$\boxed{3.1-1}$

Prove $\exists\ c_1, c_2 .\ \Theta(f(n)+g(n)) = \max(f(n), g(n))$

$0 \le c_1[f(n)+g(n)] \le \max(f(n), g(n)) \le c_2[f(n)+g(n)]$

Assume $\max(f(n), g(n)) = g(n)$

$0 \le c_1 f(n) + c_1 g(n) \le g(n) \le c_2 f(n) + c_2 g(n)$ } distribute

$-g(n) \le c_1 f(n) + c_1 g(n) - g(n) \le 0 \le c_2 f(n) + c_2 g(n) - g(n)$ } subtract $g(n)$

$-g(n) \le c_1 f(n) + [c_1 - 1] g(n) \le 0 \le c_2 f(n) + [c_2 - 1] g(n)$ } arithmetic

Case 1 $f(n)=0, g(n)=0$

$-0 \le c_1 \cdot 0 + [c_1 - 1] \cdot 0 \le 0 \le c_1 \cdot 0 + [c_2 - 1] \cdot 0$

$0 \le 0 + 0 \le 0 \le 0 + 0$

$0 \le 0 \le 0 \le 0$ ✓

Case 2 $f(n) > 0, g(n) = 0$

$-g(n) \le c_1 f(n) + [c_1 - 1] \cdot 0 \le 0 \le c_2 f(n) + [c_2 - 1] \cdot 0$

$-g(n) \le c_1 f(n) \le 0 \le c_2 f(n)$

Let $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

$-0 \le 0 f(n) \le 0 \le 1 \cdot f(n)$

$0 \le 0 \le 0 \le f(n)$ ✓

Case 3 $f(n) = 0, g(n) > 0$

$-g(n) \le c_1 \cdot 0 + [c_1 - 1] g(n) \le 0 \le c_2 \cdot 0 + [c_2 - 1] g(n)$

$-g(n) \le [c_1 - 1] g(n) \le 0 \le [c_2 - 1] g(n)$

Let $c_1 = 1$, $c_2 = 2$

$-g(n) \le [1-1] g(n) \le 0 \le [2-1] g(n)$

$-g(n) \le 0 \le 0 \le g(n)$ ✓

Case 4 $f(n) > 0, g(n) > 0$

Let $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

$-g(n) \le 0 \cdot f(n) + [0-1] g(n) \le 0 \le 1 \cdot f(n) + [1-1] g(n)$

$-g(n) \le -g(n) \le 0 \le f(n)$ ✓