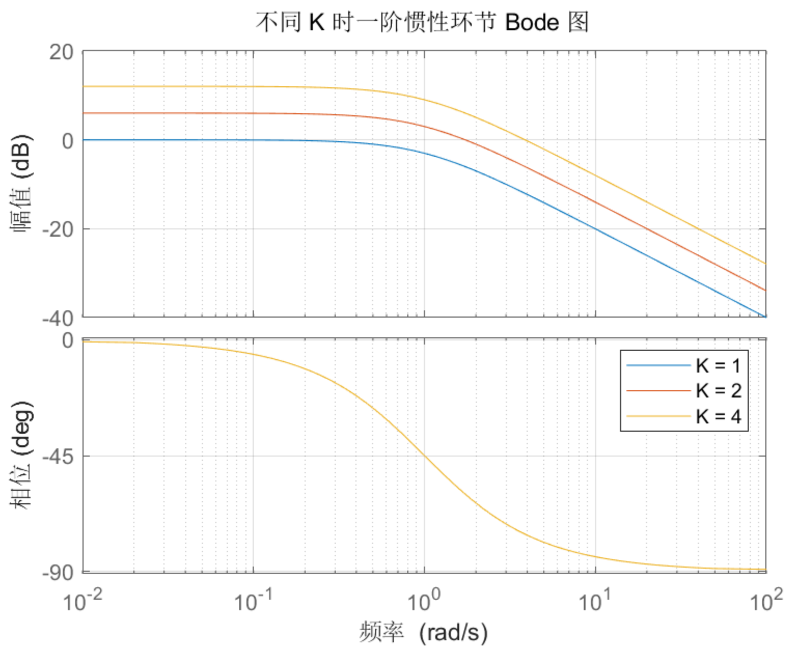



$T$ 会影响一阶惯性环节的特征频率，$T$ 越大，特征频率越小，幅频和相频特性转折发生得越早。

4. 固定 $T$，分别在同一幅图绘制不同 $K$ 时一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$的 Nyquist 图和 Bode 图，分析 $K$ 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。

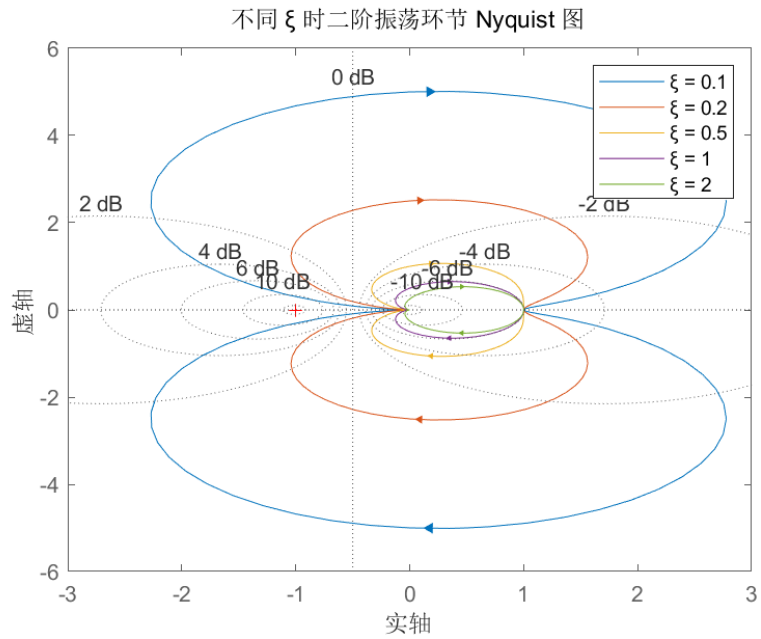



由于 $G(j0)=K$，所以 $K$ 越大，Nyquist 曲线的起点距离原点越远。但 $K$ 并不会影响幅角，因此所有曲线的形状都是圆。

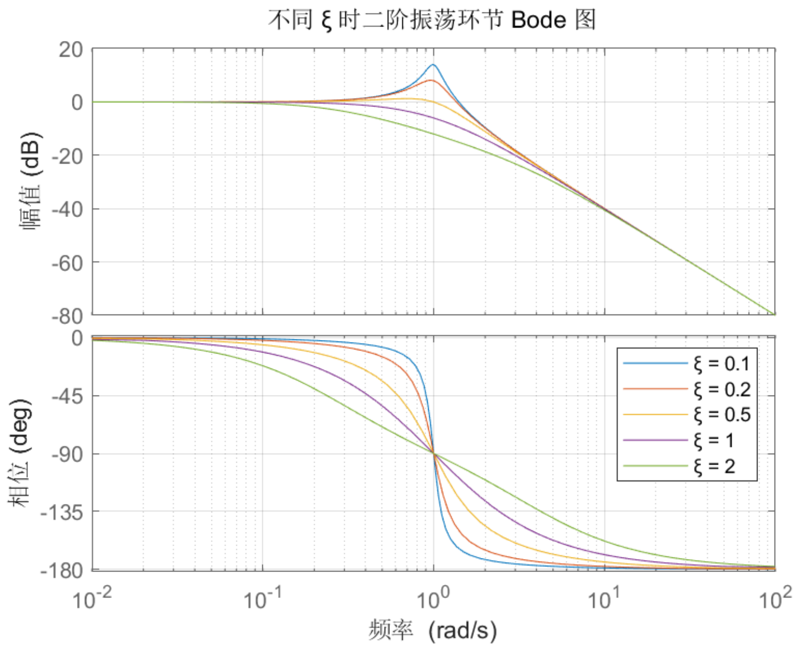



$K$ 直接影响系统的增益，所以 $K$ 增大，幅频特性曲线整体向上平移。但是相频特性不随 $K$ 变化而改变。

5. $T$ 固定，分别在同一幅图绘制不同阻尼比时二阶振荡环节 $G(s)=\frac{1}{Ts^2+2T\xi s+1}$ 的 Nyquist 图和 Bode 图，分析阻尼比的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。

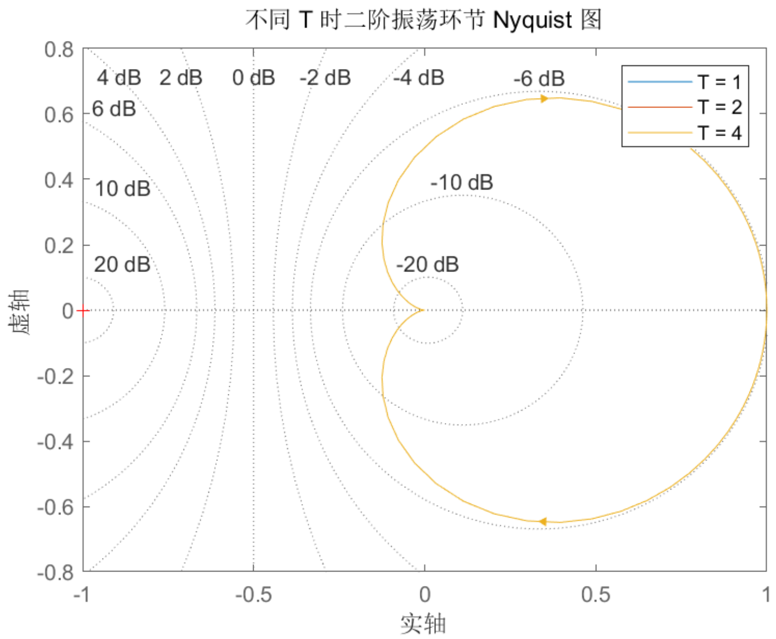



Nyquist 曲线的起点、终点位置不受阻尼比变化的影响，但是阻尼比越小，曲线整体包括的范围越大，转折点 $G(j\omega_n)=\frac{1}{2\xi}\angle-90°$ 离原点越远。

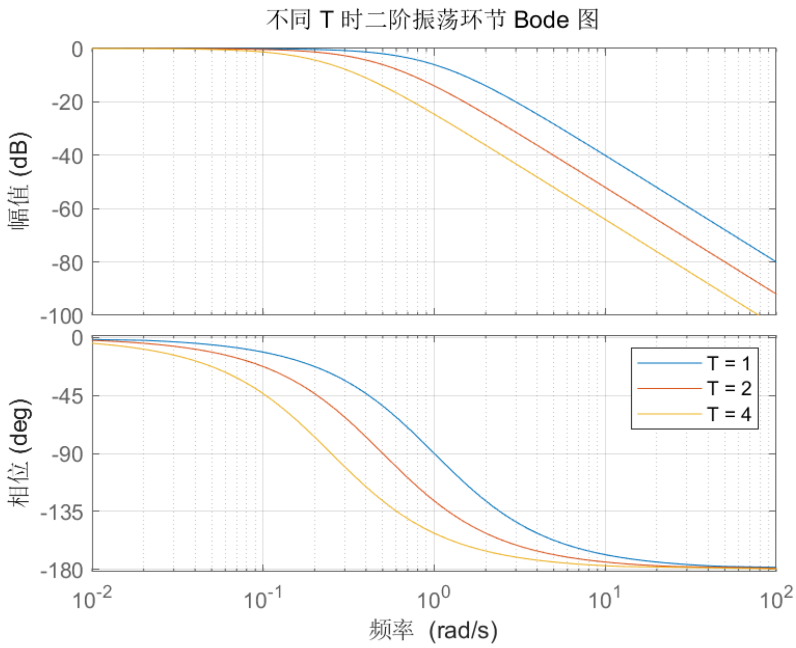



当 $\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，系统幅频特性在特征频率附近会出现极大值，对应 Bode 图上存在一个尖峰；而 $\xi>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，系统幅频特性单调递减。此外，$\xi$ 越小，相频特性在特征频率附近越陡峭。

6. 阻尼比固定，分别在同一幅图绘制不同时间常数时$G(s)=\frac{1}{Ts^2+2T\xi s+1}$的 Nyquist 图和 Bode 图，分析时间常数 $T$ 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。

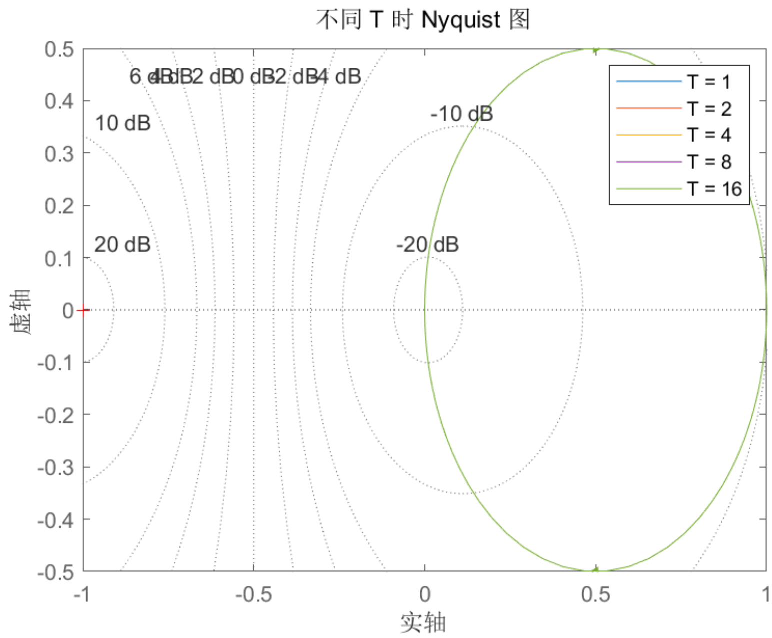



$T$ 对二阶振荡环节的 Nyquist 曲线没有影响。

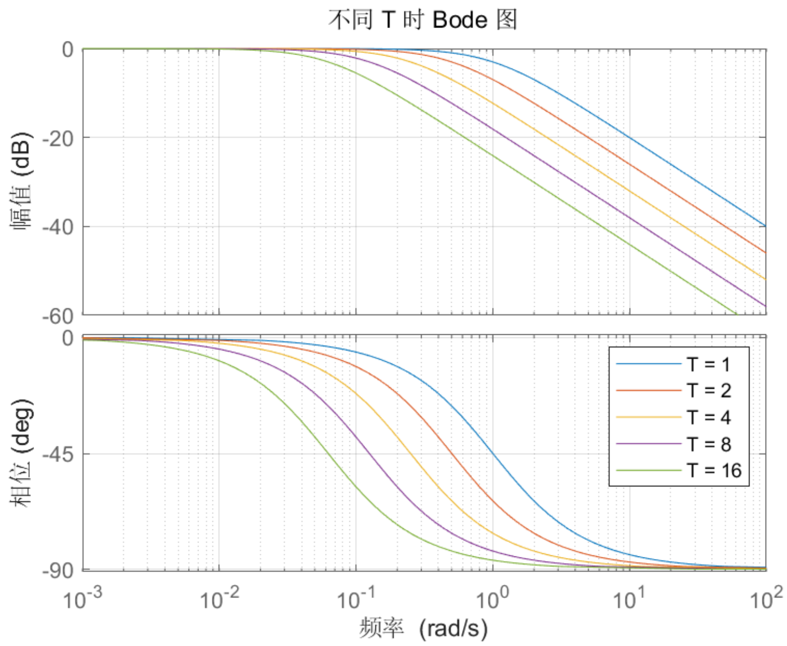



$T$ 不影响系统开环增益，所以在低频下不同 $T$ 的幅频特性大致相同。但 $T$ 越大，$\omega_n$ 越小，所以幅频和相频特性曲线越早出现转折。

7. $K$ 固定，分别在同一幅图绘制不同时间常数 $T$ 时$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$的 Nyquist 图和 Bode 图，分析时间常数 $T$ 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。

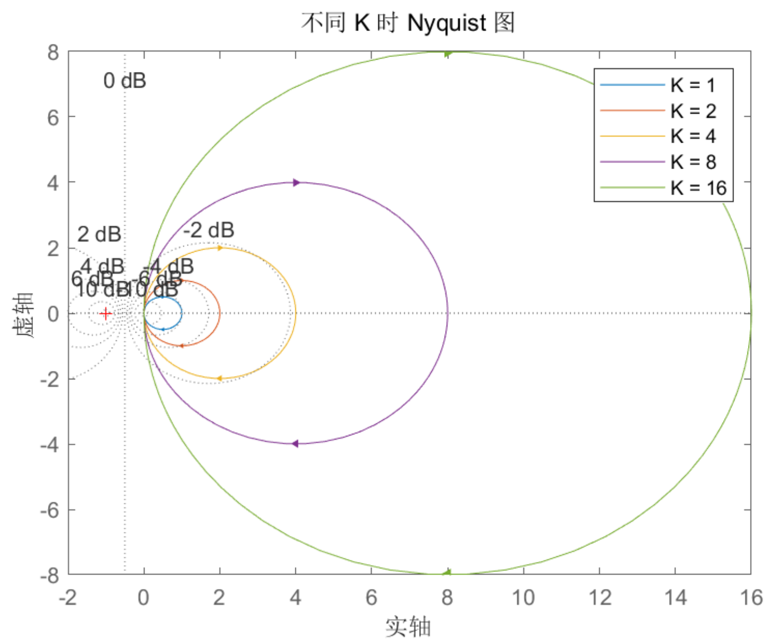



$T$ 对系统的 Nyquist 曲线无影响。

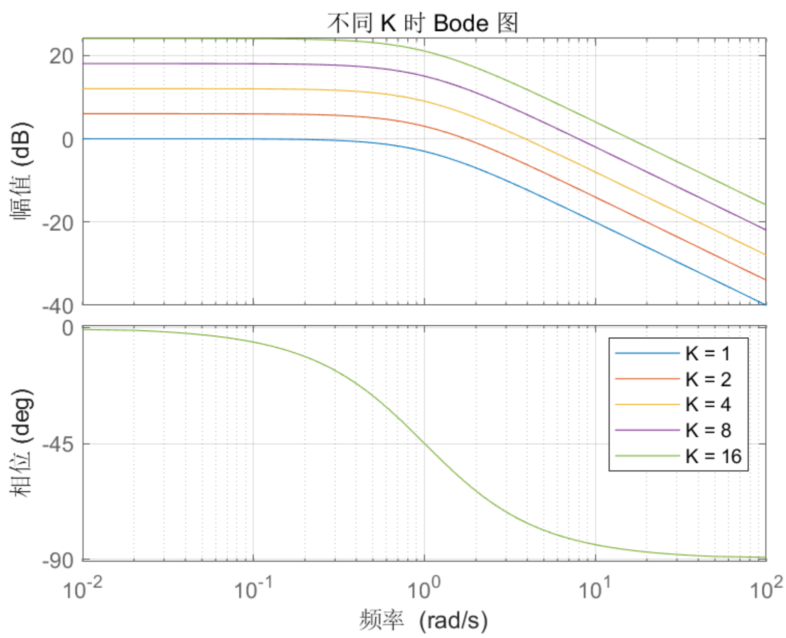



$T$ 不改变开环增益大小，但会改变系统的转折频率。$T$ 越大，系统转折频率越小，幅频特性和相频特性下降得越早。

8. $T$ 固定，分别在同一幅图绘制不同开环增益 $K$ 时$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$的 Nyquist 图和 Bode 图，分析开环增益 $K$ 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。对给定的 $K$ 和 $T$，判断单位反馈闭环系统的稳定性。




$K$ 越大，Nyquist 曲线越向正实轴方向扩张。

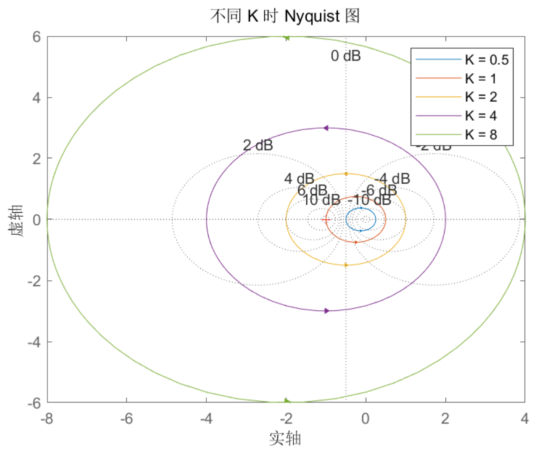


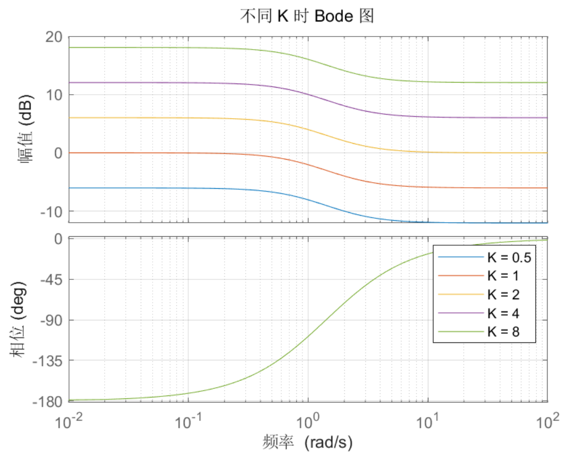

$K$ 越大，系统幅频特性曲线整体向上平移，但转折频率不改变；不同 $K$ 值下的相频特性完全相同。

由于全频段 Nyquist 曲线总是不包围 $(-1,j0)$ 点，开环右半平面极点数为 0，相频特性曲线也总是不穿过 $-180°$ 轴，所以无论 K、T 取何正值，根据 Nyquist 稳定性判据或者对数频率稳定性判据，系统总是稳定的。

9. 固定 $T$ 和 $\tau$，分别在同一幅图绘制不同 $K$ 时$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(Ts-1)}$的 Nyquist 图和 Bode 图；固定 $T$ 和 $K$，分别在同一幅图绘制不同 τ 时 $G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(Ts-1)}$的 Nyquist 图和 Bode 图。分析 $K$ 和 $\tau$ 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响，并分析单位反馈闭环系统的稳定性。特别注意 $K\tau=1$ 这一分界点。

令 $\tau=0.5$, $T=1$，不同 $K$ 值下 Nyquist 曲线和 Bode 图如下：



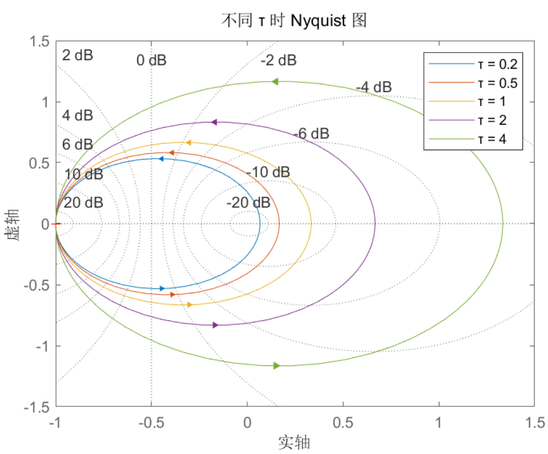



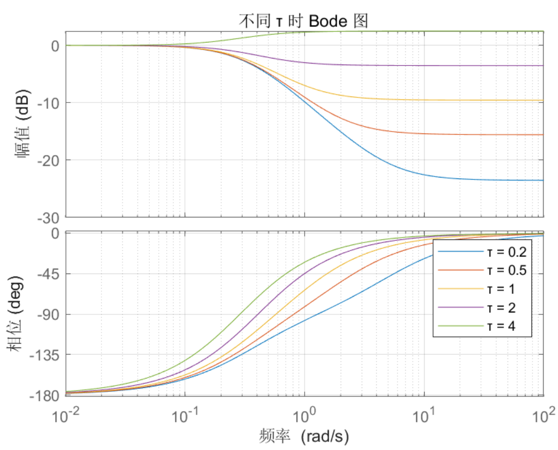

固定 $T$ 和 $\tau$，$K$ 值越大，系统的 Nyquist 曲线整体扩张，Bode 幅频特性曲线整体向上平移，相频特性不发生改变。

当 $K\tau<1$ 时，系统的全频段 Nyquist 曲线不包围 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点，且系统在右半 s 平面有一个开环极点 $p=\frac{1}{T}$，所以根据 Nyquist 稳定性判据，$Z=P-2N=1-0=1>0$，系统不稳定；

当 $K\tau>1$ 时，系统的全频段 Nyquist 曲线包围 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点 1 圈，具体而言，开环 Nyquist 曲线起始于 $(-1,\mathrm{j}0)$ 左侧，由上而下半次穿越负实轴，故 $N=\frac{1}{2}$，$Z=P-2N=1-1=0$，系统稳定。

令 $K=1$, $T=3$，不同 $\tau$ 值下 Nyquist 曲线和 Bode 图如下：




固定 $K$ 和 $T$，$\tau$ 值越大，系统的 Nyquist 曲线整体扩张，Bode 幅频特性在低频没有明显区别，但系统的高频增益随 $\tau$ 值增大而增大；$\tau$ 值越大，系统相移出现得越早。